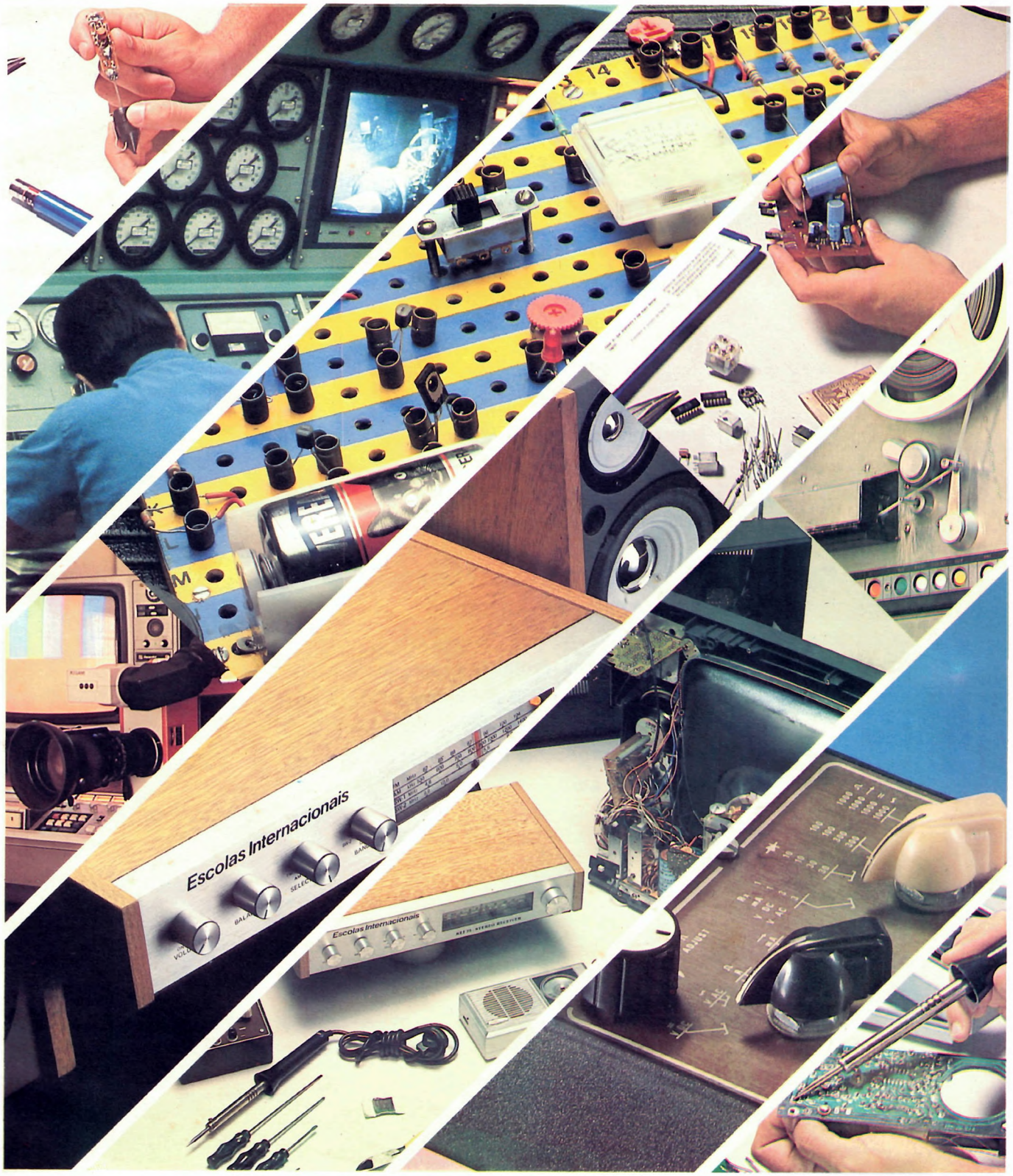
NOÇÕES DE TRIGONOMETRIA



Escolas Internacionais

Referência

018

Conteúdo didático programado e elaborado pela equipe técnico-pedagógica das Escolas Internacionais.

Supervisão geral das equipes técnica e docente de "Methodos Consultoria de Eletrônica Sociedade Civil".

Copyright
International Textbook Company
ICS — International Correspondence Schools
Scranton, Pennsylvania — USA
Copyright
Direitos exclusivos no Brasil para

ESCOLAS INTERNACIONAIS ®
São Paulo, SP — Brasil

Reservados todos os direitos. Proibida a reprodução total ou parcial do texto e das ilustrações por qualquer forma ou meio, sem prévia autorização por escrito dos detentores do copyright. Edições ou reproduções não autorizadas estarão sujeitas às penalidades da Lei.

Impresso no parque gráfico das
Escolas Internacionais do Brasil

Índice Geral

NOÇÕES DE TRIGONOMETRIA

Funções Trigonométricas

1. Aplicação prática da trigonometria 7
2. Definição de trigonometria 12
3. Funções 12
4. Funções de um ângulo 13
5. Designações para ângulos e lados do triângulo retângulo 14
6. Nomes das funções trigonométricas 15
7. Abreviaturas dos nomes das funções 16
8. Determinação de funções de ângulos de um triângulo retângulo 16
9. Representação gráfica de funções trigonométricas 19
10. Variações das funções 20

Valores de funções sem o auxílio das tábuas

11. Notas explicativas 22
12. Funções de 45° 22
13. Funções de 30° e 60° 23
14. Funções de 0° e 90° 24

Relações entre funções trigonométricas
Funções do mesmo ângulo

15. Relações recíprocas 25
16. Relações de quocientes 26
17. Relações com quadrados de funções 26
18. Relações para exprimir qualquer função em ordem a outras funções 27
19. Cálculos para confirmação 28
20. Funções de ângulos complementares 29
21. Utilização das tábuas de funções trigonométricas naturais 30
22. Cálculo típico relacionado com funções trigonométricas 31

Como se procuram funções naturais de ângulos

23. Descrição da tábua de funções naturais 31
24. Funções de ângulos inferiores a 45° que se encontram na tábua 32
25. Funções de ângulos superiores a 45° que se encontram na tábua 32
26. Características da disposição das tábuas 33
27. Interpolação 34

Cálculo de ângulos correspondentes às funções naturais

28. Funções inversas 34
29. Determinação de um ângulo correspondente à função encontrada na tábua. 35

Resolução de triângulos retângulos

30. Introdução 37
31. Fórmulas para a resolução de triângulos retângulos 37

Métodos gerais para resolver triângulos retângulos
32. Considerações práticas 39
33. Resolução de um triângulo, sendo conhecidos dois lados 39
34. Resolução de um triângulo, sendo conhecidos um lado e um ângulo agudo. 42

Problemas práticos relacionados com a resolução de triângulos retângulos
35. Variedade de problemas 43
36. Cálculo da distância vertical entre dois pontos distanciados horizontalmente de um comprimento conhecido. 44
37. Distância horizontal de um ponto escolhido a um objeto situado a uma altura conhecida 44
38. Estrutura de um telhado 45
39. Dimensões de partes de um guindaste 46
40. Relações para indicar inclinações de linhas 47

Funções de ângulos superiores a 90°
Medição de ângulos
41. explicações preliminares 49
42. Geração de um ângulo 49
43. Grandeza de um ângulo 50
44. Ângulos positivos e negativos 50
45. Quadrantes 50

Triângulos retângulos para a determinação de funções de ângulos superiores a 90°
46. Posições dos triângulos retângulos empregados 51
47. Funções positivas e negativas 53

Fórmulas gerais para funções de ângulos maiores que 90°
48. Sinais das funções 54
49. Funções de ângulos entre 90° e 180° 55
50. Funções de ângulos entre 180° e 270° 58
51. Funções de ângulos entre 270° e 360° 59
52. Como se acha um ângulo maior que 90° a partir da função 60
53. Funções de ângulos negativos 62
Exame 63

Funções Trigonométricas

1. Aplicação Prática da Trigonometria

A trigonometria é a parte da matemática mais usada na resolução de problemas de Engenharia e Astronomia, sendo de especial importância o seu emprego nos levantamentos topográficos.

Como aplicação prática da trigonometria dentro da topografia, podemos considerar o exemplo que se segue.

Na figura 1, ***A*** e ***B*** são dois pontos na margem de um rio amplo e ***C*** um alvo na margem oposta. Pretende-se determinar as distâncias ***AC*** e ***BC.***

Se a distância AB e os ângulos BAC e ABC forem medidos com instrumentos apropriados, poderemos calcular as distâncias ***AC*** e ***BC*** por meio da ***trigonometria.***

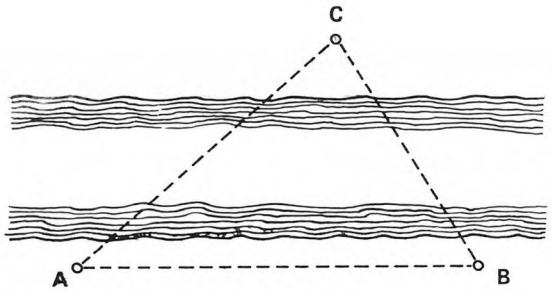


Fig. 1

No estudo sobre Eletrônica, também há necessidade de conhecimentos de trigonometria para poder executar cálculos de funções eletrônicas, pois as várias fases de voltagens e correntes formam ângulos entre si.

Antes de iniciarmos as explicações sobre as funções trigonométricas, você deve saber algumas noções importantes sobre ângulos, triângulos e círculos.

Ângulos

Ângulo é a figura constituída por duas semi-retas de mesma origem. As duas semi-retas chamam-se ***lados*** e o ponto de origem chama-se ***vértice*** do ângulo.

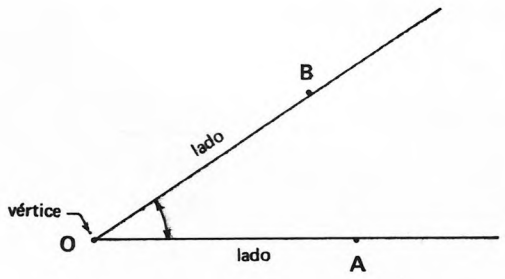


Fig. 2

Ângulo AOB
indica-se: $A\hat{O}B$
vértice: o ponto O
lados: $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$

Medidas do ângulo

Um ângulo é medido pela maior ou menor abertura de seus lados.

Ângulo reto

É ângulo reto quando os lados são perpendiculares. A medida de um ângulo reto é 90°.

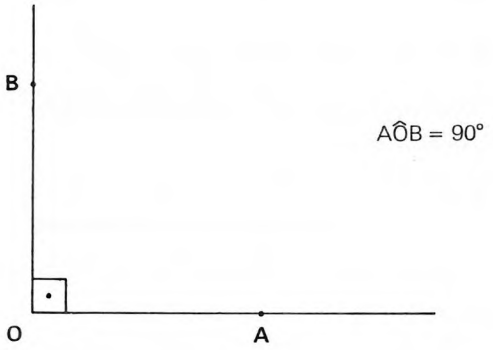


Fig. 3

Ângulo agudo

É ângulo agudo quando a abertura do ângulo é menor que a abertura do ângulo reto.

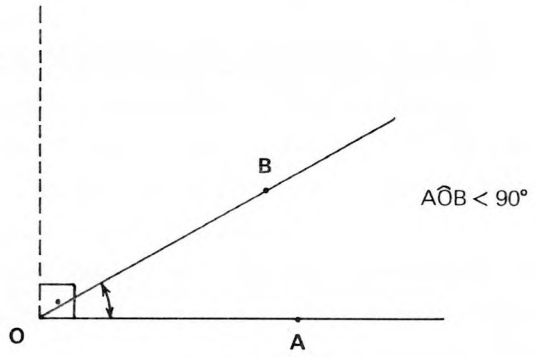


Fig. 4

Ângulo obtuso

É ângulo obtuso quando a abertura do ângulo é maior que a abertura do ângulo reto.

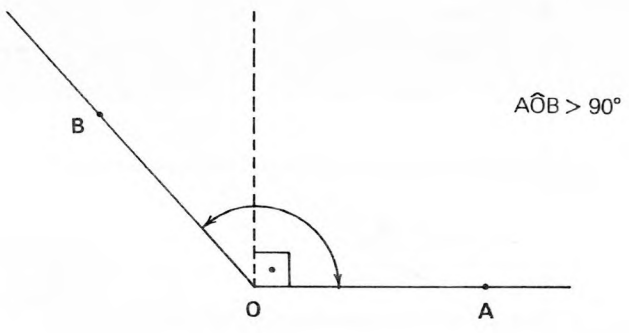


Fig. 5

Direitos reservados

O ***transferidor*** é o instrumento usado para medir um ângulo, que tem o ***grau*** como unidade principal.
Um grau (1°) corresponde a $\frac{1}{360}$ de uma circunferência, ou seja, dividindo-se uma circunferência em 360 partes, temos que 1° corresponde a um ângulo cuja medida equivale a uma dessas partes.

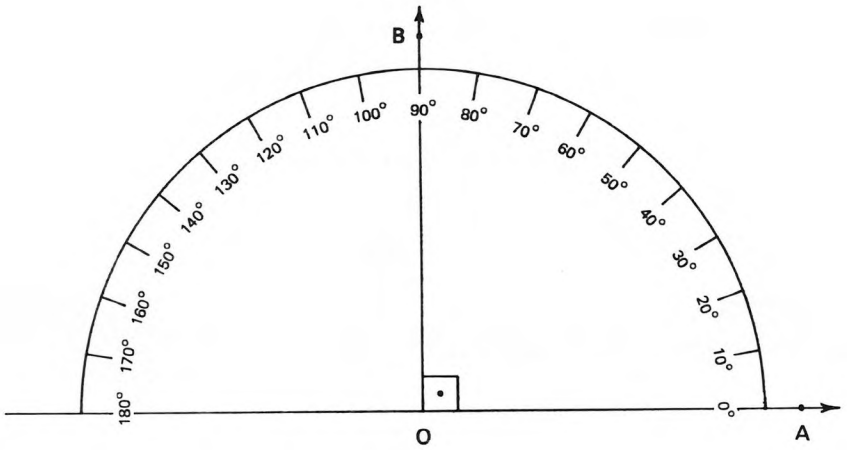


Fig. 6

Observe:
A medida do ângulo $A\hat{O}B$ é 90° e indica-se $(A\hat{O}B) = 90°$
Existem outros instrumentos que medem os ângulos com maior precisão, isto é, medem os ângulos em graus e em seus submúltiplos: minutos e segundos.
Um ***minuto*** é $\frac{1}{60}$ do grau, ou seja, 1 grau tem 60 minutos.
Indica-se: $1° = 60'$
Um ***segundo*** é $\frac{1}{60}$ do minuto, ou seja, 1 minuto tem 60 segundos.
Indica-se: $1' = 60''$

Triângulo

Triângulo é um polígono de 3 lados.

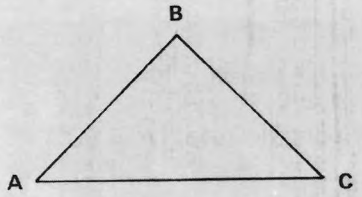


Fig. 7

Triângulo ABC
Vértices: os pontos A, B, C.
Lados: AB, AC, BC.
Os triângulos podem ser classificados quanto aos ***lados*** e quanto aos ***ângulos.***

Direitos reservados

a) Quanto aos lados

Triângulo Equilátero

É equilátero porque tem os três lados iguais. ($\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$)

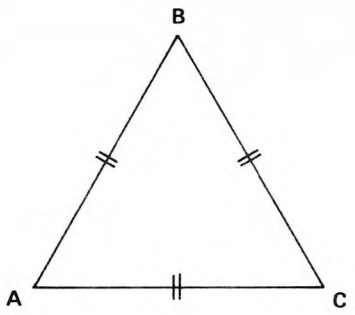


Fig. 8

Triângulo Isósceles

É isósceles porque tem dois lados iguais. ($\overline{AB} = \overline{BC}$)

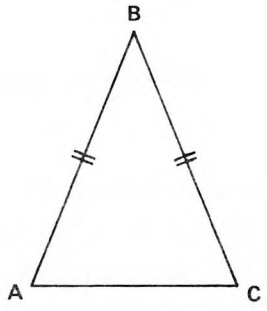


Fig. 9

Triângulo Escaleno

É escaleno porque tem os três lados diferentes. ($\overline{AB} \neq \overline{AC} \neq \overline{BC}$)

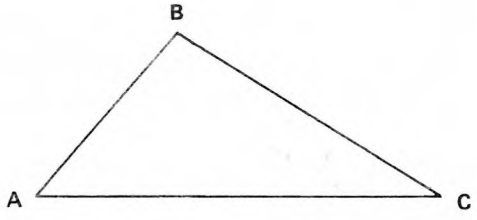


Fig. 10

b) Quanto aos ângulos

Triângulo Retângulo

O triângulo retângulo tem um ângulo reto. ($\hat{A} = 90°$)

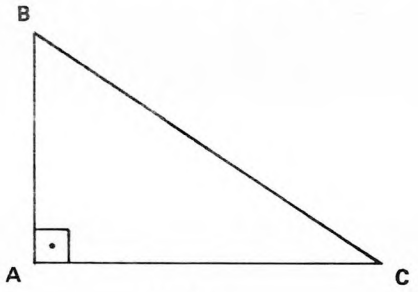


Fig. 11

Nos triângulos retângulos os lados têm nomes especiais. O lado maior chama-se ***hipotenusa*** e os outros dois chamam-se ***catetos.***

Triângulo Acutângulo

O triângulo acutângulo tem os três ângulos agudos. ($\hat{A}, \hat{B}, \hat{C} < 90°$)

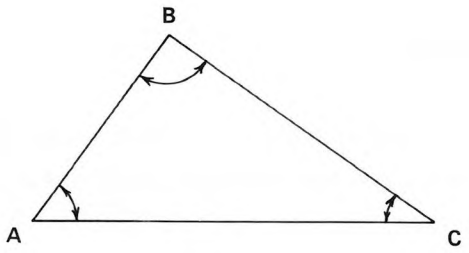


Fig. 12

Triângulo Obtusângulo

O triângulo obtusângulo tem um ângulo obtuso. ($\hat{A} > 90°$)

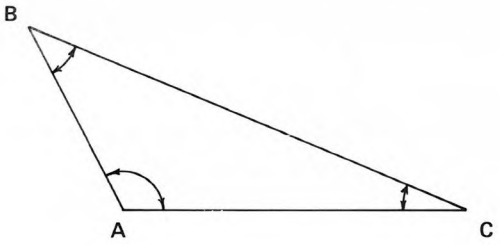


Fig. 13

Círculo

Chama-se ***circunferência*** a uma linha curva plana e fechada, cujos pontos são equidistantes de um ponto interior, chamado ***centro.***
Círculo é a parte do plano contida na circunferência.

Raio é todo o segmento de reta que une o centro com a circunferência.
Corda é todo o segmento que une dois pontos da circunferência.
Diâmetro é a corda que passa pelo centro da circunferência.
Observe estas noções nas figuras seguintes.

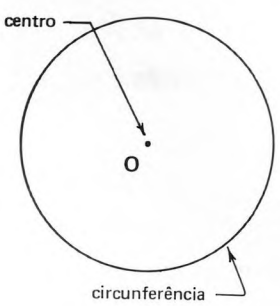


Fig. 14

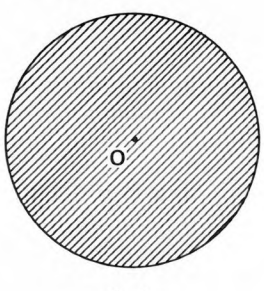


Fig. 15

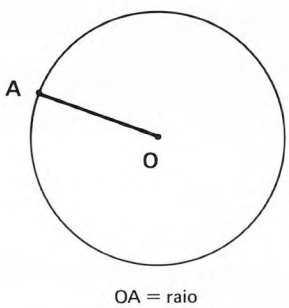
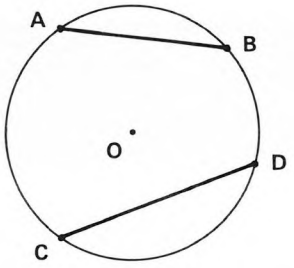


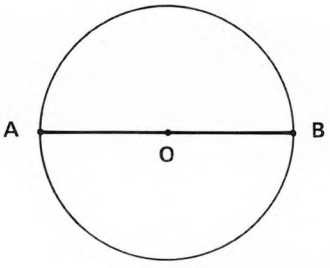
Fig. 16

Direitos reservados



AB = corda
CD = corda

Fig. 17



AB = diâmetro

Fig. 18

2. Definição de Trigonometria

Em todo triângulo existem sempre seis partes: três lados e três ângulos. Conhecendo-se três partes, desde que uma delas seja um lado, podemos calcular as três restantes. A trigonometria estabelece esses cálculos que são baseados em determinadas relações existentes entre os ângulos e os lados de um triângulo.

A trigonometria pode ser definida como a parte da matemática que se ocupa das relações entre os ângulos e os lados de um triângulo e da aplicação dessas relações na resolução de triângulos.

O termo *"trigonometria"* é derivado de duas palavras gregas que significam *"medida de triângulos"*.

3. Funções

Quando uma quantidade variável x está de tal modo relacionada com outra quantidade variável y que, para qualquer valor de x, se verifica uma correspondente alteração no valor de y, a esta quantidade de y podemos chamar ***função*** da quantidade de x.

Por exemplo:

A área de um retângulo é função de seus lados, pois para qualquer alteração de seus lados surge uma alteração correspondente em sua área.

Vamos tomar como base um retângulo, cujo comprimento mede 6 metros e a sua largura 4. A área deste retângulo é $6 \times 4 = 24\ m^2$.

Se duplicarmos a sua largura de 4 para 8, quer dizer duas vezes maior, então a sua área também ficará duas vezes maior:

$$6 \times 8 = 48\ m^2$$

Uma quantidade variável pode ter mais do que uma função. Assim, pode haver uma relação entre as quantidades variáveis x e y e outra entre as quantidades x e z. As quantidades y e z são, então, funções diferentes de x.

Direitos reservados

4. Funções de um Ângulo

Nos cálculos trigonométricos ***as funções de um ângulo são muito mais usadas do que o próprio ângulo.***

O significado das funções trigonométricas de um ângulo poderá ser verificado através da figura 19.

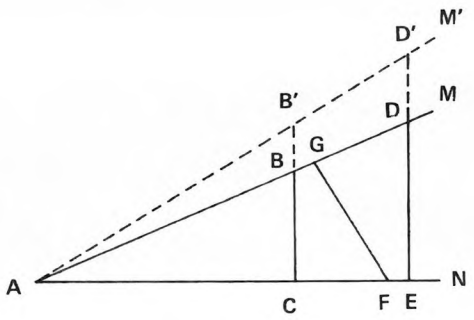


Fig. 19

As retas ***AM*** e ***AN*** são os lados de um ângulo, cujo vértice é A. Se, de qualquer ponto B no lado AM for traçada a linha BC perpendicular ao outro lado AN, teremos o triângulo retângulo ABC. Da mesma forma, se for traçada qualquer outra linha DE perpendicular a AN, obteremos outro triângulo retângulo ADE. Os triângulos ABC e ADE são semelhantes, porque possuem um ângulo agudo comum: $M\hat{A}N$. Portanto, os seus lados são proporcionais. Então, teremos:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{DE}{AE}$$

Ora, se ***BC*** tiver a metade do comprimento de AC, então DE deverá ser a metade de AE. Em outras palavras, a relação entre o cateto oposto ao vértice A e o outro cateto é a mesma nos triângulos ABC e ADE.

Se for traçada uma perpendicular de qualquer ponto F no lado AN ao outro lado AM, o triângulo AFG será semelhante ao triângulo ABC, porque os dois triângulos retângulos têm um ângulo agudo comum: $M\hat{A}N$. Conseqüentemente, os seus lados serão proporcionais, e então teremos:

$$\frac{FG}{AG} = \frac{BC}{AC} = \frac{DE}{AE}$$

Da mesma forma, em qualquer triângulo retângulo formado pelo traçado de uma perpendicular de um lado ao outro do ângulo MAN, a relação entre o cateto oposto ao vértice A e o outro cateto é a mesma. Esta relação é função do ângulo MAN, pois depende da medida desse ângulo.

Para outro ângulo qualquer, como $M'\hat{A}N$, a relação $\frac{B'C}{AC}$ ou $\frac{D'E}{AE}$ será diferente da relação $\frac{BC}{AC}$.

Existem relações semelhantes entre os outros lados de um triângulo retângulo, no qual $M\hat{A}N$ é um ângulo agudo. Assim, $\frac{BC}{AB} = \frac{DE}{AD} = \frac{FG}{AF}$ Isto quer dizer que a relação entre o ***cateto oposto*** ao vértice A e a ***hipotenusa*** é a mesma nos triângulos ABC, ADE e AFG. Daí, esta relação é também função do ângulo MAN. Do mesmo modo, $\frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD} = \frac{AG}{AF}$. Isto quer dizer que a relação entre o ***cateto adjacente*** ao vértice A e a ***hipotenusa*** é outra função do ângulo MAN.

Todas essas relações são ***funções do ângulo*** ($M\hat{A}N$) e são conhecidas por ***funções trigonométricas.***

Direitos reservados

5. Designações para Ângulos e Lados do Triângulo Retângulo

Num triângulo retângulo, a relação existente entre um ângulo agudo e dois lados quaisquer é função deste ângulo.

Na figura 20, temos o triângulo retângulo ABC, que foi formado traçando-se uma perpendicular do ponto B e ao lado AN.

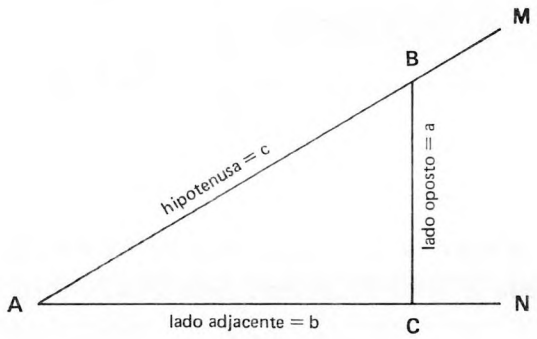


Fig. 20

Como um triângulo tem três lados e pode-se estabelecer duas relações para cada par de lados, existem então seis relações possíveis entre os lados de um triângulo.
Neste triângulo retângulo ABC, da figura 20, o ângulo A é determinado por qualquer uma das seguintes funções:

$$\frac{BC}{AB}, \frac{AC}{AB}, \frac{BC}{AC}, \frac{AC}{BC}, \frac{AB}{AC}, \frac{AB}{BC}$$

Como cada ângulo de um triângulo tem um número diferente de funções trigonométricas, é necessário, ao mencionar qualquer função de um ângulo, indicar as posições relativas dos lados utilizados na relação apresentada.
Para facilitar a referência das diferentes partes de um triângulo, designamos cada ângulo por uma letra maiúscula colocada em seu vértice. E para os lados colocamos uma letra minúscula correspondente à letra do vértice.
Observe o triângulo ABC da figura 20, onde os ângulos estão marcados com as letras maiúsculas *A*, *B* e *C*. E do mesmo modo, o lado oposto ao vértice do ângulo A apresenta a letra *a*, o lado oposto ao ângulo B a letra *b* e o lado oposto ao ângulo C a letra *c*.
Quando definimos as funções de um ângulo, devemos fazer referência aos três lados do triângulo retângulo contendo o ângulo, pelas suas posições com relação a esse ângulo.

No triângulo ABC da figura 20, o ângulo A tem o lado ***a*** oposto ao vértice desse ângulo, por isso chama-se ***lado oposto.*** O lado ***b*** é o ***lado adjacente*** a esse vértice. E o lado ***c*** é a ***hipotenusa.*** Mas na prática,dizemos sempre que o lado é oposto ou adjacente ao ***ângulo,*** e não ao vértice do ângulo.

Por exemplo, a função $\frac{BC}{AB}$ ou $\frac{a}{c}$ do ângulo A é a relação entre o ***lado oposto*** e a ***hipotenusa.***

A função $\frac{b}{c}$ do ângulo A é a relação entre o ***lado adjacente*** e a ***hipotenusa.***

6. Nomes das Funções Trigonométricas

Cada uma das funções trigonométricas de um ângulo tem um nome específico.

Em qualquer triângulo retângulo, a relação entre o lado oposto ao ângulo e a hipotenusa chama-se ***seno do ângulo.***

Por exemplo, na figura 20, o ***seno*** do ângulo A é igual à relação $\frac{a}{c}$.

O ***cosseno do ângulo*** é a relação entre o lado adjacente e a hipotenusa.

Por exemplo, na figura 20, o ***cosseno*** do ângulo A é igual a $\frac{b}{c}$.

A relação entre o lado oposto e o lado adjacente chama-se ***tangente do ângulo.***

Por exemplo, na figura 20, a tangente do ângulo A é igual a $\frac{a}{b}$.

A relação entre o lado adjacente e o lado oposto tem o nome de ***cotangente do ângulo.***

Por exemplo, na figura 20, a cotangente do ângulo A é igual a $\frac{b}{a}$.

A relação entre a hipotenusa e o lado adjacente é chamada de ***secante do ângulo.***

Por exemplo, na figura 20, a secante do ângulo A é igual a $\frac{c}{b}$.

Cossecante de um ângulo é a relação entre a hipotenusa e o lado oposto.

Por exemplo, na figura 20, a cossecante do ângulo A é igual a $\frac{c}{a}$.
Podemos então, resumir estas seis funções trigonométricas assim:

$$\text{seno} = \frac{\text{lado oposto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \text{cosseno} = \frac{\text{lado adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tangente} = \frac{\text{lado oposto}}{\text{lado adjacente}} \qquad \text{cotangente} = \frac{\text{lado adjacente}}{\text{lado oposto}}$$

$$\text{secante} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{lado adjacente}} \qquad \text{cossecante} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{lado oposto}}$$

Direitos reservados

7. Abreviaturas dos Nomes das Funções

Para facilitar o trabalho, os nomes das funções são abreviados da seguinte forma:

seno = sen
cosseno = cos
tangente = tg
cotangente = cotg
secante = sec
cossecante = cosec

Portanto, sen 26° representa o seno de 26°
cos 15° representa o cosseno de 15°, etc.

Observe agora, um resumo dos nomes das seis funções do ângulo A da figura 20, as suas abreviaturas e as relações a que são iguais:

Função	*Abreviatura*	*Relação*
Seno de A	senA	$\frac{\text{lado oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$
cosseno de A	cos A	$\frac{\text{lado adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$
Tangente de A	tg A	$\frac{\text{lado oposto}}{\text{lado adjacente}} = \frac{a}{b}$
Cotangente de A	cotg A	$\frac{\text{lado adjacente}}{\text{lado oposto}} = \frac{b}{a}$
Secante de A	sec A	$\frac{\text{hipotenusa}}{\text{lado adjacente}} = \frac{c}{b}$
Cossecante de A	cosec A	$\frac{\text{hipotenusa}}{\text{lado oposto}} = \frac{c}{a}$

8. Determinação de Funções de Ângulos de um Triângulo Retângulo

As funções de qualquer um dos ***ângulos agudos*** de um triângulo retângulo podem ser determinadas a partir dos ***lados*** do triângulo.

Portanto, na figura 21, podemos utilizar os lados do triângulo ABC para a determinação das funções do ângulo A e as do ângulo B.

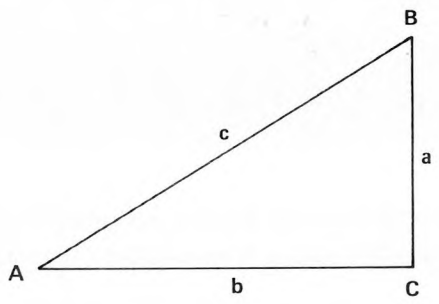


Fig. 21

Com relação ao ângulo A, o lado oposto é ***a,*** o lado adjacente é ***b*** e a hipotenusa é ***c.*** Então, as funções do ângulo A são:

sen A $= \frac{a}{c}$ cos A $= \frac{b}{c}$ tg A $= \frac{a}{b}$ cotg A $= \frac{b}{a}$ sec A $= \frac{c}{b}$ cosec A $= \frac{c}{a}$

Com relação ao ângulo B, o lado oposto é ***b*** e o lado adjacente é ***a.*** Logo, as suas funções são as seguintes:

sen B $= \frac{b}{c}$ cos B $= \frac{a}{c}$ tg B $= \frac{b}{a}$ cotg B $= \frac{a}{b}$ sec B $= \frac{c}{a}$ cosec B $= \frac{c}{b}$

Direitos reservados

Como cada função de um ângulo é uma relação entre os comprimentos de duas linhas, podemos exprimi-las como uma fração. Na prática, constuma-se exprimir cada função como o número decimal igual ao quociente obtido pela divisão do numerador pelo denominador da fração.

Observe a seguir, alguns exemplos com o método de calcular as funções de um ângulo agudo.

Exemplo 1

Como a figura 22 mostra, os comprimentos dos três lados de um triângulo retângulo. ABC são, respectivamente, AB = 10 m, AC = 8 m e BC = 6 m:

Calcular os valores de:

a) As seis funções comuns do ângulo A

b) As seis funções do ângulo B.

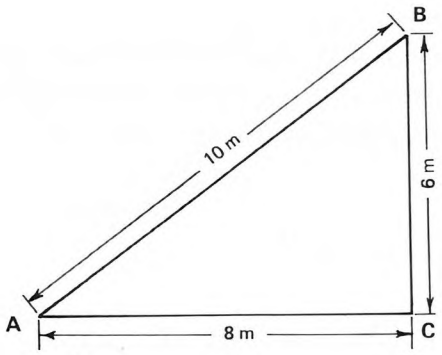


Fig. 22

Solução

a) As funções do ângulo A são as seguintes:

$\text{sen A} = \frac{\text{lado oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{BC}{AB} = \frac{6}{10} = 0{,}6$

$\cos A = \frac{\text{lado adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{AC}{AB} = \frac{8}{10} = 0{,}8$

$\text{tg A} = \frac{\text{lado oposto}}{\text{lado adjacente}} = \frac{BC}{AC} = \frac{6}{8} = 0{,}75$

$\text{cotg A} = \frac{\text{lado adjacente}}{\text{lado oposto}} = \frac{AC}{BC} = \frac{8}{6} = 1{,}3333$

$\sec A = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{lado adjacente}} = \frac{AB}{AC} = \frac{10}{8} = 1{,}25$

$\text{cosec A} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{lado oposto}} = \frac{AB}{BC} = \frac{10}{6} = 1{,}6667$

Os valores de cotg A e cosec A são expressos até quatro casas decimais.

b) As funções do ângulo B acham-se da seguinte maneira:

$\text{sen B} = \frac{AC}{AB} = \frac{8}{10} = 0{,}8$

$\cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{6}{10} = 0{,}6$

$\text{tg B} = \frac{AC}{BC} = \frac{8}{6} = 1{,}3333$

$\text{cotg B} = \frac{BC}{AC} = \frac{6}{8} = 0{,}75$

$\sec B = \frac{AB}{BC} = \frac{10}{6} = 1{,}6667$

$\text{cosec B} = \frac{AB}{AC} = \frac{10}{8} = 1{,}25$

Exemplo 2

No triângulo ABC da figura 23, a hipotenusa ***c*** mede 12 metros e o lado ***b*** 9 metros.

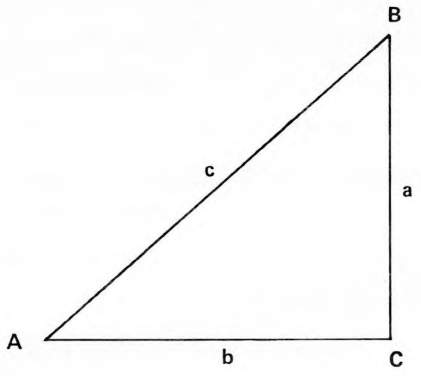


Fig. 23

Calcular:

a) O seno e a tangente do ângulo A.

b) O seno e a tangente do ângulo B.

Solução

a) Como o sen A = $\frac{a}{c}$ e a tg A = $\frac{a}{b}$, temos em primeiro lugar a necessidade de calcular o comprimento do lado ***a***, aplicando o princípio dos triângulos retângulos (Teorema de Pitágoras). Portanto, a = $\sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{12^2 - 9^2} = 7{,}9372$ m.

E, em seguida:

sen A = $\frac{7{,}9372}{12} = 0{,}6614$

tg A = $\frac{7{,}9372}{9} = 0{,}8819$

b) Do mesmo modo:

sen B = $\frac{b}{c} = \frac{9}{12} = 0{,}75$

tg B = $\frac{b}{a} = \frac{9}{7{,}9372} = 1{,}1339$

EXERCÍCIOS

1. No triângulo retângulo, ABC, ao lado, temos:

   a = 13,2 m;

   b = 18,7 m e

   c = 22,9 m.

   Calcular, com aproximação de quatro casas decimais, os valores de:

   a) sen A b) tg A c) sen B d) sec B.

   Resultados:

   a) 0,5764 b) 0,7059 c) 0,8166 d) 1,7348

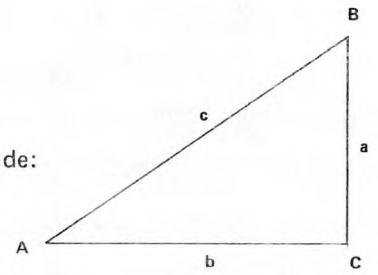


Fig. 24

2. Duas linhas AM e AN, interceptam-se em A.

   Uma perpendicular ao lado AN de um ponto em AM mede 12,5 cm. E a distância do ponto A ao ponto onde a perpendicular se encontra com AN, é de 7,75 cm.

   Faça o desenho e ache por cálculo:

   a) a distância ao longo de AM do ponto A à perpendicular;

   b) o seno do ângulo MAN;

   c) a tangente desse ângulo.

   Resultados:

   a) 14,708 cm b) 0,8499 c) 1,6129.

3. Num triângulo retângulo com o ângulo agudo X, a hipotenusa mede 20 cm e o lado adjacente ao ângulo X mede 12 cm.
Calcule os valores de:
a) sen X b) tg X c) cos X.

Resultados:
a) 0,8 b) 1,3333 c) 0,6

9. Representação Gráfica de Funções Trigonométricas

As diversas funções trigonométricas podem ser indicadas por linhas. Na verdade, cada função trigonométrica é uma fração, expressando a relação entre duas linhas.

Porém, se o denominador da fração for a unidade, a função poderá ser expressa apenas pelo numerador.

A figura 25 nos mostra as várias funções de um ângulo agudo ***"a"*** que são indicadas por linhas.

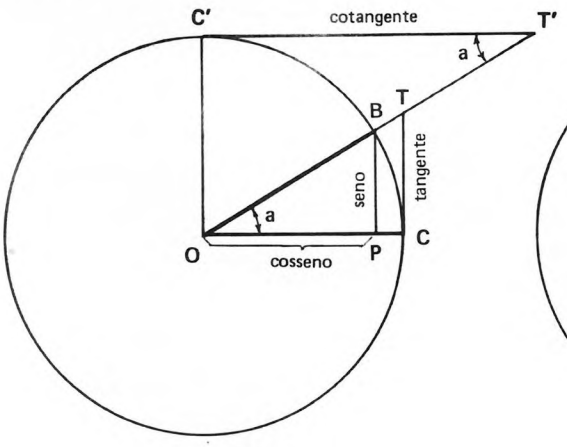


Fig. 25 (a)

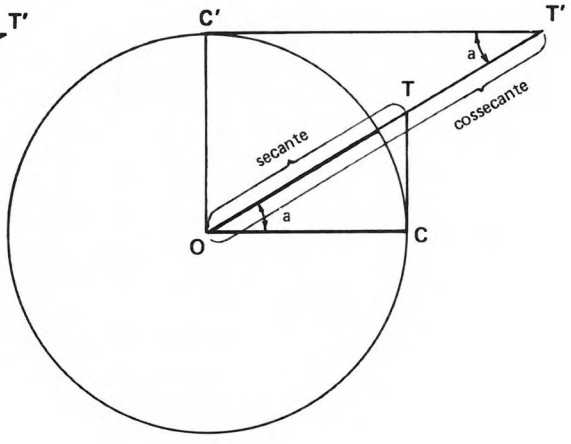


Fig. 25 (b)

Este diagrama é construído da seguinte forma:
Fazendo centro no vértice O do ângulo ***a***, traça-se um círculo de ***raio igual à unidade,*** que intercepta os lados do ângulo nos pontos B e C. O comprimento de cada uma das linhas OB e OC é a unidade.
A seguir, traça-se a tangente CT que se encontra com o prolongamento da linha OB em T.
É também necessário traçar as seguintes linhas: o raio OC', que é perpendicular a OC e cujo comprimento também é a unidade; a linha BP, perpendicular a OC; e a tangente C'T' que se encontra com o prolongamento da linha OB em T'.
Observe, agora, que as várias linhas indicadas no diagrama representam as respectivas funções.
No triângulo OPB, temos que:

$$\text{sen } a = \frac{PB}{OB} \qquad \text{e} \qquad \cos a = \frac{OP}{OB}$$

Porém, como OB é igual à unidade, concluímos que:

$$\text{sen } a = \frac{PB}{1} \qquad \text{e} \qquad \cos a = \frac{OP}{1}$$

$$\text{sen } a = PB \qquad \text{e} \qquad \cos a = OP$$

Direitos reservados

No triângulo OCT, temos que:

$tg\ a = \frac{CT}{OC}$ e $sec\ a = \frac{OT}{OC}$

Mas como OC = 1, concluímos que:

$tg\ a = CT$ e $sec\ a = OT$

Como as linhas OC e C'T' são ambas perpendiculares ao raio OC', são paralelas entre si. Portanto, os ângulos OT'C' e COT são iguais, por serem alternos-internos de paralelas.
No triângulo C'OT, temos que:

$cotg\ a = \frac{C'T'}{OC'}$ e $cosec\ a = \frac{OT'}{OC'}$

Mas, como OC' = 1, concluímos que:

$cotg\ a = C'T'$ e $cosec\ a = OT'$

10. Variações das Funções

Na figura 26 podemos observar como cada função trigonométrica varia conforme a variação do ângulo.

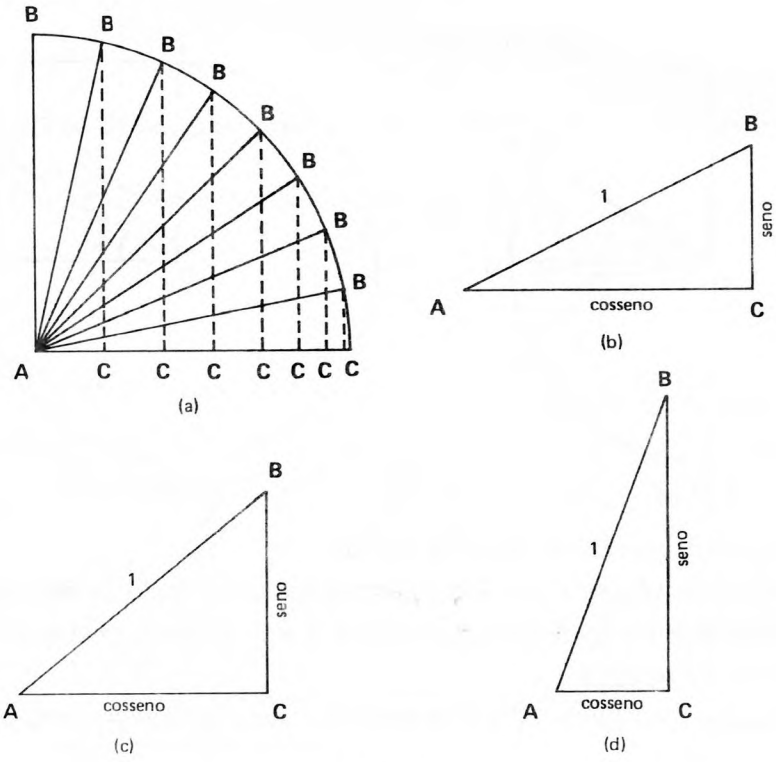


Fig. 26

Em todos os triângulos retângulos ACB do desenho (a), a hipotenusa AB tem o mesmo comprimento. Mas, o ângulo em A e os comprimentos dos lados perpendiculares BC e AC não são os mesmos em nenhum dos triângulos.
Se compararmos dois destes triângulos quaisquer, observaremos que o triângulo de ângulo maior em A, tem o lado oposto BC maior.

Se a hipotenusa permanecer constante, o lado oposto ao ângulo ***A*** aumentará à medida que aumentar esse ângulo.

Podemos verificar isto mais claramente considerando os triângulos retângulos dos desenhos (b), (c) e (d), nos quais foram traçados três dos triângulos do desenho (a).
O triângulo (c) tem um ângulo maior em A e um lado maior BC que o do desenho (b). E o triângulo (d) tem um ângulo em A e um lado BC maiores que os do triângulo (c).
Como sen A = $\frac{BC}{AB}$ e a hipotenusa AB tem o mesmo comprimento em todos os triângulos, ao passo que o lado BC aumenta à medida que o ângulo A se torna maior, então o sen A aumenta à medida que aumenta o ângulo A de 0° a 90°.
Admitindo-se que a hipotenusa tem o comprimento igual à unidade, como indicam os desenhos (b), (c) e (d), ***o sen A poderá ser representado pela linha BC.***
Obviamente, o sen do ângulo A é maior no desenho (c) que no (b), e maior no (d) que no (c).

É evidente que quanto maior for o ângulo A, mais curto será o lado adjacente AC. Em outras palavras, o lado adjacente ao ângulo A diminui à medida que o ângulo aumenta.

Assim, o lado AC é mais curto no desenho (c) que no (b). E mais curto no desenho (d) que no (c).
Como em qualquer triângulo cos A = $\frac{AC}{AB}$, então o cos A diminui à medida que aumenta o ângulo A, de 0° para 90°.
Num triângulo de hipotenusa igual à unidade de comprimento, o lado adjacente a um ângulo agudo pode representar o cosseno desse ângulo. Veja os desenhos (b), (c) e (d) para o ângulo A. Evidentemente, o cosseno do ângulo A é menor no desenho (c) que no (b). E é também menor no (d) que no (c).

À medida que um ângulo aumenta de 0° para 90°, a ***tangente*** e a ***secante aumentam,*** ao passo que a ***cotangente*** e a ***cossecante diminuem.***

Observe que como cada cateto de um triângulo retângulo é sempre mais curto que a hipotenusa, então tanto ***o seno como o cosseno de um ângulo nunca podem ser superiores à unidade.*** Da mesma forma, tanto a ***secante como a cossecante não podem ser inferiores à unidade. A tangente e a cotangente podem ter qualquer valor.***

Valores de funções sem o auxílio de tábuas

11. Notas Explicativas

Uma função de qualquer ângulo agudo dado pode ser calculada, aproximadamente, construindo-se um triângulo retângulo, no qual o ângulo dado é um dos ângulos. Então, bastará medir os lados do triângulo e calcular a relação adequada entre os dois lados.

As funções de alguns ângulos especiais podem ser determinadas com exatidão aplicando-se os princípios da Geometria. Mas, a maioria das funções dos ângulos somente podem ser calculadas com rigor por meio de um processo trabalhoso. Comumente, procura-se as funções dos ângulos em tabelas especialmente preparadas para esse fim. As funções de alguns ângulos, como 0°, 30°, 45° 60° e 90° são muito empregadas na prática, e por isso os técnicos sempre sabem de memória. E como estas funções podem ser determinadas prontamente, sem tabelas, vamos vê-las a seguir.

12. Funções de 45°

Se for construído um triângulo retângulo com um ângulo de 45°, como o da figura 27, o outro ângulo será 90° − 45° = 45°. Como o triângulo assim formado tem ***dois ângulos iguais*** é chamado ***isósceles.*** E os lados opostos a esses ângulos agudos, que são perpendiculares entre si, são também iguais.

Cada função trigonométrica se baseia na ***relação entre dois lados*** de um triângulo retângulo e ***não nos comprimentos*** desses lados. Portanto, a determinação da função de um ângulo deve apresentar as mesmas medidas para ambos os lados, não importando a unidade de comprimento.

Se os lados perpendiculares da figura 27 forem iguais à unidade, a hipotenusa será igual à raiz quadrada da soma dos quadrados dos catetos. Assim, teremos:

$$\text{hipotenusa} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

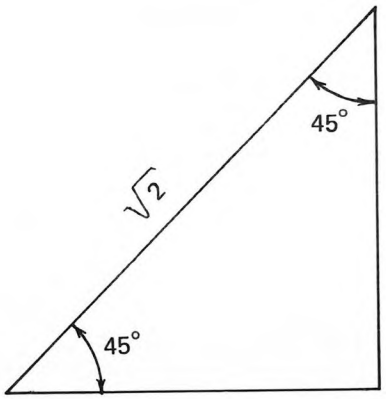


Fig. 27

Conhecendo-se os três lados do triângulo da figura 27, as funções de qualquer ângulo agudo podem ser achadas da seguinte forma:

$$\text{sen } 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Mas, conforme você já estudou, podemos multiplicar os termos de uma fração por um mesmo número, e dessa forma obteremos uma fração equivalente à fração dada. Assim, vamos multiplicar os dois termos da fração $\frac{1}{\sqrt{2}}$ por $\sqrt{2}$:

$$\frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{1\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Logo, $\text{sen } 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2} \Rightarrow \text{sen } 45° = 0{,}70711.$

De modo semelhante, podemos obter os valores das seguinte funções:

$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}70711$

$\text{tg } 45° = \frac{1}{1} = 1{,}00000$

$\text{cotg } 45° = \frac{1}{1} = 1{,}00000$

$\sec 45° = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} = 1{,}41421$

$\text{cosec } 45° = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} = 1{,}41421$

13. Funções de 30° e 60°

O triângulo retângulo ABC, da figura 28, apresenta o ângulo PAM igual a 30°.

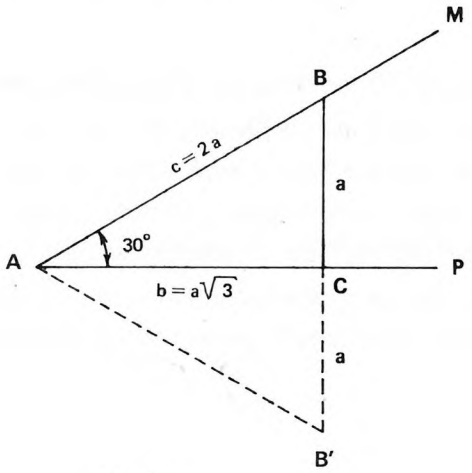


Fig. 28

Para se determinar as funções do ângulo PAM, prolonga-se a linha BC de modo que a distância CB' seja igual a BC. E em seguida traça-se a linha AB'.
Como os triângulos retângulos ABC e AB'C são iguais, então temos que:

ângulo CAB' = ângulo CAB.
ângulo BAB' = 30° + 30° = 60°
ângulo ABC = 90° − 30° = 60°
ângulo AB'C = 60°.

Portanto, o triângulo ABB' tem três ângulos iguais e os seus lados são também iguais.
Se os lados do triângulo ABC forem designados por a, b e c, respectivamente, então, BB' = c. Mas, como BB' foi igualado a ***2a,*** concluímos que c = 2a.

Direitos reservados

O lado b pode então ser expresso em relação a ***a,*** aplicando o princípio dos triângulos retângulos (Teorema de Pitágoras):

$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$

As funções de 30° podem ser determinadas a partir dos lados do triângulo ABC da seguinte forma:

$\text{sen } 30° = \frac{a}{c} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} = 0{,}50000$

$\text{cos } 30° = \frac{b}{c} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0{,}86603$

$\text{tg } 30° = \frac{a}{b} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3} = 0{,}57735$

$\text{cotg } 30° = \frac{b}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} = 1{,}73205$

$\text{sec } 30° = \frac{c}{b} = \frac{2a}{a\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3} = 1{,}15470$

$\text{cosec } 30° = \frac{c}{a} = \frac{2a}{a} = 2 = 2{,}0000$

Para o ângulo ABC, que é um ângulo de 60°, os valores das funções deste ângulo podem ser determinados da mesma forma como foi feito para o ângulo PAM. Isto é, $c = 2a$ e $b = a\sqrt{3}$. Fazendo isso, encontraremos os seguintes valores:

$\text{sen } 60° = \frac{b}{c} = \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0{,}86603$

$\text{cos } 60° = \frac{a}{c} = \frac{1}{2} = 0{,}50000$

$\text{tg } 60° = \frac{b}{a} = \sqrt{3} = 1{,}73205$

$\text{cotg } 60° = \frac{a}{b} = \frac{1}{3}\sqrt{3} = 0{,}57735$

$\text{sec } 60° = \frac{c}{a} = 2 = 2{,}00000$

$\text{cosec } 60° = \frac{c}{b} = \frac{2}{3}\sqrt{3} = 1{,}15470$

14. Funções de 0° e 90°

Conforme vimos na figura 26, à medida que o ***ângulo CAB decresce, o lado oposto BC também decresce, enquanto que o lado adjacente AC aumenta.***

Então, se o ângulo CAB se iguala a zero, a hipotenusa AB coincide com o lado AC, e o lado BC fica igual a zero. Admitindo-se que o raio do círculo é igual à unidade ($AB = 1$), para um ângulo de 0°, o lado AC será também igual a 1.

Portanto, pelas definições das funções trigonométricas e para os valores $AB = 1$, $AC = 1$ e $BC = 0$, as funções de um ângulo de 0° podem ser obtidas da seguinte forma:

$\text{sen } 0° = \frac{BC}{AB} = \frac{0}{1} = 0$

$\text{cos } 0° = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{1} = 1$

$\text{tg } 0° = \frac{BC}{AC} = \frac{0}{1} = 0$

$\text{cotg } 0° = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{0} = \infty$

$\text{sec } 0° = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{1} = 1$

$\text{cosec } 0° = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{0} = \infty$

Zero dividido por qualquer número é igual a zero. E do mesmo modo, o quociente obtido da divisão de qualquer número por zero é uma quantidade superior a qualquer número que se possa imaginar, e representa-se pelo símbolo ∞, que se lê "infinito".

Direitos reservados

Na figura 26, se o ângulo CAB aumenta para 90°, o lado AC do triângulo retângulo ABC torna-se igual a zero e o lado BC coincide com a hipotenusa AB.
Neste caso, para os valores AB = 1, BC = 1 e AC = 0, as funções de 90° são obtidas da seguinte forma:

$\text{sen } 90° = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{1} = 1$

$\cos 90° = \frac{AC}{AB} = \frac{0}{1} = 0$

$\text{tg } 90° = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{0} = \infty$

$\text{cotg } 90° = \frac{AC}{BC} = \frac{0}{1} = 0$

$\sec 90° = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{0} = \infty$

$\text{cosec } 90° = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{1} = 1$

Relações entre funções trigonométricas
Funções do mesmo ângulo

15. Relações Recíprocas

Quando a função de um ângulo é conhecida, as outras funções do ângulo podem ser determinadas por meio das relações existentes entre as funções.

Observe que algumas das relações para as funções do ângulo A, da figura 21, são iguais a outras relações invertidas.
Por exemplo: $\text{sen } A = \frac{a}{c}$ e $\text{cosec } A = \frac{c}{a}$.
Como $\frac{a}{c} = 1 \div \frac{c}{a}$, temos que:

$$\text{sen } A = \frac{1}{\text{cosec } A}$$

Igualmente, como $\frac{c}{a} = 1 \div \frac{a}{c}$, temos que:

$$\text{cosec } A = \frac{1}{\text{sen } A}$$

Uma comparação das relações representando as outras funções, mostrará que existem proporções semelhantes entre cos A e sec A, e entre tg A e cotg A. Estas relações podem ser expressas da seguinte forma:

$$\cos A = \frac{1}{\sec A} \qquad \sec A = \frac{1}{\cos A} \qquad \text{tg } A = \frac{1}{\text{cotg } A} \qquad \text{cotg } A = \frac{1}{\text{tg } A}$$

Direitos reservados

A quantidade obtida pela divisão de 1 por um número dado chama-se recíproca desse número. Então, podemos dizer que o seno e a cossecante de um ângulo são recíprocos entre si; o mesmo se aplicando ao cosseno e a secante, e a tangente e a cotangente.

16. Relações de Quocientes

Vejamos outras relações importantes entre funções, considerando neste caso o ângulo A da figura 21.

sen A = $\frac{a}{c}$, cos A = $\frac{b}{c}$, e tg A = $\frac{a}{b}$.

Porém, como $\frac{a}{c} \div \frac{b}{c} = \frac{a}{c} \times \frac{c}{b} = \frac{a}{b}$, temos que:

$$\text{tg } A = \frac{\text{sen } A}{\cos A}$$

Do mesmo modo, como cotg A = $\frac{1}{\text{tg } A}$, temos que:

$$\text{cotg } A = \frac{\cos A}{\text{sen } A}$$

17. Relações com Quadrados de Funções

Uma potência de função trigonométrica é geralmente indicada, escrevendo-se o expoente logo após a abreviatura da função.
Por exemplo, o quadrado do seno de A escreve-se assim: sen^2 A. A leitura é feita do seguinte modo: "seno quadrado de A".
Vejamos agora três relações úteis de quadrados de funções de um ângulo.
No triângulo retângulo ABC da figura 21, temos que: $a^2 + b^2 = c^2$
Se dividirmos cada membro da equação por c^2, obteremos:

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$

Como $\frac{a^2}{c^2} = \left(\frac{a}{c}\right)^2 = \text{sen}^2 A$, e $\frac{b^2}{c^2} = \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \cos^2 A$, segue-se que:

$$\text{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$$

Se dividirmos ambos os membros da equação $a^2 + b^2 = c^2$ por b^2, obteremos a seguinte equação:

$$\frac{a^2}{b^2} + 1 = \frac{c^2}{b^2}$$

Então, temos que:

$$\text{tg}^2 A + 1 = \sec^2 A$$

Do mesmo modo, se dividirmos ambos os membros da equação $a^2 + b^2 = c^2$ por a^2, obteremos a seguinte relação:

$$1 + \frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2} \quad \text{ou} \quad \frac{b^2}{a^2} + 1 = \frac{c^2}{a^2}$$

Portanto, temos que:

$$\text{cotg}^2 A + 1 = \text{cosec}^2 A$$

18. Relações para exprimir qualquer função em ordem a outras funções

Por meio das relações deduzidas que vimos até aqui, é possível exprimir qualquer função de um ângulo em relação a outra função que se queira desse ângulo.

Por exemplo, se quisermos exprimir sen A em relação ao cos A, basta resolver a fórmula que vimos no capítulo "Relações com quadrados de funções" para sen A. Ou seja: $\text{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$.

Passando $\cos^2 A$ para o 2.º membro, e extraindo-se a raiz quadrada dos dois membros, teremos:

$$\text{sen } A = \sqrt{1 - \cos^2 A}$$

A fórmula para sen A em relação à tg A pode ser deduzida da seguinte forma:

No capítulo "Relações de quocientes" vimos que:

$$\text{tg } A = \frac{\text{sen } A}{\cos A}$$

Isolando-se sen A num membro da equação, teremos:

$$\text{sen } A = \text{tg } A \cos A \qquad \text{(a)}$$

Como $\cos A = \frac{1}{\sec A}$, substituindo-se este valor na equação (a), vem:

$$\text{sen } A = \text{tg } A \times \frac{1}{\sec A} \qquad \text{(b)}$$

No capítulo das "Relações com quadrados de funções" obtivemos:

$$\text{tg}^2 A + 1 = \sec^2 A$$

Então, temos que: $\sec^2 A = 1 + \text{tg}^2 A$. Extraindo a raiz dos dois membros, teremos:

$$\sec A = \sqrt{1 + \text{tg}^2 A}$$

Se substituirmos este valor de sec A na equação (b), a fórmula ficará:

$$\text{sen } A = \frac{\text{tg } A}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 A}}$$

Na ***Tabela I*** são dadas as fórmulas para todos os casos possíveis. Na primeira coluna localizamos a função que deverá ser o primeiro membro da fórmula. O segundo membro da fórmula é encontrado na mesma linha, na coluna onde consta a função em relação à qual a primeira deve ser expressa.

Por exemplo: "exprimir cos A em relação à tg A".

Procuramos a linha que contém cos A, na primeira coluna. Verificamos qual a expressão que se encontra no cruzamento desta linha com a coluna tg A. Neste exemplo, encontraremos a seguinte expressão: $\frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 A}}$

Portanto, a fórmula será:

$$\cos A = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 A}}$$

TABELA I

RELAÇÕES ENTRE AS FUNÇÕES DE UM ÂNGULO

	sen A	cos A	tg A	cotg A	sec A	cosec A
sen A =	sen A	$\sqrt{1-\cos^2 A}$	$\frac{tg\,A}{\sqrt{1+tg^2 A}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+cotg^2 A}}$	$\frac{\sqrt{sec^2 A-1}}{sec\,A}$	$\frac{1}{cosec\,A}$
cos A =	$\sqrt{1-sen^2 A}$	cos A	$\frac{1}{\sqrt{1+tg^2 A}}$	$\frac{cotg\,A}{\sqrt{1+cotg^2 A}}$	$\frac{1}{sec\,A}$	$\frac{\sqrt{cosec^2 A-1}}{cosec\,A}$
tg A =	$\frac{sen\,A}{\sqrt{1-sen^2 A}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2 A}}{\cos A}$	tg A	$\frac{1}{cotg\,A}$	$\sqrt{sec^2 A-1}$	$\frac{1}{\sqrt{cosec^2 A-1}}$
cotg A =	$\frac{\sqrt{1-sen^2 A}}{sen\,A}$	$\frac{\cos A}{\sqrt{1-\cos^2 A}}$	$\frac{1}{tg\,A}$	cotg A	$\frac{1}{\sqrt{sec^2 A-1}}$	$\sqrt{cosec^2 A-1}$
sec A =	$\frac{1}{\sqrt{1-sen^2 A}}$	$\frac{1}{\cos A}$	$\sqrt{1+tg^2 A}$	$\frac{\sqrt{1+cotg^2 A}}{cotg\,A}$	sec A	$\frac{cosec\,A}{\sqrt{cosec^2 A-1}}$
cosec A =	$\frac{1}{sen\,A}$	$\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 A}}$	$\frac{\sqrt{1+tg^2 A}}{tg\,A}$	$\sqrt{1+cotg^2 A}$	$\frac{sec\,A}{\sqrt{sec^2 A-1}}$	cosec A

Exemplo

O seno de um certo ângulo é 0,6.

Calcule:

a) a cotangente desse ângulo

b) a secante desse ângulo.

Solução

a) De acordo com a Tabela I, a fórmula para exprimir cotg A em relação a sen A é:

$$cotg\,A = \frac{\sqrt{1 - sen^2 A}}{sen\,A}$$

Como sen A = 0,6, temos que:

$$cotg\,A = \frac{\sqrt{1 - 0{,}6^2}}{0{,}6} \Rightarrow \underline{\underline{cotg\,A = 1{,}3333}}$$

b) A fórmula pedida para sec A é:

$$sec\,A = \frac{1}{\sqrt{1 - sen^2 A}}$$

Neste caso, temos que:

$$sec\,A = \frac{1}{\sqrt{1 - 0{,}6^2}} \Rightarrow \underline{\underline{sec\,A = 1{,}25.}}$$

19. Cálculos para confirmação

Na prática, muitas vezes é aconselhável comprovar a exatidão dos cálculos, determinando a mesma quantidade por dois processos diferentes. Chamamos este cálculo adicional de verificação.

Deste modo, os valores de tg 30° e sec 30° que foram calculados no capítulo "Funções de 30° e 60°" podem ser verificados por meio da seguinte fórmula do capítulo "Relações com quadrados de funções": $\text{tg}^2 A + 1 = \sec^2 A$

Substituindo nesta equação os valores de tg 30° e sec 30° determinados no capítulo 13, teremos:

$$\begin{cases} \text{primeiro membro: } 0{,}57735^2 + 1 = 1{,}33333 \\ \text{segundo membro: } 1{,}15470^2 = 1{,}33333. \end{cases}$$

Portanto, como os dois resultados são iguais, os cálculos anteriores estavam certos.

Às vezes, os dois membros da equação apresentam pequenas divergências porque as funções não são exatas. Nestes casos, as divergências são desprezadas.

EXERCÍCIOS

1. Se sen $A = \frac{2}{3}$, qual é o valor de cosec A?

resposta: 1,5

2. Se cos B = 0,8, qual o valor de sec B?

resposta: 1,25

3. O seno de um ângulo A é 0,75.
   Calcule cada uma das outras cinco funções comuns do ângulo, a partir diretamente do seno dado por meio da Tabela I.

respostas:
- cos A = 0,6614
- tg A = 1,1340
- cotg A = 0,8819
- sec A = 1,5119
- cosec A = 1,3333

20. Funções de Ângulos Complementares

Quando a soma de dois ângulos é 90°, os ângulos são chamados complementares e cada um é o complemento do outro.
Para se achar o complemento de qualquer ângulo dado, basta subtraí-lo de 90°.

Por exemplo:
$$\begin{cases} \text{o complemento de } 60° \text{ é: } 90° - 60° = 30° \\ \text{o complemento de } 39°45' \text{ é: } 90° - 39°45' = 50°15'. \end{cases}$$

Num triângulo retângulo, os dois ângulos agudos são complementares, porque a sua soma é 90°.

Nos capítulos anteriores, vimos no que se refere às funções dos ângulos A e B da figura 21, que: $\text{sen } A = \frac{a}{c}$ e $\cos B = \frac{a}{c}$

Portanto, $\text{sen } A = \frac{a}{c} = \cos B.$

Do mesmo modo, podemos escrever as seguintes igualdades:

$$\cos A = \frac{b}{c} = \text{sen } B$$
$$\text{tg } A = \frac{a}{b} = \text{cotg } B$$
$$\text{cotg } A = \frac{b}{a} = \text{tg } B$$
$$\sec A = \frac{c}{b} = \text{cosec } B$$
$$\text{cosec } A = \frac{c}{a} = \sec B$$

Direitos reservados

Como A e B são ângulos complementares e B = 90° − A, 90° − A pode substituir B nas equações. E deste modo, teremos:

sen A = cos (90° − A)	cos A = sen (90° − A)	tg A = cotg (90° − A)
cotg A = tg (90° − A)	sec A = cosec (90° − A)	cosec A = sec (90° − A)

A dedução dos termos cosseno, cotangente e cossecante é baseada nas relações que já vimos, pois são simples abreviaturas das expressões seno do complemento, tangente do complemento e secante do complemento, respectivamente.

Como o seno de um ângulo é igual ao cosseno do ângulo complementar, o seno e o cosseno são denominados ***funções complementares.*** Do mesmo modo, a tangente e a cotangente, e a secante e a cossecante são funções complementares.

Todas as relações que vimos neste capítulo através das seis fórmulas, podem ser expressas pelo seguinte enunciado importante:

Qualquer função de um ângulo é igual à função complementar do ângulo complementar.

Por exemplo:
Sendo seno 40° = 0,64279, o cosseno será também 0,64279, porque a função complementar do seno é o cosseno e o complemento de 40° é 50°.
Da mesma forma, tg 20°30′ = 0,37388 e a função complementar do ângulo complementar, ou seja, cotg 69°30′, é também 0,37388.

EXERCÍCIOS

1. **Se sen 22° = 0,37461 e cos 22° = 0,92718, quais são os valores de:**
   a) **sen 68°?**
   b) **cos 68°?**

   resposta: a) **0,92718**; b) **0,37461**

2. **Se tg 22° = 0,40403 e cotg 22° = 2,47509, quais são os valores de:**
   a) **cotg 68°?**
   b) **tg 68°?**

   resposta: a) **0,40403**; b) **2,47509**

21. Utilização das Tábuas de Funções Trigonométricas Naturais

A resolução de um triângulo em geral implica na solução de um ou ambos dos seguintes problemas:

1) É dado um ângulo expresso em graus e pretende-se calcular uma ou mais das suas funções.

Direitos reservados

2) É dada uma das funções de um ângulo e pretende-se determinar o ângulo correspondente expresso em graus.

Qualquer um destes problemas pode ser resolvido rapidamente por meio das tábuas de funções trigonométricas naturais.

A tábua apresenta para cada ângulo os valores das funções.

Encontra-se no final desta lição uma tábua resumida de funções trigonométricas naturais.

22. Cálculo típico relacionado com funções trigonométricas

Um tipo de problema que surge nos cálculos práticos é o seguinte:

No triângulo retângulo da figura 29, a hipotenusa ***c*** mede 461 metros e o ângulo agudo ***A*** tem 23°. Determinar o comprimento do lado ***a*** oposto a esse ângulo.

Da relação $\text{sen } A = \frac{a}{c}$

temos que $a = c \text{ sen } A$

ou $a = 461 \text{ sen } 23°$.

Portanto, o comprimento ***a*** pode ser obtido, calculando-se o produto 461 por sen 23°.

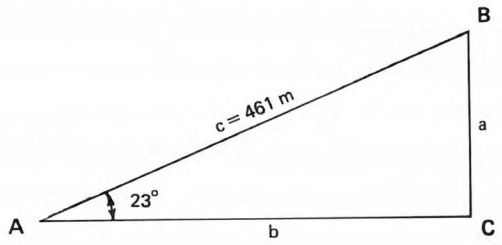


Fig. 29

Como se procuram funções naturais de ângulos

23. Descrição da Tábua de Funções Naturais

A tábua resumida referente a funções trigonométricas naturais consiste de 45 colunas com 2 tabelas em cada coluna, dispostas de modo semelhante.

tangente e cotangente de qualquer ângulo agudo expresso em graus podem ser achados diretamente nessa tábua de funções naturais.

A tábua contém os ***senos, cossenos, tangentes*** e ***cotangentes*** naturais. As funções são dadas para cada décimo de um ângulo de 0° a 90°. E o seno, cosseno, tangente e cotangente de qualquer ângulo agudo expresso em graus podem ser achados diretamente nessa tábua de funções naturais.

Para ângulos intermediários, as funções são achadas por *interpolação.*

Como qualquer função de um ângulo superior a 90° é numericamente igual a alguma função de um ângulo agudo, ***esta tábua pode também servir para procurar os senos, cossenos, tangentes e cotangentes de todos os ângulos..***

Direitos reservados

Os valores das secantes e cossecantes não são, em regra, dados nas tábuas trigonométricas. ***A secante é o inverso do cosseno e a cossecante é o inverso do seno.*** Se quisermos multiplicar uma quantidade pela secante de um ângulo, podemos obter o mesmo resultado, se dividirmos a quantidade pelo cosseno do ângulo.
Da mesma forma, se quisermos dividir uma quantidade pela cossecante de um ângulo, podemos obter o mesmo resultado, se multiplicarmos a quantidade pelo seno do ângulo.

Na tábua de funções naturais, os números de graus são dados por ordem no cabeçalho e no rodapé de cada coluna: de 0° a 44° no cabeçalho e, de 45° a 89° no rodapé.

Para cada ângulo existem quatro valores. Cada um desses valores corresponde a uma função. ***No cabeçalho existem os nomes das quatro funções, e no rodapé estão as funções complementares.***
Os números de décimos de grau são fornecidos à esquerda e à direita da tabela. Se o ângulo for inferior a 45°, isto é, se o número de graus se encontra no cabeçalho da coluna, o nome da função também está no cabeçalho da coluna e o número de décimos colocados na extremidade esquerda. Se o ângulo for superior a 45°, o número de graus está no rodapé da coluna. O nome da função também estará no rodapé da coluna e o número de décimos colocados na extremidade direita. Observe que esta tábua é especial, pois normalmente as tábuas trazem graus e minutos e não graus e décimos de graus. É que na eletrônica trabalha-se com ângulos expressos em forma decimal e não em forma sexagesimal.

24. Funções de ângulos inferiores a 45° que se encontram na tábua

Para procurar uma função de um ângulo inferior a 45° expresso em graus, localiza-se o número dado de graus no cabeçalho de uma coluna. Em seguida, busca-se o valor da função desejada na mesma linha horizontal dos décimos, que aparecem à esquerda da coluna.

Vamos considerar o seguinte exemplo: procurar o sen 37,4°.
Como a função é um seno vamos utilizar a tábua de funções naturais. Também, como o ângulo dado é inferior a 45°, o número de graus será procurado no cabeçalho das colunas. O valor pretendido (0,60738) encontra-se na coluna onde consta sen diretamente abaixo de 37° e na linha horizontal, contendo o número dado de décimos (0,4) na extremidade à esquerda.
Portanto, sen 37,4° = 0,60738.

25. Funções de ângulos superiores a 45° que se encontram na tábua

Se o ângulo dado for superior a 45° e expresso em graus, o procedimento para encontrar a função desejada é geralmente idêntico ao que vimos para os ângulos inferiores a 45°.

Direitos reservados

Para os ângulos superiores a 45°, o número dado de graus e o nome da função desejada são procurados no rodapé das colunas e o número de décimos é localizado na extremidade direita.

É bom notar que o número de graus no rodapé das colunas, aumentam da direita para a esquerda.
Vamos considerar o seguinte exemplo: achar o cos 52,6°.
O primeiro passo consiste em localizar o número de graus (52) no rodapé das colunas da tábua de funções naturais.
Em seguida, localiza-se o número de décimos na extremidade direita da coluna. O valor do cosseno desejado encontra-se na mesma linha horizontal do décimo considerado.
Portanto, cos 52,6° = 0,60738.

26. Características da disposição das tábuas

Nos dois exemplos que vimos nos capítulos anteriores, obtivemos o mesmo ângulo, isto é: sen 37,4° = cos 52,6°.
Como 37,4° = 90° − 52,6°, os dois ângulos dados são complementares e os resultados estão de acordo com o que já vimos em funções de ângulos complementares.
Deste modo, devido à disposição das tábuas, ***uma única função impressa é ao mesmo tempo o seno de um certo ângulo e o cosseno do ângulo complementar.***
Igualmente, ***a tangente de um ângulo e a cotangente do ângulo complementar são encontradas no mesmo lugar da tábua*** de funções naturais.
Ao procurarmos uma função, devemos ter cuidado em recorrer à coluna adequada a cada caso, tanto no que diz respeito à dos décimos com à da função.

Se o número de graus estiver no cabeçalho da coluna, os décimos correspondentes estão anotados na extremidade esquerda e crescem de cima para baixo. Em casos como este, o nome da função também se encontra indicado no cabeçalho da coluna.

Se o número de graus estiver no rodapé da coluna, os décimos correspondentes estão anotados na extremidade direita, e estes crescem de baixo para cima. Em casos como este, o nome da função também está indicado no rodapé da coluna.

O valor da função, no final de cada coluna, é repetido no cabeçalho da coluna seguinte.
Por exemplo: sen (32° + 1°) = sen 33,0° = 0,54464
sen 70,0° = sen 69° + 1° = 0,93969

EXERCÍCIOS

Verifique os seguintes valores das funções:

a) sen 39,5° = 0,63608
tg 39,5° = 0,82434
cos 39,5° = 0,77162
cotg 39,5° = 1,21310

Direitos reservados

b) tg 16,3° = 0,29242
c) tg 43,1° = 0,93578
d) sen 67,8° = 0,92587
tg 67,8° = 2,45043
e) tg 74,2° = 3,53393
f) cos 48,1° = 0,66783

cos 16,3° = 0,95981
cos 43,1° = 0,73016
cos 67,8° = 0,37784
cotg 67,8° = 0,40809
sen 74,2° = 0,96222
tg 48,1° = 1,11452

27. Interpolação

Quando o valor pedido ou dado não se encontra na tábua deve-se fazer uma ***interpolação.*** Entretanto, o mais aconselhável é tomar o valor tabelado mais próximo. Vamos considerar os exemplos seguintes, para que você entenda como deve proceder.

Exemplo 1
Ache o ângulo cujo seno é 0,57698.

Solução
Procurando na tábua, encontra-se: 0,57643 = sen 35,2°
0,57786 = sen 35,3°
0,57698 − 0,57643 = 0,00055
0,57786 − 0,57698 = 0,00088
Como você pode ver, 0,57698 está mais próximo de 0,57643 que de 0,57786. Então, o ângulo pedido tem um valor próximo de 35,2°. Logo, este ângulo (35,2°) deve ser considerado como a resposta procurada.

Exemplo 2
Ache o ângulo cujo cosseno é 0,27052.

Solução
Na tábua, você não encontra o valor 0,27052 para o cosseno.. Este valor está compreendido entre 0,27060 (cos 74,3°) e 0,27228 (cos 74,2°). Evidentemente, 0,27052 está mais próximo de 0,27060 do que de 0,27228. Logo, você deve considerar o ângulo 74,3° como a resposta procurada.

Cálculo de ângulos correspondentes às funções naturais

28. Funções Inversas

Assim como o seno, cosseno ou outra função trigonométrica de um ângulo é determinada pelo ângulo, um ângulo pode ser calculado pela sua função trigonométrica específica. Um ângulo é conhecido como uma função inversa de qualquer das suas funções trigonométricas.

Direitos reservados

Por exemplo, se x for o seno de um ângulo A, ou x = sen A, logo, A será o seno inverso (antiseno) de x ou o ângulo com o seno x.

O ângulo correspondente a uma função trigonométrica é freqüentemente indicado, colocando-se o símbolo −1 à direita e um pouco acima da abreviatura do nome da função. Como se −1 constituísse um expoente.

Exemplo 1:

sen^{-1} 0,86603

significa o ângulo, cujo seno é 0,86603.

Exemplo 2

$\cos^{-1}$ 0,47382

refere-se ao ângulo de cosseno igual a 0,47382.

Entre 0° e 360° existem quatro ângulos, para os quais os valores numéricos das funções trigonométricas são iguais. E existe um número ilimitado de ângulos que ultrapassam de 360° que têm também essas mesmas funções. Mas, na prática, só um ângulo satisfaz os requisitos de um caso particular. As tábuas de funções naturais podem ser utilizadas para determinar um ângulo, quando uma das funções for conhecida. No entanto, o número dado pode ou não encontrar-se na tábua. De qualquer modo, localiza-se em primeiro lugar, ou o número dado ou outro que seja quase igual a ele numa coluna da tabela adequada que contenha o nome da função dada no cabeçalho ou no rodapé da coluna.

É muito importante que o número seja localizado na coluna da função dada. É óbvio que, no caso de se utilizar uma coluna indevida, o resultado obtido estará errado.

29. Determinação de um Ângulo Correspondente à Função Encontrada na Tábua

Quando a função dada se acha na tábua, o ângulo será expresso em graus. E os números de graus e décimos poderão ser tirados diretamente da tábua.

Se o nome da função dada está no cabeçalho da coluna contendo o valor dado, o número pretendido de graus acha-se diretamente acima dessa coluna. E o número de décimos acha-se na extremidade esquerda da linha que contém o valor dado.

Se o nome da função dada estiver no rodapé da coluna contendo o valor dado, o número desejado de graus estará diretamente abaixo dessa coluna. E o número de décimos estará na extremidade direita da linha que contém o valor dado.

Exemplo 1

O seno de um ângulo é 0,47562. Qual é o ângulo correspondente?

Solução

Encontraremos a função dada na Tábua de Funções Naturais. Como a função sen se acha no cabeçalho da coluna em que se localiza esse valor, o número de graus do ângulo desejado é dado acima dessa coluna: 28 para este nosso caso.

Direitos reservados

O número de décimos do ângulo, procura-se na extremidade esquerda e no alinhamento com 0,47562: 0,4 é o valor do décimo, neste caso. Portanto, o ângulo cujo seno é 0,47562 será 28,4°.

Exemplo 2

Ache o ângulo, cujo cosseno é 0,27060.

Solução

O número dado encontra-se na Tábua de Funções Naturais. A indicação do nome da função está colocada no rodapé da coluna.

Então, neste caso, o número de graus do ângulo pedido é 74, achado abaixo dessa coluna. E o número de décimos é 0,3 achado no alinhamento com 0,27060 e na extremidade direita.

Portanto, a resposta é: 0,27060 = cos 74,3°

Exemplo 3

Qual é o ângulo que corresponde à tangente de 2,16420?

Solução

Na Tábua de Funções Naturais, o valor dado é encontrado na coluna com a abreviatura tg na parte inferior e que está diretamente acima de 65°, com o valor 2,16420 no alinhamento com 0,2 da coluna de décimos à direita.

Portanto, o ângulo com a tangente de 2,16420 é 65,2°.

Exemplo 4

Ache cotg 0,43274.

Solução

Pede-se para determinar o ângulo, cuja cotangente é 0,43274.

A função dada é encontrada na Tábua de Funções Naturais na coluna marcada cotg na parte inferior.

Como o número de graus abaixo dela é 66 e o número de décimos no respectivo alinhamento com 0,43274 da coluna de décimos da direita é 0,6, então o ângulo pedido será de 66,6°.

EXERCÍCIOS

1. Ache o ângulo, cujo seno é 0,50000.

resp.: 30,0°

2. Ache o ângulo, cujo cosseno é 0,74431

resp.: 41,9°

3. Ache o ângulo, cuja tangente é 2,05942

resp.: 64,1°

4. Ache o ângulo, cuja cotangente é 1,20451

resp.: 39,7°

5. Ache o ângulo, cujo seno é 0,76940

resp.: 50,3°

6. Ache o ângulo, cuja tangente é 10,0187

resp.: 84,3°

Direitos reservados

Resolução de triângulos retângulos

30. Introdução

Como você já sabe, para a resolução de um triângulo é necessário que se conheça três das suas seis partes, sendo uma delas um lado.

Num triângulo retângulo, um dos ângulos mede 90°. Portanto, para a sua resolução é necessário conhecer apenas duas outras partes, sendo uma delas um lado. Estas duas partes conhecidas podem ser:
a) dois lados, ou
b) um lado e um ângulo agudo.

31. Fórmulas para a resolução de triângulos retângulos

No triângulo retângulo ABC, que você viu na figura 24, os ângulos são designados nos vértices por ***A, B*** e ***C.*** E para uma pronta identificação, os lados opostos são designados pelas letras minúsculas correspondentes ***a, b*** e ***c,*** respectivamente.
Nas nossas fórmulas fica subentendido que o ângulo reto está em ***C*** em todos os casos, e conseqüentemente ***c*** será sempre a ***hipotenusa.*** O lado ***a*** fica oposto ao ângulo ***A*** e adjacente ao ângulo ***B.*** Igualmente, o ângulo ***A*** é oposto ao lado ***a*** e o ângulo ***B*** adjacente ao lado ***a.***

Num triângulo retângulo, os dois ângulos agudos são complementares. Portanto, quando um deles é conhecido, o outro poderá ser facilmente calculado, subtraindo de 90°.

$$A = 90° - B$$

$$B = 90° - A$$

Do mesmo modo, ***num triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.*** Então: $c^2 = a^2 + b^2$.
Recorrendo a esta relação, ***qualquer lado poderá ser calculado a partir dos outros dois,*** empregando-se as seguintes fórmulas:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad a = \sqrt{c^2 - b^2} \qquad b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

Quando recorremos à relações em que figuram quadrados, como o Teorema de Pitágoras, costumamos chamar ***"método dos quadrados".***

Quando são conhecidos um lado e qualquer outra parte de um triângulo retângulo, além do ângulo reto, cada parte desconhecida poderá ser calculada, aplicando-se a definição da função de um ângulo que se refere às duas partes conhecidas e à pretendida.

Por exemplo, na figura 21, se as partes conhecidas forem o ângulo ***A*** e o lado ***c,*** o lado ***a*** poderá ser achado, resolvendo-se a equação:

$$\text{sen } A = \frac{a}{c} \Rightarrow a = c \text{ sen } A.$$

Do mesmo modo, se as partes conhecidas forem os lados ***a*** e ***b,*** então o ângulo ***B*** poderá ser achado da relação: $\text{tg } B = \frac{b}{a}$.

Como existe um grande número de fórmulas que podem ser deduzidas das definições de funções trigonométricas dos dois ângulos agudos de um triângulo retângulo, vamos dar aqui algumas das mais importantes.

$a = c \text{ sen } A$	$a = b \text{ cotg } B$
$b = b \text{ tg } A$	$c = \left(\frac{a}{\text{sen } A}\right)$
$a = c \cos B$	$c = \left(\frac{a}{\cos B}\right)$

Nestas fórmulas, consideramos ***a*** como qualquer cateto do triângulo, ***A*** o ângulo oposto a esse cateto, ***B*** o ângulo adjacente ao mesmo cateto, ***b*** o outro cateto e ***c*** a hipotenusa. Caso se deseje, podemos escrever fórmulas semelhantes, substituindo ***a*** por ***b*** e ***b*** por ***a;*** ***A*** por ***B*** e ***B*** por ***A.*** Por exemplo:

$$b = c \text{ sen } B$$

$$c = \frac{b}{\text{sen } B}$$

Outras fórmulas referentes a outras funções também podem ser deduzidas desta forma.

Métodos gerais para resolver triângulos retângulos

32. Considerações Práticas

Para se obter uma idéia clara das condições de determinado triângulo retângulo, ***é aconselhável desenhar a figura e assinalar as partes conhecidas.*** É também muito importante decidir a necessária precisão dos resultados calculados. De um modo geral, ***o número de casas decimais de cada distância achada deve ser o mesmo da distância ou distâncias dadas.***

Quando as medidas não são determinadas com grande precisão, os ângulos podem tomar-se apenas até minutos ou mesmo até os 5 ou 10 minutos mais próximos.

33. Resolução de um triângulo sendo conhecidos dois lados

Quando são dados dois lados de um triângulo retângulo, qualquer um dos ângulos agudos poderá ser obtido a partir da função do ângulo que é a relação de um lado dado para o outro.

O outro ângulo agudo é o complemento do primeiro achado.

Portanto, se os lados conhecidos forem a hipotenusa ***c*** e o cateto ***a***, o ângulo A poderá ser achado por meio da relação: $\text{sen } A = \frac{a}{c}$.

Uma vez obtido o ângulo A, podemos calcular o ângulo B, pois o ângulo agudo B é igual a $90° - A$.

O terceiro lado do triângulo pode se achado por vários processos. Mas geralmente, é preferível basear os cálculos na relação referente ao lado pedido, ao maior dos dois lados dados e à correspondente função de qualquer um dos ângulos agudos.

O resultado que se obtém desta forma é freqüentemente um pouco mais rigoroso do que o comprimento achado a partir da relação referente ao lado pedido, ao lado dado menor e à devida função de um ângulo agudo. Poderá ser este o caso, quando um ângulo for inferior a 20° e, especialmente, quando os ângulos não são tomados até ao número de segundos exatos.

Quando os comprimentos dados forem números simples, e as operações para se elevar ao quadrado e extrair a raiz quadrada da soma ou diferença dos quadrados não for muito trabalhosa, você poderá recorrer então ao Teorema de Pitágoras.

Se utilizar este método, o terceiro lado poderá ser achado antes ou depois de se ter determinado os ângulos.

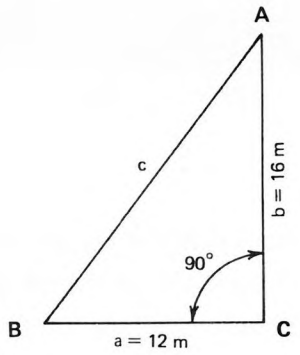


Fig. 30

Exemplo 1

No triângulo ABC da figura 30, os catetos medem: a = 12 m e b = 16 m. Ache os ângulos agudos A e B e a hipotenusa ***c.***

Solução

Neste caso, utilizaremos as funções naturais.

Em primeiro lugar, o ângulo A é obtido a partir da relação:

$$\text{tg } A = \frac{a}{b} = \frac{12}{16} = 0{,}75000$$

Então, para este valor da tangente, o valor do ângulo A será:

$$\hat{A} = 36{,}9°$$

O ângulo B é complemento do ângulo A. Portanto, $\hat{B} = 90° - A = 90° - 36{,}9° = 53{,}1°$

Neste triângulo, os comprimentos dos catetos são números simples e a hipotenusa pode ser calculada facilmente pelo método dos quadrados (Teorema de Pitágoras).

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{144 + 256} = \quad 400 = 20\,\text{m}$$

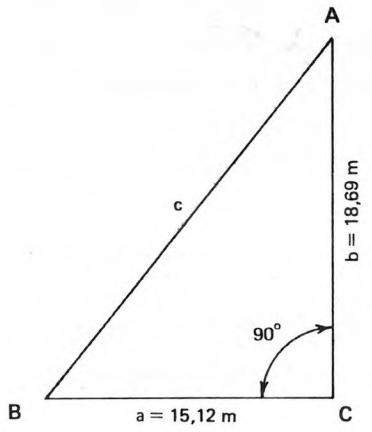


Fig. 31

Exemplo 2

No triângulo retângulo ABC da figura 31, a= 15,12 m e b = 18,69 m. Ache $\hat{A}$, $\hat{B}$ e c.

Solução

O ângulo A pode ser obtido da relação: $\text{tg } A = \frac{a}{b} = \frac{15{,}12}{18{,}69} = 0{,}80899$

Para este valor da tangente, o ângulo A mede: $\hat{A} = 39{,}0°$

Como o ângulo B é complemento do ângulo A, temos que: $\hat{B} = 90° - 39{,}0° \Rightarrow$

$$\Rightarrow \hat{B} = 51{,}0°$$

Neste caso, a fórmula $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ não é aconselhável, porque constitui um processo muito trabalhoso para elevar ***a*** e ***b*** ao quadrado e extrair a raiz quadrada de $(a^2 + b^2)$.

Portanto, como ***b*** é o maior dos lados dados, podemos achar ***c*** pela fórmula: $c = \frac{b}{\cos A}$

$c = \frac{18{,}69}{\cos 39{,}0°} = \frac{18{,}69}{0{,}77715} =$ 24,05 m.

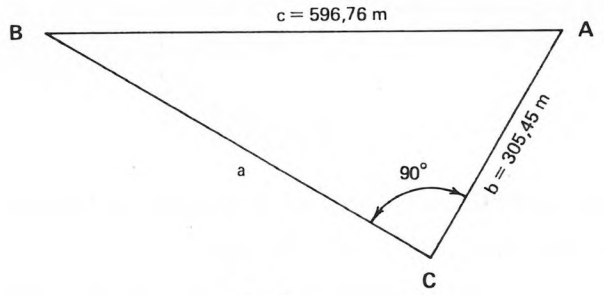


Fig. 32

Exemplo 3

No triângulo retângulo da figura 32, b = 305,45 m e c = 596,76 m.
Resolva o triângulo, achando os ângulos A e B e o cateto ***a.***

Solução

O ângulo A pode ser determinado pela relação: $\cos A = \frac{b}{c} = \frac{305{,}45}{596{,}76} = 0{,}51185.$

Para este valor do cosseno, o ângulo A mede: $\hat{A} = 59{,}2°$

Como o ângulo B é complementar, temos que: $\hat{B} = 90° - 59{,}2° \Rightarrow \hat{B} = 30{,}8°$

Neste caso, o lado dado maior é ***c,*** sendo preferível calcular o cateto ***a*** pela fórmula:

$$a = c \operatorname{sen} A$$

Substituindo os valores conhecidos, teremos:

$$a = 596{,}76 \operatorname{sen} 59{,}2°$$
$$a = 596{,}76 \times 0{,}85896$$
$$a = 512{,}59 \text{ m}$$

EXERCÍCIOS

1. Num triângulo retângulo ABC com o ângulo reto em C, a hipotenusa *c* mede 60 m e o cateto *b* 22 m. Faça um desenho da figura e determine os ângulos agudos e o outro cateto.

Resultado: $\hat{A} = 68{,}5°$; $\hat{B} = 21{,}5°$; $a = 55{,}8$ m

2. Num triângulo retângulo ABC, com ângulo reto em C, os catetos medem a = 21,6 m e b = 36,4 m. Ache os ângulos agudos e a hipotenusa.

Resultado: $\hat{A} = 30{,}7°$; $\hat{B} = 59{,}3°$; $c = 42{,}3$ m

3. Os catetos de um triângulo retângulo medem, respectivamente, 37,598 e 82,754 m. Determine:
   a) o ângulo agudo oposto ao cateto menor;
   b) o outro ângulo agudo;
   c) a hipotenusa.

   Resultado: a) 24,4°; b) 65,6°; c) 90,895 m.

34. Resolução de um triângulo, sendo conhecidos um lado e um ângulo agudo

Num triângulo retângulo, quando um ângulo agudo é conhecido podemos achar o outro subtraindo o ângulo conhecido de 90°. Se também é conhecido um lado do triângulo, cada um dos lados desconhecidos podem ser calculados pela aplicação da definição da função referente a esse lado que foi dado, e a um dos ângulos agudos.

Poderão ser calculados também recorrendo-se à fórmula correspondente que vimos no capítulo "Fórmulas para a resolução de triângulos retângulos". Em regra, é sempre bom utilizar o mesmo ângulo para a determinação dos dois lados desconhecidos.

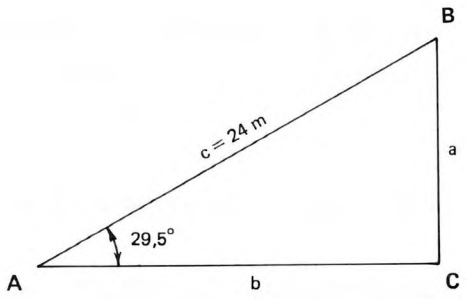


Fig. 33

Exemplo 1

No triângulo ABC da figura 33, c = 24 m e $\hat{A} = 29,5°$.
Resolva o triângulo, achando ***B***, ***a*** e ***b***.

Solução

Primeiramente, achamos o ângulo B pela relação: $\hat{B} = 90° - A \Rightarrow \hat{B} = 90° - 29,5°$

$$\hat{B} = 60,5°$$

A fórmula para calcular o cateto ***a*** pode ser deduzida da relação: $\text{sen } A = \frac{a}{c}$

$a = c \text{ sen } A \Rightarrow a = 24 \text{ sen } 29,5° \Rightarrow a = 24 \times 0,49242 \Rightarrow a = 11,8 \text{ m.}$

A fórmula para ***b*** pode ser deduzida da relação: $\cos A = \frac{b}{c}$

$b = c \cos A \Rightarrow b = 24 \cos 29,5° \Rightarrow b = 24 \times 0,87036 \Rightarrow b = 20,9 \text{ m}$

Os resultados podem ser verificados por meio da fórmula: $c^2 = a^2 + b^2$.

Assim, $a^2 + b^2 = 11,8^2 + 20,9^2 = 139,24 + 436,81 = 576,05$ e $c^2 = 24^2 = 576$.

Logo, os cálculos para os lados podem ser considerados certos.

Direitos reservados

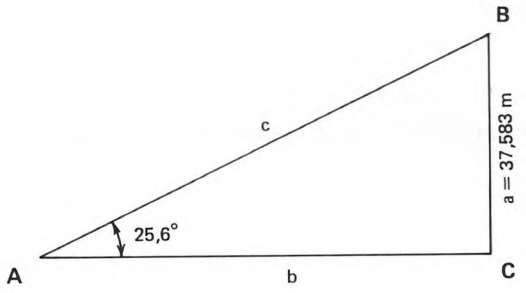


Fig. 34

Exemplo 2

No triângulo retângulo da figura 34, $\hat{A}$ mede 25,6° e *a* 37.583 metros. Ache $\hat{B}$, *b* e *c*.

Solução

O ângulo B é igual a 90° − 25,6° = 64,4°. Para calcular os lados *b* e *c*, recorremos à relação $\text{cotg } A = \frac{b}{a}$.

$b = a \text{ cotg } A = 37{,}583 \text{ cotg } 25{,}6° = 37{,}583 \times 2{,}08716$

$b = 78{,}442 \text{ m}$

A partir da relação $\text{sen } A = \frac{a}{c}$, teremos:

$$c = \frac{a}{\text{sen } A} \Rightarrow c = \frac{37{,}583}{\text{sen } 25{,}6°} \Rightarrow c = \frac{37{,}583}{0{,}43209} \quad \underline{\underline{c = 86{,}980 \text{ m}}}$$

EXERCÍCIOS

1. No triângulo retângulo ACB, com o ângulo reto em C, a hipotenusa mede 40 metros e o ângulo A 28,2°. Faça o desenho da figura e resolva o triângulo.

   Resultado: $\hat{B} = 61{,}8°$; $b = 35{,}2$ m; $a = 18{,}9$ m

2. No triângulo retângulo ACB, com o ângulo reto em C, a = 10,333 metros. Se $\hat{A} = 27{,}0°$, calcule as outras partes.

   Resultado: $\hat{B} = 63{,}0°$; $c = 22{,}760$ m; $b = 20{,}279$ m

3. Um cateto de um triângulo retângulo mede 264,07 metros e o ângulo agudo e adjacente a ele 18,3°. Determine:
   a) o outro ângulo agudo
   b) o outro cateto.
   c) a hipotenusa.

   Resultado: a) 71,7°; b) 87,33 m; c) 278,1 m

Problemas práticos relacionados com a resolução de triângulos retângulos

35. Variedade de Problemas

Em todos os ramos da Engenharia a resolução dos problemas que envolvem triângulos retângulos são por demais freqüentes. Vamos ver aqui apenas alguns desses problemas que servem como exemplos típicos e não para cobrir todos os casos possíveis. Mas

Direitos reservados

numerosos outros, de tipos diversos podem ser resolvidos se forem aplicados métodos semelhantes.

36. Cálculo da distância vertical entre dois pontos distanciados horizontalmente de um comprimento conhecido

Na figura 35, *A* representa um ponto de uma altura conhecida acima do solo e *B* o topo do mastro de uma bandeira colocado em posição vertical *CB.*

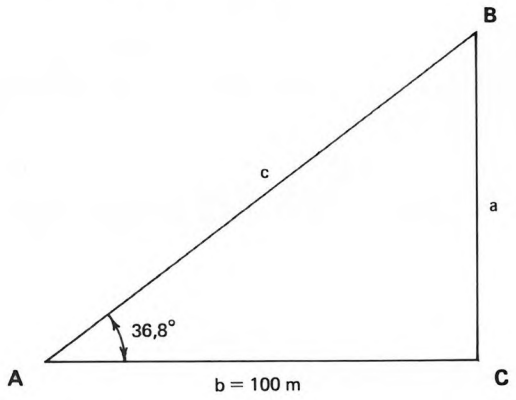


Fig. 35

Um método de determinar a altura *CB* do ponto *B* acima da linha horizontal *AC* através do ponto *A,* consiste em medir a distância *AC* desde o ponto *A* até o mastro e o ângulo *BAC* que a linha de *A* a *B* forma com a horizontal, resolvendo então, o triângulo retângulo *ABC.*

A distância horizontal *AC* entre o ponto *A* e uma vertical passando pelo ponto *B,* chama-se ***distância horizontal*** entre *A* e *B.* E a distância vertical *CB* entre o ponto *B* e a linha horizontal através do ponto *A* é a ***distância vertical*** entre *A* e *B.*

Exemplo

Na figura acima, A foi marcado a uma distância horizontal de 100 metros do mastro da bandeira vertical CB; e sabendo-se que um observador colocado em A observa o ponto B segundo um ângulo de 36,8° em relação à horizontal. Qual é a distância vertical entre A e B, ou a distância vertical entre o ponto B e a linha horizontal AC através do ponto A?

Solução

No triângulo retângulo ABC, temos que: $\text{tg A} = \frac{a}{b} \Rightarrow a = b \text{ tg A}$.

$a = 100 \text{ tg } 36{,}8° \Rightarrow a = 100 \times 0{,}74810 \Rightarrow a = 74{,}8 \text{ m}$

37. Distância horizontal de um ponto escolhido a um objeto situado a uma altura conhecida

Na figura 36, *LT* representa um farol no topo de uma colina *MN* e *S* um ponto em um navio no mar.

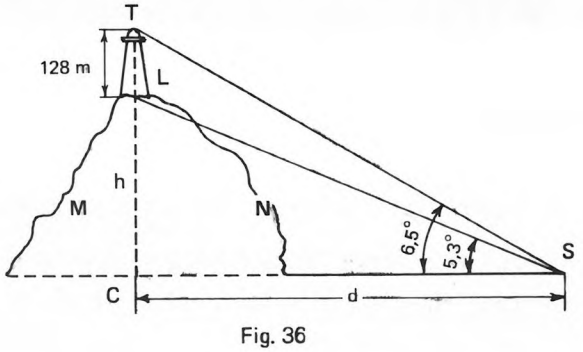


Fig. 36

Se a elevação do farol for conhecida, resume-se a um problema simples determinar a distância horizontal *d* do navio ao farol e a distância vertical *h* do ponto *S* à base *L* do farol. Torna-se necessário apenas observar os ângulos *CSL* e *CST* formados com a linha horizontal *SC,* pelas linhas *S* a *L* e *T.* E em seguida, é só resolver os triângulos retângulos, como no seguinte exemplo.

Exemplo

O farol LT da figura 36, cuja altura é de 128 m, é observado do ponto S a bordo de um navio. O ângulo entre a linha horizontal SC e a linha de visão de S à base L do farol é de 5,3°. E o ângulo entre a horizontal e a linha de S ao topo T é de 6,5°. Determine:

a) a distância horizontal *d* do ponto S ao farol;

b) a distância vertical *h* entre o ponto S e a base do farol L.

Solução

a) No triângulo retângulo LCS, $\text{tg CSL} = \frac{h}{d} \Rightarrow h = d \text{ tg CSL} \Rightarrow h = d \text{ tg } 5{,}3°$ (1)

Da mesma forma, no triângulo retângulo TCS, temos que: $\text{tg CST} = \frac{CT}{CS}$

$CT = CS \text{ tg CST}$.

Substituindo CT por L + 128, e CS por d, vem: $h + 128 = d \text{ tg } 6{,}5°$ (2)

Se subtrairmos a equação (1) da (2), isto é, se igualarmos a diferença dos dois primeiros membros das equações à diferença dos segundos, o resultado será:

$h + 128 - h = d \text{ tg } 6{,}5° - d \text{ tg } 5{,}3°$.

Então, teremos:

$$128 = d(\text{tg } 6{,}5° - \text{tg } 5{,}3°)$$

$$128 = d(0{,}11394 - 0{,}09277)$$

$$d = \frac{128}{0{,}02117} \Rightarrow \underline{d = 6\,046 \text{ m.}}$$

b) Podemos determinar a distância vertical *h* pela equação (1):

$h = d \text{ tg } 5{,}3° \Rightarrow h = 6\,046 \times 0{,}09277 \Rightarrow \underline{h = 560{,}9 \text{ m.}}$

38. Estrutura de um Telhado

Na figura 37, vemos o desenho de um tipo simples de estrutura de um teto.

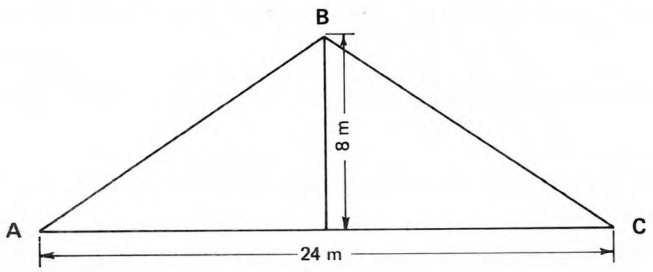


Fig. 37

Cada trave da armação é representada por uma linha que coincide com a linha central da referida trave. São elas as inclinadas *AB* e *BC* e a horizontal *AC.*

As intersecções *A* e *C* são também conhecidas por pés da armação da estrutura e o ponto *B* é o topo. A distância horizontal *AC* entre os pés tem o nome de vão da estrutura. E a distância vertical entre cada pé e o topo, é a altura.

Normalmente, o suporte é simétrico, pois as duas traves que se reunem no topo têm a mesma inclinação e o mesmo comprimento. Em outras palavras, o triângulo *ABC* da

figura 37 é isósceles. Quando o vão e a altura de um suporte de teto são conhecidos, podemos determinar facilmente a inclinação e o comprimento de cada trave, resolvendo o triângulo retângulo, cujos lados são uma das traves inclinadas, a metade da horizontal e a altura vertical da estrutura.

Exemplo

Uma estrutura simétrica de um teto, como o representado na figura 37, tem um vão de 24 metros e uma altura de 8 metros. Determinar:

a) o ângulo que uma trave inclinada forma com a horizontal;

b) o comprimento dessa trave.

Solução

a) No triângulo retângulo formado pela trave AB (figura 37), a metade da esquerda da trave horizontal AC e a vertical do centro da estrutura, o cateto vertical mede 8 metros e a horizontal mede metade do vão, ou seja, $\frac{1}{2} \times 24 = 12$ metros. O ângulo BAC que a trave inclinada forma com a horizontal pode ser achado pela relação:

$\text{tg BAC} = \frac{8}{12} = 0{,}66667.$

Resposta: O respectivo ângulo é 33,7°.

b) No mesmo triângulo, a hipotenusa pode ser calculada, dividindo-se o cateto horizontal pelo cosseno do ângulo agudo adjacente a ele. Portanto, $AB = \frac{12}{\cos 33{,}7^\circ}$

$$AB = 14{,}4 \text{ m}$$

39. Dimensões de partes de um guindaste

Na figura 38, vemos o desenho de um tipo de guindaste.

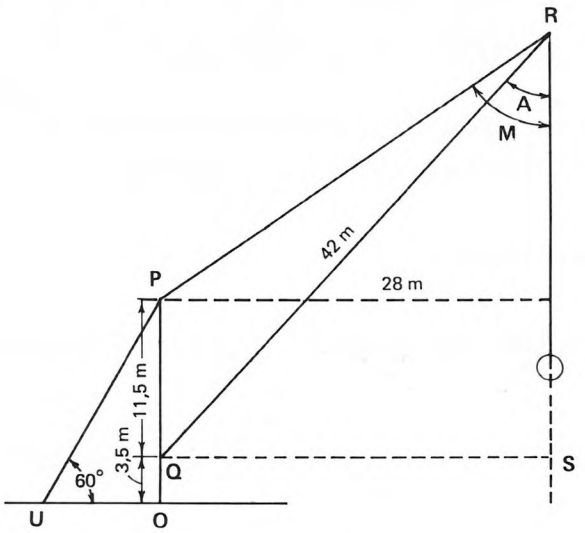


Fig. 38

A linha vertical *OP* representa o mastro, a linha *QR* a corrente de suspensão, que se prolonga até a vertical *RS,* em cujo extremo se encontra um peso. A linha *PR* representa a ligação que controla a posição do mastro e a linha *UP* é um cabo que mantém o mastro na vertical.

A altura *OP* do mastro, o comprimento *QR* da corrente e a distância *OQ* da base do mastro ao início da corrente são fixos para um determinado tipo de guindaste. E, para uma posição dada do peso ou do ponto *R,* os ângulos *A* e *M* e o comprimento *PR* do controlador do mastro podem ser prontamente calculados pela trigonometria.

Da mesma forma, se o cabo *UP* tiver um certo ângulo de inclinação, podemos achar a distância *OU* e o comprimento *UP.*

Exemplo

O guindaste, representado na figura 38, tem as seguintes dimensões:
OQ = 3,5 m, QP = 11,5 m e QR = 42 m.
O peso deverá estar a uma distância horizontal PT de 28 m do mastro. E o cabo UP estará ligado ao mastro formando um ângulo de 60° com a horizontal. Determine:
a) o ângulo A entre a vertical e a corrente de suspensão;
b) o ângulo M entre a vertical e o controlador do mastro;
c) o comprimento do controlador do mastro;
d) a distância OU da base do mastro ao escoramento do cabo de segurança;
e) o comprimento do cabo de segurança.
Num problema desta natureza, os ângulos devem ser tomados até décimos e as distâncias até uma casa decimal.

Solução

a) Se for traçada uma linha horizontal QS (figura 38) desde Q até que intercepte a vertical RS na qual atua o peso, o comprimento QS será o mesmo que o da linha PT, ou 28 m. Então, no triângulo retângulo QRS, $\text{sen } A = \frac{QS}{QR} = \frac{28}{42} = 0{,}66667$.

$$\underline{A = 41{,}8°}$$

b) Para achar o ângulo M, torna-se necessário, em primeiro lugar, determinar a distância RT, que é igual a RS — TS ou RS — PQ. Do triângulo QRS, $\cos A = \frac{RS}{QR}$ ou
RS = QR cos A = 42 cos 41,8° = 31,3 m.
Então, RT = 31,3 — 11,5 = 19,8 m.
No triângulo retângulo PRT, $\text{tg } M = \frac{PT}{RT} = \frac{28}{19{,}8} \Rightarrow \underline{M = 54{,}7°}$

c) Do triângulo PRT, $\text{sen } M = \frac{PT}{PR}$ ou $PR = \frac{PT}{\text{sen } M} = \frac{28}{\text{sen } 54{,}7°} = \underline{34{,}3 \text{ m}}$

d) A altura OP é igual a 3,5 + 11,5 = 15 m.
No triângulo retângulo OUP, $\text{cotg } OUP = \frac{OU}{OP}$ ou OU = OP cotg OUP =
= 15 cotg 60° = 8,7 m

e) Do mesmo modo, do triângulo OUP, $\text{sen } OUP = \frac{OP}{PU}$ ou $PU = \frac{OP}{\text{sen } OUP} = \frac{15}{\text{sen } 60°} =$

$\underline{PU = 17{,}3 \text{ m.}}$

40. Relações para indicar inclinações de linhas

Na Engenharia prática, a inclinação de uma linha dada a um plano horizontal ou vertical é indicada com freqüência. Supõe-se que uma parte da linha é a hipotenusa de um triângulo retângulo no qual os outros dois lados são horizontal e vertical, que exprimem a relação entre os lados vertical e horizontal de um triângulo.

Por exemplo, a ***inclinação de uma estrada com o horizonte*** pode ser indicada pelo seu ***declive,*** que consiste na ***relação da subida ou descida verticais*** em determinado comprimento da estrada ***para a correspondente distância horizontal.*** Esse declive costuma ser exprimido numa ***porcentagem.*** Se a estrada sobe ou desce 2 m na

distância horizontal de 100 m, o declive é de $\frac{2}{100}$ ou 2 por cento.

O ângulo que corresponde a um declive dado pode ser obtido rapidamente, que é expresso como número decimal e é a tangente do ângulo desejado. Assim, o ângulo de inclinação de uma estrada com um declive de 2 por cento é o ângulo da tangente igual a 0,02 que é portanto 1,1°.

No caso de uma represa, a inclinação da superfície frontal ou da retaguarda é indicada pela relação do lado horizontal de um triângulo retângulo imaginário ao lado vertical desse triângulo. O comprimento deste supõe-se ser em regra 12 centímetros. Deste modo, a inclinação de uma superfície pode ser dada como $1\frac{1}{2} : 12$.

O ângulo que a superfície forma com a vertical é aquele de tangente igual à relação que se acaba de indicar. Para uma inclinação de $1\frac{1}{2} : 12$, a tangente do ângulo seria $\frac{1,5}{12} = 0,125$.

EXERCÍCIOS

1. No intuito de determinar a distância CB (figura 39) através de um curso de água, foi traçada a linha CA em ângulo reto com CB, e a distância CA igual a 100 metros. Em seguida, mediu-se o ângulo CAB, verificando-se que era de 50,3°. Qual é a distância CB?

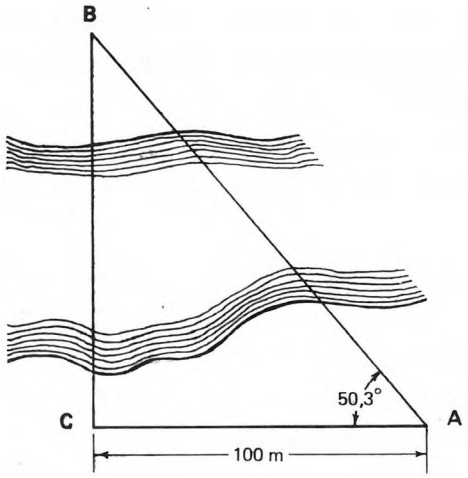


Fig. 39

Resposta: 120,5 m.

2. A inclinação da superfície da retaguarda de uma represa é de 2 : 12. Quanto mede em graus o ângulo, que a superfície forma com a vertical?

Resposta: 9,5°

3. Um cano condutor de água é colocado num declive de 5,5 por cento; isto é, a relação da distância vertical entre dois pontos do fundo do cano para a distância horizontal entre os mesmos dois pontos é 0,055. Calcule:
   a) o ângulo que o cano forma com a horizontal;
   b) o comprimento de cano necessário para uma distância horizontal de 2,764 m;
   c) a distância vertical entre os pontos do fundo do cano nas extremidades dessa distância horizontal.

Resposta: a) 3,1°
b) 2,768 m
c) 149,7 m

4. Demonstre que a base (lado desigual) de um triângulo isósceles é igual a duas vezes o produto de qualquer dos lados iguais pelo seno da metade do ângulo oposto à base.

Funções de ângulos superiores a 90°
Medição de ângulos

41. Explicações Preliminares

Cada uma das seis funções trigonométricas comuns de um ângulo agudo pode ser definida como a relação entre dois lados de um triângulo retângulo, do qual o ângulo dado faz parte.
Quando o ângulo dado é maior que 90°, não é possível formar um triângulo retângulo, pois em qualquer triângulo retângulo um ângulo mede 90° e os outros dois são agudos. Porém, as funções de ângulos maiores que 90° podem ser expressas como relações dos lados de triângulos retângulos, podendo deduzir-se fórmulas a partir dessas funções e das dos ângulos agudos. Em primeiro lugar, é necessário explicar os princípios em que se baseiam essas relações.

42. Geração de um Ângulo

Na realidade um ângulo é formado por duas linhas que se interceptam, que são os lados do ângulo. Na figura 40 as linhas que se interceptam, OP e OP_1, formam o ângulo POP_1 no vértice, ou ponto de intersecção O.

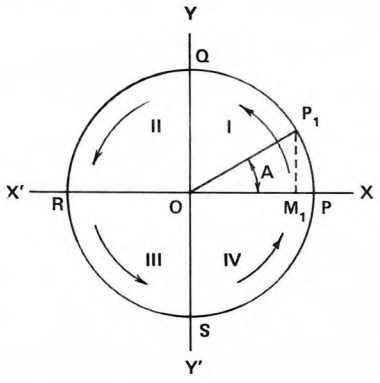


Fig. 40

Podemos considerar que um ângulo é gerado por uma linha que gira em qualquer comprimento em torno de uma das suas extremidades, que é o vértice.

Vamos supor, por exemplo, que o ângulo POP_1 é gerado, rodando a linha OP em torno de O, na direção oposta ao movimento dos ponteiros do relógio, conforme a seta está indicando. *A linha que se imagina em movimento recebe o nome de geratriz.*

As posições inicial e final da geratriz na sua rotação imaginária representam os lados do ângulo gerado. A posição inicial é o lado inicial do ângulo e a final o lado terminal.

Assim, no caso do ângulo POP_1, OP é considerado o lado inicial e OP_1 o lado terminal.

Direitos reservados

43. Grandeza de um Ângulo

Se uma geratriz se movesse desde o lado inicial de um ângulo até o seu lado terminal, cada ponto da linha descreveria um arco de círculo. O número de graus de qualquer um desses arcos entre o lado inicial e o terminal de um ângulo é a medida do ângulo.

Se uma geratriz se desloca desde a posição *OP* e roda em torno do ponto O até a posição final *OQ* ela forma um ***ângulo reto,*** que mede ***90°***.
Se o lado inicial do ângulo for *OP* e o terminal *OR,* ela se encontra na horizontal *XX'* formando o ângulo *POR* que mede ***180°.***
Se a geratriz rodar desde o lado inicial *OP,* na mesma direção indicada pelas setas, e se o lado terminal for *OS,* ela formará o ângulo *POS* que mede ***270°.***
Por último, se a geratriz efetuar uma ***revolução completa,*** de modo que os lados inicial e terminal coincidam, o ângulo medirá ***360°.***
Num problema prático, os lados de um ângulo podem estar em qualquer plano e não é necessário que um dos lados seja horizontal. E também, com relação à medida de um ângulo, qualquer um dos lados pode ser considerado como inicial. Veja o ângulo agudo formado por OP e OP_1. Ele tem a mesma medida, quer tenha sido gerado no sentido horário ou anti-horário, movendo-se as posições das linhas OP_1 para OP ou OP para OP_1.
Mas, para se desenvolver relações entre as funções trigonométricas de ângulos superiores a 90° e as de ângulos agudos, costuma-se sempre imaginar que o ***lado inicial de cada ângulo é horizontal,*** e que a ***geratriz de seu ângulo movimenta-se para a esquerda.*** A direção em que a linha se movimenta deve ser levada em consideração.

44. Ângulos Positivos e Negativos

Quando a geratriz se desloca no sentido ***anti-horário*** (sentido contrário ao movimento dos ponteiros do relógio), dizemos que o ângulo é ***positivo.*** Se a geratriz se desloca no sentido ***horário*** (mesmo sentido que o movimento dos ponteiros do relógio) dizemos que o ângulo é ***negativo.***

Na figura 40, temos o ângulo POS. Se não especificarmos sua direção, o seu valor tanto pode ser +270° como −90°. Se a direção for no sentido ***anti-horário,*** a linha OP deslocará até OS e o ângulo medirá 270°. Se o sentido fosse ***horário,*** a linha OP se deslocaria até OS, e o ângulo mediria 90°. ***Na resolução de triângulos, todos os lados são tomados como positivos.***

45. Quadrantes

Na figura 40, a linha horizontal XX' e a perpendicular YY' através do ponto O dividem o plano em ***quatro partes*** chamadas ***quadrantes.***
Eles são designados por primeiro, segundo, terceiro e quarto quadrantes. E a seqüência é determinada pela direção, segundo a qual um ângulo positivo seria gerado a partir da

Direitos reservados

linha horizontal como lado inicial.

Na figura 40, temos:

$X\hat{O}Y$ (1.º quadrante)
$Y\hat{O}X'$ (2.º quadrante)
$X'\hat{O}Y'$ (3.º quadrante)
$Y'\hat{O}X$ (4.º quadrante)

Como admitimos que o lado inicial de todos os ângulos está na linha horizontal, entre o quarto e primeiro quadrantes, dizemos que um ângulo está situado em determinado quadrante quando o seu lado terminal estiver nesse quadrante.

Portanto, os ângulos inferiores a 90° encontram-se no primeiro quadrante; entre 90° e 180° no segundo; entre 180° e 270° no terceiro; e entre 270° e 360° no quarto. Observe a figura 41.

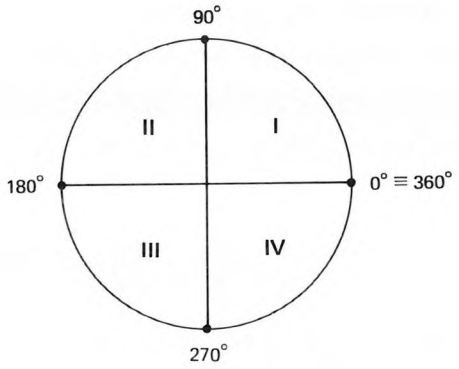


Fig. 41

Triângulos retângulos para a determinação de funções de ângulos superiores a 90°

46. Posições dos triângulos retângulos empregados

As funções do ângulo agudo POP_1 ou $\hat{A}$, na figura 40, são relações dos lados de qualquer triângulo retângulo de que esse ângulo faça parte.

Vamos traçar a perpendicular P_1M_1 ao lado inicial OP do ângulo e teremos o triângulo M_1OP_1. Daqui, temos então as seis funções comuns de A que podem exprimir-se pelas seguintes relações:

$$\text{sen } A = \frac{\text{lado oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{M_1P_1}{OP_1}$$

$$\cos A = \frac{\text{lado adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{OM_1}{OP_1}$$

$$\text{tg } A = \frac{\text{lado oposto}}{\text{lado adjacente}} = \frac{M_1P_1}{OM_1}$$

$$\text{cotg } A = \frac{\text{lado adjacente}}{\text{lado oposto}} = \frac{OM_1}{M_1P_1}$$

$$\sec A = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{lado adjacente}} = \frac{OP_1}{OM_1}$$

$$\text{cosec } A = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{lado oposto}} = \frac{OP_1}{M_1P_1}$$

Direitos reservados

Cada função de qualquer ângulo maior que 90° é definida por uma relação semelhante entre dois lados de um triângulo retângulo. Porém, o ângulo dado não constitui uma parte do triângulo retângulo considerado.

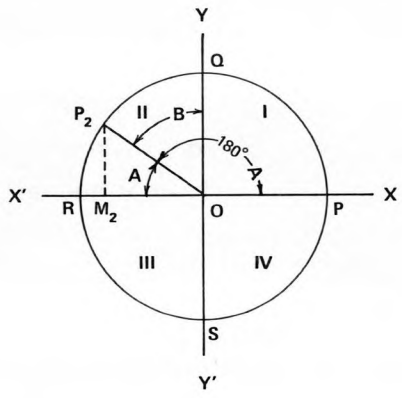


Fig. 42

No caso do ângulo POP_2 da figura 42, que termina no segundo quadrante, as funções podem ser definidas como relações dos lados do triângulo retângulo P_2OM_2. Este triângulo foi formado, traçando-se a perpendicular P_2M_2 ao prolongamento OX' do lado inicial OP do ângulo.

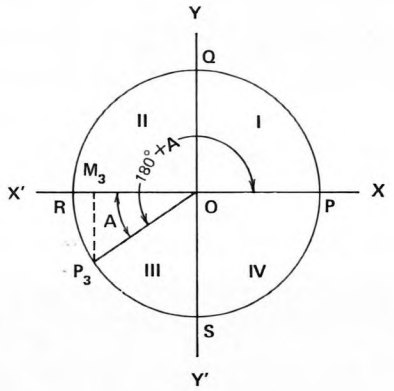


Fig. 43

Da mesma forma, ***para determinar as funções do ângulo POP_3 da figura 43, que termina no terceiro quadrante, consideramos o triângulo M_3OP_3.*** Este triângulo foi construído traçando-se a perpendicular P_3M_3 ao prolongamento OX'.

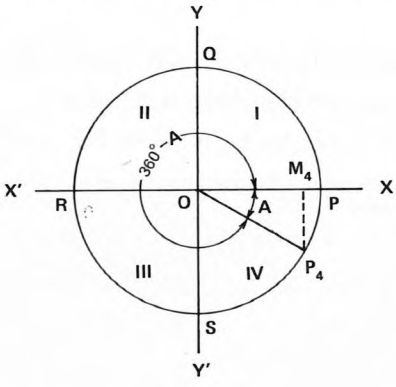


Fig. 44

No caso do ***ângulo POP_4*** da figura 44, que termina no ***quarto quadrante,*** o ***triângulo retângulo M_4OP_4*** foi construído traçando-se a perpendicular P_4M_4 ao lado inicial OX. Você deve notar que, para um ângulo de qualquer quadrante, o triângulo retângulo é construído, traçando-se uma perpendicular ao lado inicial, ou ao seu prolongamento.

Direitos reservados

Na aplicação das definições de funções, temos que:

- a ***hipotenusa*** é a distância no lado terminal do vértice do ângulo à perpendicular;
- o ***lado oposto ao ângulo*** é o comprimento da perpendicular;
- o ***lado adjacente*** é a distância no lado inicial, ou no seu prolongamento, desde o vértice ao pé da perpendicular.

Por exemplo:

sen POP_2 (Fig. 42) $= \frac{\text{lado oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{M_2P_2}{OP_2}$

tg POP_3 (Fig. 43) $= \frac{\text{lado oposto}}{\text{lado adjacente}} = \frac{M_3P_3}{OM_3}$

cos POP_4 (Fig. 44) $= \frac{\text{lado adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{OM_4}{OP_4}$

47. Funções positivas e negativas

Se os ângulos POP_1, POP_2, POP_3 e POP_4 das figuras 40, 42, 43 e 44, respectivamente, estiverem relacionados de tal modo que o lado terminal forme o mesmo ângulo agudo A com a linha XX', as funções de nome idêntico dos quatro ângulos dados terão os mesmos valores numéricos.

Existem quatro ângulos, um em cada quadrante, cujas funções são numericamente iguais.

Para que os ângulos e suas funções possam ser comparados mais rapidamente, todos os ângulos são mostrados num único diagrama da figura 45. E os pontos P_1, P_2, P_3 e P_4 nos seus lados terminais estão localizados à mesma distância do vértice O.

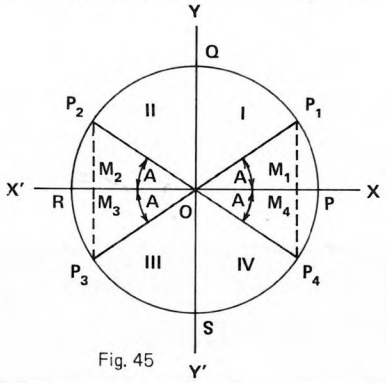


Fig. 45

Como os quatro triângulos retângulos P_1OM_1, P_2OM_2, P_3OM_3 e P_4OM_4 têm ângulos agudos e hipotenusas iguais, estes quatro triângulos são iguais. Conseqüentemente, os seus respectivos catetos são também iguais, e a relação entre dois lados quaisquer dos triângulos é a mesma.

Exemplo 1

A relação $\frac{M_2P_2}{OP_2}$ é igual à $\frac{M_1P_1}{OP_1}$.

Exemplo 2

A relação $\frac{M_3P_3}{OM_3}$ é igual à $\frac{M_1P_1}{OM_1}$.

Direitos reservados

Quando as funções de ângulos maiores que 90° são consideradas como as relações entre os lados de triângulos retângulos, costuma-se distinguir as distâncias positivas e negativas.

A ***hipotenusa*** de qualquer triângulo, ou o lado terminal do ângulo considerado, é ***positiva.***
As ***distâncias horizontais*** que se estendem para a ***direita do vértice*** são ***positivas,*** enquanto que as que se estendem para a ***esquerda*** são ***negativas.***
As ***distâncias verticais para cima*** da linha horizontal, na qual se situa o lado inicial do ângulo, são ***positivas,*** enquanto que as que se estendem ***para baixo*** são ***negativas.***

Exemplo 1
Nas figuras 40 e 45, tanto OM_1 como M_1P_1 são positivas.
Exemplo 2
Nas figuras 42 e 45, OM_2 é negativa, enquanto que M_2P_2 é positiva.
Exemplo 3
Nas figuras 43 e 45, tanto OM_3 como M_3P_3 são negativas.
Exemplo 4
Nas figuras 44 e 45, OM_4 é positiva, enquanto que M_4P_4 é negativa.
Veja a figura 46, onde estão representadas as distâncias positivas e negativas.

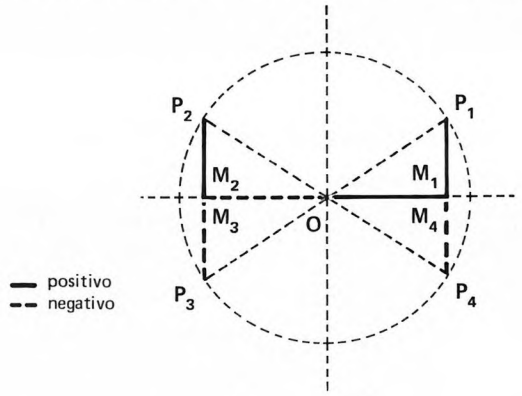


Fig. 46

Fórmulas gerais para funções de ângulos maiores que 90°

48. Sinais das Funções

Primeiro Quadrante
Para um ângulo do primeiro quadrante, tanto o lado oposto como o adjacente são positivos. Portanto, todas as funções desse ângulo são positivas.

Segundo Quadrante
Para um ângulo do segundo quadrante, o lado oposto é positivo e o adjacente negativo. O seno, que é $\frac{\text{lado oposto}}{\text{hipotenusa}}$, e a cossecante, $\frac{\text{hipotenusa}}{\text{lado oposto}}$, são positivos, porque tanto o

Direitos reservados

numerador como o denominador de cada fração são positivos.
O cosseno, que é $\frac{\text{lado adjacente}}{\text{hipotenusa}}$, e a cotangente, $\frac{\text{lado adjacente}}{\text{lado oposto}}$, são negativos, porque os numeradores são negativos e os denominadores positivos.
A tangente, que é $\frac{\text{lado oposto}}{\text{lado adjacente}}$, e a secante, $\frac{\text{hipotenusa}}{\text{lado adjacente}}$, são negativas, porque os numeradores são positivos e os denominadores, negativos.

Terceiro Quadrante

Se você seguir o mesmo raciocínio empregado anteriormente, para um ângulo no terceiro quadrante, verificará que o seno, cosseno, secante e cossecante são negativos. E a tangente e cotangente são positivas.

Quarto Quadrante

E do mesmo modo que nos casos anteriores, para um ângulo do quarto quadrante, notará que seno, tangente, cotangente e cossecante são negativos. E o cosseno e secante são positivos.
Para resumir, veja os sinais das várias funções de ângulos nos quatro quadrantes reunidos na Tabela II.

TABELA II

Sinais das funções

Função	Quadrante			
	Primeiro	Segundo	Terceiro	Quarto
	Sinal da Função			
Seno	+	+	−	−
Cosseno	+	−	−	+
Tangente	+	−	+	−
Cotangente	+	−	+	−
Secante	+	−	−	+
Cossecante	+	+	−	−

49. Funções de ângulos entre 90° e 180°

Antes de iniciarmos com as explicações deste capítulo, é necessário que você saiba as seguintes definições:

Ângulos Complementares são aqueles cuja soma das medidas dos dois ângulos é 90°.
Ângulos Suplementares são aqueles cuja soma das medidas dos dois ângulos é 180°.

Como cada função do ângulo POP_2 da figura 42 pode ser definida como uma relação entre dois lados do triângulo retângulo P_2OM_2, as funções do ângulo POP_2 têm os mesmos valores numéricos das correspondentes funções do ângulo agudo A.
Da mesma forma, como os ângulos POP_2 e A são suplementares, o ângulo dado POP_2

pode ser expresso como 180° − A.
Relações semelhantes existem entre as funções de qualquer ângulo do segundo quadrante e as funções do seu ângulo suplementar.

As funções de qualquer ângulo situado entre 90° e 180° podem ser expressas em relação às funções do ângulo agudo suplementar do ângulo dado.

Se o ângulo POP_2 for expresso por 180° − A, poderemos escrever as seguintes relações entre as funções de 180° − A e as de A:

$$\text{sen } (180° - A) = \text{sen } A$$

$$\cos (180° - A) = -\cos A$$

$$\text{tg } (180° - A) = -\text{tg } A$$

$$\text{cotg } (180° - A) = -\text{cotg } A$$

$$\sec (180° - A) = -\sec A$$

$$\text{cosec } (180° - A) = \text{cosec } A$$

Qualquer função de um ângulo entre 90° e 180° é numericamente igual ao valor da mesma função para o ângulo agudo suplementar. Quanto ao sinal, este pode ser determinado de acordo com a tabela "Sinais das Funções".

As fórmulas da tg, cotg, sec e cosec também podem ser obtidas a partir das fórmulas para o seno e cosseno. Deste modo, tem-se:

$$\text{tg } (180° - A) = \frac{\text{sen } (180° - A)}{\cos (180° - A)} = \frac{\text{sen } A}{-\cos A} = -\text{tg } A$$

$$\text{cotg } (180° - A) = \frac{\cos (180° - A)}{\text{sen } (180° - A)} = \frac{-\cos A}{\text{sen } A} = -\text{cotg } A$$

$$\sec (180° - A) = \frac{1}{\cos (180° - A)} = \frac{1}{-\cos A} = -\sec A$$

$$\text{cosec } (180° - A) = \frac{1}{\text{sen } (180° - A} = \frac{1}{\text{sen } A} = \text{cosec } A$$

Para se determinar o ângulo agudo A, cujas funções são numericamente iguais às de um ângulo obtuso dado, ou 180° − A, basta igualar 180° − A ao ângulo dado e resolver em ordem a A, como no seguinte caso:

Exemplo

Ache o valor de:

a) seno 140°.

b) cos 140°.

Solução

a) Temos que: $180° - A = 140°$

$$A = 180° - 140°$$

$$A = 40°$$

Em seguida, pela fórmula do seno de um ângulo entre 90° e 180°, vem:

$$\text{sen}\,(180° - A) = \text{sen}\,A$$

$$\text{sen}\,140° = \text{sen}\,40°$$

De acordo com a "Tábua das Funções Trigonométricas Naturais", teremos:

$$\text{sen}\,40° = 0{,}64279$$

$$\underline{\text{sen}\,140° = 0{,}64279}$$

b) Para determinarmos o valor do cos 140°, vamos aplicar a fórmula do cosseno de um ângulo entre 90° e 180°:

$$\cos(180° - A) = -\cos A$$

$$\cos 140° = -\cos 40°$$

De acordo com a "Tábua das Funções Trigonométricas Naturais", teremos:

$$\cos 40° = 0{,}76604$$

$$\underline{-\cos 40° = -0{,}76604 = \cos 140°}$$

As funções de um ângulo entre 90° e 180° também podem ser determinadas, considerando-se o ângulo dado como a soma de 90° e um certo ângulo agudo.

Assim, o ângulo POP_2 da figura 42 pode ser considerado como a soma de 90° e o ângulo QOP_2, ou 90° + B.

As funções de QOP_2 ou B podem ser expressas prontamente em relação às funções do ângulo A, que é complemento de B, porque ***qualquer função de um ângulo agudo é igual à função complementar do ângulo complemento.***

Exemplo:

$\text{sen}\,(180° - A) = \text{sen}\,A$

Nesse caso, como $180° - A = 90° + B$, teremos: $\text{sen}\,(180° - A) = \text{sen}\,(90° + B)$.

Logo, podemos concluir que: $\text{sen}\,(90° + B) = \text{sen}\,A$.

Da mesma forma, como $\text{sen}\,A = \cos B$, teremos: $\text{sen}\,(90° + B) = \cos B$.

As várias funções do ângulo 90° + B podem ser expressas em relação às funções de B, substituindo 180° − A por 90° + B, e também as funções de A pelas complementares de B.

Direitos reservados

Fazendo-se estas substituições nas fórmulas apresentadas no início deste capítulo, teremos:

$$\text{sen } (90° + B) = \cos B$$

$$\cos (90° + B) = -\text{sen } B$$

$$\text{tg } (90° + B) = -\text{cotg } B$$

$$\text{cotg } (90° + B) = -\text{tg } B$$

$$\text{sec } (90° + B) = -\text{cosec } B$$

$$\text{cosec } (90° + B) = \text{sec } B$$

50. Funcões de Ângulos entre 180° e 270°

Quando um ângulo está no terceiro quadrante, como POP_3 da figura 43, as suas funções são relações entre os lados do triângulo retângulo P_3OM_3. Porém, essas relações são também funções do ângulo agudo A que é igual a $POP_3 - 180°$. Então, as funções de um ângulo dado entre 180° e 270° podem ser expressas em relação às funções de um ângulo agudo, que se acha subtraindo 180° do ângulo dado.
Se o ângulo dado for expresso como 180° + A, poderemos escrever as seguintes relações entre as funções de 180° + A e as de A:

$$\text{sen } (180° + A) = -\text{sen } A$$

$$\cos (180° + A) = -\cos A$$

$$\text{tg } (180° + A) = \text{tg } A$$

$$\text{cotg } (180° + A) = \text{cotg } A$$

$$\text{sec } (180° + A) = -\text{sec } A$$

$$\text{cosec } (180° + A) = -\text{cosec } A$$

Direitos reservados

Qualquer função de um ângulo entre 180° e 270° é numericamente igual à função do mesmo nome do ângulo agudo obtido subtraindo 180° do ângulo dado. Quanto ao sinal, este pode ser determinado de acordo com a tabela "Sinais das Funções".

Exemplo
Determinar o valor da tg 220°.

Solução
Neste caso, $180° + A = 220°$

$A = 220° - 180°$

$A = 40°$

Empregando a fórmula da tangente para um ângulo entre 180° e 270°, teremos:
$\text{tg}\,(180° + A) = \text{tg}\,A$
$\text{tg}\,220° = \text{tg}\,40° = 0{,}83910$

Pela tabela "Sinais das Funções", a tangente de um ângulo do III quadrante é positiva. Isto está de acordo com o resultado obtido.

51. Funções de ângulos entre 270° e 360°

Para um ângulo no quarto quadrante, como POP_4 da figura 44, o triângulo retângulo, cujos lados determinam as funções do ângulo dado é P_4OM_4. Como as relações entre os lados desse triângulo retângulo são as do ângulo agudo A, que é igual a 360° − $-POP_4$, poderemos escrever as seguintes relações entre as funções de 360° − A e as de A:

$$\text{sen}\,(360° - A) = -\,\text{sen}\,A$$

$$\cos\,(360° - A) = \cos A$$

$$\text{tg}\,(360° - A) = -\,\text{tg}\,A$$

$$\text{cotg}\,(360° - A) = -\,\text{cotg}\,A$$

$$\sec\,(360° - A) = \sec A$$

$$\text{cosec}\,(360° - A) = -\,\text{cosec}\,A$$

Direitos reservados

Qualquer função de um ângulo entre 270° e 360° é numericamente igual à função do mesmo nome do ângulo agudo obtido subtraindo o ângulo dado de 360°. Quanto ao sinal, este pode ser determinado de acordo com a tabela "Sinais das Funções".

O ângulo obtido da subtração do ângulo dado de 360° chama-se ***explemento*** do ângulo dado.

Exemplo

Determine o valor da cotg 320°.

Solução

Como $360° - A = 320°$,

$A = 360° - 320°$

$A = 40°$

Pela fórmula da cotangente de um ângulo entre 270° e 360°, teremos:

$\text{cotg}\,(360° - A) = -\,\text{cotg}\,A$

$\text{cotg}\,320° = -\,\text{cotg}\,40° = -1{,}19175$

De acordo com a tabela "Sinais das Funções", a cotangente de um ângulo do IV quadrante é negativa. Isto está de acordo com o resultado obtido.

EXERCÍCIOS

Verifique os seguintes valores:

a) sen $110° = +0{,}93969$
b) cos $110° = -0{,}34202$
c) sen $212{,}5° = -0{,}53730$
d) cotg $212{,}5° = +1{,}56969$
e) tg $284{,}3° = -3{,}92316$
f) cos $164{,}7° = -0{,}96456$
g) cos $195{,}3° = -0{,}96456$
h) tg $98{,}1° = -7{,}02637$
i) sen $335{,}5° = -0{,}41469$
j) cotg $126{,}2° = -0{,}73189$

52. Como se acha um ângulo maior que 90° a partir da função

Considerando-se as explicações que vimos, concluímos que, entre 0° e 360°, há dois ângulos que correspondem a qualquer função dada, positiva ou negativa.

De qualquer modo, os quadrantes, nos quais os ângulos terminam, são indicados pelo nome da função dada e o seu sinal. E esses quadrantes podem ser determinados rapidamente consultando-se a Tabela II.

Como conseqüência, sabemos que se a função dada for um seno negativo, o ângulo pedido deverá estar no terceiro ou quarto quadrante. E um ângulo de cosseno negativo deverá estar no segundo ou terceiro quadrante.

Na prática, as condições do problema revelam normalmente qual dos dois ângulos correspondentes a uma função dada é o correto. No entanto, em alguns casos, torna-se necessário considerar ambos os ângulos.

Direitos reservados

De um modo geral, o procedimento para determinar o ângulo ou ângulos correspondentes a uma função dada pode ser resumido no seguinte:

I - Despreza-se o sinal da função dada e procura-se o ângulo agudo correspondente ao valor numérico da função.

II - Considera-se o sinal e determina-se da Tabela II, ou por análise, os dois quadrantes nos quais os ângulos pedidos podem se encontrar.

III - Calcula-se o ângulo ou ângulos pedidos. Se está no segundo quadrante, é igual a 180° menos o ângulo agudo determinado na alínea I. Se está no terceiro quadrante, é igual a 180° mais o ângulo agudo. Se está no quarto quadrante, é igual a 360° menos o ângulo agudo.

Exemplo 1

Ache o ângulo superior a 90°, cujo seno é 0,86834.

Solução

De acordo com a Tábua das Funções Trigonométricas Naturais, o ângulo agudo de seno igual a 0,86834 é 60,3°. Conforme a Tabela II, um ângulo de seno positivo deve estar no primeiro ou segundo quadrantes. Como o ângulo pedido é maior que 90°, está no segundo quadrante. Portanto, teremos:

$180° - 60,3° = 119,7°$

Exemplo 2

Determine os dois ângulos para os quais o cosseno é −0,80730.

Solução

O ângulo agudo de cosseno igual a +0,80730 é 36,2°.

Como um ângulo de cosseno negativo está no segundo ou terceiro quadrantes, o do cosseno igual a −0,80730 tanto pode ser $180° - 36,2° = 143,8°$ como $180° + 36,2° = 216,2°$. Portanto, os dois ângulos são: 143,8° e 216,2°.

Exemplo 3

Ache o ângulo menor que 180°, cuja cotangente é −0,72078.

Solução

O ângulo agudo de cotangente igual a 0,72078 é 54,2°.

Como a função dada é negativa, o ângulo pedido deve estar no segundo quadrante, sendo pois, obtuso e medindo: $180° - 54,2° = 125,8°$

EXERCÍCIOS

Ache os dois ângulos positivos A correspondentes a cada uma das seguintes funções:

a) sen A = +0,42262
b) sen A = −0,85401
c) cos A = −0,60135
d) tg A = +0,74900
e) cos A = +0,84805
f) tg A = −1,30323

Respostas:
a) 25° e 155°
b) 238,7° e 301,3°
c) 127° e 233°
d) 36,9° e 216,9°
e) 32° e 328°
f) 127,5° e 307,5°

Direitos reservados

53. Funções de Ângulos Negativos

Todo ângulo negativo tem o mesmo lado inicial e terminal que o ângulo positivo igual à diferença entre 360° e o ângulo negativo.
Por exemplo, uma geratriz alcançará a mesma posição final, se girar desde uma posição dada através de um ângulo negativo de 45°, ou através de outro ângulo positivo de 360° − 45° = 315°. Portanto, podemos afirmar o seguinte:

Cada função de um ângulo dado negativo é igual à mesma função do ângulo positivo achado pela diferença numérica entre 360° e o ângulo dado.

Em outras palavras, se −X for qualquer ângulo negativo, teremos:
sen (−X) = sen (360° − X).

Porém, pela fórmula do seno de ângulos entre 270° e 360°, vem:
sen (360° − X) = −sen X.

Então, teremos: $\sin(-X) = -\sin X.$

Do mesmo modo, podemos demonstrar que:

$$\cos(-X) = \cos X$$

$$\operatorname{tg}(-X) = -\operatorname{tg} X$$

$$\operatorname{cotg}(-X) = -\operatorname{cotg} X$$

$$\sec(-X) = \sec X$$

$$\operatorname{cosec}(-X) = -\operatorname{cosec} X$$

Direitos reservados

Exame

NOÇÕES DE TRIGONOMETRIA

Referência
018-A

Observações Para o Aluno

- Antes de responder as questões você deverá ter feito um estudo minucioso e completo desta lição.
- Agora, leia cada questão até compreender bem o que se pede.
- Cada questão apresenta várias soluções. Apenas uma solução é correta.
- Em cada questão indique a solução que você julgar correta e, a seguir, transcreva, com atenção, as suas respostas para a Folha de Respostas, anexa.

Usando a "Tábua das Funções Trigonométricas Naturais", determine o valor das seguintes funções:

1. sen 22,7°
   a) 0,38591 b) 0,92254 c) 0,92653 d) 0,38752

2. cos 44,9°
   a) 0,71813 b) 0,70834 c) 0,69591 d) 0,96907

3. sen 49,3°
   a) 0,65210 b) 0,76267 c) 0,75813 d) 0,64679

4. tg 11,6°
   a) 4,95945 b) 4,87162 c) 0,20164 d) 0,20527

Determine o valor do ângulo agudo A, com aproximação de décimos, para as seguintes funções, usando a "Tábua das Funções Trigonométricas Naturais":

5. sen A = 0,30902
   a) A = 18° b) A = 71° c) A = 19° d) A = 18,1°

6. cotg A = 0,52501
   a) A = 27,3° b) A = 62,7° c) A = 63° d) A = 62,3°

7. cos A = 0,77273
   a) A = 39,4° b) A = 39,6° c) A = 50° d) A = 50,6°

8. tg A = 6,69116
   a) A = 8° b) A = 8,5° c) A = 8,6° d) A = 81,5°

Expresse cada uma das seguintes funções na mesma função de um ângulo agudo positivo. Por exemplo: cos 165° = − cos 15°.

9. sen 175°
   a) + sen 5° b) − sen 5° c) + sen 85° d) − sen 85°

10. cos 215°
    a) − cos 35° b) + cos 35° c) + cos 55° d) − cos 55°

11. tg 155°
    a) − tg 25° b) + tg 25° c) + tg 65° d) − tg 65°

12. cotg 300°
    a) + cotg 60° b) + cotg 30° c) − cotg 30° d) − cotg 60°

Expresse cada uma das seguintes funções na mesma função de um ângulo agudo positivo. Por exemplo: tg (–22°) = – tg 22°.

13. sen (–45°)
    a) – sen 225° b) – sen 45° c) – sen 245° d) + sen 45°

14. cos (–75°)
    a) – cos 75° b) + cos 75° c) + cos 15° d) – cos 15°

15. tg (–210°)
    a) + tg 150° b) – tg 150° c) + tg 30° d) – tg 30°

16. sen (–300°)
    a) – sen 60° b) + sen 60° c) + sen 30° d) – sen 30°

17. Num triângulo retângulo ABC, se a = 9 e b = 6, qual dos seguintes valores é igual a B?
    a) 33,7° b) 56,3° c) 48,2° d) 41,8°

18. A base e a altura de um triângulo obliquângulo são $9\frac{1}{2}$ e 12 centímetros, respectivamente; e o ângulo que um dos lados forma com a base tem 79,4°. Calcule o perímetro do triângulo.
    a) 35,7 cm b) 37,5 cm c) 25,7 cm d) 34,7 cm

Direitos reservados