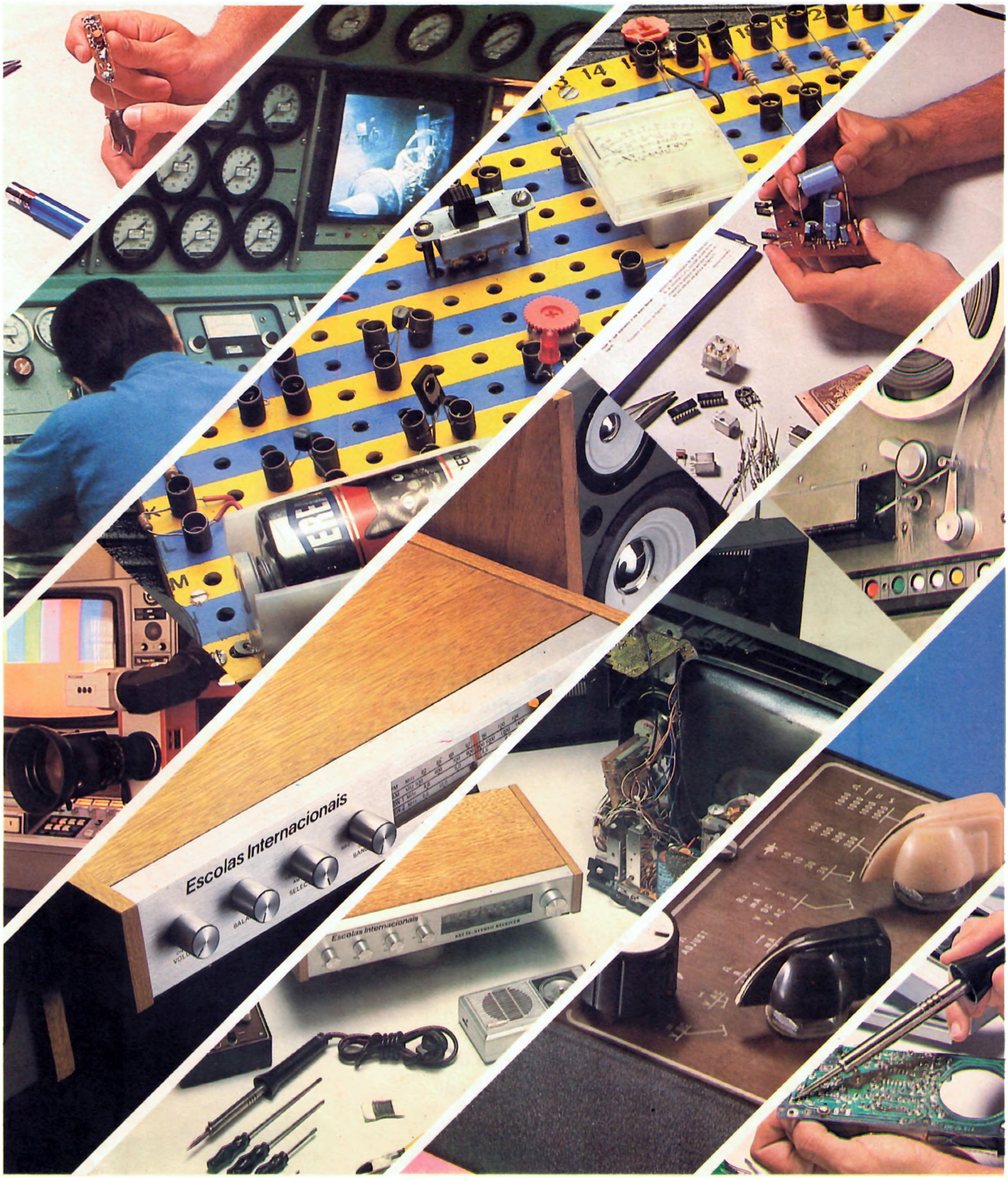
RAZÕES E PROPORÇÕES



Escolas Internacionais

Referência
011

Conteúdo didático programado e elaborado pela equipe técnico-pedagógica das Escolas Internacionais.

Supervisão geral das equipes técnica e docente de "Methodos Consultoria de Eletrônica Sociedade Civil".

Copyright
International Textbook Company
ICS — International Correspondence Schools
Scranton, Pennsylvania — USA
Copyright
Direitos exclusivos no Brasil para

ESCOLAS INTERNACIONAIS ®
São Paulo, SP — Brasil

Reservados todos os direitos. Proibida a reprodução total ou parcial do texto e das ilustrações por qualquer forma ou meio, sem prévia autorização por escrito dos detentores do copyright. Edições ou reproduções não autorizadas estarão sujeitas às penalidades da Lei.

Impresso no parque gráfico das
Escolas Internacionais do Brasil

Índice Geral

RAZÕES E PROPORÇÕES

Razão ou relação

2. Razão ou relação 9
3. Expressão da razão 9
4. Termos da razão 9
5. Razão simples 10
6. Razão direta e inversa 10
7. Propriedades das razões 11
8. Multiplicação de uma razão por um número inteiro 11
9. Multiplicação de razões 11
10. Divisão de razões 12
11. Redução de razões à sua expressão mais simples 12
12. Regras para se achar as razões direta e inversa de dois números 13
13. Razões compostas 15
14. Regra para se calcular uma razão composta 16

Proporções

15. Proporção 17
16. Termos 18
17. Princípio fundamental 18
18. Como descobrir um termo desconhecido numa proporção? 18
19. Transformações de uma proporção 20
20. Recíproca do princípio fundamental 21
21. Quarta proporcional 21
22. Proporção contínua — média proporcional e terceira proporcional 22
23. Propriedades das proporções 22
24. Proporção prolongada ou proporção múltipla. 25
25. Propriedade das proporções prolongadas ou múltiplas 25

Números proporcionais

26. Proporcionalidade 26
27. Sucessões de números diretamente proporcionais 27
28. Sucessões de números inversamente proporcionais 28
29. Propriedades dos números proporcionais 28
30. Eliminação de denominadores 29

Grandezas proporcionais

31. Formas de proporcionalidade 30
32. Grandezas diretamente proporcionais 30
33. Grandezas inversamente proporcionais 31
34. Verificação da proporcionalidade por meio de exemplos 32
35. Problemas relativos à proporcionalidade simples 33
36. Proporcionalidade composta 36
37. Forma da questão relativa à proporcionalidade 37
38. Princípio fundamental para resolução de problemas de proporcionalidade composta. 37
39. Método de redução à unidade 40
40. Divisão proporcional 42

Regra de três

41. Tipos de regra de três 44
42. Regra de três simples direta 44
43. Regra de três simples inversa 44
44. Regra de três composta 45
45. Método de redução à unidade 47
46. Porcentagem 48
47. Transformação de uma razão em forma de porcentagem 48
48. Transformação de porcentagem em razão 48
49. Cálculo de porcentagem 49
50. Regra prática para calcular porcentagem 50

Juros simples

51. Definição 51
52. Juros simples e compostos 52
53. Juros simples — Cálculo 52
54. Fórmula para cálculo de juros simples 52
55. Capital acumulado ou montante. 52
Exame 55

Razão ou Relação

1. Comparação de Grandezas

Para comparar duas grandezas, devemos obter a ***relação*** entre essas duas grandezas, ***dividindo uma grandeza pela outra.***

Para que você possa compreender bem isto, vamos utilizar os seguintes exemplos:

Exemplo 1:

Imagine que você queira saber o aumento da população de uma cidade, que tem 600.000 habitantes e que nesta cidade nasceram 12 000 crianças num ano. Para comparar esses dois valores (duas grandezas) você deve relacionar esses dois números. A quantidade das crianças nascidas em relação com a quantidade da população, expressa em números é: 12 000 ÷ 600 000.

Efetuando a divisão, teremos então:

$\frac{12\,000}{600\,000}$, e suprimindo os fatores comuns,

$$\frac{12}{600} = \frac{2}{100} = 2\%.$$

Portanto, o que se verifica é o aumento de 2 habitantes para cada 100 habitantes.

Exemplo 2:

Suponha agora, uma transmissão de movimento por meio de uma engrenagem de duas rodas dentadas, onde o ponto que verdadeiramente interessa é a velocidade que a roda conduzida adquirirá em relação com a velocidade da roda propulsora. Em outras palavras, a relação de voltas entre as duas rodas.

Imagine agora, que a roda propulsora tenha 28 dentes e a roda conduzida 7 dentes. A relação do número de dentes da roda propulsora com o número de dentes da roda conduzida é: 28 ÷ 7, ou seja $\frac{28}{7}$.

Podemos, portanto concluir que cada vez que a roda propulsora dá uma volta, a roda conduzida dá quatro voltas, pois a roda conduzida está contida 4 vezes na roda propulsora. Isto quer dizer que a roda conduzida gira 4 vezes mais rápido que a roda propulsora.

O mesmo sucederia se as rodas tivessem 56 e 14 dentes respectivamente. Você pode portanto concluir que o que interessa é o número de vezes que o número de dentes da roda menor está contido no número de dentes da roda maior.

Observe então como ficaria o quociente ou fração deste exemplo:

$$\frac{56}{14} = \frac{27}{8} = \frac{4}{1} = 4.$$

Portanto, a roda conduzida girará com uma velocidade 4 vezes maior do que a roda propulsora.

Exemplo 3:

Vamos supor agora, que um trem A percorre 90 km em 2 horas e 15 minutos, enquanto que um outro trem B percorre 108 km em 2 horas e 24 minutos.

Apenas com estes dados é difícil para se ter uma idéia exata da relação das velocidades entre os dois trens. Mas se disséssemos que o trem A percorre 40 km por hora e o trem B percorre 45 km por hora, a comparação seria mais fácil. E seria muito mais fácil se relacionássemos as velocidades dos dois trens, formando com elas uma fração e que a velocidade de A é $\frac{40}{45} = \frac{8}{9}$ da de B.
Esta expressão indica que enquanto o trem A percorre 8 km, o trem B percorrerá 9 km.
Estes três exemplos, são semelhantes a muitos outros que se apresentam diariamente na prática, e permitem formar uma idéia da importância que tem a comparação de grandezas e sua relação. Então como você pode ver, obtemos a relação sempre dividindo uma grandeza pela outra.

No primeiro exemplo, o aumento da população por natalidade, era a relação entre o número de nascimentos e o número de habitantes. Foi obtida pela divisão do primeiro número (12 000) pelo segundo (600 000).
Assim: $\frac{12\,000}{600\,000}$

No segundo exemplo, das rodas dentadas, você viu que queríamos calcular o valor do aumento da velocidade, e que para achá-lo dividimos o número 28, correspondente à primeira roda, pelo número 7, correspondente à segunda.
Assim: $\frac{28}{7}$

No terceiro exemplo, fizemos a comparação das velocidades dos trens pelo mesmo meio, dividindo a velocidade de um pela velocidade do outro.
Assim: $\frac{8}{9}$

Portanto, para se obter a relação entre 2 grandezas bastará dividi-las entre si. Apenas é necessário não fazer confusão ao interpretar os resultados.

Observe

No exemplo do aumento da população, se escrevêssemos:

$$\frac{600\,000}{12\,000} = \frac{100}{2}$$

estaríamos dizendo que para cada 100 habitantes nasceram 2, resultado igual ao já obtido.

No exemplo das rodas dentadas, se escrevêssemos:

$$\frac{14}{56} = \frac{1}{4}$$

estaríamos estabelecendo que o número de dentes da roda conduzida é $\frac{1}{4}$ dos que tem a roda propulsora.
Portanto, a velocidade desta será a quarta parte da roda conduzida, que é equivalente ao resultado já achado. Dizer que a velocidade da primeira é 1/4 da velocidade da segunda é o mesmo que dizer que a velocidade da segunda é quatro vezes a da primeira.

No exemplo dos trens, se efetuássemos a divisão ao contrário veríamos que a velocidade de B é igual a 9/8 da que tinha o trem A, resultado que é equivalente ao obtido.

2. Razão ou Relação

Conforme você pôde ver pelos exemplos anteriores, a dependência de duas grandezas fica perfeitamente estabelecida por meio da sua relação.

Relação ou Razão de duas grandezas é o quociente da sua divisão.

Portanto, nos três exemplos vistos no item anterior, obtivemos as seguintes razões ou relações:
no primeiro exemplo: $\frac{12}{600}$
no segundo exemplo: $\frac{28}{7}$
no terceiro exemplo: $\frac{8}{9}$

3. Expressão da razão

Uma razão pode ser expressa nas seguintes formas:
a) em forma de fração ordinária
b) empregando o sinal de divisão

Assim, a razão de "20 e 4", ou melhor, de "20 para 4", ou "20 está para 4" como geralmente se diz, será:

$$\frac{20}{4} \text{ ou } 20 \div 4$$

E qualquer uma das expressões deve ser lida assim:
"Razão ou relação de "20 para 4"
ou
Razão ou relação de "20 está para 4"

A razão de "4 está para 20" será escrita assim:

$$\frac{4}{20} \text{ ou } 4 \div 20$$

A razão de um número por outro, nada mais é do que o resultado da divisão do primeiro pelo segundo, qualquer que seja a forma pela qual esta divisão seja indicada.

4. Termos da razão

Os dois números que se comparam chamam-se ***termos da razão.***
Na razão 60 ÷ 12 ou $\frac{60}{12}$, os números 60 e 12 são os dois termos da razão. O primeiro chama-se antecedente e o segundo conseqüente. Quando escrevemos uma razão com a forma de uma fração, o numerador é o antecedente e o denominador o conseqüente.

Direitos reservados

Portanto, as palavras dividendo, numerador e antecedente têm o mesmo significado. O mesmo acontece com as palavras divisor, denominador e conseqüente. Também significam a mesma coisa as palavras quociente, fração e razão.

Fração		Razão
numerador	⟷ 60 ⟷	antecedente
denominador	⟷ 12 ⟷	conseqüente

5. Razão Simples

Quando uma razão tem um único antecedente e um único conseqüente, chama-se razão simples.
Assim, $60 \div 12$ ou $\frac{60}{12}$

é uma razão simples.

6. Razão Direta e Inversa

Como você viu na comparação de duas grandezas, podemos dividir a primeira pela segunda ou a segunda pela primeira, obtendo-se desta forma duas razões distintas.
Se considerarmos uma destas razões como direta, a outra será logicamente a sua inversa.

Explicando e Exemplificando

Assim nos três exemplos vistos, se considerarmos como diretas as relações

$$\frac{12}{600}, \frac{4}{1}, \frac{8}{9}, \frac{\text{antecedente}}{\text{conseqüente}}$$

as suas inversas serão:

$$\frac{600}{12}, \frac{1}{4}, \frac{9}{8}, \frac{\text{antecedente}}{\text{conseqüente}}$$

Conclusão:
Duas razões são inversas quando o antecedente de uma é o conseqüente da outra e vice-versa.

Direitos reservados

7. Propriedades das razões

Lembre-se que uma razão nada mais é do que uma fração, e que, portanto, as propriedades das razões são as mesmas das frações ordinárias, e as operações de cálculo se efetuarão do mesmo modo.
Assim, se a razão de "18 está para 3" é $\frac{18}{3}$, é evidente que os seus dois termos podem ser multiplicados ou divididos por um mesmo número, sem que o valor da razão se altere.

Exemplificando:

$$\frac{18}{3} = \frac{18 \times 4}{3 \times 4} = \frac{72}{12} = 6 \text{ e } \frac{18}{3} = \frac{18 \div 3}{3 \div 3} = 6$$

em qualquer um dos casos, a razão fica igual a 6.

8. Multiplicação de Uma Razão por um Número Inteiro

Para se multiplicar uma razão por um número inteiro, multiplica-se o seu antecedente ou divide-se o seu conseqüente pelo inteiro.

Vamos multiplicar a razão $\frac{18}{12}$ por 6.

$$\frac{18}{12} \times 6 = \frac{18 \times 6}{12} = \frac{108}{12} = 9$$

ou

$$\frac{18}{12} \times 6 = \frac{18}{12 \div 6} = \frac{18}{2} = 9$$

Veja, o resultado é o mesmo = 9.

9. Multiplicação de Razões

Para se multiplicar uma razão por outra, basta multiplicar os antecedentes e os conseqüentes entre si.

Vamos então multiplicar as razões seguintes:
"6 está para 2" e "18 está para 3":

$$\frac{6}{2} \times \frac{18}{3} = \frac{6 \times 18}{2 \times 3} = \frac{108}{6} = 18$$

10. Divisão de Razões

Como você já sabe, as regras são idênticas às dadas para as frações, que são as seguintes:

Regra I –
"Para se dividir uma razão por um número inteiro, multiplica-se o seu conseqüente, ou divide-se o seu antecedente pelo referido número".

Vamos dividir "6 está para 3" por "2"

$$\frac{6}{3} \div 2 = \frac{6}{3 \times 2} = \frac{6}{6} = 1$$

ou

$$\frac{6}{3} \div 2 = \frac{6 \div 2}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

Regra II –
"Para se dividir um número inteiro por uma razão, multiplica-se o número pela razão invertida."

Vamos dividir "5" pela razão "7 está para 9" ou

$$5 \div \frac{7}{9}$$

Então, seguindo a regra temos que multiplicar 5 pela razão invertida.

$$5 \div \frac{7}{9} = 5 \times \frac{9}{7} = \frac{5 \times 9}{7} = \frac{45}{7} = 6\,\frac{3}{7}$$

Regra III –
"Para se dividir uma razão por outra, multiplica-se a razão do dividendo pela razão do divisor invertida."

Vamos dividir as seguintes razões: "108 está para 6" por "9 está para 3".

$$\frac{108}{6} \div \frac{9}{3} = \frac{108}{6} \times \frac{3}{9} = \frac{108 \times 3}{6 \times 9} = \frac{324}{54} = 6$$

11. Redução de Razões à sua Expressão mais Simples

Para se interpretar bem o significado de uma razão, é necessário que ela seja expressa em sua forma mais simples.

Por exemplo, se dissermos que em dois condutores elétricos se pretende comparar as suas resistências e que a relação entre elas é de $\frac{5}{60}$, não poderemos formar uma idéia rápida do seu valor relativo, como se disséssemos que tal relação é de $\frac{1}{12}$.

Pois,

$$\frac{5}{60} = \frac{1}{12}$$

Seguindo-se as mesmas regras das frações ordinárias para as razões, verificaremos que toda razão pode ser reduzida à sua expressão mais simples aplicando-se a seguinte regra:

"Para se reduzir uma razão à sua expressão mais simples, dividem-se os seus dois termos por um mesmo número, e repete-se esta operação até que não haja mais nenhum número, com exceção do 1, que divida exatamente os seus dois termos".

Vamos reduzir a razão $\frac{84}{48}$ à sua expressão mais simples.

$$\frac{84}{48} = \frac{84 \div 12}{48 \div 12} = \frac{7}{4}$$

Portanto, a razão $\frac{84}{48}$ ficou reduzida a sua expressão mais simples que é $\frac{7}{4}$.

12. Regras Para se Achar as Razões Direta e Inversa de dois Números

Regra I –
Para se achar a razão direta de dois números, toma-se como antecedente da fração o primeiro dos números dados, e como conseqüente o segundo.

Regra II –
A razão inversa de dois números é determinada colocando-se o segundo número como antecedente e o primeiro como conseqüente.

Exemplo 1 –
a) expressar a razão direta entre 9 e 3
b) achar o valor da razão calculada.
Solução –
a) aplicando a regra I –
o primeiro número é o antecedente ⟶ 9
o segundo número é o conseqüente ⟶ 3
b) o valor da razão é:

$$\frac{9}{3} = \frac{3}{1} = 3.$$

Direitos reservados

Exemplo 2 –

a) calcular a razão inversa de "10 está para 5"
b) achar o valor da razão obtida
Solução –
a) aplicando a regra II –
o segundo número é o antecedente ——→ 5
o primeiro número é o conseqüente ——→ 10
b) o valor da razão é:

$$\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Exemplo 3 –

a) reduzir a razão 19 ÷ 76 à sua mínima expressão.
b) exprimir em número decimal o valor da razão simplificada.
Solução –
a) como você já viu, para reduzir uma razão à sua expressão mais simples, temos que dividir os dois termos da razão por um mesmo divisor, e repetir as divisões até que não haja mais nenhum número, com exceção do 1, que esteja contido nos seus dois termos. Neste caso, os dois termos da razão podem ser divididos por 19,
Veja:

$$\frac{19 \div 19}{76 \div 19} = \frac{1}{4}$$

b) o valor da razão é:

$$\frac{1}{4} = 0{,}25$$

Exemplo 4 –

Exprimir a razão inversa entre 8 e 72 e achar o seu valor.
Solução –
Aplicando a regra II, a razão inversa dos números 8 e 72 será:
$\frac{72}{8}$, pois o segundo número será o antecedente, que é 72, e o primeiro número será o conseqüente que é 8.
Reduzindo-se $\frac{72}{8}$ à sua expressão mais simples teremos:

$$\frac{72}{8} = 72 \div 8 = 9$$

ou

$$\frac{72}{8} = \frac{72 \div 8}{8 \div 8} = \frac{9}{1} = 9$$

Exemplo 5 –

Estabelecer a razão direta entre 72 e 8, e achar o seu valor.
Solução –
Aplicando a regra I, a razão direta dos números 72 e 8 será:

$\frac{72}{8}$, pois o primeiro número será o antecedente que é 72, e o segundo número será o conseqüente que é 8.
Reduzindo-se $\frac{72}{8}$ teremos:

$$\frac{72}{8} = 72 \div 8 = 9 \div 1 =$$

e o valor da razão será 9 ÷ 1 = 9.
Observe que os exemplos 4 e 5 demonstram, que a razão direta de dois números é igual à razão inversa destes números trocados entre si.

Direitos reservados

Exemplo 6 –

Duas rodas de uma engrenagem tem 60 e 35 dentes respectivamente.

a) Qual é a razão entre os números de dentes na ordem citada?

b) Qual é a relação do menor para o maior de tais números?

Solução –

a) A razão do número maior para o menor é $\frac{60}{35}$

Reduzindo-se a expressão: $\frac{60 \div 5}{35 \div 5} = \frac{12}{7}$

b) A razão do menor número de dentes para o maior é $\frac{35}{60}$

Reduzindo-se à sua expressão mais simples, dividiremos os seus termos por 5, e se transformará em: $\frac{7}{12}$

EXERCÍCIOS

1. **Achar a razão entre 126 e 18, e reduzir a razão à sua expressão mais simples.**
   Resp.: $7 \div 1$ ou $\frac{7}{1}$

2. **Duas rodas duma engrenagem têm 39 e 54 dentes, respectivamente. Qual é o valor da razão do número maior para o menor?**
   Resp.: $1\frac{5}{13}$

3. **Determinar o valor da relação 6,25 para 0,75.**
   Resp.: $8\frac{1}{3}$

4. **Há duas polias: uma com 24 mm de diâmetro e a outra com 60 mm. Qual é a razão inversa do diâmetro da menor para o da maior?**
   Resp.: $5 \div 2$ ou $\frac{5}{2}$

5. **Um viajante percorre 250 milhas, uma parte de trem e outra de navio. Supondo que a distância percorrida de trem é de 150 milhas, determinar:**
   a) a distância que percorreu por navio;
   b) a relação da distância percorrida de trem, para o trajeto que fez navegando.
   Resp.: **a) 100 milhas**
   b) $3 \div 2$

6. **Durante um ano, A e B economizaram por mês $5.000,00 e $4.000,00, respectivamente. Calcular:**
   a) a relação da economia de A para a de B;
   b) a razão da economia de B para a de A;
   c) os valores decimais das duas razões.
   Resp.: **a) $5 \div 4$**
   b) $4 \div 5$
   c) 1,25 e 0,8

13. Razões Compostas

Definição

Razão composta é a que se obtém, multiplicando-se entre si duas ou mais razões simples. O antecedente da razão composta, é o produto dos antecedentes das razões simples que entram na combinação, e o conseqüente é o produto dos conseqüentes das razões simples que entram nesta combinação.

Vamos supor que você queira saber a razão composta das seguintes razões simples:

8 está para 4 e 12 está para 3

Explicando e Exemplificando

$$8 \div 4$$
$$12 \div 3$$

multiplicando os antecedentes 8 e 12 e os conseqüentes 4 e 3, temos:

$$8 \times 12 \div 4 \times 3$$

Portanto, a razão composta será:

$$96 \div 12$$

Veja como ficaria se as razões estivessem sob a forma de frações ordinárias:

$\frac{8}{4}$ e $\frac{12}{3}$

o seu produto seria:

$$\frac{8}{4} \times \frac{12}{3} = \frac{96}{12}$$

Em qualquer um destes casos, a razão composta deverá ser reduzida à sua expressão mais simples, dividindo-se os seus termos por 12.

Veja: $\frac{96}{12} = \frac{96 \div 12}{12 \div 12} = \frac{8}{1}$ ou $8 \div 1$

14. Regra Para se Calcular Uma Razão Composta

Para fazer a combinação de duas razões simples entre si, de modo que formem uma razão composta, temos que seguir a seguinte regra:

"Para se calcular a razão composta de duas ou mais razões simples, devemos expressar estas razões por meio de frações ordinárias e multiplicar os seus termos entre si."

Exemplo 1 –

Calcular a razão composta de $25 \div 4$ e $5 \div 7$.

Solução –

Aplicando a regra, vamos multiplicar os antecedentes e os conseqüentes entre si:

$$25 \div 4$$
$$5 \div 7$$
$$25 \times 5 \div 4 \times 7$$
$$125 \div 28$$

ou em forma de fração ordinária

$$\frac{25}{4} \div \frac{5}{7} \qquad \frac{25 \times 5}{4 \times 7} \qquad \frac{125}{28}$$

Exemplo 2 –

Determinar a razão composta de $\frac{85}{100}$ e $\frac{90}{100}$.

Solução –

Aplicando a regra, temos:

$$\frac{85}{100} \times \frac{90}{100} = \frac{85 \times 90}{100 \times 100} = \frac{7\,650}{10\,000} = \frac{153}{200}$$

Exemplo 3 –

Combinar as seguintes percentagens, de modo que se forme com elas uma razão composta: 55% , 15% , 85% e 90%

Solução –

Vamos considerar cada uma das percentagens dadas como uma razão simples com a seguinte forma:

$$\frac{55}{100} , \frac{15}{100} , \frac{85}{100} \text{ e } \frac{90}{100}$$

Agora, basta aplicar a regra multiplicando-se os antecedentes e os conseqüentes entre si:

$$\frac{55 \times 15 \times 85 \times 90}{100 \times 100 \times 100 \times 100}$$

e reduzindo-se a fração assim obtida à sua expressão mais simples, teremos:

$$\frac{11 \times 3 \times 17 \times 9}{20 \times 20 \times 20 \times 10} = \frac{5\,049}{80\,000}$$

Exemplo 4 –

Obter a razão composta de 6 ÷ 4, 13 ÷ 15 e 23 ÷ 81.

Solução –

Aplicando-se a regra como nos casos anteriores, teremos:

$$\frac{6}{4} \times \frac{13}{15} \times \frac{23}{81} = \frac{6 \times 13 \times 23}{4 \times 15 \times 81}$$

suprimindo-se os fatores comuns, teremos:

$$\frac{6 \times 13 \times 23}{4 \times 15 \times 81} = \frac{13 \times 23}{2 \times 5 \times 81} = \frac{299}{810}$$

Portanto, a razão composta pedida será: $\frac{299}{810}$

Proporções

15. Proporção

Chama-se proporção à igualdade de duas razões. Esta igualdade é indicada por quatro pontos (::) ou pelo sinal de igualdade (=).

Exemplificando:

$$8 \div 4 :: 6 \div 3$$

ou $8 \div 4 = 6 \div 3$

ou $\frac{8}{4} = \frac{6}{3}$

Esta proporção é lida da seguinte forma:

"8 está para 4" assim como "6 está para 3"

A primeira razão é 8 ÷ 4 e a segunda razão é 6 ÷ 3.

16. Termos

Os números que formam uma proporção chamam-se termos da proporção.

O primeiro e o quarto termos duma proporção chamam-se extremos; e o segundo e terceiro, meios.

Exemplificando:

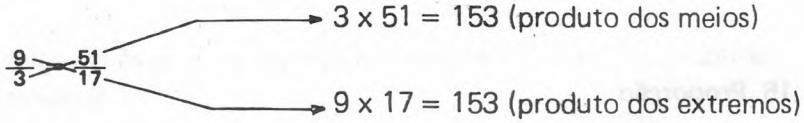
	Primeira razão	***Segunda razão***	
primeiro termo	segundo termo	terceiro termo	quarto termo
8 ÷	4 =	6 ÷	3
extremo	meio	meio	extremo

Lembre-se sempre, que em toda proporção, a razão do primeiro termo para o segundo é igual à razão do terceiro termo para o quarto.

17. Princípio Fundamental

"Em qualquer proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios."

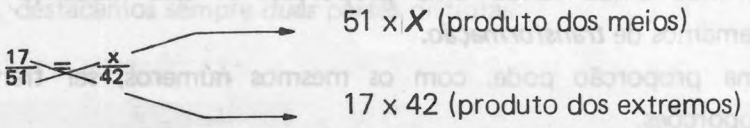
Este princípio pode ser demonstrado facilmente por meio de um exemplo. Seja a proporção $\frac{9}{3} = \frac{51}{17}$



18. Como Descobrir um Termo Desconhecido Numa Proporção?

Suponhamos que na proporção $\frac{17}{51} = \frac{x}{42}$ você queira saber o valor de x. Então, o que deverá fazer é apenas aplicar a propriedade fundamental das proporções.

Observe



Então,

$$51 \times X = 17 \times 42$$
$$51 \times X = 714$$
$$X = \frac{714}{51}$$
$$X = 14$$

Se a proporção fosse:

$$\frac{17}{51} = \frac{14}{x}$$

Então,

$$x = \frac{14 \times 51}{17}$$
$$x = 42$$

Portanto, quando se conhecem três termos de uma proporção e desejar calcular o que falta, e se o termo procurado é um extremo, ele será igual ao produto dos meios dividido pelo outro extremo; se o termo desconhecido é um meio, o seu valor será o produto dos extremos dividido pelo outro meio.

Observe os Exemplos

$$\frac{x}{2} = \frac{10}{4}$$
$$4 . x = 2 . 10$$
$$4x = 20$$
$$x = \frac{20}{4}$$
$$x = 5$$

$$\frac{4}{7} = \frac{12}{x}$$
$$4 . x = 7 . 12$$
$$4 . x = 84$$
$$x = \frac{84}{4}$$
$$x = 21$$

$$\frac{48}{x} = \frac{12}{5}$$
$$12 . x = 48 . 5$$
$$x = \frac{48 . 5}{12}$$
$$x = \frac{240}{12}$$
$$x = 20$$

$$\frac{2}{3} = \frac{x}{18}$$
$$3 . x = 2 . 18$$
$$x = \frac{2 . 18}{3}$$
$$x = \frac{36}{3}$$
$$x = 12$$

19. Transformações de Uma Proporção

Em toda proporção a posição de seus termos podem ser mudados, de modo que continue ainda sendo uma proporção. A essa mudança da posição dos termos chamamos de ***transformação.***

Uma proporção pode, com os mesmos números, ser transformada em outras 7 proporções.

Observe

1a.) Proporção original . . . . . $\boxed{\frac{2}{7} = \frac{6}{21}}$

2a.) alternando os meios, teremos . . . . . $\frac{2}{6} = \frac{7}{21}$

3a.) alternando os extremos, teremos. . . . . $\frac{21}{7} = \frac{6}{2}$

4a.) alternando os meios e os extremos, teremos. . . .. $\frac{21}{6} = \frac{7}{2}$

5a.) invertendo a proporção original, teremos. . . . . $\frac{7}{2} = \frac{21}{6}$

6a.) invertendo a 2a. proporção, $\frac{2}{6} = \frac{7}{21}$, teremos. . . $\frac{6}{2} = \frac{21}{7}$

7a.) invertendo a 3a. proporção, $\frac{21}{7} = \frac{6}{2}$, teremos. . . $\frac{7}{21} = \frac{2}{6}$

8a.) invertendo a 4a. proporção, $\frac{21}{6} = \frac{7}{2}$, teremos. . . $\frac{6}{21} = \frac{2}{7}$

Nestas 8 proporções, você pode observar que em todas elas o produto dos extremos é sempre igual ao produto dos meios.

Veja:

1a.) $\frac{2}{7} = \frac{6}{21}$ demonstrando: $2 \times 21 = 7 \times 6$

$42 = 42$

2a.) $\frac{2}{6} = \frac{7}{21}$ demonstrando: $2 \times 21 = 6 \times 7$

$42 = 42$

3a.) $\frac{21}{7} = \frac{6}{2}$ demonstrando: $21 \times 2 = 7 \times 6$

$42 = 42$

4a.) $\frac{21}{6} = \frac{7}{2}$ demonstrando: $21 \times 2 = 6 \times 7$

$42 = 42$

5a.) $\frac{7}{2} = \frac{21}{6}$ demonstrando: $7 \times 6 = 2 \times 21$

$42 = 42$

6a.) $\frac{6}{2} = \frac{21}{7}$ demonstrando: $6 \times 7 = 2 \times 21$

$42 = 42$

7a.) $\frac{7}{21} = \frac{2}{6}$ demonstrando: $7 \times 6 = 21 \times 2$

$42 = 42$

8a.) $\frac{6}{21} = \frac{2}{7}$ demonstrando: $6 \times 7 = 21 \times 2$

$42 = 42$

20. Recíproca do Princípio Fundamental

"Quando o produto de dois números é igual ao produto de outros dois, os quatro números formam uma proporção."

Exemplo: $12 \times 5 = 10 \times 6$

Você já estudou nas propriedades das razões que dois termos de uma razão podem ser multiplicados ou divididos por um mesmo número, sem que o valor da razão se altere. Então, vamos aplicar isto, dividindo os dois termos do nosso exemplo por 12×6.

Explicando e Exemplificando

$$12 \times 5 = 10 \times 6$$

$$\frac{12 \times 5}{12 \times 6} = \frac{10 \times 6}{12 \times 6}$$

Resultando:

$$\frac{5}{6} = \frac{10}{12}$$

Observe que o resultado também é uma proporção.

$$\frac{5}{6} = \frac{10}{12}$$

$$5 \times 12 = 6 \times 10$$

$$60 = 60$$

21. Quarta Proporcional

"Chama-se quarta proporcional a um quarto número que forma uma proporção com três números dados."

Vamos considerar os números 6, 8, 24 e formar as seguintes proporções:

1) $\frac{6}{8} = \frac{24}{y}$ resolvendo: $y = \frac{8 \times 24}{6}$

$y = 32$

2) $\frac{6}{8} = \frac{y_1}{24}$ resolvendo: $y_1 = \frac{6 \times 24}{8}$

$y_1 = 18$

3) $\frac{6}{y_2} = \frac{24}{8}$ resolvendo: $y_2 = \frac{6 \times 8}{24}$

$y_2 = 2$

Observe que nestes exemplos chamamos a ***quarta proporcional*** de y, y_1 e y_2 devido as suas várias posições tomadas. E há somente três soluções, porque em cada solução o produto de dois números dados é igual ao terceiro multiplicado por y.
Em geral consideramos a ordem dos números dados na proporção como 1.° termo, 2.° termo, 3.° termo e a incógnita como o último termo.

Veja pelo seguinte exemplo:

Dados os números 24, 32, 96. Achar a quarta proporcional.

Formamos a proporção do seguinte modo:

$$\frac{24}{32} = \frac{96}{y}$$

Resolvendo:

$$y = \frac{32 \times 96}{24}$$

$$y = 128$$

Portanto, a quarta proporcional é 128.

22. Proporção Contínua — Média Proporcional e Terceira Proporcional

Proporção contínua é toda proporção em que os meios ou os extremos são iguais.

Exemplificando:

$\frac{8}{12} = \frac{12}{18}$ os meios são iguais

$\frac{12}{8} = \frac{18}{12}$ os extremos são iguais

O termo igual é denominado ***média proporcional*** ou ***média geométrica.*** Numa proporção contínua o último termo chama-se ***terceira proporcional.***

23. Propriedades das Proporções

Propriedade da soma ou diferença dos antecedentes e dos conseqüentes:

"Em toda proporção, a soma ou a diferença dos antecedentes está para a dos conseqüentes, assim como qualquer antecedente está para o seu conseqüente."

Para entender melhor esta propriedade consideremos a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, sendo "a" o primeiro termo (antecedente), "b" o segundo (conseqüente), "c" o terceiro (antecedente), "d" o quarto (conseqüente). Teremos então:

Direitos reservados

$$1)\ \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} \quad \text{ou} \quad \frac{1^{o}+3^{o}}{2^{o}+4^{o}} = \frac{1^{o}}{2^{o}}$$

$$2)\ \frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d} \quad \text{ou} \quad \frac{1^{o}+3^{o}}{2^{o}+4^{o}} = \frac{3^{o}}{4^{o}}$$

$$3)\ \frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b} \quad \text{ou} \quad \frac{1^{o}-3^{o}}{2^{o}-4^{o}} = \frac{1^{o}}{2^{o}}$$

$$4)\ \frac{a-c}{b-d} = \frac{c}{d} \quad \text{ou} \quad \frac{1^{o}-3^{o}}{2^{o}-4^{o}} = \frac{3^{o}}{4^{o}}$$

Generalizando:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a \pm c}{b \pm d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Veja agora a aplicação da propriedade na proporção $\boxed{\frac{8}{4} = \frac{6}{3}}$

$$1)\ \frac{8+6}{4+3} = \frac{8}{4} \qquad \frac{14}{7} = \frac{8}{4}$$

$$2)\ \frac{8+6}{4+3} = \frac{6}{3} \qquad \frac{14}{7} = \frac{6}{3}$$

$$3)\ \frac{8-6}{4-3} = \frac{8}{4} \qquad \frac{2}{1} = \frac{8}{4}$$

$$4)\ \frac{8-6}{4-3} = \frac{6}{3} \qquad \frac{2}{1} = \frac{6}{3}$$

Veja agora como podemos resolver problemas aplicando a propriedade da ***Soma ou Diferença dos Antecedentes e dos Conseqüentes.***

Exemplo 1 –

A soma dos antecedentes de uma proporção é 9 e os conseqüentes são 4 e 8. Achar os antecedentes.

Solução –

Representaremos os antecedentes por x e y.

Temos então: $\frac{x}{4} = \frac{y}{8}$

Aplicando a propriedade: $\frac{x+y}{4+8} = \frac{x}{4}$

Como x + y = 9, teremos:

$$\frac{9}{4+8} = \frac{x}{4}$$

$$x = \frac{9 \times 4}{4+8}$$

$$x = \frac{36}{12}$$

Portanto: $x = 3$

Aplicando novamente a propriedade:

$$\frac{9}{4+8} = \frac{y}{8}$$

$$y = \frac{9 \times 8}{4+8}$$

$$y = \frac{72}{12}$$

Portanto: $y = 6$

Resposta: Os antecedentes são *x = 3* e *y = 6.*

Exemplo 2 –

A diferença entre os antecedentes de uma proporção é 9 e os conseqüentes são 20 e 10. Achar os antecedentes:

Solução –

A proporção será $\frac{x}{20} = \frac{y}{10}$

Aplicando a propriedade das proporções em relação à diferença, teremos:

$$\frac{x-y}{20-10} = \frac{x}{20}$$

Como $x - y = 9$, teremos:

$$\frac{9}{20-10} = \frac{x}{20}$$

$$x = \frac{9 \times 20}{20-10}$$

$$x = \frac{180}{10}$$

$$x = 18$$

Aplicando novamente a propriedade:

$$\frac{9}{20-10} = \frac{y}{10}$$

$$y = \frac{9 \times 10}{20-10}$$

$$y = \frac{90}{10}$$

$$y = 9$$

Resposta: Os antecedentes são $x = 18$ e $y = 9$.

Exemplo 3 –

Achar 2 números cuja soma é 32 e a razão $\frac{3}{5}$.

Solução –

A proporção será: $\frac{x}{y} = \frac{3}{5}$

Alternando os meios teremos: $\frac{x}{3} = \frac{y}{5}$

Agora vamos aplicar a propriedade das proporções em relação a soma:

$$\frac{x+y}{3+5} = \frac{x}{3}$$

Como $x + y = 32$ teremos:

$$\frac{32}{3+5} = \frac{x}{3}$$

$$x = \frac{32 \times 3}{3+5}$$

$$x = \frac{96}{8}$$

$$x = 12$$

Aplicando novamente a propriedade:

$$\frac{32}{3+5} = \frac{y}{5}$$

$$y = \frac{32 \times 5}{3+5}$$

$$y = \frac{160}{8}$$

$$y = 20$$

Resposta: Os números são: $x = 12$ e $y = 20$.

Exemplo 4 –

Achar 2 números cuja diferença é 9 e a razão é $\frac{5}{8}$.

Solução –

A proporção será: $\frac{x}{y} = \frac{5}{8}$

Invertendo a proporção teremos: $\frac{y}{x} = \frac{8}{5}$

Alternando os meios teremos: $\frac{y}{8} = \frac{x}{5}$

Aplicando a propriedade das proporções em relação à diferença:

$$\frac{y-x}{8-5} = \frac{x}{5}$$

Como $y - x = 9$, teremos:

$$\frac{9}{8-5} = \frac{x}{5}$$

$$x = \frac{9 \times 5}{8-5}$$

$$x = \frac{45}{3}$$

$$x = 15$$

Aplicando novamente a propriedade:

$$\frac{9}{8-5} = \frac{y}{8}$$

$$y = \frac{9 \times 8}{8-5}$$

$$y = \frac{72}{3}$$

$$y = 24$$

Resposta: Os números são: $x = 15$ e $y = 24$.

24. Proporção Prolongada ou Proporção Múltipla

O nome que se dá a uma sucessão de três ou mais razões iguais é ***proporção prolongada ou proporção múltipla.***

Exemplos: $\frac{2}{8} = \frac{4}{16} = \frac{8}{32}$

Observe que todas estas razões tem o mesmo valor = $\frac{1}{4}$

25. Propriedade das Proporções Prolongadas ou Múltiplas

"A soma dos antecedentes está para a soma dos conseqüentes, assim como qualquer antecedente está para o seu conseqüente".

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$$

Observe o exemplo com a aplicação desta propriedade:

Achar x, y e z nas seguintes razões:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{8}$$

Onde $x + y + z = 21$

Aplicando a propriedade, teremos:

$$\frac{x+y+z}{2+4+8} = \frac{x}{2}$$

Direitos reservados

Substituindo x + y + z por 21, teremos:

$$\frac{21}{2+4+8} = \frac{x}{2}$$

$$\frac{21}{14} = \frac{x}{2}$$

$$14x = 42$$

$$x = \frac{42}{14}$$

$$x = 3$$

Em seguida aplicamos novamente a propriedade:

$$\frac{x+y+z}{2+4+8} = \frac{y}{4}$$

$$\frac{21}{2+4+8} = \frac{y}{4}$$

$$\frac{21}{14} = \frac{y}{4}$$

$$14y = 84$$

$$y = \frac{84}{14}$$

$$y = 6$$

Como $x + y + z = 21$

$$z = 21 - (x + y)$$

$$z = 21 - (3 + 6)$$

$$z = 21 - 9$$

$$z = 12$$

Resposta: $x = 3$, $y = 6$ e $z = 12$.

Números Proporcionais

26. Proporcionalidade

Imagine que você queira saber a altura de um prédio pela medição de sua sombra.
Então, o que você tem a fazer é comparar a medida da sombra do prédio com a medida de uma outra sombra qualquer conhecida. Suponha uma estaca enterrada perpendicularmente ao chão, com medida conhecida do nível do chão ao ponto mais alto da estaca.
A uma certa hora do dia você faz a medição das 2 sombras. Supondo que a estaca tenha 2 metros e a sua sombra esteja com 4 metros, e a sombra do prédio meça 50 metros.
Então você verá que a razão entre a altura da estaca e sua sombra é $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.
Formando a proporção:

$$\frac{1}{2} = \frac{x}{50} \quad \text{(x é a altura do prédio)}$$

$$2x = 1 \times 50$$

$$x = \frac{1 \times 50}{2}$$

$$x = \frac{50}{2}$$

$$x = 25$$

A altura do prédio é 25 metros.
Neste caso, a altura da estaca e do prédio são proporcionais às sombras correspondentes.

27. Sucessões de números diretamente proporcionais

Dizemos que duas sucessões de números são diretamente proporcionais, quando a razão entre um número qualquer da primeira e seu correspondente da segunda for sempre a mesma.

Observe os exemplos:

Exemplo 1 –
Os números 2 e 4 são diretamente proporcionais aos números 6 e 12, porque:

$\frac{2}{6}$ e $\frac{4}{12}$ são razões iguais

Exemplo 2 –
A sucessão de números 2, 4, 6, 8 ... é *diretamente proporcional* à sucessão 8, 16, 24, 32... porque $\frac{2}{8}, \frac{4}{16}, \frac{6}{24}, \frac{8}{32}$... são razões iguais.
Observe a simplificação:

$$\frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{4}{\cancel{8}}}, \frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{4}{\cancel{16}}}, \frac{\overset{1}{\cancel{6}}}{\underset{4}{\cancel{24}}}, \frac{\overset{1}{\cancel{8}}}{\underset{4}{\cancel{32}}} \text{ ... razão } = \frac{1}{4}$$

Fator ou Coeficiente de Proporcionalidade é o valor constante das razões entre duas sucessões de números *diretamente proporcionais.*

No primeiro exemplo o coeficiente de proporcionalidade é $\frac{1}{3}$ e no segundo exemplo é $\frac{1}{4}$
Vamos ver agora como se determina o valor de um ou mais elementos desconhecidos numa sucessão de números *diretamente proporcionais.*

Observe o exemplo:
Dadas as duas sucessões proporcionais

$$\frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \frac{6}{x}, \frac{y}{4}$$

Achar o coeficiente de proporcionalidade e os valores de x e y.

$$\frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad \text{(coeficiente de proporcionalidade)}$$

Temos então:

$$\frac{1}{2} = \frac{6}{x}$$
$$1x = 12$$
$$x = \frac{12}{1}$$
$$x = 12$$

O valor de y será:

$$2y = 4 \times 1$$
$$y = \frac{4}{2}$$
$$y = 2$$

Resposta: O coeficiente de proporcionalidade é $\frac{1}{2}$, $x = 12$ e $y = 2$.

28. Sucessões de Números Inversamente Proporcionais

Dizemos que duas sucessões são inversamente proporcionais, quando o produto de dois termos correspondentes é constante.

Veja por exemplo as sucessões: 1a.) 10, 20, 30, 40.
2a.) 12, 6, 4, 3.

Estas sucessões são inversamente proporcionais, porque o produto dos termos correspondentes é sempre 120. Veja a demonstração:

$10 \times 12 = 120$
$20 \times 6 = 120$
$30 \times 4 = 120$
$40 \times 3 = 120$

Este produto (120), é chamado de ***coeficiente de proporcionalidade inversa.*** Reciprocamente, podemos dizer também, que a primeira sucessão é ***diretamente*** proporcional aos ***inversos*** dos termos correspondentes na segunda sucessão.

Demonstraremos isto pelo seguinte:

primeira sucessão: 10, 20, 30, 40.
inversos dos termos correspondentes na segunda sucessão: $\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}$

Razão entre a primeira sucessão e a segunda, conforme anteriormente explicado é:

$\frac{10}{\frac{1}{12}} = \frac{10 \times 12}{1} = 120$ que é igual para todos os termos correspondentes.

Portanto, podemos dizer também que:

Duas sucessões são inversamente proporcionais, quando os elementos de uma são diretamente proporcionais aos inversos dos elementos correspondentes da outra.

29. Propriedades dos Números Proporcionais

Dadas duas sucessões, podemos multiplicar os antecedentes ou os conseqüentes por um mesmo número *n* e as razões permanecerão iguais, pois todas ficarão *n* vezes maiores ou menores.

Observe o exemplo:

Considere 2 sucessões:

a) 2 , 4 , 6 , 8
3 , 6 , 9 , 12

Razão: $\frac{2}{3}$

Vamos multiplicar os antecedentes por 2: $\frac{2 \times 2}{3}, \frac{4 \times 2}{6}, \frac{6 \times 2}{9}, \frac{8 \times 2}{12}$.

temos: $\frac{4}{3}, \frac{8}{6}, \frac{12}{9}, \frac{16}{12}$ Razão: $\frac{4}{3}$ (que é $\frac{2}{3} \times 2$)

Portanto, a razão ficou 2 vezes maior.

b) $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{8}{12}$. Razão: $\frac{2}{3}$

Vamos multiplicar os conseqüentes por 2: $\frac{2}{3 \times 2}$, $\frac{4}{6 \times 2}$, $\frac{6}{9 \times 2}$, $\frac{8}{12 \times 2}$,

temos: $\frac{2}{6}$, $\frac{4}{12}$, $\frac{6}{18}$, $\frac{8}{24}$. Razão: $\frac{2}{6}$ (que é $\frac{2}{3} \div 2$).

Portanto, a razão ficou 2 vezes menor.

Esta propriedade pode ser aplicada também aos números inversamente proporcionais, considerando-os como diretamente proporcionais.

30. Eliminação de Denominadores

Para se eliminar os denominadores de duas sucessões proporcionais, basta multiplicar as frações pelo m.m.c. dos denominadores.

Exemplo 1 — Sucessões de números ***diretamente proporcionais.***

$$6 \ , \ 9 \ , \ 12$$
$$\frac{1}{2} \ , \ \frac{3}{4} \ , \ 1$$

$$\text{Razão: } \frac{6}{\frac{1}{2}} = \frac{6 \times 2}{1} = 12$$

Vamos multiplicar os conseqüentes pelo m.m.c. dos denominadores que é 4.

$\frac{1}{2} \cdot 4 = 2$; $\frac{3}{4} \cdot 4 = 3$; $1 \cdot 4 = 4$.

Temos então:

$$\left.\begin{matrix} 6 \ , \ 9 \ , \ 12 \\ 2 \ , \ 3 \ , \ 4 \end{matrix}\right\} \quad \text{Razão: 3 (que é } \frac{6}{2} = 3).$$

Portanto, temos duas sucessões com números inteiros.

Exemplo 2 — Sucessões de números ***inversamente proporcionais.***

$$6 \ , \ 9 \ , \ 12$$
$$6 \ , \ 4 \ , \ 3$$

Vamos transformar a sucessão em diretamente proporcional, e para isso temos que inverter a segunda sucessão.

Assim:

$$6 \ , \ 9 \ , \ 12$$
$$\frac{1}{6} \ , \ \frac{1}{4} \ , \ \frac{1}{3}$$

Agora, vamos multiplicar os conseqüentes por 12 (que é o m.m.c. de 6, 4 e 3) para que eles se tornem números inteiros.

Veja: $\frac{1}{6} \cdot 12 = 2$; $\frac{1}{4} \cdot 12 = 3$; $\frac{1}{3} \cdot 12 = 4$

Temos então:

$$6 \ , \ 9 \ , \ 12$$
$$2 \ , \ 3 \ , \ 4$$

Portanto, temos duas sucessões com números inteiros.

EXERCÍCIOS

Calcular o valor de x nas seguintes proporções:

a) $16 \div 64 :: x \div 4$
b) $x \div 85 :: 10 \div 17$
c) $24 \div x :: 15 \div 40$
d) $18 \div 94 :: 2 \div x$
e) $75 \div 100 :: x \div 100$
f) $15 \div x = 21 \div 10$
g) $x \div 75 = 15 \div 5$

a) $x = 1$
b) $x = 50$
c) $x = 64$
d) $x = 10\ \frac{4}{9}$
e) $x = 75$
f) $x = 7\ \frac{1}{7}$
g) $x = 225$

Grandezas Proporcionais

31. Formas de Proporcionalidade

Entre as grandezas pode existir proporcionalidade simples ou composta.
Proporcionalidade simples é quando se trata apenas de duas grandezas.
Proporcionalidade composta é quando se consideram três ou mais grandezas.

32. Grandezas Diretamente Proporcionais

Duas grandezas são ***diretamente proporcionais*** quando, ***aumentando-se uma delas,*** a ***outra aumenta*** na mesma razão da primeira.

Para você entender melhor isto, vamos considerar um exemplo prático.

Imagine várias garrafas iguais, cheias de água e que cada uma contenha 3 litros.
Veja que são duas grandezas distintas: garrafas e litros.
Se tomarmos 4 garrafas, elas conterão 12 litros. Se em vez de 4 tomássemos 8, elas conteriam 24 litros.
Vamos agora fazer a relação das garrafas e dos litros, na ordem em que foram considerados e teremos então:

garrafas: $\frac{4}{8}$
litros: $\frac{12}{24}$

Comparando estas duas relações, vemos que são iguais e que portanto podemos escrever:

$$\frac{4}{8} = \frac{12}{24}$$

pois a relação entre os dois números de garrafas é igual a dos números correspondentes de litros.
Neste caso, as duas grandezas, garrafas e litros, são ***diretamente proporcionais.***
Observe este exemplo com grandezas proporcionais:
Consideremos, agora, uma locomotiva que anda com velocidade constante e que em 2 minutos percorreu 3 km. Em 20 minutos, terá percorrido 30 km.

A relação entre os primeiros e os segundos "minutos" é: $\frac{2}{20}$

e a relação que existe entre os "quilômetros" existentes é: $\frac{3}{30}$

Mas $\frac{2}{20} = \frac{3}{30}$;

logo as grandezas "minutos" e "quilômetros" no movimento uniforme, são ***diretamente proporcionais.***

33. Grandezas Inversamente Proporcionais

Duas grandezas são ***inversamente proporcionais*** quando, ***aumentando-se uma delas,*** a ***outra diminui*** na mesma razão em que a primeira aumentou.

Suponha que numa obra de construção estejam empregados 7 pedreiros que levam 6 dias para executar a obra. Mas o construtor resolveu empregar 14 pedreiros para executar esta mesma obra, ao invés de 7 pedreiros. O que irá acontecer agora?
Neste caso, precisamos raciocinar um pouco, observe:
7 pedreiros conseguem executar a obra em ***6 dias.***
É óbvio, que com o dobro de pedreiros a obra terminará mais rápido.
14 pedreiros conseguirão executar a obra em ***"menos tempo".***
Isto pode ser calculado pela ***proporção inversa,*** pois quanto ***mais*** pedreiros trabalharem na obra, ***menos*** dias serão necessários para terminar a obra. A quantidade de dias é ***inversamente proporcional*** à quantidade de pedreiros.
A relação dos dois valores da primeira grandeza "pedreiros" será: $\frac{7}{14} = \frac{1}{2}$

A relação dos dois valores correspondentes da segunda grandeza, "dias", será: $\frac{6}{x}$ = "menos tempo".
Como a quantidade de "dias" é ***inversamente proporcional*** à quantidade de "pedreiros", ao formar esta proporção teremos que ***inverter a segunda razão,*** deste modo: $\frac{7}{14} = \frac{x}{6}$

Vamos então resolver este exemplo: $x = \frac{7 \times 6}{14}$

$$x = \frac{42}{14}$$

$$x = 3 \text{ dias.}$$

Conclusão:
Como você pode constatar, 7 pedreiros levam 6 dias para executar a obra. Então, o dobro de pedreiros (14), levarão 3 dias (menos tempo).

Observe este outro exemplo de uma grandeza *inversamente proporcional* à outra.
Vamos considerar o número de horas necessárias para despejar um tanque por meio de um orifício de abertura variável.
Se abrirmos de modo que despeje 60 litros por hora, seriam necessárias 5 horas para despejar o tanque.
Se fecharmos de modo que despeje apenas 20 litros por hora, para despejar o mesmo tanque, ao invés de 60 litros por hora, o que iria acontecer?
Vamos raciocinar com os dados que temos:
despejando 60 litros por hora levam 5 horas.
é obvio que: diminuindo o número de litros por hora, serão necessárias mais horas para executar o mesmo trabalho.
despejando 20 litros por hora levará "mais horas".

Podemos resolver esta questão calculando-a pela ***proporção inversa,*** pois ***diminuindo o número de litros*** por hora para despejar o tanque, ***mais horas*** serão necessárias para despejar o mesmo tanque.
Logo, as duas relações, litros e horas, são ***inversas*** e portanto, são ***inversamente proporcionais.***
A relação dos dois valores da primeira grandeza "litros" será: $\frac{60}{20} = 3.$

A relação dos dois valores correspondentes da segunda grandeza, "horas", será:

$$\frac{5}{x} = \text{"mais horas"}$$

Como as duas relações são ***inversas,*** ao formar a proporção, teremos que ***inverter a segunda razão,*** deste modo:

$$\frac{60}{20} = \frac{x}{5}$$

$$x = \frac{60 \times 5}{20}$$

$$x = \frac{300}{20}$$

$$x = 15 \text{ horas}$$

34. Verificação da Proporcionalidade por meio de Exemplos

Vamos então acompanhar alguns exemplos:

Exemplo 1 -
Uma vara de ferro tem 5 m de comprimento e pesa 7 kg. Determinar se os metros são proporcionais aos quilogramas e, caso afirmativo, classificar a proporcionalidade.
Solução -
Vamos raciocinar:
se 5 metros da vara pesam 7 kg
e supondo-se que ao invés de 5 metros, tivessemos:
15 metros da vara
então, é óbvio que *aumentando o número de metros da vara, aumentará também o peso.*
Portanto, estas duas grandezas são ***diretamente proporcionais,*** pois ***aumentando-se o número de metros,*** o peso também ***aumentará.***
A relação dos dois valores da primeira grandeza "metros" ficará: $\frac{5}{15}$
A relação dos dois valores correspondentes da segunda, "peso", ficará: $\frac{7}{x} =$ "mais peso"
Como as duas relações são ***diretamente proporcionais,*** bastará formar a proporção nesta mesma ordem.
Assim:

$$\frac{5}{15} = \frac{7}{x}$$

$$x = \frac{15 \times 7}{5}$$

$$x = \frac{105}{5}$$

$$x = 21 \text{ quilogramas}$$

Exemplo 2 –
Para se fabricar uma certa quantidade de pano, foi necessário que 5 máquinas trabalhassem durante 26 horas.
Determinar se estas duas grandezas, máquinas e horas, são proporcionais. Se forem proporcionais, determinar qual a natureza de sua proporcionalidade.
Solução –
Vamos raciocinar:
se 5 máquinas gastam 26 horas
e supondo-se que ao invés de 5 máquinas, tivessemos:
10 máquinas
então, é óbvio que: *aumentando* o número de máquinas
diminuirá o número de horas.

Portanto, estas duas grandezas são ***inversamente proporcionais,*** pois *aumentando-se* o número de máquinas, o número de horas ***diminuirá. Mais máquinas*** implicam em ***menos horas*** de trabalho.
A relação dos dois valores da primeira grandeza "máquinas" ficará: $\frac{5}{10}$
A relação dos dois valores correspondentes da segunda, "horas", ficará: $\frac{26}{x}$ = "menos horas"

Como as duas relações são ***inversamente proporcionais,*** ao formar a proporção bastará ***inverter a segunda razão,*** deste modo:

$$\frac{5}{10} = \frac{x}{26}$$

$$x = \frac{5 \times 26}{10}$$

$$x = \frac{130}{10}$$

$$x = 13 \text{ horas}$$

35. Problemas Relativos à Proporcionalidade Simples

Vamos mostrar aqui alguns casos de problemas práticos que apresentam duas grandezas distintas, como por exemplo metros e horas. Nestes problemas são sempre conhecidos apenas dois valores de uma das grandezas e um só valor da outra. Portanto, temos que achar o valor correspondente da outra grandeza.
A solução destes problemas é sempre feita por meio de uma proporção.
Então, vamos aos problemas!
Exemplo 1 –
Se 4 peças de pano custaram Cr$640,00 quanto custarão 7 peças do mesmo pano?
Solução –
1°) - Verificar quais as grandezas que intervêm no problema.
Neste caso são: "peças de pano" e "cruzeiros"
2°) - Verificar se são diretamente ou inversamente proporcionais.
Vamos raciocinar:
se 4 peças custaram Cr$640,00
e supondo-se que ao invés de 4 peças, tivessemos:
8 peças
então, é óbvio que: ***aumentando*** o número de peças,
aumentará também o custo em cruzeiros.
Portanto, as duas grandezas são ***diretamente proporcionais,*** pois *aumentando-se o* ***número de peças,*** o custo em ***cruzeiros também aumentará.***
3°) - Portanto, vamos estabelecer as condições de proporcionalidade ***direta,*** escrevendo que a relação dos dois valores sucessivos da primeira, é igual a dos valores correspondentes da segunda.
Veja:

$$\frac{\text{4 peças de pano}}{\text{8 peças de pano}} = \frac{\text{Cr\$640,00}}{x}$$

Escrevemos x como o quarto termo, porque desconhecemos o valor das 8 peças.

4°) - Como x é um extremo, será igual ao produto dos meios dividido pelo outro extremo.
Assim:

$$x = \frac{8 \times \text{Cr\$640,00}}{4}$$

$$x = \frac{\text{Cr\$5.120,00}}{4}$$

$$x = \text{Cr\$1.280,00}$$

Logo, o valor procurado é Cr$1.280,00.

Exemplo 2 –
Um empregado ganha Cr$20 000,00 em 27 dias. Quanto ganhará em 16 dias?

Solução –
1°) - Verificar quais as grandezas que intervêm no problema:
"dias" e "cruzeiros"

2°) - Verificar se as grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais.
Vamos raciocinar:
se em 27 dias ganha Cr$20 000,00
e supondo-se que ao invés de 27 dias, tivessemos
16 dias
então, é óbvio que: diminuindo os dias de trabalho,
diminuirá também o que ganha.
Portanto, as duas grandezas são ***diretamente proporcionais,*** pois diminuindo-se os dias de trabalho, diminuirá também o salário.

3°) - Portanto, vamos estabelecer as condições de proporcionalidade direta:

$$\frac{27 \text{ dias}}{16 \text{ dias}} = \frac{Cr\$20.000,00}{x}$$

4°) - Como x é um extremo, será igual ao produto dos meios dividido pelo outro extremo.

$$x = \frac{16 \times Cr\$20.000,00}{27}$$

$$x = \frac{Cr\$320.000,00}{27} \Rightarrow x = Cr\$11.850,00$$

Logo, o valor procurado é Cr$11 850,00.

Exemplo 3 –
A capacidade de uma bomba é de 4 litros de água por segundo, e enche uma cisterna em 20 minutos. Em quanto tempo a mesma cisterna será enchida se for usada uma outra bomba, cuja capacidade é de 12 litros por segundo?
Solução –
1°) - Examinar as grandezas utilizadas:
litros e minutos
2°) - Verificar se são direta ou inversamente proporcionais.
Observe que quando os litros duplicam, a bomba fornece uma quantidade dupla de água e o tempo que leva para encher a cisterna é reduzido à metade.
Portanto, quando multiplicamos a primeira grandeza por 2, a segunda deve ser dividida por 2.
Conclusão: são grandezas ***inversamente proporcionais.***
3°) - Estabelecer as condições de proporcionalidade, escrevendo que a relação de dois valores da primeira, é igual à sua inversa. Assim, teremos:

$$\frac{4 \text{ litros}}{12 \text{ litros}} = \frac{x \text{ minutos}}{20 \text{ minutos}}$$

4°) - Como x é um meio, será igual ao produto dos extremos dividido pelo outro extremo.

$$x = \frac{4 \times 20}{12}$$

$$x = \frac{80}{12}$$

$$x = 6\frac{2}{3} \text{ minutos.}$$

Logo, o valor procurado é $6\frac{2}{3}$ minutos.

Exemplo 4 –
Um viajante, andando 10 horas por dia, leva 15 dias para chegar ao seu ponto de destino. Calcular o número de dias que gastará nesta viagem se andar apenas 8 horas por dia.
Solução –
1°) - As grandezas: horas e dias
2°) - Natureza da proporcionalidade:
observe que ao duplicarmos o número de horas que anda o viajante por dia, o número de dias se reduz à metade, e sendo assim as grandezas são ***inversamente proporcionais.***

3°) - Portanto, vamos estabelecer as condições de proporcionalidade:

$$\frac{10 \text{ horas}}{8 \text{ horas}} = \frac{x \text{ dias}}{15 \text{ dias}}$$

4°) - Como x é um meio, será igual ao produto dos extremos dividido pelo outro meio.

$$x = \frac{10 \times 15}{8}$$

$$x = \frac{150}{8}$$

$$x = 18\ \frac{3}{4}$$

Logo o valor procurado é $18\ \frac{3}{4}$ dias.

Observação:
Para evitar erros você deve escrever com cuidado a proporção que serve de base para a resolução do problema.

Lembre-se:

Na proporcionalidade ***direta,*** os valores se correspondem em ***linhas horizontais.***

Na proporcionalidade ***inversa,*** os valores se correspondem em ***linhas cruzadas.***

Reveja os exemplos:

Exemplo 1 — *Grandezas diretamente proporcionais*

$$\frac{4 \text{ peças de pano}}{7 \text{ peças de pano}} = \frac{Cr\$640{,}00}{x\ Cr\$}$$

escrevemos as quantidades que se correspondem, horizontalmente:
4 peças e Cr$640,00 e
7 peças e x cruzeiros

Exemplo 2 — *Grandezas diretamente proporcionais*

$$\frac{27 \text{ dias}}{16 \text{ dias}} = \frac{Cr\$20\,000{,}00}{x\ Cr\$}$$

escrevemos as quantidades que se correspondem, também horizontalmente:
27 dias correspondem a Cr$20 000,00 e
16 dias correspondem a x cruzeiros.

Exemplo 3 — *Grandezas inversamente proporcionais*

$$\frac{4 \text{ litros}}{12 \text{ litros}} \times \frac{x \text{ minutos}}{20 \text{ minutos}}$$

escrevemos os valores correspondentes em linhas cruzadas, que eram 4 litros e 20 minutos, e 12 litros e x minutos.

Exemplo 4 — *Grandezas inversamente proporcionais*

$$\frac{10 \text{ horas}}{8 \text{ horas}} \times \frac{x \text{ dias}}{15 \text{ dias}}$$

aqui também escrevemos os valores correspondentes em linhas cruzadas, que eram 10 horas e 15 dias, e 8 horas e x dias.

Regra de Três é o procedimento de resolução destes problemas, onde se procura achar o valor de uma quantidade por intermédio dos valores correspondentes de outras três, que são conhecidas.

36. Proporcionalidade Composta

Você já viu que a ***proporcionalidade composta*** relaciona mais de duas grandezas. Agora vamos verificar a dependência destas grandezas, e para isto vamos supor que se trata de averiguar o peso de uma peça de madeira de seção retangular, como a representada na fig. 1.

Se tomarmos esta peça em dobro do comprimento, como se vê na fig. 2, é evidente que ela ficará pesando o dobro. Então, de acordo com o que já vimos, a grandeza ***peso*** e a grandeza ***comprimento*** são ***diretamente proporcionais.***

Se agora tomarmos esta peça da fig. 1 com o dobro da largura, como se vê na fig. 3, sem dúvida ela pesará o dobro da primeira. Daí também deduzimos que o ***peso*** é ***diretamente*** proporcional à ***largura*** da peça de madeira.

Se dermos uma espessura dupla na fig. 1, conforme se vê na fig. 4, não resta nenhuma dúvida de que esta nova peça de madeira terá também o peso duplo da figura inicial.

Portanto, o ***peso*** é ***diretamente*** proporcional à ***espessura.***

Por último, podemos supor que a peça de madeira da fig. 1 possa ser substituída por outra de forma e tamanho idênticos, mas de cimento, que tem uma densidade dupla da de madeira. É inegável que o seu peso aparecerá duplicado também. Neste caso, o ***peso*** é ***diretamente*** proporcional ***à densidade.***

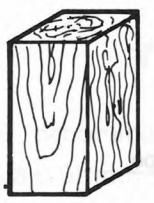


Fig. 1

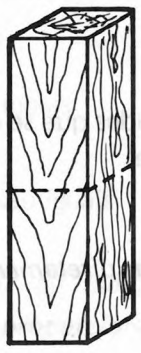


Fig. 2

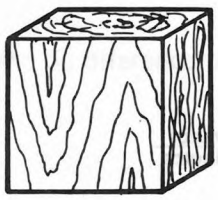


Fig. 3

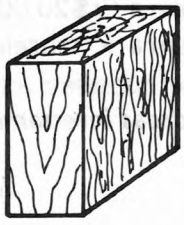


Fig. 4

Conclusão:

O peso da peça em questão é diretamente proporcional ao comprimento, à largura, à espessura e à densidade.

Portanto, temos aqui um caso de ***proporcionalidade composta*** em que uma grandeza é diretamente proporcional às outras quatro grandezas mencionadas.

37. Forma da Questão Relativa à Proporcionalidade

Com respeito aos problemas sobre proporcionalidade simples, podemos dizer que em toda questão relativa a grandezas proporcionais, que tratem de proporcionalidades simples ou compostas, destacamos sempre ***duas*** partes distintas:

1°) - ***A suposição ou hipótese*** onde se explica um caso completo, dando-se o valor de uma certa quantidade e os de outra ou de outras que dela dependem.
2°) - ***A pergunta*** onde damos os novos valores desta.
Reveja novamente este exemplo:
"Um empregado ganha Cr$20 000,00 em 27 dias. Quanto ganhará em 16 dias? "
1°) - ***A suposição completa é que:***
O empregado ganha Cr$20 000,00 em 27 dias.
2°) - ***A segunda parte é semelhante à primeira, mas incompleta:***
É que em 16 dias ele ganha x.
Está faltando o termo que deve exprimir o número de cruzeiros correspondente a 16 dias.

38. Princípio Fundamental Para Resolução de Problemas de Proporcionalidade Composta

Para a resolução de problemas de proporcionalidade composta, devemos seguir este princípio fundamental, que diz:

"Se uma quantidade é proporcional a duas ou mais quantidades de outra espécie, a razão de dois valores quaisquer da primeira é igual ao produto das razões dos valores correspondentes das outras, invertendo aquelas em que a proporcionalidade seja inversa."

Exemplo –

a) Suponhamos que são necessários 10 cavalos para lavrar 350 hectares (ha) em 8 dias.
b) Se empregarmos 5 cavalos, eles poderão lavrar a metade do terreno.
Então: 5 cavalos lavram 175 ha em 8 dias.
c) Se estes 5 cavalos trabalharem durante 24 dias.
Então: 5 cavalos lavram 525 ha (3 x 175 ha) em 24 dias (3 x 8 dias)
Portanto, temos aqui 3 quantidades e dois valores de cada uma:

cavalos	(5, 10)
dias	(24, 8)
hectares	(525, 350).

Considerações:
Vamos considerar a proporcionalidade entre os cavalos e as outras duas quantidades.
É claro que o número de cavalos necessários é:
{tanto ***maior*** quanto ***menor*** for o número de dias
{tanto ***maior*** quanto ***maior*** for o número de hectares.
Portanto: a grandeza ***cavalos é inversamente proporcional*** à grandeza ***dias,*** e a grandeza ***cavalos é diretamente proporcional*** à grandeza ***hectares.***

A razão dos números de cavalos é: $\frac{5}{10}$;

A razão dos números de dias é: $\frac{24}{8}$ e

A razão dos números de hectares é: $\frac{525}{350}$.

Como ***cavalos é inversamente proporcional a dias,*** temos que inverter a razão, que ficará: $\frac{8}{24}$.

Agora, o que você tem a fazer é aplicar a regra do princípio fundamental, que ficará assim:

$$\frac{5}{10} = \frac{8}{24} \times \frac{525}{350} = \frac{8 \times 525}{24 \times 350}$$

Nota: Esta igualdade é facilmente verificada simplificando-se os fatores comuns. Tanto a primeira fração como a última se reduzem a $\frac{1}{2}$.

Antes de passarmos para a resolução dos exemplos de proporcionalidade composta vamos considerar algumas definições importantes.

Termos homólogos são os valores das quantidades de uma mesma espécie.
Exemplo: 4 litros por segundo e 12 litros por segundo.

Sempre que considerarmos a incógnita como um dos termos da pergunta, cada termo desta pergunta terá o seu homólogo na suposição.

Termos correlativos são aqueles cujos valores se correspondem.
Exemplo: 24 mulas podem transportar 2 000 kg a uma distância de 160 km, por Cr$480,00.

Todos estes termos são correlativos, pois a cada um deles corresponde a série formada pelos restantes. E cada um destes números é correlativo dos outros.
Em todo o problema, cada número da suposição é o correlativo dos outros números da suposição. E cada número da pergunta é o correlativo dos outros números da pergunta.
Vamos ver agora, a resolução de alguns exemplos de proporcionalidade composta.

Exemplo 1 —
Sabendo-se que 40 operários ganham Cr$480 000,00 em 16 dias, quanto ganharão 36 operários em 31 dias?

Solução —
Neste exemplo a grandeza ***cruzeiros*** é ***diretamente proporcional*** às outras duas.
O ***salário*** procurado é ***proporcional*** ao número de ***dias*** e ao número de ***operários.***
Então vamos representar a incógnita por ***x*** e aplicar o princípio fundamental, e teremos:

$$\frac{x}{480\,000} = \frac{36}{40} \times \frac{31}{16} = \frac{36 \times 31}{40 \times 16}$$

Temos então uma proporção em que:
3° termo = 36 x 31
4° termo = 40 x 16
Então:

$$x = \frac{480\,000 \times 36 \times 31}{40 \times 16}$$

Simplificando os fatores comuns:

$$x = \text{Cr\$837 000,00.}$$

Resposta: 36 operários ganharão em 31 dias Cr$837 000,00.

Exemplo 2 –
Se trabalhando 10 horas por dia durante 30 dias, 12 tipógrafos compõem 25 folhetos de 16 páginas cada um, tendo cada página 32 linhas, em quantos dias de 8 horas poderão 18 tipógrafos compor 64 folhetos de 12 páginas cada um a 40 linhas por página?

Solução –

Seja ***x*** o número de dias que se procura achar.
Os ***dias*** são inversamente proporcionais às ***horas*** e aos ***tipógrafos*** (pois quanto ***mais*** horas de trabalho tenha um dia, ou quanto ***mais*** tipógrafos, ***menos*** dias serão necessários), e diretamente proporcionais às outras quantidades.
Aplicando o princípio fundamental, teremos:

$$\frac{x}{30} = \frac{10}{8} \times \frac{12}{18} \times \frac{64}{25} \times \frac{12}{16} \times \frac{40}{32}$$

Simplificando os fatores comuns:

$$\frac{x}{30} = \frac{5}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{64}{25} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4}$$

$$\frac{x}{30} = \frac{5 \times 2 \times 64 \times 3 \times 5}{4 \times 3 \times 25 \times 4 \times 4} = \frac{2}{1}$$

$$\frac{x}{30} = \frac{2}{1}$$

$$x = \frac{30 \times 2}{1}$$

$$x = 60 \text{ dias.}$$

Resposta: Poderão executar o serviço em 60 dias.

Explicação detalhada deste último exemplo:
A aplicação dos princípios gerais da proporcionalidade na resolução de problemas deste tipo é feita por um processo quase mecânico.

Veja

1°) escrever uma razão cujo numerador seja a incógnita e o denominador seja o termo da suposição e que seja homólogo da incógnita.

2°) à direita desta razão colocamos o sinal de igual e em seguida um traço de fração suficientemente comprido:

$$\frac{x}{30} = \text{_____}$$

3°) examinar um por um os termos da pergunta. Os que representam quantidades diretamente proporcionais à incógnita, colocamos na parte de cima do traço de fração, separados pelo sinal de multiplicar. Os outros colocamos debaixo do traço de fração, também separados pelo sinal de multiplicar, como você pode ver a seguir:

$$\frac{x}{30} = \frac{64 \times 12 \times 40}{8 \times 18}$$

À medida que for examinando a pergunta, lembre-se que ***x*** representa ***dias:***
8 horas inversa (quer dizer, razão inversa por serem as ***horas inversamente proporcionais*** a ***x***), então colocar o 8 debaixo do traço de fração;

18 ***tipógrafos inversa,*** então colocar o 18 debaixo do traço de fração;
64 ***folhetos direta,*** então colocar o 64 sobre o traço de fração,
e assim sucessivamente até esgotar todos os termos da pergunta.
4.°) fazer o mesmo com os termos da suposição, isto é, examinar um por um, os que representam quantidades diretamente proporcionais à quantidade representada pelo 30 do denominador, escrevendo todos como denominador, e os outros como numerador.
Assim, 10 ***horas inversa,*** então colocar o 10 sobre o traço de fração;
12 ***tipógrafos inversa,*** então colocar o 12 sobre o traço de fração;
25 ***folhetos direta,*** então colocar o 25 debaixo do traço de fração, e assim sucessivamente.
Deste modo vamos obter a seguinte proporção:

$$\frac{x}{30} = \frac{64 \times 12 \times 40 \times 10 \times 12}{8 \times 18 \times 25 \times 16 \times 32}$$

5.°) passar o 30 para o numerador da fração da direita, cortando-o com um traço no denominador da fração da esquerda. Com este procedimento somente o x ficará à esquerda, e o que fica à direita é o próprio valor de x.
Temos então:

$$x = \frac{64 \times 12 \times 40 \times 10 \times 12 \times 30}{8 \times 18 \times 25 \times 16 \times 32}$$

6.°) antes de efetuar as multiplicações, suprimir todos os fatores comuns que apareçam à vista, para que você possa operar com números menores, ou reduzir o número de multiplicações necessárias.

EXERCÍCIOS

1. Se 12 homens cavam uma vala de 40 m de comprimento em 24 dias, trabalhando 10 horas por dia, quantos metros cavarão 16 homens em 18 dias, trabalhando 9 horas por dia?
Resposta: 36 m

2. Se o frete de 900 kg de mercadoria for de Cr$72 500,00 para cada 850 km, qual será o frete para 34 000 kg se a distância for de 675 km ao mesmo preço por quilômetro?
Resposta: Cr$ 2 175 000,00.

3. Se com 60 trabalhadores que trabalham 12 horas por dia, foram gastos 800 dias para construir 9 km de via férrea, quantos trabalhadores, trabalhando 8 horas por dia serão necessários para fazer 24 km em 600 dias, supondo-se que as condições são as mesmas nos dois casos? (Dar como resposta o número inteiro mais próximo).
Resposta: 320.

4. Se 20 caixas de vinho, contendo cada uma 24 garrafas de $\frac{3}{4}$ de litro custam Cr$700 000,00, quanto custarão 35 caixas contendo cada uma 36 garrafas de $\frac{1}{2}$ litro?
(Para os problemas deste tipo, você pode aplicar as mesmas regras dos números inteiros para as frações).
Resposta: Cr$1 225 000,00.

39. Método de Redução à Unidade

A resolução de problemas relativos às grandezas proporcionais, também pode ser obtida pelo ***método de redução à unidade.***
Veja alguns exemplos:
Exemplo 1 –
Se 4 peças de tecido custam Cr$64 000,00 quanto custarão 7 peças do mesmo tecido?
Solução –
Se 4 peças custam Cr$64 000,00, então 1 peça custará

$$\frac{\text{Cr\$64 000,00}}{4} = \text{Cr\$16 000,00}$$

Portanto, se uma peça custa Cr$16 000,00, 7 peças custarão:
7 x Cr$16 000,00 = Cr$112 000,00
Resposta: 7 peças de tecido custarão Cr$112 000,00.

Exemplo 2 –

Um viajante andando 10 horas por dia, leva 15 dias para chegar ao seu ponto de destino. Calcular o número de dias que gastará nesta viagem se andar apenas 8 horas por dia.
Solução –
Andando 10 horas por dia, ele gasta 15 dias.
É claro que se andasse apenas 1 hora por dia gastaria 10 vezes mais tempo, ou seja:
15 x 10 dias.
Mas se ele anda 8 horas por dia, gastará 8 vezes menos tempo do que gastaria andando apenas 1 hora.
Então, a solução será: $\frac{15 \times 10}{8}$ dias = $18\ \frac{3}{4}$ dias.

Resposta: Ele andará $18\ \frac{3}{4}$ dias.

Nota: A solução obtida é igual à que achamos no exemplo 4 – do item 35 (problemas relativos à proporcionalidade simples).

Veja alguns exemplos relativos a ***proporcionalidade composta:***

Exemplo 1 –

Um depósito é enchido pela ação simultânea de duas bombas em 3 horas, sendo que cada uma delas despeja 24 litros de água por minuto. Quanto tempo levaria para encher o depósito, se usássemos apenas uma terceira bomba que despeja 72 litros por minuto?

Solução –
As 2 bombas que despejam 24 litros por minuto levam 3 horas.
1 bomba que despeja 24 litros por minuto levará 3 x 2 horas.
1 bomba que despeja 1 litro por minuto levará 3 x 2 x 24 horas.
1 bomba que despeja 72 litros por minuto levará $\frac{3 \times 2 \times 24}{72}$ = 2 horas.

Resposta: a terceira bomba levará 2 horas.

Exemplo 2 –

Se quatro operários ganham Cr$329 000,00, em 7 dias, quanto ganharão 14 operários em 12 dias com o mesmo salário diário?
Solução –
4 operários em 7 dias ganham Cr$329 000,00
1 operário em 7 dias ganha $\frac{1}{4}$ de Cr$329 000,00.
ou: $\frac{\text{Cr\$329 000,00}}{4}$;

1 operário em 1 dia ganha $\frac{1}{7}$ desta quantia, ou: $\frac{\text{Cr\$329 000,00}}{4 \times 7}$;

1 operário em 12 dias ganha 12 vezes mais, ou: $\frac{\text{Cr\$329 000,00} \times 12}{4 \times 7}$;

14 operários em 12 dias ganham 14 vezes esta quantia, ou: $\frac{\text{Cr\$329 000,00} \times 12 \times 14}{4 \times 7}$

reduzindo teremos:
Cr$329 000,00 x 3 x 2 = Cr$1 974 000,00.
Resposta: 14 operários em 12 dias ganham Cr$1 974 000,00.

EXERCÍCIOS

1. Se 75 kg de ferro custam Cr$750 000,00, quanto custam 125 kg?
   Resposta: Cr$1 250 000,00.

2. Um cesto de 100 ovos foi comprado por Cr$2 000,00. Qual foi o preço de cada dúzia?
   Resposta: Cr$240,00.

3. Uma bomba tira 90 litros de água em 20 minutos. Que tempo será necessário para essa bomba tirar 144 litros?
   Resposta: 32 minutos.

4. Sabendo-se que 6 operários efetuam um certo trabalho em 8 dias, em quanto tempo fariam o mesmo trabalho 18 operários?
   Resposta: $2\frac{2}{3}$ dias.

5. De uma vara de ferro se obtém 42 cavilhas com 3 cm de comprimento cada uma. Quantas cavilhas poderiam ser obtidas se elas tivessem apenas 2 cm de comprimento?
   Resposta: 63 cavilhas.

6. O ar contido numa casa fechada seria suficiente para que 3 pessoas respirassem durante 2 horas e 15 minutos. Calcular o tempo que daria esse ar se na referida casa estivessem 5 pessoas.
   Resposta: 81 minutos.

7. Resolver pelo método de redução à unidade —
   Se 32 hl de trigo pesam 2 400 kg, quanto pesarão 14 hl?
   Resposta: 1 050 kg.

8. Resolver pelo método de redução à unidade —
   Os víveres de um barco dariam para 15 dias para os 63 homens da sua tripulação. Tendo desembarcado 18 homens, calcular para quantos dias darão os mesmos víveres.
   Resposta: 21 dias.

40. Divisão Proporcional

Às vezes na prática temos que dividir um número em partes proporcionais a outros números, tais que as suas razões sejam todas iguais.

Como por exemplo:
dividir o número 270 000 em três partes proporcionais aos números 25, 15 e 50.

Levando isto para a prática, sabemos que geralmente surgem problemas para se dividir dinheiro, como por exemplo:
dividir a quantia de Cr$270 000,00 em três grupos de pessoas com 25, 15 e 50 homens cada grupo, totalizando 90 homens. Quanto receberá cada grupo?
Solução —
cada homem receberá:
Cr$270 000,00 ÷ 90 = Cr$3 000,00
cada grupo receberá:

$\frac{\text{Cr\$270 000,00}}{90} \times 25 = 30 \times 25 = \text{Cr\$75 000,00}$

$\frac{\text{Cr\$270 000,00}}{90} \times 15 = 30 \times 15 = \text{Cr\$45 000,00}$

$\frac{\text{Cr\$270 000,00}}{90} \times 50 = 30 \times 50 = \text{Cr\$150 000,00}$

Total. . . . . = Cr$270 000,00

Veja outros exemplos:
Exemplo 1 —
Um comerciante, ao falir, deixa um capital de Cr$375 000,00, o qual tem que ser dividido entre quatro credores A, B, C e D, aos quais devia, respectivamente,

Cr$231 000,00, Cr$300 000,00, Cr$750 000,00 e Cr$573 000,00. Quanto receberá cada um dos credores?

Solução –

Trata-se evidentemente de se dividir Cr$375 000,00 proporcionalmente às dívidas:

$$\begin{array}{r} \text{Cr\$231 000,00} \\ \text{Cr\$300 000,00} \\ \text{Cr\$750 000,00} \\ \text{Cr\$573 000,00} \\ \hline \text{Cr\$1 854 000,00} \end{array} = \text{total da dívida}$$

então:

$$\frac{375\,000{,}00}{1\,854\,000{,}00} = \frac{125}{618}$$

Parte de A = $\frac{125}{618}$ x 231 000,00 = Cr$ 46 720,00

Parte de B = $\frac{125}{618}$ x 300 000,00 = Cr$ 60 680,00

Parte de C = $\frac{125}{618}$ x 750 000,00 = Cr$151 690,00

Parte de D = $\frac{125}{618}$ x 573 000,00 = Cr$115 890,00

Total. . . . . = Cr$375 000,00

Exemplo 2 –

A, B e C associam-se com capitais de Cr$5 000 000,00, Cr$6 000 000,00 e Cr$7 000 000,00 respectivamente, e ganharam Cr$16 200 000,00. Quanto coube a cada um?

Solução –

Temos que dividir Cr$16 200 000,00 em partes proporcionais a Cr$5 000 000,00, Cr$6 000 000,00 e Cr$7 000 000,00.

$$\begin{array}{r} \text{Cr\$ 5 000 000,00} \\ \text{Cr\$ 6 000 000,00} \\ \text{Cr\$ 7 000 000,00} \\ \hline \text{Cr\$18 000 000,00} \end{array} = \text{total dos capitais}$$

então.

$$\frac{16\,200\,000{,}00}{18\,000\,000{,}00} = \frac{9}{10} = 0{,}9.$$

Parte de A = 5 000 000,00 x 0,9 = Cr$ 4 500 000,00
Parte de B = 6 000 000,00 x 0,9 = Cr$ 5 400 000,00
Parte de C = 7 000 000,00 x 0,9 = Cr$ 6 300 000,00
Total. . . . . = Cr$16 200 000,00

Este tipo de cálculo (divisão proporcional) é chamado muitas vezes de "regra de companhia", pois aplica-se muito para perdas e ganhos sofridos por uma companhia ou sociedade, para determinar que parte corresponde a cada sócio.

EXERCÍCIOS

1. Dividir 1 630 kg em partes proporcionais às frações $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{4}{5}$

   Resp.: 300 kg; 400 kg; 450 kg e 480 kg.

   Nota: Reduzir as frações ao mesmo denominador comum e dividir os 1 630 kg em partes proporcionais aos numeradores obtidos.

2. A pólvora é um composto de salitre, carbono e enxofre na proporção de 75, $12\frac{1}{2}$ e $12\frac{1}{2}$. Quantos quilogramas de cada uma destas substâncias entrarão na composição de 1 473 kg de pólvora?

   Resp.: salitre 1 $104\frac{3}{4}$ kg; carbono 184 $\frac{1}{8}$ kg; enxofre 184 $\frac{1}{8}$ kg

Regra de Três

41. Tipos de Regra de Três

A regra de três é a maneira mais simples e prática para a resolução de problemas que envolvem grandezas proporcionais.
Divide-se em dois tipos:
a) Regra de Três Simples — quando envolve duas grandezas. Pode ser direta ou inversa.
b) Regra de Três Composta — quando envolve três ou mais grandezas. Pode ser diretamente proporcional a uns termos e inversamente proporcional a outros.

42. Regra de Três Simples Direta

Esta regra é usada para a resolução de problemas que envolvem duas grandezas diretamente proporcionais.

Explicando e Exemplificando

"Duas torneiras jorram 20 litros de água por minuto. Quantos litros jorrariam 4 torneiras iguais à essas duas? "
Solução —
Vamos esquematizar o problema do seguinte modo:

- Separar em colunas as grandezas de mesma espécies.
- Colocar flechas de ***mesmo sentido,*** pois as grandezas são ***diretamente proporcionais.*** Na coluna da grandeza que representa a incógnita, a flecha deve sempre apontar para esta incógnita (x).
- Armar a proporção tomando as razões na ordem em que os elementos estão escritos no esquema.

Assim temos:

torneiras	*litros*
↓ 2 torneiras jorram	↓ 20 litros
↓ 4 torneiras jorram	↓ x

Então:

$$\frac{2}{4} = \frac{20}{x}$$

Portanto:

$$x = \frac{4 \times 20}{2}$$

$$x = \frac{80}{2}$$

$$x = 40$$

Resposta: 4 torneiras jorram 40 litros de água por minuto.

43. Regra de Três Simples Inversa

Esta regra é usada para a resolução de problemas que envolvem grandezas que são inversamente proporcionais.

Explicando e Exemplificando

"Uma torneira jorra 20 litros por minuto e enche um tanque em 8 horas. Em quanto tempo encherá o mesmo tanque uma torneira que jorra 30 litros por minuto?

Solução –
Vamos esquematizar o problema do seguinte modo:

- Separar em colunas as grandezas de mesma espécie.
- Colocar as flechas em ***sentido contrário,*** pois as grandezas são ***inversamente proporcionais,*** e na coluna da incógnita a flecha deve sempre apontar para ela (x).
- Armar a proporção tomando as razões no sentido das flechas.

Assim temos:

litros		*horas*
20 litros enchem o tanque em	↓	8 horas
30 litros enchem o tanque em	↓	x horas

Armando a proporção, temos:

$$\frac{30}{20} = \frac{8}{x}$$

Portanto:

$$x = \frac{20 \times 8}{30}$$

$$x = \frac{160}{30}$$

$$x = 5\frac{1}{3}$$

Resposta: a torneira encherá o tanque em 5 horas e 20 minutos ($\frac{1}{3}$ de hora é igual a 20 minutos, pois 60 minutos ÷ 3 = 20).

Observação: Neste exemplo as grandezas são inversamente proporcionais, porque quanto maior número de litros forem vertidos por minuto, menor será o tempo gasto.

44. Regra de Três Composta

Na regra de três composta, a grandeza cujo valor é procurado poderá ser:
a) Diretamente proporcional a todas as outras,
b) Inversamente proporcional a todas as outras,
c) Diretamente proporcional a umas e inversamente proporcional à outras.

Podemos reduzir todos os casos ao primeiro, invertendo os números correspondentes às grandezas inversamente proporcionais, aplicando a seguinte propriedade que você já conhece:

> Os números inversamente proporcionais a outros são diretamente proporcionais aos seus inversos.

Após esta transformação, podemos aplicar a seguinte propriedade:

> Quando uma grandeza é proporcional à outras, os números que exprimem a sua grandeza são proporcionais aos produtos dos números que exprimem as outras grandezas.

Direitos reservados

Para que você possa compreender bem a regra de três composta, vamos usar exemplos típicos para cada caso.

a) Diretamente proporcional

"A água que jorra por uma torneira, que funciona 5 horas por dia, durante 10 dias, custa Cr$6 000,00. Se a torneira funcionar 8 horas por dia, durante 30 dias, qual será o seu custo? "

horas	*dias*	*cruzeiros*
↓ 5 horas por dia durante	↓ 10 dias custa	Cr$6 000,00
↓ 8 horas por dia durante	↓ 30 dias custa	Cr$ x

Veja que todas as flechas têm o mesmo sentido. E que a razão do termo incógnito (x) é igual ao produto das outras razões.
Assim:

$$\frac{5}{8} \times \frac{10}{30} = \frac{6\,000,00}{x}$$

Portanto:

$$x = \frac{8 \times 30 \times 6\,000,00}{5 \times 10}$$

$$x = \frac{1\,440\,000,00}{50}$$

$$x = 28\,800,00$$

Resposta: A água custará Cr$28.800,00.

b) Inversamente proporcional

"Uma torneira funciona durante 2 dias e jorra 20 litros de água por minuto para encher um tanque. Quanto tempo levariam 2 torneiras que jorram 30 litros de água por minuto para encher o mesmo tanque? "
Solução:

torneiras	*litros*	*dias*
↑ 1 torneira jorra	↑ 20 litros por minuto	↓ 2 dias
↑ 2 torneiras jorram	↑ 30 litros por minuto	↓ x dias

Considerações:
mais torneiras, menos dias (inverso) -- flecha sentido contrário
mais litros de água, menos dias (inverso) — flecha sentido contrário
Armando a proporção no sentido das flechas teremos:

$$\frac{2}{1} \times \frac{30}{20} = \frac{2}{x}$$

$$x = \frac{1 \times 20 \times 2}{2 \times 30}$$

$$x = \frac{40}{60}$$

$$x = \frac{2}{3}$$

Resposta: As duas torneiras levariam 16 horas para encher o tanque.
$\frac{2}{3}$ de um dia = $\frac{2}{3}$ x 24 horas = 16 horas.

c) Direta e Inversamente proporcionais

"Uma máquina de encher garrafas funcionou durante 5 horas por dia e encheu 4 000 garrafas em 10 dias. Quantas horas deverá funcionar por dia para encher 5 000 garrafas em 3 dias? "

Solução:

horas	*garrafas*	*dias*
↓ 5	↓ 4 000	↑ 10
↓ x	↓ 5 000	↑ 3

Considerações:
mais horas, mais garrafas (direta) — flecha mesmo sentido
mais horas, menos dias (inversa) — flecha sentido contrário
Armando a proporção no sentido das flechas teremos:

$$\frac{5}{x} = \frac{4\,000}{5\,000} \times \frac{3}{10}$$

Portanto:

$$x = \frac{5 \times 5\,000 \times 10}{4\,000 \times 3}$$

$$x = \frac{125}{6}$$

$$x = 20\,\frac{5}{6}$$

Resposta: A máquina deverá funcionar 20 horas e 50 minutos por dia.
Observação:
Para converter a fração $\frac{5}{6}$ em minutos temos que multiplicá-la por 60.

Assim: $\frac{5}{\cancel{6}_{1}} \times \cancel{60}^{10} = 5 \times 10 = 50$ minutos.

45. Método da Redução à Unidade

Vamos considerar o mesmo exemplo proposto para a resolução do último item da regra de três composta, que diz:
"Uma máquina de encher garrafas funcionou durante 5 horas por dia e encheu 4 000 garrafas em 10 dias. Quantas horas deverá funcionar por dia para encher 5 000 garrafas em 3 dias? "

Teremos:

5 horas —— 4 000 garrafas —— 10 dias

Raciocinando em função de garrafas por hora, temos:
funcionando 10 dias de 5 horas são no total 50 horas de trabalho
(10 dias x 5 horas = 50 horas).
As quatro mil garrafas divididas pelas 50 horas dariam 80 garrafas por hora, que é a capacidade da máquina.

$$\frac{4\,000 \text{ garrafas}}{50 \text{ horas}} = 80 \text{ garrafas por hora}$$

Usando o mesmo processo para:

x horas —— 5 000 garrafas —— 3 dias

Direitos reservados

As 5 000 garrafas divididas por 3 dias dariam $1\ 666\ \frac{2}{3}$.

$$\frac{5\,000 \text{ garrafas}}{3 \text{ dias}} = 1\ 666\ \frac{2}{3} \text{ garrafas}$$

Como a capacidade da máquina é 80 garrafas por hora, dividiremos $1\ 666\ \frac{2}{3}$ garrafas para saber a quantidade de horas necessárias.

$$1\ 666\ \frac{2}{3} \div 80 = \frac{5\,000}{3} \times \frac{1}{80} = \frac{125}{6} = 20\ \frac{5}{6} \text{ horas,}$$

que é igual a 20 horas e 50 minutos, como você já viu.

46. Porcentagem

Porcentagem significa "por cem" ou "por cento". É indicada pelo símbolo % que se lê "por cento".

Exemplificando:
5% = cinco por cento

Para melhor compreensão da noção de porcentagem vamos analisar os seguintes exemplos:

1) Num escritório, 80% dos funcionários são mulheres.
Isto significa que em cada 100 funcionários 80 são mulheres, pois:
$$80\% = \frac{80}{100} = \text{"80 por cento"}$$

2) O dono da mercearia ganha 10% sobre o custo dos produtos que vende.
Isto significa que em cada Cr$100,00 que vende, o dono da mercearia ganha Cr$10,00.
$$10\% = \frac{10}{100} = \text{"dez por cento"}$$

Portanto, 5%, 80% e 10% são denominados "taxas de porcentagem". A porcentagem é muito empregada devido a estabelecer um "termo fixo de comparação".

47. Transformação de Uma Razão em Forma de Porcentagem

Vamos tomar por exemplo a razão $\frac{6}{15}$ e transformá-la em razão porcentual.
Solução —
Temos que achar uma razão igual a $\frac{6}{15}$ com o denominador 100.
Então:

$$\frac{6}{15} = \frac{x}{100}$$
$$x = \frac{6 \times 100}{15}$$
$$x = \frac{600}{15}$$
$$x = 40$$

Portanto, a fração é $\frac{40}{100}$ ou 40% (taxa de porcentagem).

48. Transformação de Porcentagem em Razão

Vamos agora tomar por exemplo a porcentagem 35% e transformá-la em fração irredutível.

Solução —
Temos que fazer a fração com o denominador igual a 100 e simplificá-la quando possível.

$$\frac{35}{100} = \frac{7}{20}$$

Portanto, a fração é $\frac{7}{20}$.

49. Cálculo de Porcentagem

O cálculo de porcentagem nada mais é do que uma regra de três simples com grandezas diretamente proporcionais.

Veja alguns exemplos:

1) Achar 6% de Cr$900,00
Solução —
Formar a regra de três simples direta:

900,00	são	100%
x	são	6%

Armando a proporção temos:

$$\frac{900,00}{x} = \frac{100}{6}$$

$$x = \frac{900,00 \times 6}{100}$$

$$x = \frac{5\,400,00}{100}$$

$$x = 54,00.$$

Resposta: 6% de Cr$900,00 são Cr$54,00.

2) Ao comprar um televisor à vista, uma pessoa conseguiu 18% de abatimento. O preço do televisor era Cr$800,00. Quanto economizou?
Solução — formar a regra de três simples e armar a proporção.

800,00		100%
x		18%

$$\frac{800,00}{x} = \frac{100}{18}$$

$$x = \frac{800,00 \times 18}{100}$$

$$x = 144,00$$

Resposta: economizou Cr$144,00.

3) Pagando uma multa de Cr$60 000,00, um motorista verificou que devido ao prazo ultrapassado, a multa sofreu um acréscimo de 20%. Quanto pagou no total?
1.º processo:
Calcular a porcentagem e somá-la ao total.
Solução — formar a regra de três simples e armar a proporção

60 000,00		100%
x		20%

$$\frac{60\,000,00}{x} = \frac{100}{20}$$

$$x = \frac{60\,000,00 \times 20}{100}$$

$$x = Cr\$12\,000,00.$$

Portanto, o motorista pagou Cr$60 000,00 + Cr$12 000,00 = Cr$72 000,00
Resposta: O motorista pagou no total Cr$72 000,00.

2º processo:
Achar diretamente o total.
Solução — o total a ser pago é 100% (multa) e mais 20% (acréscimo).

$$100\% + 20\% = 120\%$$

Então: formar a regra de três simples e armar a proporção

$$\begin{array}{rl} 60\,000{,}00 & 100\% \\ x & 120\% \end{array}$$

$$\frac{60\,000{,}00}{x} = \frac{100}{120}$$

$$x = \frac{60\,000{,}00 \times 120}{100}$$

$$x = \text{Cr\$72 000,00.}$$

Portanto, o total pago é Cr$72 000,00.

4) Os homens existentes numa fábrica, em número de 160, são 80% do total de pessoas existentes. Os restantes 20% são mulheres. Pede-se:
a) Quantas mulheres trabalham na fábrica?
b) Qual o total de pessoas?
Solução —

Total de pessoas:

$$\begin{array}{rl} 160 & 80\% \\ x & 100\% \end{array}$$

$$\frac{160}{x} = \frac{80}{100}$$

$$x = \frac{160 \times 100}{80}$$

$$x = 200 \text{ pessoas}$$

Quantidade de mulheres:

$$\begin{array}{rl} 160 & 80\% \\ x & 20\% \end{array}$$

$$\frac{160}{x} = \frac{80}{20}$$

$$x = \frac{160 \times 20}{80}$$

$$x = 40 \text{ mulheres}$$

Ou, 200 – 160 = 40 mulheres.
Resposta: a) total de mulheres = 40
b) total de pessoas = 200

50. Regra Prática Para Calcular Porcentagem

"Multiplica-se o número pela porcentagem e divide-se por 100".

Veja este exemplo:
Achar 12% de 600.
Então, seguindo a regra temos: $\frac{600 \times 12}{100} = 72$

Logo, 72 é 12% de 600.

Para facilitar os seus cálculos, vamos agora montar a fórmula desta regra prática para calcular a porcentagem.

Assim:

$$\% = \frac{N \times i}{100}$$

onde:

% = porcentagem
N = número principal
i = taxa de porcentagem

Juros Simples

51. Definição

Juro é uma remuneração recebida pela aplicação de dinheiro por empréstimo ou depósito em banco.

Qualquer exemplo prático que vamos tomar teremos sempre que considerar quatro quantidades:

		Símbolos:
Capital	— quantia aplicada	C
juro	— remuneração recebida	J
tempo	— prazo para pagamento	t
taxa	— traduz as condições da transação	i

Exemplo prático:
"Uma pessoa tem uma quantia em dinheiro e a empresta a um amigo (aplicação do capital) por 10 meses (tempo — prazo para pagamento), cobrando 1% ao mês (taxa). Os juros correspondem a 1% do capital, traduzido em dinheiro."

Exemplo numérico:
Vamos considerar o exemplo anterior, supondo que:
Capital = Cr$500 000,00
tempo = 1 ano
taxa = 2% ao mês ou 24% ao ano
juros = x
Solução —
2% de Cr$500 000,00 = Cr$10 000,00 ao mês de juros ou
Cr$120 000,00 ao ano ($500\,000,00 \times \frac{24}{100} = Cr\$120\,000,00$).
Então:
juro mensal = Cr$10 000,00
juro anual = Cr$120 000,00
Observe que neste exemplo há coincidência do tempo de pagamento com o juro anual.

52. Juros Simples e Compostos

Temos ***juros simples*** quando o capital se mantém invariável.
Temos ***juros compostos*** quando no fim de cada prazo, os juros são juntados ao capital, e no prazo seguinte o capital total passa a ser acrescido com os juros.

53. Juros Simples – Cálculo

O cálculo para os juros simples é feito por uma ***regra de três composta,*** e considerando que os juros são ***diretamente proporcionais*** ao capital e ao tempo.

Explicando e Exemplificando

Calcular os juros:
Capital: Cr$500 000,00 taxa: 24% ao ano
tempo: 3 anos juros: x
Nota: Daqui por diante a taxa será considerada por ano, quando não houver outra indicação.

Cr$100 000,00 em 1 ano produz Cr$24 000,00
Cr$500 000,00 em 3 anos produz Cr$ x

Armando a regra de três composta:

$$\frac{100\,000,00}{500\,000,00} \times \frac{1}{3} = \frac{24}{x}$$

$$x = \frac{500\,000,00 \times 3 \times 24}{100\,000,00 \times 1}$$

$$x = \text{Cr\$360 000,00.}$$

Portanto, os juros pagos são Cr$360 000,00.

54. Fórmula para Cálculo de Juros Simples

Para simplificar os problemas, você pode usar as seguintes ***fórmulas:***

$$J = \frac{Cit}{100} \qquad C = \frac{100.J}{i.t} \qquad i = \frac{100.J}{C.t} \qquad t = \frac{100.J}{C.i}$$

Onde:
J = juros
C = capital
t = tempo em anos
i = taxa (% ao ano).

55. Capital Acumulado ou Montante

Capital acumulado ou montante (M) é a soma de um capital com o juro correspondente.

Acompanhe este exemplo onde são dados o capital acumulado, a taxa e o tempo, e são pedidos o capital e o juro.

Exemplo:
Sendo Cr$2 480 000,00 o capital acumulado no juro de três anos, a 8% ao ano, calcular o juro e o capital.
Solução —
Vamos considerar o capital como ***x***.

Aplicando a fórmula, teremos:

$$J = \frac{C.i.t}{100}$$

$$J = \frac{x \,.\, 8 \,.\, 3}{100}$$

$$J = \frac{24x}{100}$$

O montante (M) será então:

$$x + \frac{24x}{100}$$

O montante é igual a Cr$2 480 000,00, portanto:

$$2\,480\,000{,}00 = x + \frac{24x}{100}$$

Multiplicando tudo por 100, temos:
$248\,000\,000{,}00 = 100x + 24x$
$248\,000\,000{,}00 = 124x$

$$x = \frac{248\,000\,000{,}00}{124}$$

$$x = 2\,000\,000{,}00.$$

Portanto, o capital é de Cr$2 000 000,00.

EXAME

Razões e Proporções

Referência
011—A

Observações Para o Aluno

- Antes de responder as questões você deverá ter feito um estudo minucioso e completo desta lição.
- Agora, leia cada questão até compreender bem o que se pede.
- Cada questão apresenta várias soluções. Apenas uma solução é a correta.
- Em cada questão indique a solução que você julgar correta e, a seguir, transcreva, com atenção, as suas respostas para a FOLHA DE RESPOSTAS, anexa.

1. O valor de "x" na proporção $10 \div 13 = 20 \div x$, é:
   a) 22,2
   b) 26
   c) 32,2
   d) 42,3

2. O valor de "x" na proporção seguinte $\frac{20+7}{10+8} = \frac{3}{x}$ é:
   a) 3
   b) 2
   c) $4\frac{1}{2}$
   d) 162

3. O valor de "x" na proporção seguinte $144 \div 225 = 4 \div x$ é:
   a) 6,25
   b) 7,25
   c) 2,56
   d) 8 100

Ache o valor de "x" nas seguintes proporções:

4. $\frac{4}{x} = \frac{7}{21}$.
   a) 22
   b) 12
   c) 36,75
   d) $1\frac{1}{3}$

5. $\frac{x}{24} = \frac{8}{16}$
   a) 12
   b) 23
   c) 48
   d) $5\frac{1}{3}$

6. $12 \div 17 = 60 \div x$
   a) 85
   b) 96
   c) $42\frac{6}{17}$
   d) 3,4

7. $20 \div 72 = 60 \div x$
   a) $308\frac{4}{7}$
   b) 216
   c) $16\frac{2}{3}$
   d) 24

8. $\frac{4}{5} = \frac{76}{x}$;
   a) 65
   b) 95
   c) 60,8
   d) $\frac{5}{19}$

9. $12{,}5 \div 131 = 10 \div x$;
   a) 104,8
   b) 241,48
   c) $\frac{125}{131}$
   d) $163\frac{3}{4}$

10. Vários empregados trabalham com um mesmo vencimento horário. Se a 5 deles, que trabalharam 50 horas cada um, se pagaram Cr$175,00, quanto se deve pagar a 20, que trabalharam 64 horas cada um?
    a) 896,00 c) 546,87
    b) 986,00 d) 56,00

11. Se 180 homens fazem um trabalho em 140 dias, em quantos dias o fariam 225 homens?
    a) 112 c) 175
    b) 212 d) 28

12. Uma bomba com uma capacidade de 135 litros, enche um tanque em 39 minutos e 40 segundos. Em quanto tempo o encherá uma outra bomba cuja capacidade seja de 85 litros por minuto?
    a) 60 minutos e 21 segundos c) 63 minutos
    b) 70 minutos e 30 segundos d) 20 minutos e 55 segundos

13. Contrataram-se 10 trabalhadores para construir-se uma ponte, que ficará concluída no prazo de 75 dias, trabalhando 8 horas por dia. Como é necessário concluir a obra em 40 dias, quantos trabalhadores se devem empregar, se se aumentar para 10 horas a duração do trabalho diário?
    a) 15 c) 5
    b) 26 d) 25

14. Uma roda de engrenagem que tem 84 dentes, engrena com outra de 35 dentes. Se a maior fizer 175 rotações por minuto, a que velocidade girará a menor?
    a) 420 c) 245
    b) 480 d) 595

15. Qual é o valor da razão de $1\frac{1}{4}$ para $\frac{5}{16}$?
    a) 4 c) 16
    b) 5 d) $\frac{4}{5}$

16. Dividir 300 em partes diretamente proporcionais a 3, 5 e 7:
    a) 60; 90; 130 c) 60; 100; 140
    b) 50; 100; 150 d) 140; 100; 60.

17. Dividindo-se o número 130 em partes inversamente proporcionais a: $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$; encontramos:
    a) 30; 40; 60 c) 20; 40; 70
    b) 40; 30; 60 d) 60; 40; 30.

18. Qual é o número que diminuido de seus 21% resulta 237?
    a) 220 c) 320
    b) 200 d) 300