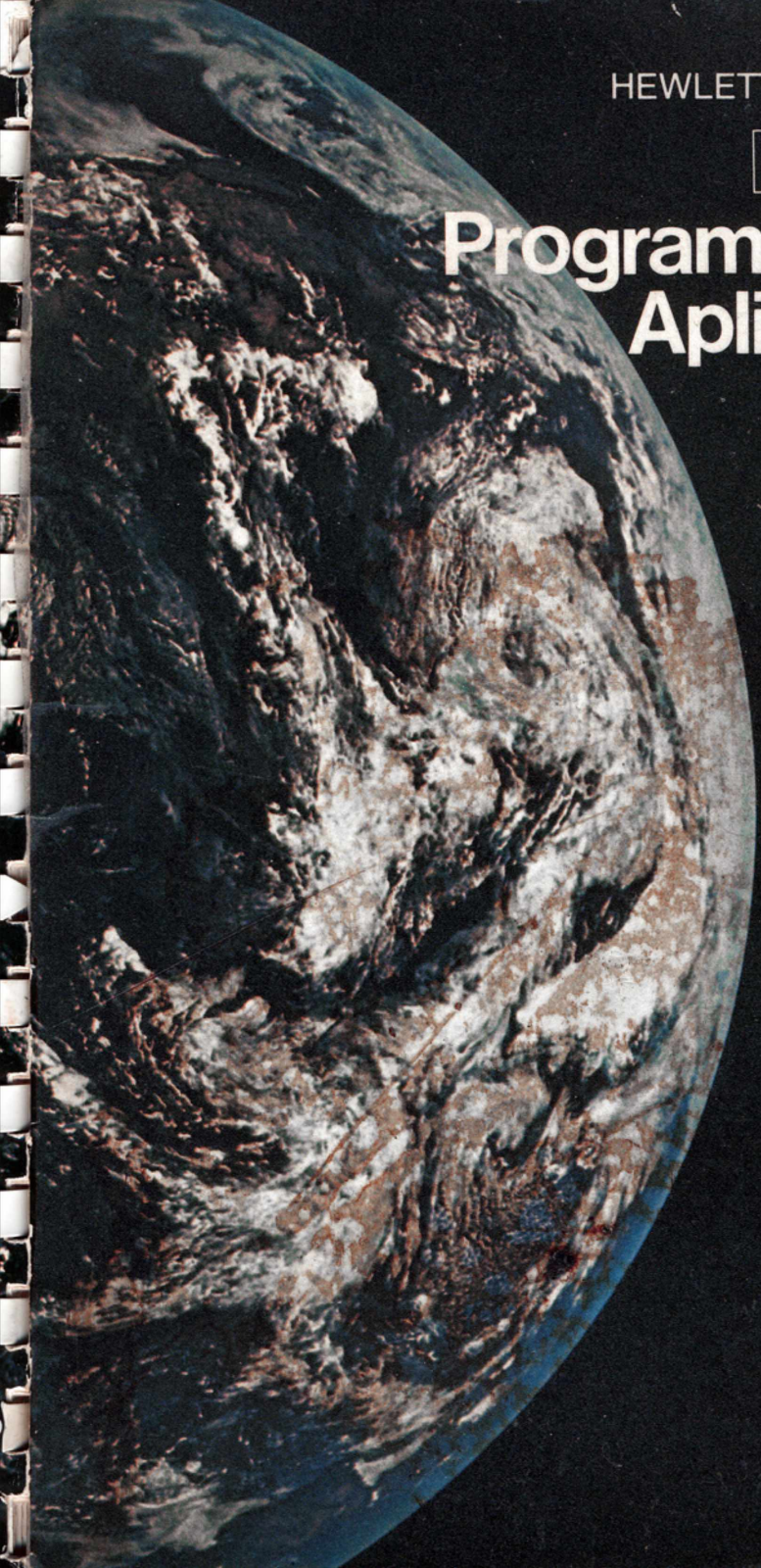
HEWLETT-PACKARD

HP-25
Programação Aplicada



Introdução

Seja bem-vindo. Você, novo proprietário da calculadora HP-25, está prestes a pisar terreno que há dez anos, apenas, era propriedade exclusiva dos usuários de grandes sistemas computadores, cujo custo ascendia a centenas de milhares de dólares; e que, mesmo há apenas cinco anos, exigia uma calculadora que custava alguns milhares de dólares, de dimensões tais que ocupava uma boa parte de uma mesa comum de escritório. Hoje, a calculadora Modelo HP-25 coloca a tecnologia de computadores diretamente nas mãos do usuário individual. Esperamos que este manual, o qual foi preparado especialmente para seu uso, seja um veículo para a demonstração do imenso potencial deste valioso instrumento calculador.

Os programas contidos no presente manual, todos eles suscetíveis de aplicação pela calculadora Modelo HP-25, são derivados dos mais variados campos da atividade humana: da matemática, da estatística, do setor de finanças, da topografia, da navegação marítima e aérea, e do divertido setor de passatempos e jogos. Cada programa é apresentado conjuntamente com uma detalhada explicação do mesmo, incluindo: uma descrição inicial do problema; as equações pertinentes ao mesmo; uma relação das etapas indispensáveis à introdução dos dados na memória de programação; uma relação de instruções para a execução do programa; e um ou dois exemplos típicos, com as correspondentes soluções. A manipulação dos programas não requer nenhuma experiência prévia no setor de programação de dados. Supõe-se, porém, um certo conhecimento da matéria contida no Manual do Proprietário, que se faz acompanhar da calculadora Modelo HP-25.

Para aqueles usuários desejosos de aprofundarem seus conhecimentos relativos aos princípios e técnicas de programação de dados, foi incluído um número de programas visando a essa finalidade. O primeiro programa de cada capítulo, além de fornecer as explicações costumeiras, contém uma descrição mais detalhada do programa que se apresenta; uma relação, com comentários pertinentes, dos comandos de tecla indispensáveis à execução do programa; um traçado, passo por passo, do conteúdo da pilha operacional; e uma relação dos comandos de tecla necessários para a solução do problema-exemplo em apreço. Sempre que seja empregada uma técnica de programação de maior interesse, a mesma será objeto de uma breve descrição, a qual aparecerá numa seção intitulada "Comentários Sobre Programação." Esta precederá a relação de comandos de tecla indispensáveis à execução do programa.

Seja qual for o seu interesse particular – a resolução de problemas individuais, relativos a determinados setores, ou o aperfeiçoamento dos seus conhecimentos atinentes à capacidade de programação da sua calculadora – esperamos que este manual lhe ajude a tirar o máximo proveito da sua HP-25.

ÍNDICE

Introdução 1
Uma Palavra Sobre a Utilização dos Programas 4

Capítulo 1: Álgebra e Teoria dos Números
Representação Gráfica 7
Equações do Segundo Grau 12
Aritmética Complexa (+, −, ×, ÷) 15
Funções Complexas (|z|, z^2, 1/z, √z) 18
Determinante e Inverso de Uma Matriz 2x2 20
Conversões de Base
Número na Base b para Número na Base 10 22
Número na Base 10 para Número na Base b 24
Cálculo Vetorial
Produto Vetorial 26
Produto Escalar, Módulo e Ângulo 28
Equações Simultâneas em Duas Incógnitas 30

Capítulo 2: Finanças
Empréstimo Hipotecário
Juros Acumulados e Saldo Devedor 32
Pagamentos, Valor Presente, Número de Períodos 37
Taxa de Juros 39
Importância Composta 41
Poupanças Periódicas
Pagamentos, Valor Futuro, Número de Períodos 44
Fluxo de Caixa Descontado
Valor Presente Líquido, Taxa Interna de Rendimento 46
Calendário
Dia da Semana, Número de Dias Entre Duas Datas 49

Capítulo 3: Jogos
Simulação de Uma Alunissagem 52
Mico 55
Aritmética Divertida 57

Capítulo 4: Navegação
Determinação de Rotas 61
Traçado Ortodrômico 62
Navegação Loxodrômica 65
Tabela de Redução de Mira 70
Navegação Ortodrômica 72

Capítulo 5: Métodos Numéricos
Solução de f(x) = 0 Pelo Método de Newton 76
Integração Numérica, a Regra de Simpson 81
Resolução Numérica de Equações Diferenciais 83
Interpolação Linear 85

Capítulo 6: Estatística
Ajustagem Com Curvas
Regressão Linear 87
Ajustagem Com Curva Exponencial 92
Ajustagem Com Curva Logarítmica 95
Ajustagem Com Curva Potencial 98
Parâmetros Estatísticos
Covariação e Coeficiente de Correlação 101
Momentos e Assimetria 103
Distribuições
Distribuição Normal 105
Inversa da Distribuição Normal 108
Probabilidade
Fatorial 110
Arranjo 112
Combinação 114
Gerador de Número Aleatório 116
Testes Estatísticos
Teste Chi-Quadrado 118
Estatística t Para Pares de Observações 121
Estatística t Para Duas Médias 124
Teste da Média de Uma Amostra 127

Capítulo 7: Topografia
Linha Poligonal 129
Área Pela Distância Meridional Dupla 134
A Poligonal a Partir das Coordenadas 136

Capítulo 8: Trigonometria e Geometria Analítica
Translação e Rotação de Coordenadas 138
Resolução de Triângulos e Áreas
B, b, c 143
a, b, c 146
a, A, c 149
a, b, C 152
a, B, C 155
Funções Hiperbólicas 158
Funções Hiperbólicas Inversas 160

Uma Palavra Sobre a Utilização dos Programas

São vários os tipos de dados informativos que colocamos à sua disposição, através do presente manual, para uma devida explicação de como cada programa deverá ser utilizado. Além de uma breve descrição de cada problema apresentado, uma relação de equações aplicáveis aos mesmos, e a exposição de problemas-exemplo com respectivas soluções, proporcionamos dois formulários que também são merecedores de uma breve explanação. São eles: o Formulário de Programação e o Formulário de Instruções.

Na realidade, são *dois* os Formulários de Programação, sendo um apenas uma versão simplificada do outro. O primeiro, um formulário mais detalhado, é empregado num total de oito programas, ou seja, um por capítulo. O formulário simplificado é utilizado para os demais. Ilustramos, a seguir, um trecho do Formulário Detalhado de Programação referente ao programa de Representação Gráfica, extraído do Capítulo I:

Visor		Introdução	X	Y	Z	T	Observações	Registros
Linha	Código							
00			v	θ				R_0 Δt
01	14 09	f→R	v_x	v_y			Conversão polar para	
02	23 02	STO 2	v_x	v_y			cartesiana	
03	21	x⇄y	v_y	v_x			V co-seno θ = veloc. horiz.	R_1 g
04	23 03	STO 3	v_y	v_x			V seno θ = veloc. vert.	
05	00	0	0					
06	23 04	STO 4	0				Iniciar: t = 0	R_2 v_x
07	24 00	RCL 0	Δt				Início do laço	
08	23 51 04	STO + 4	Δt				Próximo intervalo	
09	24 04	RCL 4	t				t ← t + Δt	R_3 v_y
10	15 02	g x^2	t^2					

A coluna à extrema direita, intitulada REGISTROS, relaciona as variáveis que se encontram armazenadas nos registradores de armazenamento de R_0 a R_7. O remanescente do formulário divide-se em oito colunas. As duas primeiras descrevem a aparência do visor à medida que o programa é gravado. A coluna encimada pela palavra LINHA indica o número da etapa referente à instrução em pauta, ao passo que a coluna encimada pela palavra CÓDIGO indica os códigos numéricos das teclas correspondentes aos comandos de tecla listados na coluna seguinte, INTRODUÇÃO. As indicações desta se referem às teclas que deverão ser pressionadas, a fim de introduzir o programa na memória de programação. A tecla de ENTER↑ encontra-se indicada nesta coluna pelo símbolo [↑] ; todas as demais designações são idênticas às que aparecem no teclado da HP-25.

As quatro colunas seguintes, encimadas por X, Y, Z e T, traçam o conteúdo da pilha operacional, conforme este se modificaria durante a realização do programa no modo RUN. As inscrições contidas nas colunas encimadas pelas letras X, Y, Z e T apresentam o conteúdo dos correspondentes registradores *após* a execução da instrução contida na linha em pauta. A coluna intitulada OBSERVAÇÕES oferece uma explicação adicional dos cálculos efetuados pelo programa.

Estas últimas colunas, encimadas por X, Y, Z, T e OBSERVAÇÕES, são apresentadas a fim de auxiliar o usuário interessado em adquirir um conheci-

mento mais profundo de um determinado programa ou das técnicas de programação em geral.

O Formulário Simplificado de Programação exibe os mesmos dados contidos no Formulário Detalhado de Programação, salvo as informações apresentadas pelas colunas encimadas por X, Y, Z, T e OBSERVAÇÕES.

O Formulário de Instruções, por sua vez, constitui um verdadeiro guia para o usuário que deseja executar um programa em particular, destinado à solução de um problema individual. O formulário em questão, o qual contém cinco colunas, encontra-se ilustrado abaixo. A ilustração se refere ao mesmo programa anterior, extraído do Capítulo I e intitulado Representação Gráfica.

Etapa	Instruções	Dados de Entrada	Teclas				Dados de Saída
1	Gravar o programa						
2	Armazenar o intervalo de tempo Δt	Δt	STO	0			
3	Armazenar a constante gravitacional	g	STO	1			
4	Introduzir o ângulo e a velocidade inicial	θ	↑				
		v	f	PRGM			
5	Executar as etapas 5 e 6						
	o número de vezes desejado Apresentar o tempo e a		R/S				(t)
	distância horizontal						x
6	Apresentar a altura		R/S				y
7	Para trocar (-) ou v,						
	passar para a etapa 4.						
	Para trocar Δt ou g, passar para a etapa apropriada,						
	armazenar o novo valor, e passar para a etapa 4.						

Procedendo-se da esquerda para a direita, a coluna encimada pela palavra ETAPA identifica o número da instrução. A coluna seguinte, intitulada INSTRUÇÕES, ordena as instruções que deverão ser obedecidas e apresenta observações pertinentes às operações a serem executadas. Todas as etapas deverão ser executadas consecutivamente, salvo indicação contrária na coluna de INSTRUÇÕES.

Normalmente, a primeira instrução é para "gravar o programa." Isto significa o armazenamento dos comandos do programa na memória de programação (passar para o modo PRGM, apertar [f] [PRGM], gravar o programa, e, em seguida, passar novamente para o modo RUN).

Certos processos repetitivos relacionados, na maioria dos casos, a uma extensa sequência de dados de entrada/saída são assinalados por uma moldura em negrito, conforme a ilustração acima, referente às etapas 5 e 6 do exemplar do Formulário de Instruções. Em tal caso, as etapas são repetidas para gerar um número de pares (x,y), para fins de representação gráfica.

A coluna encimada pelas palavras DADOS DE ENTRADA especifica os dados de entrada a serem fornecidos e, caso aplicável, as unidades dos mesmos. A coluna intitulada TECLAS identifica as teclas que deverão ser apertadas. Nela, a flecha [↑] é empregada para representar a tecla ENTER↑, sendo que todas as demais designações de teclas são idênticas às que aparecem no teclado da calculadora. Todos os espaços em branco, que porventura apareçam na coluna de TECLAS, deverão ser desconsiderados.

A complexidade de alguns programas obrigará o usuário a pressionar teclas adicionais, a fim de gerar os resultados desejados. Em tais casos, as teclas que deverão ser pressionadas também serão indicadas na coluna encimada pela palavra TECLAS.

A complexidade de alguns programas obrigará o usuário a pressionar teclas adicionais, a fim de gerar os resultados desejados. Em tais casos, as teclas que deverão ser pressionadas também serão indicadas na coluna encimada pela palavra TECLAS.

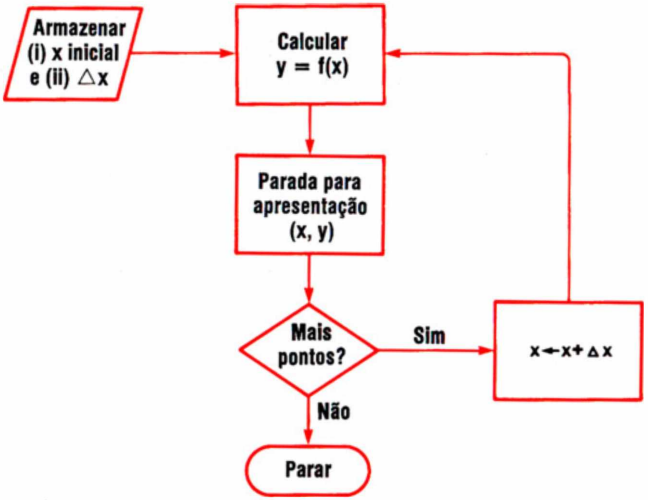
A coluna intitulada DADOS DE SAÍDA apresenta os resultados intermediários e finais calculados através do teclado ou da execução de um programa e, caso aplicável, as unidades dos mesmos. Os parênteses em torno de uma variável de saída, tal como (t) na etapa 5, indicam que o resultado será apresentado no visor apenas momentaneamente, através de uma instrução de PAUSA ([f] [PAUSE]).

CAPÍTULO I
TEORIA DOS NÚMEROS E ÁLGEBRA

Representação Gráfica

Quase todas as pessoas que, certa feita, se viram obrigadas a fazer um curso de álgebra no colégio ainda tendem a encarar qualquer menção da palavra "gráfico" com certa trepidação. E com muita razão; pois, o enfadonho trabalho de achar, por exemplo, $y = 3x^2 - 4x + 4$ para valores de x situados entre $-\infty$ e $+\infty$, constituiu um tipo de dever escolar que sempre ficará gravado nas suas memórias. Afortunadamente, porém, nunca mais seremos obrigados a passar por semelhante situação, pois a calculadora HP-25 se presta perfeitamente a este tipo de cálculo, que se caracteriza por interminável repetição.

O objetivo básico do presente programa é a geração de pares (x e y), através do cálculo de y, supondo-se que seja conhecido o valor de x. Gravado o programa, para calcular um y, o usuário somente precisará passar para o topo da memória; introduzir o valor de x; e apertar a tecla [R/S], a fim de obter a apresentação do valor y, no visor da calculadora, em apenas alguns segundos. O processo poderá ser repetido para tantos valores de x quantos desejados. O programador também poderá levar este processo um passo mais adiante, na direção da automação total, fazendo com que, por exemplo, a calculadora gere cada novo valor de x com um acréscimo de 1 ao valor primitivo, ou, de um modo geral, com o acréscimo de um incremento específico, $\triangle x$. A ilustração abaixo é um fluxograma do processo em apreço.



O programa aqui empregado para ilustrar este processo segue, entretanto, um rumo ligeiramente diferente. Abordaremos o problema do traçado da trajetória de uma pedra atirada para cima a um ângulo Θ, com relação à horizontal, e com velocidade inicial v. Desprezando a resistência do ar, as equações seguintes descrevem as coordenadas da pedra, x e y, como funções do tempo, t:

$$x = vt \cos \theta \qquad y = vt \operatorname{sen} \theta - \frac{1}{2} gt^2$$

sendo x = distância horizontal do percurso da pedra

y = altura atingida pela pedra

g = aceleração devida à gravidade

$\simeq 9.8 \text{ m/s}^2$

$\simeq 32 \text{ ft/s}^2$

Estas equações diferem ligeiramente da função gráfica costumeira, pelo fato de tanto x como y terem sido expressos como funções de uma terceira variável t em vez de y ter sido expresso diretamente como uma função de x. Os pontos a serem representados, todavia, permanecem sendo definidos pelo par ordenado (x, y); porém, agora é o tempo t, que deverá ser acrescido de uma quantia $\triangle t$.

Observações:

1. Qualquer sistema de unidades poderá ser utilizado, desde que o mesmo seja consistente.

2. Este *não* constitui um programa geral de representação gráfica. A sua finalidade é a de simplesmente ilustrar o método adotado, através de sua aplicação a um problema específico. Entretanto, um cuidadoso exame da lógica e do fluxograma permitirão ao usuário adaptar o método em apreço às suas necessidades individuais.

Comentários sobre Programação:

1. As componentes da velocidade nas direções horizontal e vertical, v_x e v_y, são computadas em uma única etapa, pela conversão de v e Θ para coordenadas cartesianas ([f] [→R]). Os valores $v_x = v \cos \Theta$ e $v_y = v \operatorname{sen} \Theta$ são colocados nos registradores X e Y, respectivamente.

2. Uma pausa ([f] [PAUSE]) é utilizada no programa para apresentar, brevemente, a variável t, cujos valores são simples (0,25; 0,50; 0,75; etc.), não havendo, portanto, a necessidade de serem anotados.

Visor		Introdução	X	Y	Z	T	Observações
Linha	Código						
00			v	θ			
01	14 09	f →R	v_x	v_y			Conversão polar para
02	23 02	STO 2	v_x	v_y			cartesiana
03	21	x⇄y	v_y	v_x			V co-seno (+) = veloc. horiz.
04	23 03	STO 3	v_y	v_x			V seno (+) = veloc. vert.
05	00	0	0				
06	23 04	STO 4	0				Iniciar: t = 0
07	24 00	RCL 0	Δt				Início do laço
08	23 51 04	STO + 4	Δt				Próximo intervalo de tempo
09	24 04	RCL 4	t				$t \leftarrow t + \Delta t$
10	15 02	g x^2	t^2				
11	24 01	RCL 1	g	t^2			
12	61	x	$g\,t^2$				
13	02	2	2	$g\,t^2$			
14	71	÷	$1/2\,g\,t^2$				
15	32	CHS	$-1/2\,g\,t^2$				
16	24 04	RCL 4	t	$-1/2\,g\,t^2$			
17	24 03	RCL 3	v_y	t	$-1/2\,g\,t^2$		
18	61	x	$v_y\,t$	$-1/2\,g\,t^2$			
19	51	+	y				$y = v_y\,t - 1/2\,g\,t^2$
20	24 04	RCL 4	t	y			
21	24 02	RCL 2	v_x	t	y		
22	61	x	x	y			$x = v_x\,t$
23	24 04	RCL 4	t	x	y		
24	14 74	f PAUSE	t	x	y		Pausar para apresentar t
25	22	R↓	x	y		t	
26	74	R/S	x	y		t	Parar e apresentar x
27	21	x⇄y	y	x		t	
28	74	R/S	y	x		t	Parar e apresentar y
29	13 07	GTO 07	y	x		t	Transferência para
30							o próximo t
31							
32							
33							
34							
35							
36							
37							
38							
39							
40							
41							
42							
43							
44							
45							
46							
47							
48							
49							

Registros	
R_0	Δt
R_1	g
R_2	v_x
R_3	v_y
R_4	t
R_5	
R_6	
R_7	

Etapa	Instruções	Dados de Entrada	Teclas				Dados de Saída
1	Gravar o programa						
2	Armazenar o intervalo de tempo Δt	Δt	STO	0			
3	Armazenar a constante gravitacional	g	STO	1			
4	Introduzir o ângulo e a	θ	↑				
	velocidade inicial	v	f	PRGM			
5	Executar as etapas 5 e 6						
	o número de vezes desejado		R/S				(t)
	Apresentar o tempo e a distância horizontal						x
6	Apresentar a altura		R/S				y
7	Para trocar ↦ ou v, passar para a etapa 4.						
	Para trocar Δt ou g, passar para a etapa apropriada,						
	armazenar o novo valor, e, em						
	seguida, passar para a etapa 4.						

Exemplo:

Desenhar a trajetória de uma pedra atirada para cima à velocidade de 20 m/s, a um ângulo de 30° com a horizontal. Adotar intervalos de ¼ de segundo entre os pontos determinados. Seja g = 9,8 m/s².

Solução:

0.25 STO 0 9.8 STO 1 30 ↑ 20 f PRGM R/S → 0.25 (t_1)

4.33 (x_i)

R/S → 2.19 (y_1)

R/S → 0.5 (t_2)

8.66 (x_2)

R/S → 3.78 (y_2)

R/S → 0.75 (t_3)

12.99 (x_3)

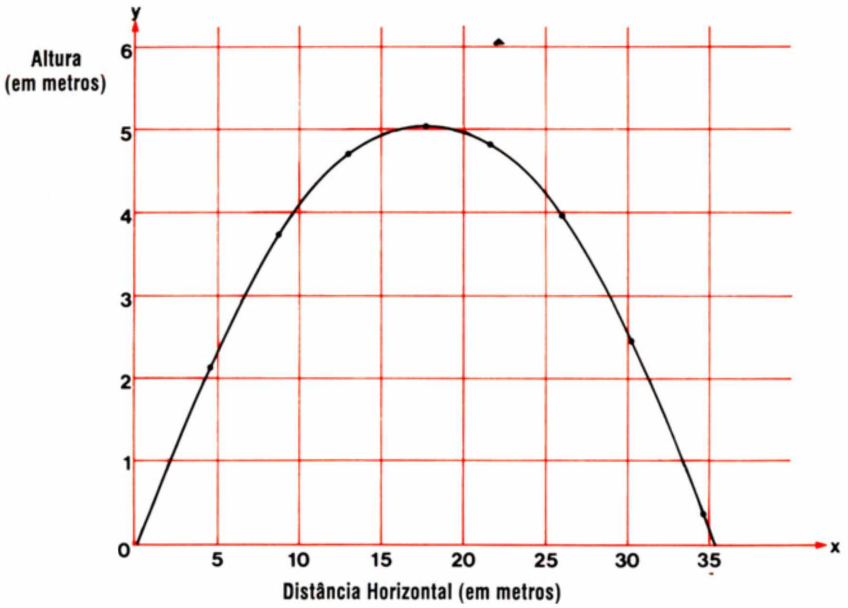
R/S → 4.74 (y_3)

etc.

Prosseguir até que o valor y seja negativo. A tabela dos resultados é dada a seguir:

t	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25
x	4,33	8,66	12,99	17,32	21,65	25,98	30,31	34,64	38,97
y	2,19	3,78	4,74	5,10	4,84	3,98	2,49	0,40	−2,31

Fazendo-se o gráfico dos valores x e y, fica comprovado que a trajetória da pedra corresponde a uma parábola.



Equações do Segundo Grau

As raízes x_1, x_2 de $$ax^2 + bx + c = 0$$

são dadas por $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se $$D = (b^2 - 4ac)/4a^2$$

for um valor positivo ou zero, as raízes são reais. Em tais casos, uma exatidão mais precisa torna-se possível, às vezes, computando-se primeiramente, a raiz de maior valor absoluto:

Se $$-\frac{b}{2a} \geqslant 0, \quad x_1 = -\frac{b}{2a} + \sqrt{D}$$

Se $$-\frac{b}{2a} < 0, \quad x_1 = -\frac{b}{2a} - \sqrt{D}$$

Seja qual for o caso, $$x_2 = \frac{c}{x_1\, a}$$

Se $D < 0$, as raízes são complexas, sendo

$$u \pm iv = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}\, i$$

Visor		Introdução
Linha	Código	
00		
01	31	↑
02	22	R↓
03	71	÷
04	02	2
05	71	÷
06	32	CHS
07	31	↑
08	15 02	g x^2
09	22	R↓
10	22	R↓
11	21	$x \rightleftarrows y$
12	71	÷
13	23 00	STO 0
14	41	–
15	14 74	f PAUSE
16	15 41	g x<0
17	13 31	GTO 31
18	14 02	f $\sqrt{x}$
19	21	$x \rightleftarrows y$
20	15 41	g x<0
21	13 24	GTO 24
22	51	+
23	13 26	GTO 26
24	21	$x \rightleftarrows y$

Visor		Introdução
Linha	Código	
25	41	–
26	74	R/S
27	15 22	g 1/x
28	24 00	RCL 0
29	61	x
30	13 00	GTO 00
31	32	CHS
32	14 02	f $\sqrt{x}$
33	21	$x \rightleftarrows y$
34	74	R/S
35	21	$x \rightleftarrows y$
36	13 00	GTO 00
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

Registros
R_0 c/a
R_1
R_2
R_3
R_4
R_5
R_6
R_7

Etapa	Instruções	Dados de Entrada	Teclas				Dados de Saída
1	Registrar o programa						
2	Iniciar o programa		f	PRGM			
3	Introduzir os coeficientes	c	↑				
	e apresentar D	b	↑				
		a	R/S				(D)
4	Se $D \geq 0$, as raízes são reais						x_1
			R/S				x_2
	ou						
	Se $D < 0$, as raízes são						
	complexas ($u \pm iv$)						u
			R/S				v
5	Para novo caso, passar para 3						

Exemplo:

Achar as soluções das três equações abaixo:

1. $x^2 + x - 6 = 0$
2. $3x^2 + 2x - 1 = 0$
3. $2x^2 - 3x + 5 = 0$

Soluções:

1. $D = 6.25$
   $x_1 = -3.00$
   $x_2 = 2.00$
2. $D = 0.44$
   $x_1 = -1.00$
   $x_2 = 0.33$
3. $D = -1.94$
   $x_1, x_2 = 0.75 \pm 1.39\ i$

Aritmética Complexa (+, −, ×, ÷)

Sejam $a_1 + ib_1$ e $a_2 + ib_2$ dois números complexos. As operações aritméticas +, −, ×, ÷ são definidas da seguinte forma:

1. +, adição

$$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

2. −, subtração

$$(a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

3. ×, multiplicação

$$(a_1 + ib_1) \times (a_2 + ib_2) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

4. ÷, divisão

$$\frac{(a_1 + ib_1)}{(a_2 + ib_2)} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}, a_2 + ib_2 \neq 0$$

onde $r_1 e^{i\theta_1}$ é a representação polar de $a_1 + ib_1$, e $r_2 e^{i\theta_2}$ é a representação polar de $a_2 + ib_2$. Em todos os casos, seja a resposta $x + iy$.

Uma vez terminado o cálculo, o valor x é armazenado tanto no registrador R_0 como no registrador X, e o valor y é armazenado tanto no registrador R_1 como no registrador Y. Desta forma, as operações aritméticas podem ser encadeadas.

Visor		Introdução
Linha	Código	
00		
01	32	CHS
02	21	x⇄y
03	32	CHS
04	21	x⇄y
05	24 00	RCL 0
06	51	+
07	21	x⇄y
08	24 01	RCL 1
09	51	+
10	13 31	GTO 31
11	15 09	g →P
12	15 22	g 1/x
13	21	x⇄y
14	32	CHS
15	21	x⇄y
16	13 18	GTO 18
17	15 09	g →P
18	24 02	STO 2
19	22	R↓
20	24 01	RCL 1
21	24 00	RCL 0
22	15 09	g →P
23	24 02	RCL 2
24	61	x

Visor		Introdução
Linha	Código	
25	23 02	STO 2
26	22	R↓
27	51	+
28	24 02	RCL 2
29	14 09	f →R
30	21	x⇄y
31	23 01	STO 1
32	21	x⇄y
33	23 00	STO 0
34	13 00	GTO 00
35		
36		
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

Registros
R_0 a_1, x
R_1 b_1, y
R_2 Usado
R_3
R_4
R_5
R_6
R_7

Etapa	Instruções	Dados de Entrada	Teclas				Dados de Saída
1	Registrar o programa						
2	Armazenar o primeiro	b_1	STO	1			
	número complexo	a_1	STO	0			
3	Registrar o número seguinte	b_2	↑				
		a_2					
4	Para adição		GTO	05	R/S		x
	ou						
	subtração		f	PRGM	R/S		x
	ou						
	multiplicação		GTO	17	R/S		x
	ou						
	divisão		GTO	11	R/S		x
5	Para a parte imaginária		x⇄y				y
6	Para o próximo cálculo em						
	cadeia, passar para a etapa 3						
7	Para novo caso, passar para 2.						

Exemplos:

1. $(1.2 + 3.7i) - (2.6 - 1.9i) = -1.4 + 5.6i$

2. $$\frac{3 + 4i}{7 - 2i} = 0.25 + 0.64i$$

3. $$\left[\frac{(3 + 4i) + (7.4 - 5.6i)}{(7 - 2i)}\right][3.1 + 4.6i] = 3.61 + 7.16i$$

Funções Complexas $\left(|z|, z^2, {}^1/z, \sqrt{z}\right)$

A representação polar de um número complexo $z = a + ib$ é $re^{i\theta}$. As fórmulas empregadas para a avaliação das funções dadas são as seguintes:

1. $|z| = r$
2. $z^2 = r^2\, e^{i2\theta}$
3. ${}^1/z = \dfrac{1}{r}\, e^{-i\theta},\ z \neq 0$
4. $\sqrt{z} = \pm\left(\sqrt{r}\ e^{i\theta/2}\right) = \pm\,(x + iy)$

A resposta é representada por $x + iy$.

Visor		Introdução
Linha	Código	
00		
01	15 09	g →P
02	13 00	GTO 00
03	15 09	g →P
04	15 02	g x^2
05	21	x⇄y
06	31	↑
07	51	+
08	21	x⇄y
09	14 09	f →R
10	13 00	GTO 00
11	15 09	g →P
12	15 22	g 1/x
13	21	x⇄y
14	32	CHS
15	21	x⇄y
16	14 09	f →R
17	13 00	GTO 00
18	15 09	g →P
19	14 02	f $\sqrt{x}$
20	21	x⇄y
21	02	2
22	71	÷
23	21	x⇄y
24	14 09	f →R

Visor		Introdução
Linha	Código	
25	13 00	GTO 00
26		
27		
28		
29		
30		
31		
32		
33		
34		
35		
36		
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

Registros
R_0
R_1
R_2
R_3
R_4
R_5
R_6
R_7

Etapa	Instruções	Dados de Entrada	Teclas				Dados de Saída
1	Registrar o programa						
2	Registrar z	b	↑				
		a					
3	Para |z		f	PRGM	R/S		|z|
	ou						
	z^2		GTO	03	R/S		x
			$x \rightleftarrows y$				y
	ou						
	1/z		GTO	11	R/S		x
			$x \rightleftarrows y$				y
	ou						
	$\sqrt{z}$		GTO	18	R/S		x
			$x \rightleftarrows y$				y
4	Para novo caso, passar para 2						

Exemplos:

1. $|12 - 5i| = 13.00$
2. $(6 - i)^2 = 35.00 - 12.00i$
3. $\dfrac{1}{2 + 5i} = 0.07 - 0.17i$
4. $\sqrt{3 + 4i} = \pm (2.00 + 1.00i)$

Determinante e Inverso de Uma Matriz 2 x 2

Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ uma matriz 2 x 2.

O determinante de A, indicado por Det A ou $|A|$, é avaliado pela fórmula seguinte:

$$\text{Det } A = a_{22}\, a_{11} - a_{12}\, a_{21}$$

O programa em pauta também avalia A^{-1}, o inverso de A. Para tanto, emprega-se a fórmula seguinte:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a_{22}/\text{Det } A & -a_{12}/\text{Det } A \\ -a_{21}/\text{Det } A & a_{11}/\text{Det } A \end{bmatrix}$$

Visor		Introdução
Linha	Código	
00		
01	24 04	RCL 4
02	24 01	RCL 1
03	61	x
04	24 02	RCL 2
05	24 03	RCL 3
06	61	x
07	41	−
08	23 00	STO 0
09	74	R/S
10	24 04	RCL 4
11	24 00	RCL 0
12	71	÷
13	74	R/S
14	24 02	RCL 2
15	24 00	RCL 0
16	71	÷
17	32	CHS
18	74	R/S
19	24 03	RCL 3
20	24 00	RCL 0
21	71	÷
22	32	CHS
23	74	R/S
24	24 01	RCL 1

Visor		Introdução
Linha	Código	
25	24 00	RCL 0
26	71	÷
27	13 00	GTO 00
28		
29		
30		
31		
32		
33		
34		
35		
36		
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

Registros
R_0 Det A
R_1 a_{11}
R_2 a_{12}
R_3 a_{21}
R_4 a_{22}
R_5
R_6
R_7

Etapa	Instruções	Dados de Entrada	Teclas				Dados de Saída
1	Registrar o programa						
2	Armazenar a matriz	a_{11}	STO	1			
		a_{12}	STO	2			
		a_{21}	STO	3			
		a_{22}	STO	4			
3	Calcular o determinante		f	PRGM	R/S		Det A
4	Calcular o inverso		R/S				a_{11}^{-1}
			R/S				a_{12}^{-1}
			R/S				a_{21}^{-1}
			R/S				a_{22}^{-1}
5	Para novo caso, passar para 2						

Exemplo:

Achar o determinante e o inverso da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$$

Solução:

$$\text{Det } A = -20$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.20 & 0.10 \\ 0.20 & -0.15 \end{bmatrix}$$

Conversões de Base
Número na Base b para Número na Base 10

O programa em pauta consiste em dois subprogramas. O primeiro converte a parte inteira de um número na base b para um número na base 10.

$$I_{10} = i_n i_{n-1} \ldots i_2 i_1 = i_n b^{n-1} + i_{n-1} b^{n-2} + \ldots + i_2 b + i_1$$

A avaliação se faz da seguinte forma:

$$b\,(\ldots(b\,(b\,(i_n\,b + i_{n-1}) + i_{n-2}) + \ldots) + i_2) + i_1$$

O segundo subprograma converte a parte fracionária de um número na base b para um número na base 10.

$$F_{10} = f_1 f_2 \ldots f_m = f_1 b^{-1} + f_2 b^{-2} + \ldots + f_m b^{-m}$$

Juntos, os dois subprogramas podem converter qualquer número na base b para um número na base 10. Os zeros deverão ser introduzidos nas suas devidas casas.

Visor		Introdução
Linha	Código	
00		
01	23 01	STO 1
02	24 00	RCL 0
03	31	↑
04	31	↑
05	31	↑
06	24 01	RCL 1
07	74	R/S
08	23 01	STO 1
09	34	CLX
10	51	+
11	61	x
12	24 01	RCL 1
13	51	+
14	13 07	GTO 07
15	24 00	RCL 0
16	15 22	g 1/x
17	23 02	STO 2
18	23 03	STO 3
19	61	x
20	74	R/S
21	24 02	RCL 2
22	24 03	RCL 3
23	61	x
24	23 03	STO 3

Visor		Introdução
Linha	Código	
25	61	x
26	51	+
27	13 20	GTO 20
28		
29		
30		
31		
32		
33		
34		
35		
36		
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

Registros
R_0 b
R_1 Usado
R_2 b^{-1}
R_3 b^{-j}
R_4
R_5
R_6
R_7

Etapa	Instruções	Dados de Entrada	Teclas				Dados de Saída
1	Registrar o programa						
2	Armazenar a base	b	STO	0			
3	Para a parte inteira, introduzir						
	o algarismo da extrema esquerda	i_n	f	PRGM	R/S		
4	Executar para j = n-1 . . . 2:						
	Introduzir o algarismo seguinte	i_j*	R/S				
5	Introduzir o algarismo final	i_1*	R/S				I_{10}
6	Para a parte fracionária, introduzir o algarismo que						
	se segue ao ponto decimal	f_1	GTO	15	R/S		
7	Executar para j = 2 . . . m-1:						
	Introduzir o algarismo seguinte	f_j*	R/S				
8	Introduzir o algarismo final	f_m*	R/S				F_{10}
9	Para novo caso, passar para 2						
	* A pilha não deverá sofrer						
	qualquer alteração nos pontos assinalados pelos asteriscos.						

Exemplos:

1. $1777_8 = 1023_{10}$

2. $143.2044_5 = 48.4384_{10}$

Número na Base 10 para Número na Base b

O programa em pauta converte qualquer número positivo na base 10, N_{10}, para um número na base b, N_b, onde $2 \leqslant b \leqslant 100$. O algoritmo empregado é iterativo, o qual acrescenta um dígito adicional ao valor N_b na ocasião de cada iteração. O programa faz uma pausa à medida que cada N_b é computado, a fim de apresentar aproximações sucessivas à resposta definitiva. Quando o valor apresentado de N_b atingir a precisão desejada pelo usuário do programa, este deverá presionar a tecla [R/S], a fim de paralisar o mesmo e, em seguida, pressionar a tecla [RCL] [3] para efetuar a apresentação de N_b no visor.

1. Quando a base b for tal que $11 \leqslant b \leqslant 100$, duas casas no visor são reservadas para cada dígito de N_b. A contagem de casas se inicia no ponto (vírgula) decimal. Por exemplo, 41106,12 na base 16 representa 4B6,C.

2. Uma mensagem de erro durante a execução do programa significará que a precisão da calculadora foi excedida. O valor N_b, em tal caso, será encontrado no registrador R_3.

Visor		Introdução
Linha	Código	
00		
01	24 00	RCL 0
02	01	1
03	00	0
04	14 51	f x≥y
05	13 09	GTO 09
06	01	1
07	00	0
08	00	0
09	23 02	STO 2
10	00	0
11	23 03	STO 3
12	24 01	RCL 1
13	14 07	f LN
14	24 00	RCL 0
15	14 07	f LN
16	71	÷
17	15 41	g x<0
18	13 21	GTO 21
19	14 01	f INT
20	13 24	GTO 24
21	14 01	f INT
22	01	1
23	41	–
24	23 04	STO 4

Visor		Introdução
Linha	Código	
25	24 02	RCL 2
26	21	x⇄y
27	14 03	f y^x
28	24 03	RCL 3
29	51	+
30	23 03	STO 3
31	14 74	f PAUSE
32	14 74	f PAUSE
33	24 00	RCL 0
34	24 04	RCL 4
35	14 03	f y^x
36	23 41 01	STO – 1
37	13 12	GTO 12
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

Registros
R_0 b
R_1 N_{10}
R_2 10 ou 100
R_3 N_b
R_4 1 algarismo
R_5
R_6
R_7

Etapa	Instruções	Dados de Entrada	Teclas				Dados de Saída
1	Gravar o programa						
2	Ajustar o formato do visor		f	FIX	9		
3	Armazenar a base e o	b	STO	0			
	número decimal	N_{10}	STO	1	f	PRGM	
4	Apresentar as aproximações						
	sucessivas N_b		R/S				(N_b)
5	Quando o número aparecer com						
	a precisão desejada, apertar R/S						
	a fim de paralisar o programa		RCL	3			N_b
6	Para novo caso, passar para 3						

Exemplos:

1. $67.32_{10} = 403.050114_{16}$
   $= 43.51E_{16}$

2. $\pi = 3.141592654_{10} = 11.00100100_2$

CÁLCULO VETORIAL

Produto Vetorial

Se $A = (a_1, a_2, a_3)$ e $B = (b_1, b_2, b_3)$ são dois vetores tri-dimensionais, então o produto vetorial de A e B, representado por A x B, é calculado de acordo com o seguinte:

$$A \times B = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Seja a solução representada por (c_1, c_2, c_3).

Visor		Intro-dução
Linha	Código	
00		
01	24 02	RCL 2
02	24 06	RCL 6
03	61	x
04	24 03	RCL 3
05	24 05	RCL 5
06	61	x
07	41	–
08	74	R/S
09	24 03	RCL 3
10	24 04	RCL 4
11	61	x
12	24 01	RCL 1
13	24 06	RCL 6
14	61	x
15	41	–
16	74	R/S
17	24 01	RCL 1
18	24 05	RCL 5
19	61	x
20	24 02	RCL 2
21	24 04	RCL 4
22	61	x
23	41	–
24	13 00	GTO 00

Visor		Intro-dução
Linha	Código	
25		
26		
27		
28		
29		
30		
31		
32		
33		
34		
35		
36		
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

Registros
R_0
R_1 a_1
R_2 a_2
R_3 a_3
R_4 b_1
R_5 b_2
R_6 b_3
R_7

Etapa	Instruções	Dados de Entrada	Teclas				Dados de Saída
1	Gravar o programa						
2	Armazenar A	a_1	STO	1			
		a_2	STO	2			
		a_3	STO	3			
3	Armazenar B	b_1	STO	4			
		b_2	STO	5			
		b_3	STO	6			
4	Computar o produto vetorial		f	PRGM	R/S		c_1
			R/S				c_2
			R/S				c_3
5	Para novo caso, passar para 2						

Exemplo:

Sejam $A = (2, 5, 2)$

$B = (3, 3, -4)$.

Solução

$A \times B = (-26, 14, -9)$

Produto Escalar, Módulo e Ângulo

Sejam $\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ e $\vec{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ dois vetores.

O módulo de $\vec{a}$ é designado por $|\vec{a}|$ e é calculado pela fórmula:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}$$

de modo semelhante,

$$|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2}$$

O produto escalar de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é designado por $\vec{a} \cdot \vec{b}$ e é calculado pela fórmula seguinte:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n$$

O ângulo entre a e b é indicado por Θ e é calculado pela fórmula seguinte:

$$\Theta = \text{arco cos} \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \right)$$

O programa em pauta é aplicável a todas as unidades angulares. Entretanto, no caso de ser executado com ângulos em graus, presume-se que estes sejam graus decimais.

Visor		Introdução
Linha	Código	
00		
01	31	↑
02	14 02	g x^2
03	23 51 01	STO + 1
04	22	R↓
05	21	x⇄y
06	31	↑
07	14 02	g x^2
08	23 51 00	STO + 0
09	22	R↓
10	61	x
11	23 51 02	STO + 2
12	13 00	GTO 00
13	24 02	RCL 2
14	24 00	RCL 0
15	24 01	RCL 1
16	61	x
17	14 02	f $\sqrt{x}$
18	71	÷
19	15 05	g COS^{-1}
20	13 00	GTO 00
21		
22		
23		
24		

Visor		Introdução
Linha	Código	
25		
26		
27		
28		
29		
30		
31		
32		
33		
34		
35		
36		
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

Registros
R_0 Σa_i^2
R_1 Σb_i^2
R_2 $\Sigma a_i b_i$
R_3
R_4
R_5
R_6
R_7

Etapa	Instruções	Dados de Entrada	Teclas				Dados de Saída
1	Gravar o programa						
2	Iniciar o programa		f	REG	f	PRGM	
3	Executar para i = 1, . . . , n:						
	Registrar a_i e b:	a_i	↑				
		b_i	R/S				
4	Achar o módulo de $\vec{a}$		RCL	0	f	$\sqrt{x}$	$\lvert\vec{a}\rvert$
5	Achar o módulo de $\vec{b}$		RCL	1	f	$\sqrt{x}$	$\lvert\vec{b}\rvert$
6	Achar $\lvert\vec{a}\cdot\vec{b}\rvert$		RCL	2			$\lvert\vec{a}\cdot\vec{b}\rvert$
7	Computar o ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$		GTO	13	R/S		θ

Exemplo:

Seja A = (2, 5, 2)
B = (3, 3, –4)

Solução:

$|\vec{a}| = 5.74$

$|\vec{b}| = 5.83$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 13.00$

$\theta = 67.16°$

Equações Simultâneas em Duas Incógnitas

Sejam $ax + by = e$

e $cx + dy = f$

um sistema de duas equações em duas incógnitas. Para achar a solução, emprega-se a regra de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{ed - bf}{ad - bc} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{af - ec}{ad - bc}$$

Se $ad - bc = 0$ a calculadora apresenta "Error" no visor. Em tal caso, não existe solução ou não existe solução única.

Visor		Introdução
Linha	Código	
00		
01	24 03	RCL 3
02	24 05	RCL 5
03	61	x
04	24 02	RCL 2
05	24 06	RCL 6
06	61	x
07	41	–
08	24 01	RCL 1
09	24 05	RCL 5
10	61	x
11	24 02	RCL 2
12	24 04	RCL 4
13	61	x
14	41	–
15	23 00	STO 0
16	71	÷
17	74	R/S
18	24 01	RCL 1
19	24 06	RCL 6
20	61	x
21	24 03	RCL 3
22	24 04	RCL 4
23	61	x
24	41	–

Visor		Introdução
Linha	Código	
25	24 00	RCL 0
26	71	÷
27	13 00	GTO 00
28		
29		
30		
31		
32		
33		
34		
35		
36		
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

Registros
R_0 ad – bc
R_1 a
R_2 b
R_3 e
R_4 c
R_5 d
R_6 f
R_7

Etapa	Instruções	Dados de Entrada	Teclas				Dados de Saída
1	Gravar o programa						
2	Armazenar as constantes	a	STO	1			
		b	STO	2			
		e	STO	3			
		c	STO	4			
		d	STO	5			
		f	STO	6			
3	Achar x e y		f	PRGM	R/S		x
			R/S				y
4	Para novo caso, passar para 2						

Exemplo:

$5x - 3y = 12$

$2x + y = 9$

Solução:

$x = 3.55$

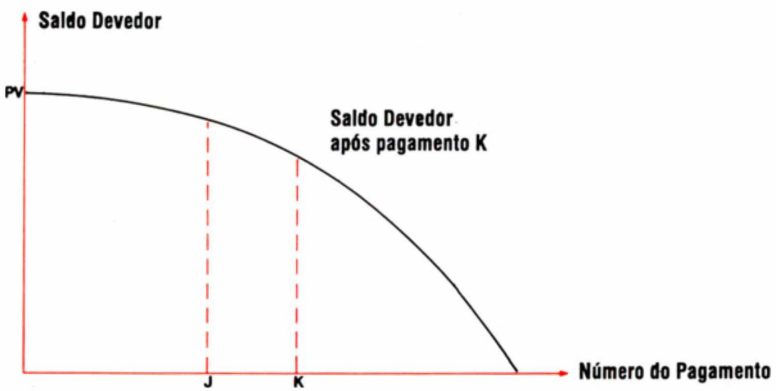
$y = 1.91$

CAPÍTULO II FINANÇAS

Visto que os programas de finanças contêm variáveis em comum, possivelmente uma palavra sobre estas variáveis e a nomenclatura empregada para a sua identificação seja de alguma utilidade.

São cinco as variáveis principais que aparecem com maior frequência em problemas de natureza financeira: n, i, PMT, PV, e FV. A primeira, n, simboliza o número total de períodos. É indispensável que a taxa periódica de juros i seja expressa, nos referidos programas, como uma fração decimal. Assim sendo, uma taxa anual de juros de 6% é expressa como 0,06, valor que, como taxa mensal, deverá ser expresso da seguinte maneira: 0,06/12 = 0,005. As três letras PMT se referem à importância do pagamento periódico. O valor presente ou atual, representado pelas letras PV, é o valor no início do primeiro período, ao passo que o valor futuro, representado pelas letras FV, é o valor ao término do período final.

Empréstimo Hipotecário
Juros Acumulados e Saldo Devedor



À medida que nos aprofundamos no campo dos cálculos financeiros, a revelação que mais nos chama a atenção é a elevada parcela absorvida pelos juros de qualquer prestação destinada ao pagamento de um empréstimo. Por exemplo: Um novo proprietário de casa, ao colocar no correio o envelope contendo a primeira prestação mensal de $220,13, referente a um empréstimo hipotecário de $30 000,00 com prazo de 30 anos e tomado à taxa anual de juros de 8%, se sente o homen mais feliz do mundo, pois está diminuindo a sua dívida. Com o máximo orgulho, ele mentalmente desconta a quantia de $220,13, que acaba de remeter, da sua dívida de $30 000,00, certo de que a sua vida financeira está perfeitamente equilibrada. Os seus cálculos, porém, são falhos. O fato é que um total de $200 da prestação efetuada se destinará ao pagamento dos juros sobre o empréstimo em pauta, sendo que apenas $20,13 serão aplicados à amortização do principal. Em outras palavras, a sua dívida se reduziu em apenas $20,13 e não em $220,13.

O presente programa permitirá ao usuário calcular o montante destinado ao pagamento de juros, referente a apenas uma prestação ou a uma série de prestações, bem como a parcela do principal ainda por pagar; isto é, o saldo devedor. Para tanto, o usuário deverá introduzir os seguintes valores: o valor inicial do empréstimo, a taxa periódica de juros sobre o mesmo, e a importância das prestações periódicas. Em seguida, ele deverá registrar um valor correspondente à prestação inicial, J, e um segundo valor representativo da prestação final, K. O programa computará tanto o valor dos juros acumulados a partir da prestação J até a prestação K, inclusive, como o saldo devedor restante, após o pagamento da prestação K.

Para saber o total absorvido pelos juros de uma determinada prestação, basta que o usuário ajuste K = J.

O programa em pauta também poderá ser empregado para gerar um cronograma limitado de amortização, com a finalidade de demonstrar o saldo devedor após o pagamento de cada prestação sucessiva. Para tanto, será apenas necessário que J permaneça igual a 1 e que K seja aumentado em 1, na ocasião de cada iteração. Os dados de saída serão: a quantia total paga em juros, através das prestações iniciais até K, e o saldo devedor restante após o pagamento da prestação K.

Equações:

$$BAL_K = \frac{1}{(1+i)^{-K}} \left[PMT \frac{(1+i)^{-K} - 1}{i} + PV \right]$$

$$Int_{J-K} = BAL_K - BAL_{J-1} + (K - J + 1)\, PMT$$

onde BAL_n = saldo devedor após o pagamento da prestação n

Int_{J-K} = juros acumulados, prestações de J a K, inclusive

PV = valor inicial do empréstimo

PMT = valor da prestação periódica

i = taxa periódica de juros

Observações:

1. A taxa periódica de juros i deverá ser introduzida como uma fração decimal. Por exemplo, no caso de prestações mensais, à taxa anual de juros de 9%, a taxa periódica de juros deverá ser introduzida como i = 0,09/12 = 0,0075

2. A aplicabilidade do presente programa não se restringe aos empréstimos hipotecários, sendo o mesmo perfeitamente aplicável a qualquer empréstimo que esteja sendo saldado através de prestações periódicas de igual valor.

Comentários sobre Programação:

Em muitos casos, tratando-se de programas de natureza financeira, as expressões $(1 + i)$ e $(1 + i)^n$ são empregadas várias vezes em cada programa. Às vezes, portanto, torna-se mais conveniente calcular os referidos valores apenas uma vez, armazenando-os para utilização posterior, do que efetuar o cálculo cada vez que necessário. No programa em pauta, os valores $(1 + i)^{-K}$ e $(1 + i)^{-J}$ são calculados apenas uma vez, e, em seguida, armazenados no registrador R_7, reduzindo-se, desta forma, tanto o número de etapas necessárias como o tempo requerido para executá-las. O mesmo princípio, naturalmente, é aplicável a outras expressões encontradas em distintos programas.

Visor Linha	Visor Código	Introdução	X	Y	Z	T	Observações
00							
01	24 01	RCL 1	i				Calcular BAL_K
02	01	1	1	i			
03	51	+	$1 + i$				
04	24 05	RCL 5	K	$1 + i$			
05	32	CHS	$-K$	$1 + i$			
06	14 03	f y^x	$(1 + i)^{-K}$				
07	23 07	STO 7	$(1 + i)^{-K}$				
08	01	1	1	$(1 + i)^{-K}$			
09	41	−	$(1 + i)^{-K} - 1$				
10	24 01	RCL 1	i	$(1 + i)^{-K} - 1$			
11	71	÷	s				Seja = $[(1 + i)^{-K} - 1] \div i$
12	24 02	RCL 2	PMT	s			
13	61	x	PMT s				
14	24 03	RCL 3	PV	PMT s			
15	51	+	PMT s + PV				
16	24 07	RCL 7	$(1 + i)^{-K}$	PMT s + PV			
17	71	÷	BAL_K				
18	23 06	STO 6	BAL_K				
19	24 01	RCL 1	i	BAL_K			Calcular BAL_{J-1}
20	01	1	1	i	BAL_K		
21	51	+	$(1 + i)$	BAL_K			
22	24 04	RCL 4	J	$(1 + i)$	BAL_K		
23	01	1	1	J	$(1 + i)$	BAL_K	
24	41	−	J − 1	$(1 + i)$	BAL_K	BAL_K	
25	32	CHS	− (J − 1)	$(1 + i)$	BAL_K	BAL_K	
26	14 03	f y^x	$(1 + i)^{-(J-1)}$	BAL_K	BAL_K	BAL_K	
27	23 07	STO 7	$(1 + i)^{1-J}$	BAL_K	BAL_K	BAL_K	
28	01	1	1	$(1 + i)^{1-J}$	BAL_K	BAL_K	
29	41	−	$(1 + i)^{1-J} - 1$	BAL_K	BAL_K	BAL_K	
30	24 01	RCL 1	i	$(1 + i)^{1-J} - 1$	BAL_K	BAL_K	
31	71	÷	s	BAL_K	BAL_K	BAL_K	Seja = $[(1 + i)^{1-J} - 1] \div i$
32	24 02	RCL 2	PMT	s	BAL_K	BAL_K	
33	61	x	PMT s	BAL_K	BAL_K	BAL_K	
34	24 03	RCL 3	PV	PMT s	BAL_K	BAL_K	
35	51	+	PMT s + PV	BAL_K	BAL_K	BAL_K	
36	24 07	RCL 7	$(1 + i)^{1-J}$	PMT s + PV	BAL_K	BAL_K	
37	71	÷	BAL_{J-1}	BAL_K	BAL_K	BAL_K	
38	41	−	Diff	BAL_K	BAL_K	BAL_K	Dif = $BAL_K - BAL_{J-1}$
39	24 05	RCL 5	K	Diff	BAL_K	BAL_K	K − J + 1 dá o número de
40	24 04	RCL 4	J	K	Diff	BAL_K	prestações de J a K, inclusive
41	41	−	K − J	Diff	BAL_K	BAL_K	
42	01	1	1	K − J	Diff	BAL_K	
43	51	+	K − J + 1	Diff	BAL_K	BAL_K	
44	24 02	RCL 2	PMT	m	Diff	BAL_K	m = K − J + 1
45	61	x	m PMT	Diff	BAL_K	BAL_K	mPMT é o total pago J a K
46	51	+	Int_{J-K}	BAL_K	BAL_K	BAL_K	Apresentar Int_{J-K}
47	74	R/S	Int_{J-K}	BAL_K	BAL_K	BAL_K	
48	21	$x \rightleftarrows y$	BAL_K	Int_{J-K}	BAL_K	BAL_K	Apresentar BAL_K
49	13 00	GTO 00	BAL_K	Int_{J-K}	BAL_K	BAL_K	

Registros	
R_0	
R_1	i
R_2	PMT
R_3	PV
R_4	J
R_5	K
R_6	BAL_K
R_7	$(1 + i)^{-n}$

Etapa	Instruções	Dados de Entrada	Teclas				Dados de Saída
1	Gravar o programa						
2	Armazenar as seguintes						
	variáveis: juro periódico (fração decimal).	i	STO	1			
	Prestação periódica	PMT	STO	2			
	Valor inicial do empréstimo	PV	STO	3			
	Número da prestação inicial	J	STO	4			
	Número da prestação final	K	STO	5	f	PRGM	
3	Computar os juros acumulados						
	sobre as prestações de J a K, inclusive		R/S				$Int_{J\text{-}K}$
4	Apresentar o saldo devedor após						
	o pagamento da prestação K		R/S				BAL_K
5	Para trocar qualquer das variáveis, armazenar o novo						
	valor no registro apropriado						
	e passar para etapa 3						

Exemplo:

Um empréstimo hipotecário é negociado de modo que a data de vencimento da primeira prestação seja aos 31 dias do mês de outubro de 1974 (isto é, a fim de que o mês de outubro represente o período inicial de pagamento). Trata-se de um empréstimo de \$25 000,00, tomado à taxa de 8%, com prestações mensais de \$200,00. Quais serão os juros acumulados referentes ao ano de 1974 (correspondentes aos primeiros três períodos de pagamento) e para o ano de 1975 (correspondentes aos períodos de pagamento de 4 a 15), e qual o saldo devedor ao término de cada ano? Seja formulado, também, um cronograma de juros pagos e saldos devedores referentes aos primeiros 5 anos do empréstimo (correspondentes aos períodos de pagamento 12, 24, 36, 48 e 60).

Solução:

(Note-se que o valor i deverá ser introduzido como uma taxa mensal, representada por uma fração decimal).

.08 [↑] 12 [÷] [STO] [1] 200 [STO] [2] 25000 [STO] [3] 1

[STO] [4] 3 [STO] [5] [f] [PRGM] [R/S] ⟶ 499.33

(juros pagos em 1974)

[R/S] ⟶ 24899.33

(saldo devedor/término de 1974)

4 [STO] [4] 15 [STO] [5] [R/S] ⟶ 1976.65

(juros pagos em 1975)

[R/S] ⟶ 24475.98

(saldo devedor/término de 1975)

Agora, gerar o cronograma de amortização:

1 STO 4 12 STO 5 R/S → 1985.00
(juros até o fim do primeiro ano)

R/S → 24585.00
(saldo devedor após o primeiro ano)

24 STO 5 R/S → 3935.56
(juros até o fim do segundo ano)

R/S → 24135.56
(saldo devedor após o segundo ano)

36 STO 5 R/S → 5848.81
(juros até o fim do terceiro ano)

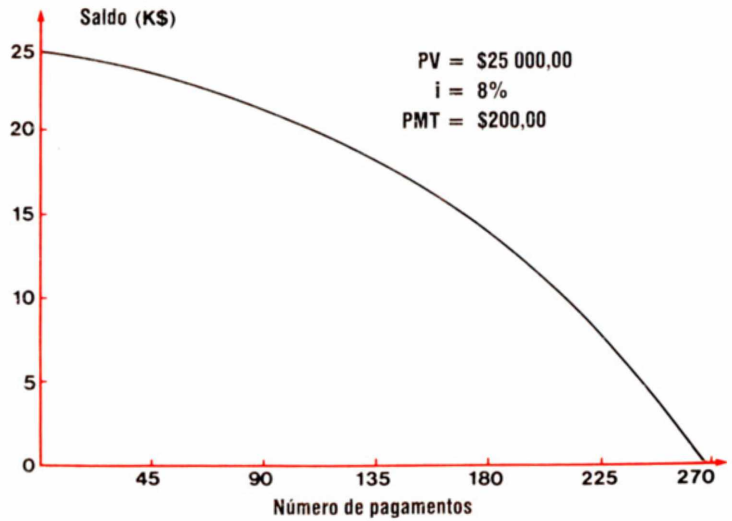
R/S → 23648.81
(saldo devedor após o terceiro ano)

48 STO 5 R/S → 7721.67
(juros até o fim do quarto ano)

R/S → 23121.67
(saldo devedor após o quarto ano)

60 STO 5 R/S → 9550.77
(juros até o fim do quinto ano)

R/S → 22550.77
(saldo devedor após o quinto ano)



Empréstimo Hipotecário
Pagamentos, Valor Presente, Número de Períodos



No caso de empréstimo que esteja sendo saldado através de pagamentos periódicos de igual valor, o programa em pauta, dadas a taxa periódica de juros e as outras duas variáveis, calcula a importância das prestações a serem pagas, o valor presente do empréstimo, ou o número de períodos restantes até a liquidação do mesmo.

Fazemos lembrar ao usuário do programa que a taxa periódica de juros i deverá ser expressa como uma fração decimal; isto é, a percentagem de 6%, por exemplo, deverá ser expressa pela fração decimal 0,06.

As equações empregadas para os cálculos são:

$$PMT = PV\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right] \qquad PV = PMT\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

$$n = -\frac{\ln(1 - i\,PV/PMT)}{\ln(1+i)}$$

Visor		Introdução
Linha	Código	
00		
01	01	1
02	24 02	RCL 2
03	01	1
04	51	+
05	24 01	RCL 1
06	32	CHS
07	14 03	f y^x
08	41	–
09	24 02	RCL 2
10	21	x⇄y
11	71	÷
12	24 04	RCL 4
13	61	x
14	13 00	GTO 00
15	01	1
16	24 02	RCL 2
17	01	1
18	51	+
19	24 01	RCL 1
20	32	CHS
21	14 03	f y^x
22	41	–
23	24 02	RCL 2
24	71	÷

Visor		Introdução
Linha	Código	
25	24 03	RCL 3
26	61	x
27	13 00	GTO 00
28	01	1
29	24 04	RCL 4
30	24 03	RCL 3
31	71	÷
32	24 02	RCL 2
33	61	x
34	41	–
35	14 07	f LN
36	24 02	RCL 2
37	01	1
38	51	+
39	14 07	f LN
40	71	÷
41	32	CHS
42	13 00	GTO 00
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

Registros
R_0
R_1 n
R_2 i
R_3 PMT
R_4 PV
R_5
R_6
R_7

Etapa	Instruções	Dados de Entrada	Teclas				Dados de Saída
1	Gravar o programa						
2	Para o pagamento	n	STO	1			
		i	STO	2			
		PV	STO	4			
			f	PRGM	R/S		PMT
3	Para o valor presente	n	STO	1			
		i	STO	2			
		PMT	STO	3			
			GTO	15	R/S		PV
4	Para o número de prestações	i	STO	2			
		PMT	STO	3			
		PV	STO	4			
			GTO	28	R/S		n
5	Para novo caso, passar para						
	2, 3 ou 4						

Exemplos:

1. Qual será a prestação mensal necessária para amortizar, em 36 meses, um empréstimo de $3 000,00, tomado à taxa de 9,5% (0,095)?

2. Você está disposto a pagar a importância de $175 por mês, durante 24 meses, para saldar um empréstimo a ser tomado à taxa de 9,5%. Com base nas suas possibilidades de pagamento, quanto poderá você tomar de empréstimo?

3. Quantos meses levará para saldar um empréstimo de $4 000,00, tomado à taxa de 9,5%, à base de prestações mensais de $200,00?

Soluções:

Para achar a taxa mensal de juros, expressa por uma fração decimal, dividir 0,095 por 12.

1. $96,10

2. $3 811,43

3. 21,86 meses

Empréstimo Hipotecário
Taxa de Juros



O programa em pauta calcula a taxa de juros atinente a um empréstimo a ser saldado através de prestações periódicas de igual valor. O usuário do programa deverá especificar o número de períodos, o valor atual, ou valor inicial, do empréstimo, bem como o valor das prestações a serem efetuadas.

O programa proporciona uma solução iterativa do valor i, utilizando, para tanto, o método de Newton:

$$i_{k+1} = i_k - \frac{f(i_k)}{f'(i_k)}$$

onde

$$f(i) = \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} - \frac{PV}{PMT} \ .$$

A suposição inicial para i é dada por:

$$i_o = \frac{PMT}{PV} - \frac{PV}{n^2\ PMT} \ .$$

Visor		Introdução
Linha	Código	
00		
01	24 03	RCL 3
02	31	↑
03	15 22	g 1/x
04	21	x⇄y
05	24 01	RCL 1
06	15 02	g x^2
07	71	÷
08	41	–
09	23 02	STO 2
10	24 03	RCL 3
11	24 02	RCL 2
12	61	x
13	01	1
14	24 02	RCL 2
15	01	1
16	51	+
17	24 01	RCL 1
18	32	CHS
19	14 03	f y^x
20	23 05	STO 5
21	41	–
22	41	–
23	24 01	RCL 1
24	24 02	RCL 2

Visor		Introdução
Linha	Código	
25	15 22	g 1/x
26	01	1
27	51	+
28	71	÷
29	01	1
30	51	+
31	24 05	RCL 5
32	61	x
33	01	1
34	41	–
35	24 02	RCL 2
36	71	÷
37	71	÷
38	23 51 02	STO + 2
39	15 03	g ABS
40	33	EEX
41	06	6
42	32	CHS
43	14 41	f x<y
44	13 10	GTO 10
45	24 02	RCL 2
46	13 00	GTO 00
47		
48		
49		

Registros
R_0
R_1 n
R_2 i
R_3 PV/PMT
R_4 $(1 + i)^{-n}$
R_5
R_6
R_7

Etapa	Instruções	Dados de Entrada	Teclas				Dados de Saída
1	Gravar o programa						
2	Armazenar o número de prestações	n	STO	1			
3	Registrar o valor atual e a						
	importância das prestações	PV	↑				
		PMT	÷	STO	3		PV/PMT
4	Computar os juros		f	PRGM	R/S		i (decimal)
			EEX	2	x		i (%)
5	Para novo caso, passar para 2						

Exemplo:

Você recentemente obteve um empréstimo de $2 500,00, com prazo de pagamento de 36 meses, para a compra de um automóvel. Se as suas prestações mensais são de $86,87, qual é a taxa percentual anual sobre a importância tomada de empréstimo?

Solução:

15,01%

Importância Composta



O programa em pauta é aplicável a qualquer importância que tenha sido depositada à base de juros compostos periodicamente, sem o acréscimo de quaisquer importâncias adicionais. Em tais casos, as variáveis de maior importância são o número de períodos abrangendo a composição dos juros em questão, n; a taxa periódica de juros, i; a importância depositada, PV; o valor futuro da conta, FV; e o montante dos juros acumulados, I. Qualquer das referidas variáveis pode ser calculada, com base nas demais, através das seguintes fórmulas:

$$n = \frac{\ln (FV/PV)}{\ln (1 + i)} \qquad i = \left(\frac{FV}{PV}\right)^{1/n} - 1 \qquad PV = FV\,(1 + i)^{-n}$$

$$FV = PV\,(1 + i)^{n} \qquad I = PV\,[(1 + i)^{n} - 1]$$

Visor		Introdução
Linha	Código	
00		
01	24 05	RCL 5
02	24 04	RCL 4
03	71	÷
04	14 07	f LN
05	24 02	RCL 2
06	01	1
07	51	+
08	14 07	f LN
09	71	÷
10	13 00	GTO 00
11	24 05	RCL 5
12	24 04	RCL 4
13	71	÷
14	24 01	RCL 1
15	15 22	g 1/x
16	14 03	f y^x
17	01	1
18	41	–
19	13 00	GTO 00
20	24 02	RCL 2
21	01	1
22	51	+
23	24 01	RCL 1
24	32	CHS

Visor		Introdução
Linha	Código	
25	14 03	f y^x
26	24 05	RCL 5
27	61	x
28	13 00	GTO 00
29	24 02	RCL 2
30	01	1
31	51	+
32	24 01	RCL 1
33	14 03	f y^x
34	24 04	RCL 4
35	61	x
36	13 00	GTO 00
37	24 02	RCL 2
38	01	1
39	51	+
40	24 01	RCL 1
41	14 03	f y^x
42	01	1
43	41	–
44	24 04	RCL 4
45	61	x
46	13 00	GTO 00
47		
48		
49		

Registros
R_0
R_1 n
R_2 i
R_3
R_4 PV
R_5 FV
R_6
R_7

Etapa	Instruções	Dados de Entrada	Teclas				Dados de Saída
1	Gravar o programa						
2	Para computar o número	i (decimal)	STO	2			
	de períodos	PV	STO	4			
		FV	STO	5			
			f	PRGM	R/S		n
3	Para computar a taxa						
	periódica de juros	n	STO	1			
		PV	STO	4			
		FV	STO	5			
			GTO	11	R/S		i (decimal)
4	Para computar o capital	n	STO	1			
		i (decimal)	STO	2			
		FV	STO	5			
			GTO	20	R/S		PV
5	Para computar o valor futuro	n	STO	1			
		i (decimal)	STO	2			
		PV	STO	4			
			GTO	29	R/S		FV
6	Para computar os juros	n	STO	1			
	acumulados	i (decimal)	STO	2			
		PV	STO	4			
			GTO	37	R/S		I
7	Para novo caso, passar						
	para 2, 3, 4, 5 ou 6						

1. Admitindo-se um ritmo inflacionário de 10%, quanto tempo levará para os preços atuais dobrarem de valor? (Sugestão: Sejam PV = 1 e FV = 2).
2. Achar a taxa de rendimento sobre a importância de $1 000,00, composta trimestralmente, admitindo-se um montante de $1 500,00 ao término de 5 anos.
3. Quanto terá uma pessoa que investir, na data de hoje, à taxa de juros de 5,75%, compostos trimestralmente, para realizar a importância de $3 000,00 ao término de 5 anos?
4. Qual será o valor futuro de $2 000,00 colocados à taxa de juros de 5,75% (0,0575), compostos trimestralmente durante um período de 4 anos (16 trimestres)?
5. Qual o montante em juros que você poderá esperar receber sobre a importância de $1 500,00, depositados por um período de 10 anos à taxa de juros de 5,5%, compostos anualmente?

Soluções:

1. 7,27 anos
2. 0,0205 trimestralmente = 8,19% anualmente
3. $2 255,02 (i = 0,0575/4)
4. $2 513,08 (i = 0,0575/4)
5. $1 062,22 (i = 0,055)

Poupanças Periódicas
Pagamentos, Valor Futuro, Número de Períodos



O programa em pauta calcula o valor das prestações, o valor futuro, ou o número de períodos de um cronograma de pagamentos periódicos ingressados numa conta de poupanças, dadas a taxa de juros e duas das outras três variáveis. Fazemos lembrar, mais uma vez, que o valor i deverá ser introduzido como uma fração decimal, isto é, a percentagem de 6%, por exemplo, deverá ser expressa pela fração decimal 0,06.

Então, n, PMT, ou PV podem ser calculados através das fórmulas seguintes:

$$n = \frac{\ln\left[\frac{FV\ i}{PMT} + (1+i)\right]}{\ln(1+i)} - 1 \qquad PMT = \frac{FV\ i}{(1+i)^{n+1} - (1+i)}$$

$$FV = \frac{PMT}{i}\left[(1+i)^{n+1} - (1+i)\right]$$

Visor		Introdução
Linha	Código	
00		
01	24 02	RCL 2
02	24 05	RCL 5
03	61	x
04	24 03	RCL 3
05	71	÷
06	24 02	RCL 2
07	01	1
08	51	+
09	23 00	STO 0
10	51	+
11	14 07	f LN
12	24 00	RCL 0
13	14 07	f LN
14	71	÷
15	01	1
16	41	–
17	13 00	GTO 00
18	24 05	RCL 5
19	24 00	RCL 2
20	61	x
21	24 02	RCL 2
22	01	1
23	51	+
24	71	÷

Visor		Introdução
Linha	Código	
25	14 73	f LASTx
26	24 01	RCL 1
27	14 03	f y^x
28	01	1
29	41	–
30	71	÷
31	13 00	GTO 00
32	24 03	RCL 3
33	24 02	RCL 2
34	01	1
35	51	+
36	61	x
37	14 73	f LASTx
38	24 01	RCL 1
39	14 03	f y^x
40	01	1
41	41	–
42	61	x
43	24 02	RCL 2
44	71	÷
45	13 00	GTO 00
46		
47		
48		
49		

Registros
R_0 (1 + i)
R_1 n
R_2 i
R_3 PMT
R_4
R_5 FV
R_6
R_7

Etapa	Instruções	Dados de Entrada	Teclas				Dados de Saída
1	Gravar o programa						
2	Para computar o número de						
	pagamentos	i (decimal)	STO	2			
		PMT	STO	3			
		FV	STO	5			
			f	PRGM	R/S		n
3	Para computar a importância						
	do pagamento periódico	n	STO	1			
		i (decimal)	STO	2			
		FV	STO	5			
			GTO	18	R/S		PMT
4	Para computar o valor futuro	n	STO	1			
		i (decimal)	STO	2			
		PMT	STO	3			
			GTO	32	R/S		FV
5	Para novo caso, passar para						
	as etapas 2, 3 ou 4						

Exemplos:

1. Quanto tempo levará uma pessoa para economizar a importância de \$15 000,00, à base de ingressos trimestrais de \$400,00, sendo de 6% a taxa anual de juros?

2. Em 7 anos você precisará de \$10 000,00. Qual o depósito mensal que você deverá ingressar a fim de realizar o seu objetivo, sendo de 6,5% a taxa anual de juros?

3. Quanto dinheiro economizará uma pessoa, se ela fizer depósitos mensais de \$150,00 durante 3 anos, sendo de 6% (0,06) a taxa anual de juros?

Soluções:

1. 29,62 trimestres ou 7,40 anos (i = 0,06/4)

2. \$93,82 (n = 84, i = 0,065/12)

3. \$5 929,92 (n = 36, i = 0,06/12)

Fluxo de Caixa Descontado
Valor Presente Líquido, Taxa Interna de Rendimento

O objetivo principal do programa em pauta é o de computar o valor líquido atual de uma série de fluxos de caixa. Normalmente, uma inversão inicial, Vo, é aplicada a um determinado empreendimento, o qual, segundo se espera, renderá uma série de fluxos de caixa periódicos, C_1, C_2 . . . , C_n. Dada a taxa de desconto, i, a qual deverá ser introduzida como fração decimal, o programa, então, computará o valor líquido atual à altura do período K, VPL_k, para cada fluxo de caixa individual. Um VPL_k negativo será um indício de que o empreendimento, até o momento em questão, não deu resultados positivos. Um VPL_k positivo será um indício de que a inversão foi proveitosa, na medida em que a taxa de rendimento, i, sobre a inversão inicial, tenha sido ultrapassada.

O programa em pauta também poderá ser empregado iterativamente para calcular uma taxa interna de rendimento. O objetivo, em tal caso, será o de achar a taxa de descontos, i, que tornará o valor líquido final, VPL_n, igual a zero. O procedimento que deverá ser seguido é: a armazenagem de Vo, o registro de uma hipótese inicial com relação à taxa de rendimento, i, a introdução dos fluxos de caixa C_1 a C_n, inclusive, e a solução de VPL_n. Se o VPL_n for negativo, será um indício de que a taxa de rendimento estimada foi excessiva; se o VPL_n for positivo, será um indício de que a estimativa de i foi insuficiente. Ajustar a estimativa de i, de acordo com os resultados obtidos, armazenar o novo valor de i, e introduzir os fluxos de caixa novamente. Examinar o novo valor de VPL_n, a fim de obter uma nova estimativa de i, e repetir o processo. Repete-se o processo integralmente até que VPL_n seja igual, ou muito próximo, ao valor de zero. Assim, o último valor de i a ser introduzido será considerado como representando a taxa interna de rendimento.

Cada representação do valor presente líquido é encontrada através de:

$$VPL_k = -V_0 + \sum_{j=1}^{k} \frac{C_j}{(1+i)^j}$$

Visor		Introdução
Linha	Código	
00		
01	24 01	RCL 1
02	01	1
03	23 04	STO 4
04	51	+
05	23 02	STO 2
06	71	÷
07	24 00	RCL 0
08	41	–
09	24 04	RCL 4
10	14 74	f PAUSE
11	21	$x \rightleftarrows y$
12	23 03	STO 3
13	74	R/S
14	24 02	RCL 2
15	24 04	RCL 4
16	01	1
17	51	+
18	23 04	STO 4
19	14 03	f y^x
20	71	÷
21	24 03	RCL 3
22	51	+
23	13 09	GTO 09
24		

Visor		Introdução
Linha	Código	
25		
26		
27		
28		
29		
30		
31		
32		
33		
34		
35		
36		
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

Registros
R_0 V_0
R_1 i
R_2 (1 + i)
R_3 VPL_K
R_4 k
R_5
R_6
R_7

Etapa	Instruções	Dados de Entrada	Teclas				Dados de Saída
1	Gravar o programa						
2	Armazenar a inversão inicial						
	e a taxa de descontos	V_0	STO	0			
		i (decimal)	STO	1	f	PRGM	
3	Executar para k = 1, . . . , n;						
	Introduzir C_K e computar VPL_K	C_k	R/S				(k)
							VPL_K
4	Para novo caso, passar para 2						

Exemplos:

A você é proporcionada a oportunidade de fazer uma inversão de capital no valor global de $150 000,00, a um custo de capital de 10% após o desconto dos respectivos impostos. Com base nos seguintes fluxos de caixa, será vantajosa a inversão?

Ano	Fluxo de Caixa
1	$30 000
2	$26 300
3	$50 000
4	$55 600
5	$45 200

Soluções:

(Lembrar-se da necessidade de introduzir o valor i na forma de uma fração decimal, ou seja: 0,10.)

$VPL_1 = -\$122\,727,27$

$VPL_2 = -\$100\,991,74$

$VPL_3 = -\$63\,426,00$

$VPL_4 = -\$25\,450,45$

$VPL_5 = \$2\,615,20$

Em virtude do valor VPL_5 ser positivo, o fluxo de caixa é vantajoso.

Dia da Semana, Número de Dias Entre Duas Datas

O programa em pauta computa o dia da semana de uma determinada data, ou o número de dias entre duas datas, abrangendo o período de 1° de março de 1700 a 28 de fevereiro de 2100. O programa baseia-se na designação do número 1 para representar o dia 1° de março de 1700 e de um número correspondente para cada dia sucessivo. Para o cálculo do dia da semana de uma determinada data, o domingo é representado pelo valor 0; a segunda-feira é representada pelo número 1; a terça-feira é representada pelo número 2, e assim por diante. Assim sendo, para o dia d, mês m e ano a em apreço, o valor N associado a esta data é:

$$N(d,m,a) = [365.25\ g(a,m)] + [30.6\ f(m)] + d - 621049$$

onde

$$g(a,m) = \begin{cases} a - 1 \text{ se } m = 1 \text{ ou } 2 \\ a \text{ se } m > 2 \end{cases} \qquad e\ f(m) = \begin{cases} m + 13 \text{ se } m = 1 \text{ ou } 2 \\ m + 1 \text{ se } m > 2 \end{cases}$$

[m] representa a função inteira, f INT (Isto é, [6,34] = 6.)

Observação:

Para o período de 1° de março de 1700 a 28 de fevereiro de 1800, 2 dias deverão ser acrescidos ao valor de N calculado pelo programa. Para o período de 1° de março de 1800 a 28 de fevereiro de 1900, o valor de N deverá ser acrescido de 1 dia.

Visor		Introdução
Linha	Código	
00		
01	03	3
02	24 01	RCL 1
03	14 41	f x<y
04	13 09	GTO 09
05	01	1
06	51	+
07	24 03	RCL 3
08	13 15	GTO 15
09	01	1
10	03	3
11	51	+
12	24 03	RCL 3
13	01	1
14	41	–
15	03	3
16	06	6
17	05	5
18	73	·
19	02	2
20	05	5
21	61	x
22	14 01	f INT
23	21	x⇄y
24	03	3

Visor		Introdução
Linha	Código	
25	00	0
26	73	·
27	06	6
28	61	x
29	14 01	f INT
30	51	+
31	24 02	RCL 2
32	51	+
33	06	6
34	02	2
35	01	1
36	00	0
37	04	4
38	09	9
39	41	–
40	74	R/S
41	07	7
42	71	÷
43	15 01	g FRAC
44	07	7
45	61	x
46	13 00	GTO 00
47		
48		
49		

Registros
R_0
R_1 Mês
R_2 Dia
R_3 Ano
R_4
R_5
R_6
R_7 Temporário

Etapa	Instruções	Dados de Entrada	Teclas				Dados de Saída
1	Gravar o programa						
2	Armazenar o mês	Mês	STO	1			
	Armazenar o dia	Dia	STO	2			
	Armazenar o ano	Ano	STO	3			
3	Computar N (m, d, a)		f	PRGM	R/S		N (m, d, a)
4	Para o dia da semana, passar para a etapa 8						
5	Para o número de dias entre						
	duas datas, armazenar o primeiro N		STO	7			
6	Repetir as etapas 2 e 3 para a						
	segunda data e, em seguida		RCL	7	−		No. de dias
7	Para novo caso, passar para 2						
8	Para o dia da semana, (0 = domingo)		R/S				Dia (0 . . . 6)
9	Para novo caso, passar para 2						

Exemplos:

1. Que dia da semana foi o dia 7 de setembro de 1822?
2. Achar o número de dias entre as datas de 27 de março de 1948 e 7 de abril de 1975.

Soluções:

1. Sábado (6). (Lembrar-se da necessidade de acrescentar 1 dia.)
2. 9872.

Notas

CAPÍTULO III JOGOS

Simulação de Alunissagem

Imagine, por um momento, as dificuldades inerentes ao pouso na superfície da Lua, de um foguete espacial dispondo de apenas uma reserva limitada de combustível. Faça de conta que você é o piloto da nave, a qual está caindo a uma velocidade vertiginosa, em queda livre, com a cauda apontando para o local previsto para o pouso, entre as gigantescas rochas lunares. Para diminuir a velocidade do seu veículo espacial, você terá que ativar os rojões; porém, se a queima for iniciada antes do momento certo, ou se ela tiver duração excessiva, o combustível se esgotará estando o foguete ainda a uma altura considerável da superfície. Em tal caso, você não terá outra alternativa senão a de deixar que o seu veículo se espatife contra o solo lunar. Portanto, o seu objetivo deverá ser um espaçamento razoável das queimas, a fim de que a nave possa alunissar suavemente, com uma velocidade vertical quase nula.

O jogo começa com o veículo espacial se aproximando da superfície lunar à velocidade de 50 metros por segundo, a partir de uma altitude de 500 metros. Tanto a velocidade como a altitude são indicadas, conjuntamente, no mostrador, como −50.0500, com a altitude sendo apresentada à direita e a velocidade aparecendo à esquerda do ponto decimal, com um sinal negativo precedendo a velocidade, a fim de indicar o rumo descendente da nave. Se, porventura, a velocidade for apresentada sem parcela fracionária, −15 por exemplo, isto indicará que a nave se chocou contra a superfície da Lua à velocidade de 15 metros por segundo. Neste caso, você perde a partida.

Dá-se início à partida com 120 unidades de combustível. Como piloto, é deixada a seu critério a quantidade de combustível que você deverá gastar para cada queima. Note-se que neste jogo queimas de zero são bastante comuns. Uma queima de 5 unidades anulará a ação da gravidade, mantendo constante a velocidade da nave. Qualquer queima acima de 5 unidades influirá na velocidade de veículo de tal forma que o mesmo passará a ter uma velocidade ascendente. O máximo cuidado deverá ser tomado para não esgotar toda a reserva de combustível. Caso contrário, as queimas desejadas deixarão de ocorrer, e a nave se chocará contra o solo lunar. A velocidade final apresentada será a de impacto, geralmente bastante elevada.

O programa que acabamos de descrever se baseia, solidamente, em velhos conhecidos nossos, provenientes da física newtoniana, onde x, v, a, e t representam a distância, a velocidade, a aceleração, e o tempo, respectivamente:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \qquad v = v_0 + at \qquad v^2 = {v_0}^2 + 2ax$$

Comentários sobre Programação:

1. Se você e sua nave espacial se espatifarem contra a superfície lunar antes que toda a reserva de combustível esteja completamente esgotada, a velocidade apresentada será a velocidade desenvolvida antes da "queima" e não a velocidade de impacto.
2. Adotar somente valores inteiros para as "queimas." Qualquer introdução de decimais resultará numa apresentação errônea de V.X no visor.

Um detalhe interessante deste programa é a apresentação simultânea da velocidade e da altitude (V.X), exemplificadas por −50.0500. Esta simultaneidade é obtida através do armazenamento da velocidade, V, e da altitude, X, na sua configuração normal (−50.00, 500.00), e da divisão de X por 10 000 (10^4) antes da combinação dos dois valores em questão. Uma sutileza adicional do programa em apreço reside na questão do sinal de V, e se o valor ($X/10^4$) deverá ser acrescentado ao valor de V ou dele subtraído. Por exemplo, se V = −50 e X = 500, deveremos subtrair; V − ($X/10^4$) para obtermos uma apresentação de −50.0500 no mostrador. Porém, se V = 10 e X = 50, deveremos adicionar: V = V + ($X/10^4$), a fim de conseguirmos uma apresentação de 10.0050 no mostrador. Um exame das etapas de 2 a 12, inclusive, revelará como foi empregada a função valor absoluto ([g] [ABS]).

Visor		Introdução	X	Y	Z	T	Observações
Linha	Código						
00							
01	14 11 04	f FIX 4					Apresentação com 4 casas
02	24 00	RCL 0	X				Apresentação V.X
03	33	EEX	1. 00	X			
04	04	4	1. 04	X			
05	71	÷	$X/10^4$				Dividir X por 10 000
06	24 01	RCL 1	V	$X/10^4$			
07	15 41	g x<0	V	$X/10^4$			V é negativo?
08	13 11	GTO 11	V	$X/10^4$			Sim, transferência
09	51	+	$V + X/10^4$				Não, some V com X
10	13 13	GTO 13	$V + X/10^4$				
11	21	x⇄y	$X/10^4$	V			V < 0, some V com −X
12	41	−	$V - X/10^4$				
13	74	R/S	V.X				V.X = V ± ($X/10^4$)
14	24 02	RCL 2	F	B			Queima Q introduzida
15	14 41	f x<y	F	B			Combustível esgotado,
16	13 34	GTO 34	F	B			Sim, choque !
17	22	R↓	B			F	Não, atualize A, X, V
18	23 41 02	STO − 2	B			F	Subtraia a queima
19	05	5	5	B			Gravidade cancelada
20	41	−	B − 5				Aceleração = Q − 5
21	23 03	STO 3	A				
22	02	2	2	A			
23	71	÷	A/2				
24	24 00	RCL 0	X	A/2			
25	51	+	X + A/2				
26	24 01	RCL 1	V	X + A/2			
27	51	+	X + V + A/2				Nova altitude X←X+V+A/2
28	23 00	STO 0	X				
29	15 41	g x<0	X				X está abaixo da superfície?
30	13 44	GTO 44	X				Sim, choque !
31	24 03	RCL 3	A	X			Não, atualizar V
32	23 51 01	STO + 1	A	X			Nova velocidade: V ← V + A
33	13 02	GTO 02	A	X			Apresentar V.X
34	24 01	RCL 1	V				Combustível esgotado
35	15 02	g x^2	V^2				Velocidade do choque
36	24 00	RCL 0	X	V^2			$V = (V^2 + 2gX)^{1/2}$
37	01	1	1	X	V^2		onde g = gravidade = 5
38	00	0	10	X	V^2		
39	61	x	10 X	V^2			
40	51	+	$V^2 + 10$ X				
41	14 02	f $\sqrt{x}$	V				
42	32	CHS	V				Apresentar choque
43	23 01	STO 1	V				
44	24 01	RCL 1	V				Passar, a partir da linha 30
45	14 11 00	f FIX 0	V				Apresentar o inteiro V para
46	13 00	GTO 00	V				indicar choque
47							
48							
49							

Registros	
R_0	X
R_1	V
R_2	Combustível
R_3	Aceleração
R_4	
R_5	
R_6	
R_7	

Etapa	Instruções	Dados de Entrada	Teclas				Dados de Saída
1	Gravar o programa						
2	Valores iniciais	X	500	STO	0		500,00
		V	50	CHS	STO	1	−50,00
		Combustível	120	STO	2		120,00
3	Apresentar V.X inicial		f	PRGM	R/S		−50,500
4	Registrar a queima, computar						
	a nova velocidade e a nova distância	Queima	R/S				V.X
5	Executar a etapa 4 até que você consiga pousar ou até						
	que a nave se choque com a superfície lunar						
6	Para apresentar, a qualquer						
	momento, a reserva de combustível		RCL	2			Combustível
7	Para apresentar, a qualquer						
	momento, a velocidade e a distância		f	PRGM	R/S		V.X
8	Para dar início a uma nova partida, passar para a etapa 2						

Exemplo:

500 [STO] [0] 50 [CHS] [STO] [1] 120 [STO] [2]

[f] [PRGM] [R/S] → −50.0500

0 [R/S] → −55.0448

5 [R/S] → −55.0393

(observar V constante quando queima = 5)

30 [R/S] → −30.0350

0 [R/S] → −35.0318

0 [R/S] → −40.0280

0 [R/S] → −45.0238

0 [R/S] → −50.0190

[RCL] [2] → 85.0000

(combustível que resta)

[f] [PRGM] [R/S] → −50.0190

(apresentar V.X novamente)

10 [R/S] → −45.0143

0 [R/S]. → −50.0095

[RCL] [2] → 75.0000

10 [R/S] → −45.0048

25 [R/S] → −25.0013

20 [R/S] → −25.

BUMBA!

Mico

Uma partida de Mico começa com uma coleção de objetos, N, ou, conforme jogada pela calculadora, com um número positivo, N. Cada jogador tira um, dois, ou três objetos, alternadamente, até restar apenas um objeto. O jogador forçado a recolher o último objeto da série perde a partida.

A fim de dar início ao jogo, é preciso que você "diga" à calculadora quantos objetos existem para começar, isto é, você deve introduzir um valor de N. Um número razoável é 15. Após cada jogada, a calculadora apresentará o número de objetos remanescentes. Um sinal negativo indicará que a próxima jogada é do jogador; um sinal positivo indicará que a próxima jogada pertence à calculadora.

Na qualidade de desafiador, você tem o direito à primeira jogada. É possível ganhar. Lembre-se, porém, que a HP-25 é uma jogadora "craque." É um instrumento que não admite erros. Em outras palavras, se você fizer um erro, você, inapelavelmente, perderá a partida. A não ser, naturalmente, que você confunda o instrumento através da escolha de um número que não seja um 1, um 2, ou um 3 – uma contingência tão além dos limites da ingênua boa fé da calculadora, com relação à honestidade do próximo, que a mesma não dispõe de meios para saber se você jogou honestamente ou não . . .

Visor		Introdução
Linha	Código	
00		
01	31	↑
02	01	1
03	23 02	STO 2
04	22	R↓
05	23 41 00	STO – 0
06	24 00	RCL 0
07	15 71	g x=0
08	13 42	GTO 42
09	23 61 02	STO x 2
10	24 02	RCL 2
11	74	R/S
12	21	x⇄y
13	15 51	g x≥0
14	13 17	GTO 17
15	21	x⇄y
16	13 02	GTO 02
17	01	1
18	32	CHS
19	23 02	STO 2
20	00	0
21	23 01	STO 1
22	24 01	RCL 1
23	03	3
24	14 71	f x=y

Visor		Introdução
Linha	Código	
25	1340	GTO 40
26	01	1
27	23 51 01	STO + 1
28	32	CHS
29	24 00	RCL 0
30	51	+
31	24 01	RCL 1
32	41	–
33	04	4
34	71	÷
35	15 01	g FRAC
36	15 61	g x≠0
37	1322	GTO 22
38	24 01	RCL 1
39	1305	GTO 05
40	01	1
41	13 05	GTO 05
42	24 02	RCL 2
43	15 41	g x<0
44	1347	GTO 47
45	24 03	RCL 3
46	13 00	GTO 00
47	24 04	RCL 4
48	14 11 01	f FIX 1
49	13 00	GTO 00

Registros	
R_0	Total
R_1	Jogada da HP-25
R_2	± Total
R_3	370
R_4	3507,1
R_5	
R_6	
R_7	

Etapa	Instruções	Dados de Entrada	Teclas				Dados de Saída
1	Gravar o programa						
2	Iniciar	370	STO	3			
		3507.1	STO	4	f	PRGM	
3	Armazenar o número total de						
	objetos (geralmente 15).	N	STO	0	CHS	f	
	ajustar o visor		FIX	0			-N.
4	Se o número no visor for						
	negativo, registrar a sua jogada	Sua jogada	R/S				+ Total
5	Se o número no visor for						
	positivo, deixar que a HP-25 jogue		R/S				- Total
6	Executar as etapas 4 e 5 até						
	o final da partida						
7	Terminada a partida, virar a						
	calculadora de cabeça para baixo para ler a mensagem						
8	Para dar início a uma nova partida, passar para a etapa 3						

Exemplo:

Iniciar a partida com N = 15. N = 15.

O jogador retira 3 objetos.

3 [R/S] ⟶ 12.

[R/S] ⟶ -9.

A calculadora retira 3 objetos.

O jogador retira 2 objetos.

2 [R/S] ⟶ 7.

[R/S] ⟶ -5.

A calculadora retira 2 objetos.

O jogador retira 3 objetos.

3 [R/S] ⟶ 2.

[R/S] ⟶ -1.

A calculadora retira 1 objeto.

O jogador retira o último objeto.

1 [R/S] ⟶ 370.

Virar a calculadora de cabeça para baixo para a leitura do resultado: OLÉ!

Aritmética Divertida

Nós, da Hewlett-Packard, somos do parecer que a calculadora manual, longe de constituir uma ameaça à metodologia tradicional que preconiza uma sólida educação matemática, pode ser empregada vantajosamente para reforçar o ensinamento de muitas matérias, tais como: a aritmética, a álgebra, a geometria, a trigonometria, o cálculo e a análise numérica. O programa em pauta, que se destina ao ensinamento, às crianças, das quatro operações da aritmética elementar ($+$, $-$, $\times$, $\div$), demonstra, de maneira significativa, o potencial, ainda pouco explorado, da calculadora HP-25, como um complemento à educação.

O teor básico do programa em apreço é a formulação de um problema aritmético; a verificação da resposta registrada pelo usuário, em contraposição à réplica correta da calculadora; e, em seguida, a execução de uma de duas etapas: estando certa a resposta do usuário, o programa passa para novo problema; estando errada, o programa reafirma o problema, a fim de proporcionar ao estudante uma segunda oportunidade.

Para executar o programa, o usuário deverá armazenar, no registrador R_0, um valor que chamaremos de MAX. O armazenamento deste valor servirá para "avisar" ao programa que este não deverá fazer uso de quaisquer números que sejam de valor mais elevado que o valor de MAX. Por exemplo, se o usuário determinar que o valor de MAX seja 12, todos os problemas limitar-se-ão a números de 0 a 11. O usuário, em seguida, deverá armazenar no registrador R_1 uma "semente" s – um número entre 0 e 1 – o qual determinará a sequência dos problemas que aparecerão. Distintas "sementes" são geradoras de distintos problemas. Desta forma, o programa não se torna monótono. Com o formato do visor ajustado para [f] [FIX] [2], o programa apresenta o primeiro problema da seguinte maneira: o visor apresenta um número à direita e outro à esquerda do ponto decimal. Por exemplo, os números 8 e 2 seriam apresentados da seguinte forma: 8.02. A esta altura do programa, ao usuário será dada a oportunidade de escolher a operação que deseja executar, podendo o mesmo somar ($8 + 2$), subtrair ($8 - 2$), multiplicar (8×2), ou dividir ($8 \div 2$). Uma vez registrada a sua resposta e reiniciado o programa, este, no caso de uma resposta certa, apresentará novo problema; e, no caso de uma resposta errada, reapresentará os dois números primitivos. Estes, porém, serão precedidos de um sinal negativo (-8.02). Em tal caso, o sinal negativo será apenas um indício de uma resposta incorreta, não significando, de maneira alguma, que o valor do número em questão seja negativo. (Todos os números dos problemas serão de valor positivo, embora, naturalmente, alguns resultados de certas subtrações possam resultar em valores negativos). No caso do problema reaparecer com um sinal negativo à sua frente, o usuário deverá introduzir uma outra resposta, fazendo nova tentativa de acertar. Logo que for dada a resposta certa, o programa passará a exibir novo problema.

Visor		Introdução
Linha	Código	
00		
01	24 01	RCL 1
02	15 73	g π
03	15 02	g x^2
04	61	x
05	15 01	g FRAC
06	23 01	STO 1
07	24 00	RCL 0
08	61	x
09	14 01	f INT
10	23 03	STO 3
11	24 01	RCL 1
12	15 73	g π
13	15 02	g x^2
14	61	x
15	15 01	g FRAC
16	23 01	STO 1
17	24 00	RCL 0
18	61	x
19	14 01	f INT
20	23 02	STO 2
21	24 03	RCL 3
22	33	EEX
23	02	2
24	71	÷

Visor		Introdução
Linha	Código	
25	51	+
26	23 04	STO 4
27	74	R/S
28	24 02	RCL 2
29	24 03	RCL 3
30	51	+
31	13 43	GTO 43
32	24 02	RCL 2
33	24 03	RCL 3
34	41	–
35	13 43	GTO 43
36	24 02	RCL 2
37	24 03	RCL 3
38	61	x
39	13 43	GTO 43
40	24 02	RCL 2
41	24 03	RCL 3
42	71	÷
43	14 71	f x=y
44	13 01	GTO 01
45	24 04	RCL 4
46	32	CHS
47	13 27	GTO 27
48		
49		

Registros
R_0 Max
R_1 Número aleatório
R_2 Número da esquerda
R_3 Número da direita
R_4 Problema
R_5
R_6
R_7

Etapa	Instruções	Dados de Entrada	Teclas				Dados de Saída
1	Gravar o programa						
2	Armazenar (0 < Max ≤ 100)	Max	STO	0			
3	Armazenar a semente (0 < s < 1)	s	STO	1			
4	Ajustar o formato do visor		f	FIX	2		
5	Gerar um problema		f	PRGM	R/S		n_1 . n_2
6	Escolher uma operação e						
	introduzir a sua resposta:						
	Para adição (+)	$n_1 + n_2$	R/S				
	Para subtração (–)	$n_1 - n_2$	GTO	32	R/S		
	Para multiplicação (X)	$n_1 \times n_2$	GTO	36	R/S		
	Para divisão (÷)	$n_1 \div n_2$	GTO	40	R/S		
7	Se você acertou, o programa						
	apresentará um novo problema;						
	passar para a etapa 6						n_3 . n_4
8	Se você errou, o programa						
	apresentará o mesmo						
	problema outra vez						$-n_1$. n_2
9	Repetir as etapas 6-8 tantas						
	vezes quanto desejado						
10	Para substituir MAX, passar para a etapa 2, e, em seguida						
	passar para a etapa 5						

Exemplo:

Sejam MAX = 12 e a semente s = 0,725

Solução:

f PRGM R/S ⟶ 6.01
(6 + 1 = 7)

7 R/S ⟶ 8.03
(8 x 3 = 25)

25 GTO 3 6 R/S ⟶ –8.03
(Fazer outra tentativa: 8 × 3 = 24)

24 GTO 3 6 R/S ⟶ 3.11
(3 – 11 = –8)

8 CHS GTO 3 2 R/S ⟶ 9.00
(9 + 0 = 9)

9 R/S ⟶ 2.05

etc.

Notas

CAPÍTULO IV
NAVEGAÇÃO

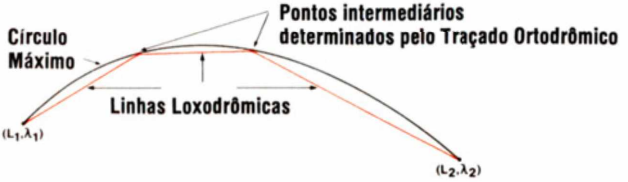
Determinação de Rotas

As travessias marítimas de longo percurso e os vôos aéreos de longa distância geralmente são empreendidos tendo como base um de dois tipos de rotas: a rota loxodrômica ou a rota ortodrômica. A linha loxodrômica é uma linha de direção constante entre dois pontos da superfície terrestre, sendo que a sua interseção com todos os meridianos é feita à base de ângulos idênticos. É, também, a rota que se define como sendo uma linha reta entre dois pontos de uma projeção Mercator. É um tipo de rota de grande conveniência para fins de navegação, visto que a sua direção permanece inalterada; e, para distâncias curtas, em latitudes medianas e inferiores, a linha loxodrômica é apropriada a quase todos os cálculos de rota e percurso.

Fora dos referidos limites, uma rota mais eficiente é a que tem como base a navegação ortodrômica, ou de círculo máximo, o que constitui a menor distância entre dois pontos de uma esfera. Entretanto, para seguir um círculo máximo, um veículo ou embarcação terá que alterar a sua direção constantemente. Visto que tal necessidade, na melhor das hipóteses, será de grande inconveniência, senão virtualmente impossível, muitas vezes são empregadas várias linhas loxodrômicas, a fim de se conseguir uma aproximação a um círculo máximo.

Para a planificação de uma rota baseada nesta técnica, o navegador deverá executar, primeiramente, o programa "Traçado Ortodrômico." Este programa requer a introdução da latitude e da longitude do ponto de partida, bem como das coordenadas do ponto de destino. Assim sendo, para qualquer longitude intermediária λ_i especificada pelo navegador, o programa em pauta calculará a latitude L_i, à altura da qual o círculo máximo, entre o ponto de partida e o ponto de destino, cruzará a longitude especificada. No caso de serem calculados vários pares de coordenadas, o programa seguinte, "Navegação Loxodrômica," poderá ser empregado para achar a direção e a distância das linhas loxodrômicas que vinculam os referidos pontos intermediários de um círculo máximo.

Os dados de entrada para cálculos de navegação loxodrômica serão as coordenadas de dois pontos do globo terrestre; os dados de saída serão a direção de linha loxodrômica e a distância entre o primeiro e segundo pontos. O programa pode ser empregado independentemente para uma determinação da linha loxodrômica entre o ponto de origem e o ponto de destino; ou, conjuntamente com o Traçado Ortodrômico, para a determinação de várias linhas loxodrômicas, com o objetivo de se obter uma aproximação a um círculo máximo.



Traçado Ortodrômico

Equação:

$$L_i = \tan^{-1}\left[\frac{\tan L_2 \operatorname{sen}(\lambda_i - \lambda_1) - \tan L_1 \operatorname{sen}(\lambda_i - \lambda_2)}{\operatorname{sen}(\lambda_2 - \lambda_1)}\right]$$

onde (L_1, λ_1) = coordenadas do ponto de partida

(L_2, λ_2) = coordenadas do ponto de destino

(L_i, λ_i) = coordenadas de um ponto intermediário no círculo máximo

Observação:

O programa não computa ao longo de meridianos $(\lambda_1 = \lambda_2)$.

Visor		Introdução	X	Y	Z	T	Observações
Linha	Código						
00			λ_i, G.MS				
01	15 00	g →H	λ_i, G d				Converter λ_i para graus
02	23 04	STO 4	λ_i				decimais
03	24 01	RCL 1	λ_1	λ_i			
04	41	–	$\lambda_i - \lambda_1$				
05	14 04	f SIN	$\sin_1$				$\text{seno}_1 = \text{seno}(\lambda_i - \lambda_1)$
06	24 02	RCL 2	L_2	$\sin_1$			
07	14 06	f TAN	$\tan_2$	$\sin_1$			$\tan_2 = \tan L_2$
08	61	x	$\tan_2 \sin_1$				
09	24 04	RCL 4	λ_i	$\tan_2 \sin_1$			
10	24 03	RCL 3	λ_2	λ_i	$\tan_2 \sin_1$		
11	41	–	$\lambda_i - \lambda_2$	$\tan_2 \sin_1$			
12	14 04	f SIN	$\sin_2$	$\tan_2 \sin_1$			$\text{seno}_2 = \text{seno}(\lambda_i - \lambda_2)$
13	24 00	RCL 0	L_1	$\sin_2$	$\tan_2 \sin_1$		
14	14 06	f TAN	$\tan_1$				$\tan_1 = \tan L_1$
15	61	x	$\tan_1 \sin_2$	$\tan_2 \sin_1$			
16	41	–	NUM				$\text{NUM} = \tan_2 \text{seno}_1 - \tan_1$
17	24 03	RCL 3	λ_2	NUM			seno_2
18	24 01	RCL 1	λ_1	λ_2	NUM		
19	41	–	$\lambda_2 - \lambda_1$	NUM			
20	14 04	f SIN	DEN	NUM			$\text{DEN} = \text{seno}(\lambda_2 - \lambda_1)$
21	71	÷	NUM/DEN				
22	15 06	g TAN^{-1}	L_i, G d				
23	14 00	f →H.MS	L_i, G.MS				Apresentar L_1 em G.MS
24	14 11 04	f FIX 4					
25	13 00	GTO 00					
26							
27							
28							
29							
30							
31							
32							
33							
34							
35							
36							
37							
38							
39							
40							
41							
42							
43							
44							
45							
46							
47							
48							
49							

Registros	
R 0	L_1 (graus dec)
R 1	λ_1 (graus dec)
R 2	L_2 (graus dec)
R 3	λ_2 (graus dec)
R 4	λ_i (graus dec)
R 5	
R 6	
R 7	

Etapa	Instruções	Dados de Entrada	Teclas				Dados de Saída
1	Gravar o programa						
2	Introduzir as coordenadas do						
	ponto de partida						
	Latitude (CHS para S)	L_1, G.MS	g	→H	STO	0	L_1 graus dec
	Longitude (CHS para L)	λ_1, G.MS	g	→H	STO	1	λ_1 graus dec
3	Introduzir as coordenadas do ponto de destino						
	Latitude (CHS para S)	L_2, G.MS	g	→H	STO	2	L_2, graus dec
	Longitude (CHS para L)	λ_2, G.MS	g	→H	STO	3	λ_2, graus dec
4	Retornar ao topo da memória		f	PRGM			
5	Introduzir a longitude						
	(CHS para S)e computar						
	a latitude correspondente	λ_i, G.MS	R/S				L_i, G.MS
6	Para uma nova longitude						
	intermediária, passar para a etapa 5; para novo ponto de						
	partida (ou novo ponto de destino),						
	passar para a etapa 2 (ou 3)						

Navegação Loxodrômica

Equação:

$$C = \tan^{-1} \frac{\pi (\lambda_1 - \lambda_2)}{180 \left[\ln \tan \left(45 + \frac{1}{2} L_2\right) - \ln \tan \left(45 + \frac{1}{2} L_1\right)\right]}$$

$$D = \begin{cases} 60 (\lambda_2 - \lambda_1) \text{ co-seno L; co-seno C} = 0 \\ 60 \dfrac{(L_2 - L_1)}{\text{co-seno C}} \text{ ; de outra forma} \end{cases}$$

onde: (L_1, λ_1) = coordenadas do ponto inicial

(L_2, λ_2) = coordenadas do ponto final

C = direção de linha loxodrômica

D = distância de linha loxodrômica

Observações:

1. Nenhuma rota deverá passar pelo Polo Norte ou pelo Polo Sul.
2. Nenhuma rota deverá seguir um rumo Leste ou Oeste cruzando o meridiano de 180° (linha de data internacional).
3. É possível que, à medida que o valor de C se aproxima de 90° ou de 270°, sejam encontrados erros de cálculo para distâncias.
4. Para percursos de pouca distância, verifica-se uma deteriorização da precisão.

Visor Linha	Visor Código	Introdução	X	Y	Z	T	Observações
00			λ_2	λ_1			
01	41	-	$\lambda_1 - \lambda_2$				
02	23 06	STO 6	$\lambda_1 - \lambda_2$				
03	02	2	2	$\lambda_1 - \lambda_2$			
04	71	÷	α				Seja a = 1/2 $(\lambda_1 - \lambda_2)$
05	14 04	f SIN	sen α				Normalizar α a fim de que
06	15 04	g SIN^{-1}	mod α				$-180 \leq \lambda_1 - \lambda_2 \leq 180$;
07	09	9	9	α			encontra a rota mais curta
08	00	0	90	α			ao redor da Terra.
09	71	÷	α/90				
10	15 73	g π	π	α/90			
11	61	x	$\pi\alpha$/90	$\pi\alpha$/90			
12	24 05	RCL 5	ln $\tan_2$	$\pi\alpha$/90			
13	24 04	RCL 4	ln $\tan_1$	y			Seja y = $\pi\alpha$/90
14	41	-	x	y			Seja x = ln $\tan_2$ - ln $\tan_1$
15	15 09	g →P	r	C			C = arco tan y/x
16	22	R↓	C			r	
17	15 03	g ABS	|C|			r	
18	23 07	STO 7	|C|			r	
19	24 06	RCL 6	$\lambda_1 - \lambda_2$	|C|			
20	14 04	f SIN	sen α	|C|			Normalizar $\lambda_1 - \lambda_2$ a fim de
21	15 04	g SIN^{-1}	mod α	|C|			que $-90 \leq \lambda_1 - \lambda_2 \leq 90$
22	15 41	g x≤0	2α	|C|			x < 0 significa Leste para
23	13 26	GTO 26	2α	|C|			Oeste
24	21	x≠y	|C|	2α			O para L, |C| é a resposta
25	13 31	GTO 31	|C|	2α			
26	03	3	3	2α	|C|		L para O, a resposta é
27	06	6	36	2α	|C|		360 |c|
28	00	0	360	2α	|C|		
29	24 07	RCL 7	|C|	360	2α	|C|	
30	41	-	360 - |C|				
31	74	R/S	rumo				Apresentar a direção
32	06	6	6				Computar a distância D
33	00	0	60				
34	24 07	RCL 7	|C|	60			
35	14 05	f COS	cos |C|	60			
36	15 61	g x≠0	cos |C|	60			Se co-seno C = 0,
37	13 45	GTO 45	cos |C|	60			passar para a linha 45
38	34	CLX	0	60			Co-seno C = 0; rumo é
39	24 06	RCL 6	$\lambda_1 - \lambda_2$				para Leste ou para Oeste
40	61	x	60 $(\lambda_1 - \lambda_2)$				
41	24 02	RCL 2	L_2	60 $(\lambda_1 - \lambda_2)$			
42	14 05	f COS	cos L_2	60 $(\lambda_1 - \lambda_2)$			
43	61	x	Dist				D = 60 $(\lambda_1 - \lambda_2)$ cos L
44	13 00	GTO 00	Dist				Parar e apresentar Dist
45	71	÷	60/cos |C|				Rumo não é para Leste ou
46	24 02	RCL 2	L_2				para Oeste Aplicar fórmula
47	24 00	RCL 0	L_1	L_2	60/cos |C|		D = 60$(L_2 - L_1)$/cos C
48	41	-	$L_2 - L_1$	60/cos |C|			
49	61	x	Dist				Interrupção

Registros	
R_0	L_1 (graus dec)
R_1	λ_1 (graus dec)
R_2	L_2 (graus dec)
R_3	λ_2 (graus dec)
R_4	ln tan (45+L_1/2)
R_5	ln tan (45+L_2/2)
R_6	$\lambda_1 - \lambda_2$
R_7	|C|

Etapa	Instruções	Dados de Entrada	Teclas				Dados de Saída
1	Gravar o programa						
2	Introduzir a latitude inicial (CHS para S)	L_1, G.MS	g	→H	STO	2	
			2	÷	45	+	
			f	TAN	f	LN	
			STO	5			ln $\tan_1$
3	Introduzir a longitude inicial						
	(CHS para L)	λ_1, G.MS	g	→H	STO	3	λ_1, graus dec
4	Introduzir a latitude final						
	(CHS para S)	L_2, G.MS	g	→H	RCL	2	
			STO	0	x⇄y	STO	
			2	2	÷	45	
			+	f	TAN	f	
			LN	RCL	5	STO	
			4	x⇄y	STO	5	ln $\tan_2$
5	Introduzir a longitude final						
	(CHS para L)	λ_2, G.MS	g	→H	RCL	3	
			STO	1	x⇄y	STO	
			3				λ_2, graus dec
6	Computar a direção		f	PRGM	R/S		C
7	Computar a distância		R/S				D
8	Para continuar o rumo, voltar						
	para a etapa 4 e introduzir						
	uma nova posição final						

Exemplo:

Determina-se que, no percurso entre São Francisco (L37° 49′N, λ 122° 25′0) e Tóquio (L35° 40′N, λ 139° 45′E), uma embarcação seguirá três linhas loxodrômicas, com a finalidade de aproximar uma rota de círculo máximo. O oficial navegador de bordo escolhe λ 155°O e λ 175°E como os dois pontos intermediários do percurso. Achar as linhas loxodrômicas que a embarcação deverá seguir, bem como a distância de cada etapa da viagem.

Solução:

Gravar, inicialmente, o Traçado Ortodrômico.

37.49 g →H STO 0 122.25 g →H STO 1 35.40 g →H STO 2 139.45
CHS g →H STO 3 f PRGM 155 R/S ⟶ 47.4606
175 CHS R/S ⟶ 47.3610

Verifica-se que os dois pontos intermediários são (L47° 46′N, λ 155°O); e (L47° 36′N, λ 175°E).

Em seguida, gravar a Navegação Loxodrômica.

Coordenadas do ponto de partida:

37.49 [g] [→H] [STO] [2] 2 [÷] 45 [+] [f] [tan] [f] [ln] [STO] [5]
122.25 [g] [→H] [STO] [3]

Achar a direção e a distância até o primeiro ponto intermediário.

47.4606 [g] [→H] [RCL] [2] [STO] [0] [x≷y] [STO] [2] 2 [÷] 45 [+] [f] [tan] [f] [ln] [RCL]
[5] [STO] [4] [x≷y] [STO] [5] 155 [g] [→H] [RCL] [3] [STO] [1] [x≷y] [STO] [3] [f] [PRGM]
[R/S] ⟶ 292.67
(direção)

[R/S] ⟶ 2869.45
(distância)

Achar a direção e a distância até o segundo ponto intermediário:

47.361 [g] [→H] [RCL] [2] [STO] [0] [x≷y] [STO] [2] 2 [÷] 45 [+] [f] [tan] [f] [ln] [RCL]
[5] [STO] [4] [x≷y] [STO] [5] 175 [CHS] [g] [→H] [RCL] [3] [STO] [1] [x≷y] [STO] [3] [f] [PRGM]
[R/S] ⟶ 269.53
(direção)

[R/S] ⟶ 2244.25
(distância)

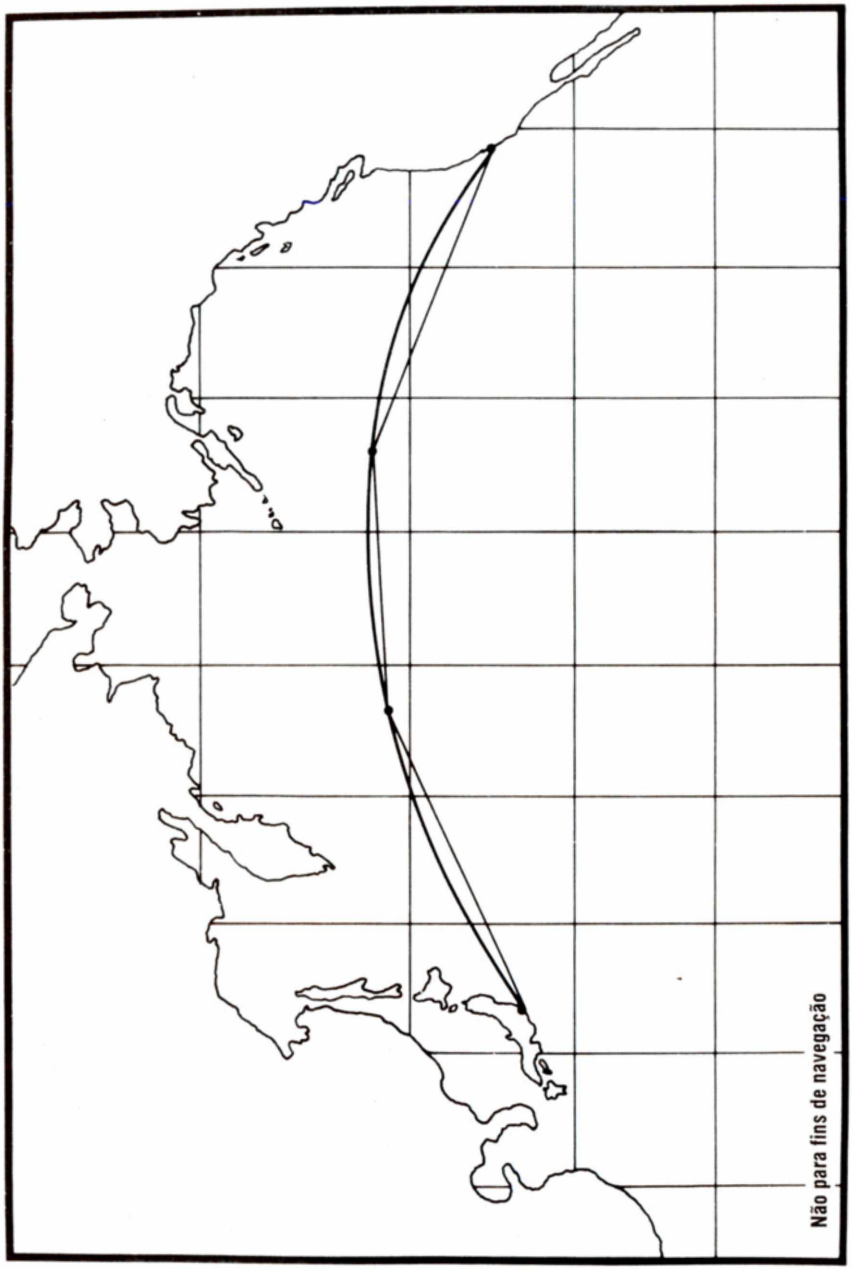
Achar a direção e a distância até o ponto de destino:

35.40 [g] [→H] [RCL] [2] [STO] [0] [x≷y] [STO] [2] 2 [÷] 45 [+] [f] [tan] [f] [ln] [RCL]
[5] [STO] [4] [x≷y] [STO] [5] 139.45 [CHS] [g] [→H] [RCL] [3] [STO] [1] [x≷y] [STO] [3]
[f] [PRGM]
[R/S] ⟶ 245.53
(direção)

[R/S] ⟶ 3201.48
(distância)

Sumário:

		Linha Loxodrômica	
Posição	**Coordenadas**	**Direção**	**Distância:**
São Francisco	L37° 49′N, λ 122° 25′W		
		292.7°	2869.45 Km.
1° ponto intermediário	L47° 46′N, λ 155°W		
		269.5°	2244.25 Km.
2° ponto intermediário	L47° 36′N, λ 175°E		
		245.5°	3201.48 Km.
Tóquio	L35° 40′N, λ 139° 45′E		



A distância total das três linhas loxodrômicas é de 8315.11 km. A distância entre São Francisco e Tóquio, por rota de círculo máximo, é de 8259.92 km. Mesmo através de apenas dois pontos intermediários, a distância adicional, por navegação loxodrômica, vem a ser menos de sessenta quilômetros.

Tabela de Redução de Mira

Este programa calcula a aititude, H, e o azimute, Zn, de um corpo celeste, dados: a latitude do observador, L; o ângulo de hora local, AHL; e a declinação do corpo. O programa torna-se, assim, um substituto dos nove volumes de HO 214. Entretanto, o usuário não precisa se preocupar com as distinções de mesmo nome e de nome contrário; o programa, por si só, resolve todas as ambiguidades deste tipo.

Equações:

$$H = \text{arco sen} \quad [\text{sen d sen L} + \cos d \cos L \cos AHL]$$

$$Zn = \begin{cases} Z & ; \text{sen AHL} < 0 \\ 360\text{-}Z & ; \text{sen AHL} \geqslant 0 \end{cases} \qquad Z = \text{arco cos} \quad \left[\frac{\text{sen d} - \text{sen L sen H}}{\cos L \cos H}\right]$$

Observações:

1. Todas as latitudes e todas as declinações meridionais deverão ser introduzidas como números negativos.

2. O ângulo meridiano t poderá ser introduzido no lugar de AHL, porém, em tal caso, os ângulos dos meridianos orientais deverão ser introduzidos como números negativos.

Visor		Introdução
Linha	Código	
00		
01	24 00	RCL 0
02	14 04	f SIN
03	24 01	RCL 1
04	14 04	f SIN
05	61	x
06	24 00	RCL 0
07	14 05	f COS
08	24 01	RCL 1
09	14 05	f COS
10	61	x
11	24 02	RCL 2
12	14 05	f COS
13	61	x
14	51	+
15	23 03	STO 3
16	15 04	g SIN^{-1}
17	23 04	STO 4
18	14 00	f →H.MS
19	74	R/S
20	24 01	RCL 1
21	14 04	f SIN
22	24 03	RCL 3
23	24 00	RCL 0
24	14 04	f SIN

Visor		Introdução
Linha	Código	
25	61	x
26	41	–
27	24 00	RCL 0
28	14 05	f COS
29	71	÷
30	24 04	RCL 4
31	14 05	f COS
32	71	÷
33	15 05	g COS^{-1}
34	24 02	RCL 2
35	14 04	f SIN
36	15 41	g x<0
37	13 45	GTO 45
38	22	R↓
39	03	3
40	06	6
41	00	0
42	21	x⇄y
43	41	–
44	13 00	GTO 00
45	22	R↓
46	13 00	GTO 00
47		
48		
49		

Registros
R_0 L
R_1 d
R_2 AHL
R_3 sen H
R_4 H
R_5
R_6
R_7

Etapa	Instruções	Dados de Entrada	Teclas				Dados de Saída
1	Gravar o programa						
2	Introduzir:						
	Latitude do observador	L, G.MS	g	→H	STO	0	L, graus dec.
	Declinação	d, G.MS	g	→H	STO	1	d, graus dec.
	Ângulo de Hora Local	AHL, G.MS	g	→H	STO	2	AHL, graus dec.
3	Computar a altitude		f	PRGM	R/S		H, G.MS
4	Computar o azimute		R/S				Zm, G.MS
5	Para novo caso, passar para 2						

Exemplo:

Computar a altitude e o azimute da Lua, sendo o seu AHL (Ângulo de Hora Local) de 2°39′54″O e a sua declinação de 13°51′06″S. A latitude do observador é 33°20′N

Solução:

H = 42°44′48″

Zm = 183,5°

Navegação Ortodrômica

Este programa computa a distância de círculo máximo entre dois pontos e a direção inicial a partir do primeiro ponto, conhecidas a latitude e a longitude do ponto inicial (L_1, λ_1) e a latitude e longitude do ponto de destino (L_2, λ_2).

Equações:

$$D = 60 \text{ arco cos } [\text{sen } L_1 \text{ sen } L_2 + \cos L_1 \cos L_2 \cos (\lambda_2 - \lambda_1)]$$

$$DIR = \text{arco cos } \left[\frac{\text{sen } L_2 - \text{sen } L_1 \cos (D/60)}{\text{sen } (D/60) \cos L1} \right]$$

$$DIR_i = \begin{cases} DIR & ; \text{sen } (\lambda_2 - \lambda_1) < 0 \\ 360\text{-}DIR & ; \text{sen } (\lambda_2 - \lambda_1) \geqslant 0 \end{cases}$$

Observações:

1. Todas as latitudes meridionais e todas as longitudes orientais deverão ser introduzidas como números negativos.
2. Quando o ponto inicial e o ponto de destino estão muito próximos um do outro, ocorrem erros de truncamento e de arrendondamento.
3. Não utilizar coordenadas que estejam localizadas em pontos diametralmente opostos do globo terrestre.
4. Não empregar as latitudes de $+90°$ ou $-90°$.
5. Não tentar o cálculo de direção inicial ao longo de um meridiano ($L_1 = L_2$).

Visor		Introdução
Linha	Código	
00		
01	24 00	RCL 0
02	14 04	f SIN
03	24 01	RCL 1
04	14 04	f SIN
05	61	x
06	24 00	RCL 0
07	14 05	f COS
08	24 01	RCL 1
09	14 05	f COS
10	61	x
11	24 02	RCL 2
12	14 05	f COS
13	61	x
14	51	+
15	23 03	STO 3
16	15 05	g COS^{-1}
17	23 04	STO 4
18	06	6
19	00	0
20	61	x
21	74	R/S
22	24 01	RCL 1
23	14 04	f SIN
24	24 00	RCL 0

Visor		Introdução
Linha	Código	
25	14 04	f SIN
26	24 03	RCL 3
27	61	x
28	41	–
29	24 00	RCL 0
30	14 05	f COS
31	71	÷
32	24 04	RCL 4
33	14 04	f SIN
34	71	÷
35	15 05	g COS^{-1}
36	24 02	RCL 2
37	14 04	f SIN
38	15 41	g x<0
39	13 47	GTO 47
40	22	R↓
41	03	3
42	06	6
43	00	0
44	21	x⇄y
45	41	–
46	13 00	GTO 00
47	22	R↓
48	13 00	GTO 00
49		

Registros
R_0 L_1
R_1 L_2
R_2 $\lambda_2 - \lambda_1$
R_3 cos (D/60)
R_4 D/60
R_5
R_6
R_7

Etapa	Instruções	Dados de Entrada	Teclas				Dados de Saída
1	Gravar o programa						
2	Introduzir:						
	Latitude do ponto inicial	L_1, G.MS	g	→H	STO	0	L_1, graus dec.
	Latitude do ponto final	L_2, G.MS	g	→H	STO	1	L_2, graus dec.
	Longitude do ponto final	λ_2, G.MS	g	→H			λ_2, graus dec.
	Longitude do ponto inicial	λ_1, G.MS	g	→H	−	STO	
			2				$\lambda_2 - \lambda_1$ graus dec.
3	Computar a distância de círculo máximo		f	PRGM	R/S		D, mi. naut.
4	Computar direção inicial		R/S				H_i, graus dec
5	Para novo caso, passar 2						

Exemplo:

Achar a distância de círculo máximo e a direção inicial de uma embarcação que parte de São Francisco (L37°49′N, λ 122°25′O) com destino a Tóquio (L35°40′N, λ 139°45′E).

Solução:

D = 8259.99 km = 4460.04 mi naut

DIR = 303,29°

Notas

CAPÍTULO V
MÉTODOS NUMÉRICOS

Solução de f(x) = 0 Pelo Método de Newton

Um dos problemas algébricos mais comuns, causador, entretanto, das maiores frustrações, é a solução de uma equação tal como:

$$\ln x + 3x = 10{,}8074$$

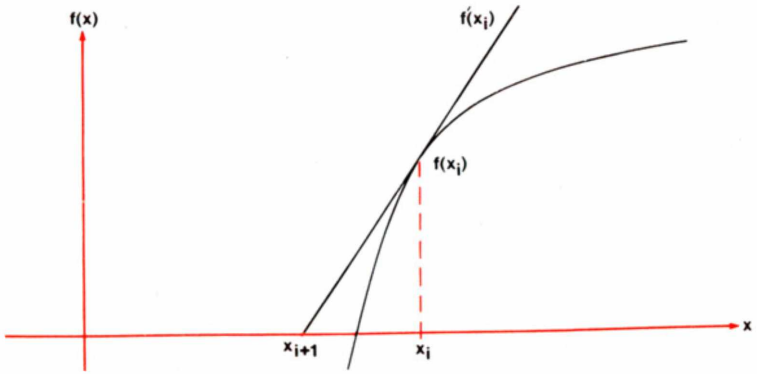
na qual a incógnita x não pode ser isolada em um dos lados da equação. Em outras palavras, não existem, em tais casos, soluções algébricas simples. No caso em apreço, entretanto, um de vários algoritmos determinadores de raízes pode ser empregado para solucionar a equação $f(x) = 0$, onde $f(x) = \ln x + 3x - 10{,}8074$.O programa a seguir emprega o método de Newton para achar uma solução para $f(x) = 0$, onde $f(x)$ é especificado pelo usuário.

O usuário deverá definir a função de $f(x)$, através da introdução, na memória do programa, das teclas necessárias para se obter $f(x)$, admitindo-se que x esteja armazenado no registrador X. Encontram-se disponíveis, para a definição de $f(x)$, quatorze etapas de programação. A pilha operacional e os registradores de armazenamento de R_5 a R_7, inclusive, também se encontram disponíveis ao usuário. Adicionalmente, este deverá fornecer ao programa uma hipótese inicial, x_1, para a solução do problema. Quanto mais acertada a hipótese inicial, com relação à solução verdadeira, tanto mais rapidamente convergirá o programa. O programa parará no momento em que duas aproximações a x, digamos x_i e x_{i+1}, estejam dentro de um tolerância ε, isto é, quando $|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$. O valor de ε deverá ser introduzido pelo usuário. Em geral, um valor razoável para ε é $10^{-6}\, x_i$.

Equações:

A fórmula básica empregada pelo método de Newton, para a seguinte aproximação à solução do problema, é

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$



O programa utiliza uma aproximação numérica da derivada f'(x), de modo que a fórmula acima se reduz a:

$$x_{i+1} = x_i - \delta_i \left[\frac{f(x_i + \delta_i)}{f(x_i)} - 1 \right]^{-1}$$

onde $\delta_i = 10^{-5}\, x_i$

Observações:

1. Uma vez completado o cálculo, o último valor de f(x) será suscetível de apresentação no visor, pelo acionamento da tecla RCL 4 . Caso este valor não esteja suficientemente próximo ao zero, o programa poderá ser executado novamente, dando-se um valor menor a ε.

2. O usuário do programa poderá acompanhar a convergência da função sobre o zero através de uma ligeira modificação do programa. Se o g NOP na linha 07 for substituído por um f PAUSE , o programa parará durante cada iteração, apresentando valores sucessivos para f(x), os quais deverão convergir para zero. Para efetuar a referida alteração de um programa já registrado, deverão ser executadas as seguintes operações:

    1. Pressionar GTO 0 6
    2. Adotar o modo PRGM
    3. Pressionar f PAUSE
    4. Adotar o modo RUN
    5. Pressionar f PRGM

Comentários sobre Programação:

Este é um dos programas, do presente livro, de maior complexidade. A principal dificuldade é que, por ocasião de cada iteração, tanto o valor f(x) como o valor f(x + δ) precisam ser calculados, porém, a função f se encontra registrada em apenas um lugar na memória do programa. Os computadores de grande porte resolvem problemas como este pelo emprego de uma subrotina. O presente programa simula a referida técnica através de um número armazenado no registrador R_0, conhecido como uma "dica". Se a dica for 0, f(x) deverá ser calculado. Se a dica for 1, f(x + δ) deverá ser achado. Após o cálculo de f, faz-se um teste da dica. Sendo a mesma 0, o programa se ramificará, passando para uma instrução que armazenará o valor f(x). Se a mesma for 1, o programa passará para o cálculo de uma derivada baseado no valor f(x + δ). As operações envolvendo a dica ocuparão um total de 9 etapas do programa.

Visor		Introdução	X	Y	Z	T	Observações
Linha	Código						
00							
01	34	CLX	0				Dica igual a 0 para f(x)
02	23 00	STO 0	0				
03	24 01	RCL 1	x	0			Chamar x e transferir-se
04	13 07	GTO 17	x	0			para calcular f(x)
05	22	R↓	f(x)				Rotação para remover a
06	23 04	STO 4	f(x)				dica
07	15 74	g NOP	f(x)				PAUSAR, possivelmente,
08	01	1	1	f(x)			para verificar a
09	23 00	STO 0	1	f(x)			convergência
10	24 01	RCL 1	x	1	f(x)		Dica igual a 1 para f(x + δ)
11	24 01	RCL 1	x	x	1	f(x)	
12	33	EEX	1. 00	x	x	1	
13	05	5	1. 05	x	x	1	
14	71	÷	10^{-5} x	x	1	1	
15	23 03	STO 3	δ	x	1	1	
16	51	+	x + δ	1	1	1	
17							As linhas de 17 a 30 são
18							Reservadas para o usuário
19							poder definir f(x)
20							
21							Esta seção do programa é
22							empregada para achar f(x)
23							e f(x + δ)
24							A dica em R_0 é 0 para f(x),
25							1 para f(x + δ)
26							
27							
28							
29							
30							
31	15 71	g x = 0	f(x)/(x + δ)				O valor da função é = 0?
32	13 49	GTO 49	f(x)/(x + δ)				Se sim, dar saída a solução
33	24 00	RCL 0	Dica	f(x)/(x + δ)			Se não, verificar a dica
34	15 71	g x = 0	Dica	f(x)/(x + δ)			Dica = 0?
35	13 05	GTO 05	Dica	f(x)			Se sim, temos f(x)
36	22	R↓	f(x + δ)			Dica	Se não, temos f(x + δ)
37	24 04	RCL 4	f(x)	f(x + δ)			
38	71	÷	R				R = f(x + δ)/f(x)
39	01	1	1	R			
40	41	-	R - 1				R-1 = [f(x+δ) - f(x)]/f(x)
41	15 22	g 1/x	$(R-1)^{-1}$				Aproximar
42	24 03	RCL 3	δ	$(R-1)^{-1}$			$f'(x) = [f(x+\delta) - f(x)]/\delta$
43	61	x	δ/(R - 1)				$\Delta = f(x)/f'(x)$
44	23 41 01	STO - 1	Δ				$x_{i+1} = x_i - \Delta$
45	15 03	g ABS	^^				
46	24 02	RCL 2		|Δ|			
47	14 41	f x<y	ε	|Δ|			$\|x_{i+1} - x_i\| > \varepsilon$?
48	13 01	GTO 01	ε	|Δ|			Sim, iterar novamente
49	24 01	RCL 1	x	ε	|Δ|		Não, apresentar x e parar

Registros	
R_0	Dica
R_1	x
R_2	ε
R_3	δ
R_4	f(x)
R_5	
R_6	
R_7	

Etapa	Instruções	Dados de Entrada	Teclas				Dados de Saída
1	Gravar as linhas 1-16 do programa						16 51
2	Gravar a função f(x)						
3	Gravar uma transferência à linha 31		GTO	31			
4	Apertar SST até que o visor						
	indique a linha 30						
5	Gravar as linhas 31-49 do programa						
6	Passar para RUN						
7	Armazenar a hipótese inicial	x_1	STO	1			
8	Armazenar a tolerância	ϵ	STO	2			
9	Computar a solução		f	PRGM	R/S		x_0
10	Para trocar x ou ϵ, passar para a etapa apropriada e						
	armazenar o novo valor						

Exemplo:

Uma equação frequentemente resolvida por projetistas de engrenagens é a seguinte:

$$\text{tg } x - x - I = 0$$

onde x é um ângulo em radianos e I é a evolvente de x. Achar o ângulo x_0 correspondente a uma evolvente de 0,0324.

Observação:

Visto que o projetista em questão possa querer calcular o valor de x com relação a vários valores de I, será mais simples armazenar I no registrador R_7 à disposição da função f(x).

Solução:

Etapa	Instruções	Dados de Entrada	Teclas				Dados de Saída	
1	Gravar as linhas 1-16 do programa						16	51
2	Gravar as etapas para f(x) =							
	tg x − x − l		f	TAN			17	14 06
			f	LASTx			18	14 73
			−				19	41
			RCL	7			20	24 07
			−				21	41
3	Gravar uma transferência para 31		GTO	31			22	13 31
4	Apertar SST 8 vezes, até que							
	o visor apresente a linha 30							
5	Gravar as linhas 31-49						49	24 01
6	Passar para RUN							
7	Adotar unidade angular		g	RAD				
8	Armazenar l	.0324	STO	7				
9	Hipótese $x_1 = 1$	1	STO	1				
10	Gravar a tolerância	10^{-6}	STO	2				
11	Computar a solução x_0		f	PRGM	R/S		0.45	
12	Converter o ângulo para graus		180	x	g	π		
			÷				25.62	
13	Apresentar o último valor de f(x)		RCL	4			2.30	−09

$x_0 = 25.62^\circ$

Último $f(x) = 2{,}30 \times 10^{-9}$

Integração Numérica, a Regra de Simpson

Seja a função f(x) conhecida nos pontos x_0, x_1, ... x_n tais que $x_i = x_0 + ih$ para i = 0, 1, 2, ...n. Não é necessário que esta função seja explicitamente conhecida, porém, no caso de ser, estes valores poderão ser achados antecipadamente pelo registro da função em pauta, na memória do programa e através de avaliação feita à altura dos distintos pontos. O número n deverá ser um inteiro par e positivo.

A regra de Simpson é a seguinte:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \cong \frac{h}{3}\,[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 4f(x_{n-3}) + 2f(x_{n-2})$$

$$+ 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]\,.$$

Seja a solução indicada por I.

Visor		Introdução
Linha	Código	
00		
01	24 00	RCL 0
02	03	3
03	71	÷
04	23 00	STO 0
05	61	x
06	23 01	STO 1
07	74	R/S
08	24 00	RCL 0
09	61	x
10	24 01	RCL 1
11	51	+
12	23 01	STO 1
13	74	R/S
14	24 00	RCL 0
15	61	x
16	04	4
17	61	x
18	24 01	RCL 1
19	51	+
20	23 01	STO 1
21	74	R/S
22	24 00	RCL 0
23	61	x
24	02	2

Visor		Introdução
Linha	Código	
25	61	x
26	24 01	RCL 1
27	51	+
28	23 01	STO 1
29	13 13	GTO 13
30		
31		
32		
33		
34		
35		
36		
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

Registros
R_0 h/3
R_1 Σ
R_2
R_3
R_4
R_5
R_6
R_7

Etapa	Instruções	Dados de Entrada	Teclas				Dados de Saída
1	Gravar o programa						
2	Armazenar o incremento	h	STO	0			
3	Introduzir o primeiro valor da função	$f(x_0)$	f	PRGM	R/S		Soma parcial
4	Introduzir o ultimo valor da função	$f(x_n)$	R/S				Soma parcial
5	Introduzir os valores para $i = 1, 2, \ldots,$ e $n-2$	$f(x_i)$	R/S				Soma parcial
6	Introduzir o valor para $i = n-1$	$f(x_{n-1})$	R/S				I

Exemplo:

Computar $\int_0^{\pi} \text{sen}^2 x\, dx$, empregando a regra de Simpson, com $h = \pi/8$.

Primeiramente, será necessário achar os seguintes dados:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$	$5\pi/8$	$3\pi/4$	$7\pi/8$	π
$f(x_i)$	0	0.1464	0.5	0.8536	1	0.8536	0.5	0.1464	0

Solução:

$$\int_0^{\pi} \text{sen}^2 x\, dx = 1{,}5708$$

A solução exata é $\pi/2$.

Resolução Numérica de Equações Diferenciais

O programa em pauta pode ser empregado para resolver uma grande variedade de equações diferenciais de primeira ordem da forma

$$y' = f(x, y)$$

com valores iniciais x_0, y_0.

Acha-se a solução através de uma resolução numérica, a qual calcula y_i para $x_i = x_0 + ih$, onde h é um incremento especificado pelo usuário do programa e $i = 1, 2 \ldots$.

O programa emprega uma modificação do método de Euler (preditor-corretor):

$$\hat{y}_{i+1} = y_i + h\, f(x_i, y_i) \qquad y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\,[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \hat{y}_{i+1})]$$

f(x, y) é registrado na memória do programa à altura da linha 18. O usuário dispõe de 13 etapas de programação para gravar f(x, y); os registradores R_5, R_6 e R_7 também se encontram disponíveis. O usuário deverá presumir que x e y encontrar-se-ão nos registradores X e Y, respectivamente. A rotina deverá retornar com o valor de f(x, y) no registrador X, devendo finalizar com um GTO 31.

Visor		Introdução
Linha	Código	
00		
01	34	CLX
02	23 04	STO 4
03	24 02	RCL 2
04	24 01	RCL 1
05	13 18	GTO 18
06	22	R↓
07	23 03	STO 3
08	24 00	RCL 0
09	61	x
10	24 02	RCL 2
11	51	+
12	24 01	RCL 1
13	24 00	RCL 0
14	51	+
15	01	1
16	23 04	STO 4
17	22	R↓
18		
19		
20		
21		
22		
23		
24		

Visor		Introdução
Linha	Código	
25		
26		
27		
28		
29		
30		
31	24 04	RCL 4
32	15 71	g x=0
33	13 06	GTO 06
34	22	R↓
35	24 03	RCL 3
36	51	+
37	24 00	RCL 0
38	61	x
39	02	2
40	71	÷
41	24 02	RCL 2
42	51	+
43	23 02	STO 2
44	24 01	RCL 1
45	24 00	RCL 0
46	51	+
47	23 01	STO 1
48	14 74	f PAUSE
49	22	x⇄y

Registros
R_0 h
R_1 x
R_2 y
R_3 y′
R_4 Dica
R_5
R_6
R_7

Etapa	Instruções	Dados de Entrada	Teclas				Dados de Saída
1	Gravar as linhas 1-17 do programa						17 22
2	Gravar a função f(x,y)						
3	Gravar transferência para a linha 31		GTO	31			
4	Apertar SST repetidamente						
	até que o visor apresente a linha 30						
5	Gravar as linhas 31-49 do programa						49 13 01
6	Passar para RUN						
7	Armazenar o incremento	h	STO	0			
8	Armazenar as condições iniciais	x_0	STO	1			
		y_0	STO	2	f	PRGM	
9	Apresentar o próximo valor de						
	x e o valor correspondente de y		R/S				(x_k)
							y_k
10	Repetir a etapa 9 tantas vezes quanto desejado						

Exemplo:

Solucionar, numericamente, a equação diferencial $y' = x\sqrt{y}$, com condições iniciais de $x_0 = 1$, $y_0 = 1$. Empregar incremento $h = 0{,}1$.

Solução:

Gravar a função como [x≷y] [f] [√x] [×]

x	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
y (programa)	1.0	1.1077	1.2319	1.3745	1.5372	1.7221
y (exato)	1.0	1.1078	1.2321	1.3748	1.5376	1.7227

Interpolaçao Linear

Se $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ são dois pontos de uma função $f(x)$, então a função no ponto x_0 pode ser aproximada pela seguinte fórmula:

$$f(x_0) \cong \frac{(x_2 - x_0)\, f(x_1) + (x_0 - x_1)\, f(x_2)}{(x_2 - x_1)}$$

A este método de aproximação se denomina interpolação linear. Evidentemente, x_2 não poderá ser igual a x_1.

Visor		Introdução
Linha	Código	
00		
01	23 04	STO 4
02	24 00	RCL 0
03	41	–
04	24 03	RCL 3
05	61	x
06	24 02	RCL 2
07	24 04	RCL 4
08	41	–
09	24 01	RCL 1
10	61	x
11	51	+
12	24 02	RCL 2
13	24 00	RCL 0
14	41	–
15	71	÷
16	13 00	GTO 00
17		
18		
19		
20		
21		
22		
23		
24		

Visor		Introdução
Linha	Código	
25		
26		
27		
28		
29		
30		
31		
32		
33		
34		
35		
36		
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

Registros
R_0 x_1
R_1 $f(x_1)$
R_2 x_2
R_3 $f(x_2)$
R_4 x_0
R_5
R_6
R_7

Etapa	Instruções	Dados de Entrada	Teclas				Dados de Saída
1	Gravar o programa						
2	Armazenar o primeiro ponto	x_1	STO	0			
		$f(x_1)$	STO	1			
3	Armazenar o segundo ponto	x_2	STO	2			
		$f(x_2)$	STO	3	f	PRGM	
4	Gravar x_0, achar $f(x_0)$	x_0	R/S				$f(x_0)$
5	Repetir a etapa 4 para tantos						
	valores de x quantos desejados						

Exemplo:

Dados

$f(7{,}3) = 1{,}9879$

$f(7{,}4) = 2{,}0015,$

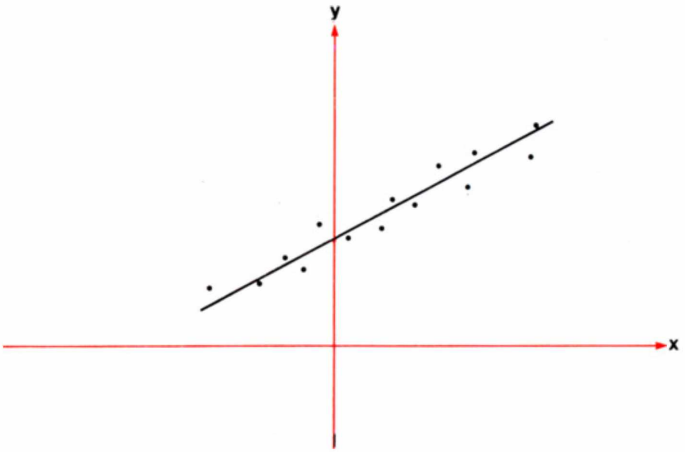
Achar o valor de $f(7{,}37)$ através de interpolação linear.

Solução:

$f(7{,}37) = 1{,}9974$

CAPÍTULO VI
ESTATÍSTICA

Ajustagem Com Curvas
Regressão Linear



No mundo da realidade, ao se investigar a relação entre duas variáveis, um passo inicial razoável é a realização de observações experimentais do sistema, a fim de reunir parelhas de dados referentes às variáveis, (x, y). Em seguida, o investigador pode se fazer a seguinte pergunta: Qual a fórmula matemática que melhor descreve a relação entre as variáveis x e y? A sua primeira hipótese, provavelmente, é que a relação é linear; isto é, que a configuração da equação seria $y = ax + b$, onde a e b seriam constantes. O objetivo do programa em pauta é o de achar as constantes a e b que maior concordância proporcionam entre os dados experimentais e a equação $y = a_1 x + a_0$. A técnica empregada, neste caso, é a de regressão linear, pelo método dos quadrados mínimos.

O usuário do programa deverá introduzir os pares de dados por ele reunidos, (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, n$. Uma vez introduzidos todos os dados, poderão ser calculadas as constantes de regressão a_1 e a_0. Poderá, também, ser encontrado um terceiro valor – o coeficiente de determinação, r^2. O valor de r^2 será encontrado entre 0 e 1, e indicará até que ponto a equação se ajusta aos dados experimentais: quanto mais próximo o valor de r^2 estiver a 1, tanto melhor a ajustagem.

Equações:

$$y = a_1 x + a_0$$

Todos os somatórios abaixo são executados para $i = 1, \ldots, n$.

Constantes da regressão:

$$a_1 = \frac{\Sigma xy - \frac{\Sigma x \, \Sigma y}{n}}{\Sigma x^2 - \frac{(\Sigma x)^2}{n}}$$

$$a_0 = \overline{y} - a_1 \, \overline{x}$$

onde $\overline{y} = \frac{\Sigma y}{n}$

$$\overline{x} = \frac{\Sigma x}{n}$$

Coeficiente de determinação:

Correlation

$$r^2 = \frac{\left[\Sigma xy - \frac{\Sigma x \Sigma y}{n}\right]^2}{\left[\Sigma x^2 - \frac{(\Sigma x)^2}{n}\right]\left[\Sigma y^2 - \frac{(\Sigma y)^2}{n}\right]}$$

Observação:

Os valores para a_0 e a_1 encontram-se armazenados nos registradores R_0 e R_1, respectivamente. Uma vez calculados a_0, a_1 e r^2, o valor estimado de y, $\hat{y}$, correspondente a qualquer valor de x, poderá ser calculado por $\hat{y} = a_1 x + a_0$.

Comentários sobre Programação:

O valor intermediário $C = \Sigma xy - (\Sigma x \Sigma y/n)$ é calculado, inicialmente, à altura da linha 14; porém, o mesmo será necessário próximo ao final do programa, a fim de se achar r^2. Uma vez que todos os registradores, de R_0 a R_7, inclusive, estão em uso, o único lugar para se guardar este valor é a pilha. Portanto, C é preservado em um ou mais registradores da pilha, partindo da linha 14 até a linha 36, inclusive. É devido à presença de C, na pilha, que os usuários do programa em pauta são advertidos no sentido de não perturbarem o conteúdo da pilha após o cálculo de a_0 e a_1 (vide a etapa 4 do Formulário de Instruções).

Visor		Introdução	X	Y	Z	T	Observações
Linha	Código						
00			y	x			Etapas 1-7 para acumulação
01	31	↑	y	y	x		
02	15 02	g x^2	y^2	y	x		
03	23 51 02	STO + 2	y^2	y	x		Σy^2
04	22	R↓	y	x		y^2	
05	21	$x \rightleftarrows y$	x	y		y^2	
06	25	$\Sigma+$	n	y		y^2	n, Σy, Σxy, Σx^2, Σx
07	13 00	GTO 00	n	y		y^2	
08	24 05	RCL 5	Σxy				
09	24 07	RCL 7	Σx	Σxy			
10	24 04	RCL 4	Σy	Σx	Σxy		
11	61	x	Σx Σy	Σxy			
12	24 03	RCL 3	n	Σx Σy	Σxy		
13	71	÷	Σx $\Sigma y/n$	Σxy			
14	41	−	C				$C = \Sigma xy - (\Sigma x\ \Sigma y/n)$
15	24 06	RCL 6	Σx^2	C			
16	24 07	RCL 7	Σx	Σx^2	C		
17	15 02	g x^2	$(\Sigma x)^2$	Σx^2	C		
18	24 03	RCL 3	n	$(\Sigma x)^2$	Σx^2	C	
19	71	÷	$(\Sigma x)^2/n$	Σx^2	C	C	
20	41	−	D	C	C	C	$D = \Sigma x^2 - [(\Sigma x)^2/n]$
21	71	÷	a_1	C	C	C	$a_1 = C/D$
22	23 01	STO 1	a_1	C	C	C	
23	24 07	RCL 7	Σx	a_1	C	C	
24	61	x	a_1 Σx	C	C	C	
25	32	CHS	$-a_1$ Σx	C	C	C	
26	24 04	RCL 4	Σy	$-a_1$ Σx	C	C	
27	51	+	$\Sigma y - a_1$ Σx	C	C	C	
28	24 03	RCL 3	n	$\Sigma y - a_1$ Σx	C	C	
29	71	÷	a_0	C	C	C	$a_0 = \bar{y} - a_1 \bar{x}$
30	23 00	STO 0	a_0	C	C	C	
31	74	R/S	a_0	C	C	C	Parar para apresentar a_0
32	24 01	RCL 1	a_1	a_0	C	C	
33	74	R/S	a_1	a_0	C	C	parar para apresentar a_1
34	21	$x \rightleftarrows y$	a_0	a_1	C	C	
35	22	R↓	a_1	C	C	a_0	
36	61	x	a_1 C	C	a_0	a_0	
37	24 02	RCL 2	Σy^2	a_1 C	C	a_0	
38	24 04	RCL 4	Σy	Σy^2	a_1 C	C	
39	15 02	g x^2	$(\Sigma y)^2$	Σy^2	a_1 C	C	
40	24 03	RCL 3	n	$(\Sigma y)^2$	Σy^2	a_1 C	
41	71	÷	$(\Sigma y)^2/n$	Σy^2	a_1 C	a_1 C	
42	41	−	E	a_1 C	a_1 C	a_1 C	$E = \Sigma y^2 - [(\Sigma y)^2/n]$
43	71	÷	r^2	a_1 C	a_1 C	a_1 C	$r^2 = a_1$ C/E
44	13 00	GTO 00	r^2	a_1 C	a_1 C	a_1 C	
45							
46							
47							
48							
49							

Registros	
R_0	a_0
R_1	a_1
R_2	Σy^2
R_3	n
R_4	Σy
R_5	Σxy
R_6	Σx^2
R_7	Σx

Etapa	Instruções	Dados de Entrada	Teclas				Dados de Saída
1	Gravar o programa						
2	Iniciar		f	REG	f	PRGM	
3	Executar para i = 1, . . . , n:						
	Introduzir o valor x	x_i	↑				
	e o valor y	y_i	R/S				i
4	Computar as constantes		GTO	08	R/S		a_0 *
	de regressão		R/S				a_1 *
5	Computar o coeficiente						
	de determinação		R/S				r^2
6	Para calcular um valor						
	estimado de y, intro-	x	RCL	1	x	RCL	
	duzir o valor x		0	+			$\hat{y}$
7	Executar a etapa 6 tantas						
	vezes quanto desejado						
8	Para novo caso, passar						
	para a etapa 2						
	* A pilha não deverá sofrer						
	qualquer alteração nos						
	pontos assinalados pelos asteriscos.						

Exemplo:

Um excêntrico professor de análise numérica acorda, certa manhã, sentindo-se febril. Uma busca em seu armário para medicamentos revela um termômetro bucal. Lamentavelmente, porém, trata-se de um termômetro centígrado, uma escala com a qual ele ainda não está habituado. Olhando desconsoladamente pela janela do quarto, ele percebe o termômetro de ambiente pendurado no muro. Entretanto, trata-se de um termômetro tão grande que nunca caberia confortavelmente na boca. Que fazer? O professor suspeita que a relação entre as duas escalas seja de $F = a_1 C + a_0$. Se fosse possível obter alguns pares de dados para F e C . . . ele poderia rodar um programa de regressão linear para achar a_1 e a_0! Jogando, pois, os dois termômetros numa pia de água morna, ele lê os seguintes pares de temperatura, à medida que a água se esfria:

C	40.5	38.6	37.9	36.2	35.1	34.6
F	104.5	102	100	97.5	95.5	94

Se a relação entre as duas escalas é, realmente, de $F = a_1 C + a_0$, quais são os valores de a_1 e a_0? Qual o coeficiente de determinação?

Solução:

f PRGM f REG 40.5 ↑ 104.5 R/S	1.00
38.6 ↑ 102 R/S	2.00
37.9 ↑ 100 R/S	3.00
36.2 ↑ 97.5 R/S	4.00
35.1 ↑ 95.5 R/S	5.00
34.6 ↑ 94 R/S	6.00
GTO 0 8 R/S	33.53 INTER
R/S	1.76 SLOPE
R/S	0.99

Com base nos dados acima, $F = 1{,}76\,C + 33{,}53$, com $r^2 = 0{,}99$. (A equação correta, naturalmente, é $F = 1{,}8\,C + 32$.)

Suponhamos que o professor, ao colocar o termômetro centígrado na boca, verifica que está com uma temperatura de 37° C. A temperatura em °F é, então:

37 RCL 1 × RCL 0 + → 98.65°F

O professor verifica então que não há motivo para se preocupar.

Ajustagem Com Curva Exponencial

O programa em pauta computa a ajustagem pelo método dos quadrados mínimos dos n pares de pontos $\{(x_i, y_i),\ i = 1, 2, \ldots, n\}$, onde $y_i > 0$, para uma função exponencial da forma

$$y = a\, e^{bx} \qquad (a > 0).$$

A equação é linearizada para

$$\ln y = \ln a + bx.$$

As seguintes estatísticas são computadas:

1. Coeficientes a, b

$$b = \frac{\Sigma x_i \ln y_i - \frac{1}{n}(\Sigma x_i)(\Sigma \ln y_i)}{\Sigma x_i^2 - \frac{1}{n}(\Sigma x_i)^2}$$

$$a = \exp\left[\frac{\Sigma \ln y_i}{n} - b\,\frac{\Sigma x_i}{n}\right]$$

2. Coeficiente de determinação

$$r^2 = \frac{\left[\Sigma x_i \ln y_i - \frac{1}{n}\Sigma x_i\, \Sigma \ln y_i\right]^2}{\left[\Sigma x_i^2 - \frac{(\Sigma x_i)^2}{n}\right]\left[\Sigma (\ln y_i)^2 - \frac{(\Sigma \ln y_i)^2}{n}\right]}$$

3. Valor estimado de $\hat{y}$ para um x conhecido

$$\hat{y} = a\, e^{bx}$$

Observação:

n é um inteiro positivo e $n \neq 1$.

Visor		Introdução
Linha	Código	
00		
01	14 07	f LN
02	31	↑
03	15 02	g x^2
04	23 51 02	STO + 2
05	22	R↓
06	21	x⇄y
07	25	Σ+
08	13 00	GTO 00
09	24 05	RCL 5
10	24 07	RCL 7
11	24 04	RCL 4
12	61	x
13	24 03	RCL 3
14	71	÷
15	41	–
16	24 06	RCL 6
17	24 07	RCL 7
18	15 02	g x^2
19	24 03	RCL 3
20	71	÷
21	41	–
22	71	÷
23	23 01	STO 1
24	24 07	RCL 7

Visor		Introdução
Linha	Código	
25	61	x
26	32	CHS
27	24 04	RCL 4
28	51	+
29	24 03	RCL 3
30	71	÷
31	15 07	g e^x
32	23 00	STO 0
33	74	R/S
34	24 01	RCL 1
35	74	R/S
36	21	x⇄y
37	22	R↓
38	61	x
39	24 02	RCL 2
40	24 04	RCL 4
41	15 02	g x^2
42	24 03	RCL 3
43	71	÷
44	41	–
45	71	÷
46	13 00	GTO 00
47		
48		
49		

Registros
R_0 a
R_1 b
R_2 $\Sigma (\ln y)^2$
R_3 n
R_4 $\Sigma \ln y$
R_5 $\Sigma x \ln y$
R_6 Σx^2
R_7 Σx

Etapa	Instruções	Dados de Entrada	Teclas				Dados de Saída
1	Gravar o programa						
2	Iniciar		f	REG	f	PRGM	
3	Executar para i = 1, . . . , n:						
	Introduzir o valor x	x_i	↑				
	e o valor y	y_i	R/S				i
4	Computar as constantes		GTO	09	R/S		a*
			R/S				b*
5	Computar o coeficiente						
	de determinação		R/S				r^2
6	Para calcular y, introduzir x	x	RCL	1	x	g	
			e^x	RCL	0	x	$\hat{y}$
7	Executar a etapa 6 tantas						
	vezes quanto desejado						
8	Para novo caso, passar						
	para a etapa 2						
	* A pilha não deverá sofrer qualquer alteração nos						
	pontos assinalados pelos asteriscos.						

Exemplo:

x_i	.72	1.31	1.95	2.58	3.14
y_i	2.16	1.61	1.16	.85	0.5

Solução:

$a = 3{,}45$, $b = -0{,}58$

$y = 3{,}45$ e

$r^2 = 0{,}98$

Para $x = 1{,}5$, $y = 1{,}44$

Ajustagem Com Curva Logarítmica

O programa em pauta ajusta uma curva logarítmica

$$y = a + b \ln x$$

a um conjunto de pontos

$$\{(x_i, y_i), i = 1, 2, ..., n\}$$

onde $x_i > 0$.

As estatísticas de saída são as seguintes:

1. Coeficientes a e b

$$b = \frac{\Sigma y_i \ln x_i - \frac{1}{n} \Sigma \ln x_i \Sigma y_i}{\Sigma (\ln x_i)^2 - \frac{1}{n} (\Sigma \ln x_i)^2}$$

$$a = \frac{1}{n} (\Sigma y_i - b \Sigma \ln x_i)$$

2. Coeficiente de determinação:

$$r^2 = \frac{\left[\Sigma y_i \ln x_i - \frac{1}{n} \Sigma \ln x_i \Sigma y_i\right]^2}{\left[\Sigma (\ln x_i)^2 - \frac{1}{n} (\Sigma \ln x_i)^2\right] \left[\Sigma y_i^2 - \frac{1}{n} (\Sigma y_i)^2\right]}$$

3. Valor estimado de $\hat{y}$ para um x conhecido.

$$\hat{y} = a + b \ln x$$

Observação:

n é um inteiro positivo e $n \neq 1$.

Visor		Intro-dução
Linha	Código	
00		
01	31	↑
02	15 02	g x^2
03	23 51 02	STO + 2
04	22	R↓
05	21	x⇄y
06	14 07	f LN
07	25	Σ+
08	13 00	GTO 00
09	24 05	RCL 5
10	24 07	RCL 7
11	24 04	RCL 4
12	61	x
13	24 03	RCL 3
14	71	÷
15	41	–
16	24 06	RCL 6
17	24 07	RCL 7
18	15 02	g x^2
19	24 03	RCL 3
20	71	÷
21	41	–
22	71	÷
23	23 01	STO 1
24	24 07	RCL 7

Visor		Intro-dução
Linha	Código	
25	61	x
26	32	CHS
27	24 04	RCL 4
28	51	+
29	24 03	RCL 3
30	71	÷
31	23 00	STO 0
32	74	R/S
33	24 01	RCL 1
34	74	R/S
35	21	x⇄y
36	22	R↓
37	61	x
38	24 02	RCL 2
39	24 04	RCL 4
40	15 02	g x^2
41	24 03	RCL 3
42	71	÷
43	41	–
44	71	÷
45	13 00	GTO 00
46		
47		
48		
49		

Registros
R_0 a
R_1 b
R_2 Σy^2
R_3 n
R_4 Σy
R_5 $\Sigma y \ln x$
R_6 $\Sigma \ln x$
R_7 $\Sigma (\ln x)^2$

Etapa	Instruções	Dados de Entrada	Teclas				Dados de Saída
1	Gravar o programa						
2	Iniciar		f	REG	f	PRGM	
3	Executar para i = 1, . . . , n:						
	Introduzir o valor x	x_i	↑				
	e o valor y	y_i	R/S				i
4	Computar as constantes		GTO	09	R/S		a*
			R/S				b*
5	Computar o coeficiente						
	de determinação		R/S				r^2
6	Para calcular $\hat{y}$,	x	f	ln	RCL	1	
	introduzir x		x	RCL	0	+	$\hat{y}$
7	Executar a etapa 6 tantas						
	vezes quanto desejado						
8	Para novo caso, passar para 2						
	* A pilha não deverá sofrer						
	qualquer alteração nos pontos assinalados pelos						
	asteriscos.						

Exemplo:

x_i	3	4	6	10	12
y_i	1.5	9.3	23.4	45.8	60.1

Solução:

$a = -47.02, b = 41.39$

$y = -47.02 + 41.39 \ln x$

$r^2 = 0.98$

Para $x = 8, \hat{y} = 39.06$

Para $x = 14.5, \hat{y} = 63.67$

Ajustagem Com Curva Potencial

O programa em pauta ajusta uma curva potencial

$$y = ax^b \quad (a > 0)$$

a um conjunto de pontos

$$\{(x_i, y_i), i = 1, 2, ..., n\}$$

onde $x_i > 0, y_i > 0$.

Colocando a equação sob a forma:

$$\ln y = b \ln x + \ln a$$

o problema pode ser resolvido por uma regressão linear.

O programa computa:

1. Coeficientes a e b:

$$b = \frac{\Sigma (\ln x_i)(\ln y_i) - \dfrac{(\Sigma \ln x_i)(\Sigma \ln y_i)}{n}}{\Sigma (\ln x_i)^2 - \dfrac{(\Sigma \ln x_i)^2}{n}}$$

$$a = \exp\left[\frac{\Sigma \ln y_i}{n} - b \frac{\Sigma \ln x_i}{n}\right]$$

2. Coeficiente de determinação

$$r^2 = \frac{\left[\Sigma (\ln x_i)(\ln y_i) - \dfrac{(\Sigma \ln x_i)(\Sigma \ln y_i)}{n}\right]^2}{\left[\Sigma (\ln x_i)^2 - \dfrac{(\Sigma \ln x_i)^2}{n}\right]\left[\Sigma (\ln y_i)^2 - \dfrac{(\Sigma \ln y_i)^2}{n}\right]}$$

3. Valor estimado de $\hat{y}$ para um x conhecido

$$\hat{y} = ax^b$$

Observação:

n é um inteiro positivo e $n \neq 1$.

Visor		Introdução
Linha	Código	
00		
01	14 07	f LN
02	31	↑
03	15 02	g x^2
04	23 51 02	STO + 2
05	22	R↓
06	21	x⇄y
07	14 07	f LN
08	25	Σ+
09	13 00	GTO 00
10	24 05	RCL 5
11	24 07	RCL 7
12	24 04	RCL 4
13	61	x
14	24 03	RCL 3
15	71	÷
16	41	–
17	24 06	RCL 6
18	24 07	RCL 7
19	15 02	g x^2
20	24 03	RCL 3
21	71	÷
22	41	–
23	71	÷
24	23 01	STO 1

DISPLAY		Introdução
Linha	Código	
25	24 07	RCL 7
26	61	x
27	32	CHS
28	24 04	RCL 4
29	51	+
30	24 03	RCL 3
31	71	÷
32	15 07	g e^x
33	23 00	STO 0
34	74	R/S
35	24 01	RCL 1
36	74	R/S
37	21	x⇄y
38	22	R↓
39	61	x
40	24 02	RCL 2
41	24 04	RCL 4
42	15 02	g x^2
43	24 03	RCL 3
44	71	÷
45	41	–
46	71	÷
47	13 00	GTO 00
48		
49		

Registros
R_0 a
R_1 b
R_2 $\Sigma (\ln y)^2$
R_3 n
R_4 $\Sigma \ln y$
R_5 $\Sigma (\ln x)(\ln y)$
R_6 $\Sigma (\ln x)^2$
R_7 $\Sigma \ln x$

Etapa	Instruções	Dados de Entrada	Teclas				Dados de Saída
1	Gravar o programa						
2	Iniciar		f	REG	f	PRGM	
3	Para i = 1, . . . , n:						
	Introduzir o valor x	x_i	↑				
	e o valor y	y_i	R/S				i
4	Computar as constantes		GTO	10	R/S		a*
			R/S				b*
5	Computar o coeficiente						
	de determinação		R/S				r^2
6	Introduzir o valor x	x	RCL	1	f	y^x	
	e computar y		RCL	0	x		$\hat{y}$
7	Executar a etapa 6 tantas						
	vezes quanto desejado						
8	Para novo caso, passar						
	para a etapa 2						
	* A pilha não deverá sofrer qualquer alteração nos						
	pontos assinalados pelos asteriscos.						

Exemplo:

x_i	10	12	15	17	20	22	25	27	30	32	35
y_i	0.95	1.05	1.25	1.41	1.73	2.00	2.53	2.98	3.85	4.59	6.02

Solução:

$a = 0{,}03$, $b = 1{,}46$

$y = 0{,}03x^{1.46}$

$r^2 = 0{,}94$

Para $x = 18$, $\hat{y} = 1{,}76$

Para $x = 23$, $\hat{y} = 2{,}52$

Covariação e Coeficiente de Correlação

Para um conjunto de pontos conhecidos $\{(x_i, y_i), i = 1, 2, \ldots, n\}$, a covariação e o coeficiente de correlação são definidos da seguinte maneira:

$$\text{Covariação } s_{xy} = \frac{1}{n-1}\left(\Sigma x_i y_i - \frac{1}{n}\Sigma x_i \Sigma y_i\right)$$

$$\text{ou } s_{xy}' = \frac{1}{n}\left(\Sigma x_i y_i - \frac{1}{n}\Sigma x_i \Sigma y_i\right)$$

$$\text{Coeficiente de correlação } r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$$

onde s_x e s_y são os desvios padrão

$$s_x = \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2/n}{n-1}} \qquad s_y = \sqrt{\frac{\Sigma y_i^2 - (\Sigma y_i)^2/n}{n-1}}$$

Observação:

$-1 \leqslant r \leqslant 1$

Visor		Introdução
Linha	Código	
00		
01	31	↑
02	15 02	g x^2
03	23 51 02	STO + 2
04	22	R↓
05	21	$x \rightleftarrows y$
06	25	Σ+
07	13 00	GTO 00
08	24 05	RCL 5
09	24 04	RCL 4
10	24 07	RCL 7
11	61	x
12	24 03	RCL 3
13	71	÷
14	41	–
15	24 03	RCL 3
16	01	1
17	41	–
18	23 00	STO 0
19	71	÷
20	23 01	STO 1
21	74	R/S
22	24 00	RCL 0
23	61	x
24	24 03	RCL 3

Visor		Introdução
Linha	Código	
25	71	÷
26	74	R/S
27	14 22	f s
28	23 71 01	STO ÷ 1
29	24 02	RCL 2
30	24 04	RCL 4
31	15 02	g x^2
32	24 03	RCL 3
33	71	÷
34	41	–
35	24 00	RCL 0
36	71	÷
37	14 02	f $\sqrt{x}$
38	23 71 01	STO ÷ 1
39	24 01	RCL 1
40	13 00	GTO 00
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

Registros
R_0 n – 1
R_1 Usado
R_2 Σy^2
R_3 n
R_4 Σy
R_5 Σxy
R_6 Σx^2
R_7 Σx

Etapa	Instruções	Dados de Entrada	Teclas				Dados de Saída
1	Gravar o programa						
2	Iniciar		f	PRGM	f	REG	
3	Executar esta etapa para $i = 1, 2, \ldots, n$	x_i	↑				
		y_i	R/S				i
4	Computar covariação Sxy		GTO	08	R/S		s_{xy}
5	Computar S'xy		R/S				s_{xy}'
6	Computar o coeficiente de correlação		R/S				r
7	Para novo caso, passar para a etapa 2						

Exemplo:

x_i	26	30	44	50	62	68	74
y_i	92	85	78	81	54	51	40

Solução:

$s_{xy} = -354.14$

$s_{xy}' = -303.55$

$r = -0.96$

Momentos e Assimetria

O programa em pauta computa os seguintes parâmetros estatísticos para um conjunto de determinados dados $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$:

Primeiro momento $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$

Segundo momento $m_2 = \frac{1}{n} \Sigma x_i^2 - \bar{x}^2$

Terceiro momento $m_3 = \frac{1}{n} \Sigma x_i^3 - \frac{3}{n} \bar{x} \Sigma x_i^2 + 2\bar{x}^3$

Coeficiente de Assimetria

$$\gamma_1 = \frac{m_3}{m_2^{3/2}}$$

Visor		Introdução
Linha	Código	
00		
01	31	↑
02	15 02	g x^2
03	25	Σ+
04	13 00	GTO 00
05	24 04	RCL 4
06	24 03	RCL 3
07	71	÷
08	23 02	STO 2
09	74	R/S
10	24 07	RCL 7
11	24 03	RCL 3
12	71	÷
13	24 02	RCL 2
14	15 02	g x^2
15	41	–
16	23 01	STO 1
17	74	R/S
18	24 05	RCL 5
19	24 03	RCL 3
20	71	÷
21	24 07	RCL 7
22	24 02	RCL 2
23	61	x
24	24 03	RCL 3

Visor		Introdução
Linha	Código	
25	71	÷
26	03	3
27	61	x
28	41	–
29	24 02	RCL 2
30	31	↑
31	15 02	g x^2
32	61	x
33	02	2
34	61	x
35	51	+
36	23 00	STO 0
37	74	R/S
38	24 00	RCL 0
39	24 01	RCL 1
40	01	1
41	73	·
42	05	5
43	14 03	f y^x
44	71	÷
45	13 00	GTO 00
46		
47		
48		
49		

Registros
R_0 m_3
R_1 m_2
R_2 $\bar{x}$
R_3 n
R_4 Σ x
R_5 Σ x^3
R_6 Σ x^4
R_7 Σ x^2

Etapa	Instruções	Dados de Entrada	Teclas				Dados de Saída
1	Gravar o programa						
2	Iniciar		f	PRGM	f	REG	
3	Executar para i = 1,2, . . . , n:						
	Introduzir o valor x	x_i	R/S				i
4	Anular os dados errôneos	x_k	↑	g	x^2	f	
			$\Sigma-$				
5	Computar a média		GTO	05	R/S		$\bar{x}$
6	Computar o segundo e o						
	terceiro momentos		R/S				m_2
			R/S				m_3
7	Computar o coeficiente						
	de assimetria		R/S				γ_1
8	Para novo caso, passar para 2						

Exemplo:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	2.1	3.5	4.2	6.5	4.1	3.6	5.3	3.7	4.9

Solução:

$\bar{x} = 4.21$

$m_2 = 1.39$

$m_3 = 0.39$

$\gamma_1 = 0.24$

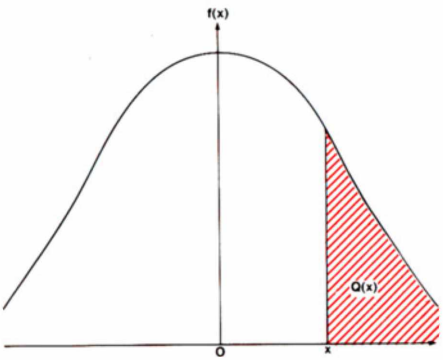
Distribuição Normal

A função de densidade normal é

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

A área da parte superior
da cauda é

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt .$$



Para $x \geqslant 0$, utiliza-se uma aproximação polinomial para o cálculo de $Q(x)$:

$$Q(x) = f(x)\,(b_1\, t + b_2\, t^2 + b_3\, t^3 + b_4\, t^4 + b_5\, t^5) + \epsilon(x)$$

onde $|\epsilon(x)| < 7.5 \times 10^{-8}$

$$t = \frac{1}{1 + rx}, \quad r = 0.2316419$$

$b_1 = .31938153$, $b_2 = -.356563782$

$b_3 = 1.781477937$, $b_4 = -1.821255978$

$b_5 = 1.330274429$

Observação:

O programa em apreço é somente aplicável a $x \geqslant 0$. As equações $f(-x) = f(x)$, $Q(-x) = 1 - Q(x)$, onde $x \geqslant 0$, podem ser empregadas par achar f e Q no caso de números negativos.

Referência:

Abramowitz e Stegun, "Handbook of Mathematical Functions," National Bureau of Standards, 1968.

Visor		Introdução
Linha	Código	
00		
01	31	↑
02	23 06	STO 6
03	61	x
04	02	2
05	71	÷
06	32	CHS
07	15 07	g e^x
08	15 73	g π
09	02	2
10	61	x
11	14 02	f $\sqrt{x}$
12	71	÷
13	23 07	STO 7
14	74	R/S
15	24 00	RCL 0
16	24 06	RCL 6
17	61	x
18	01	1
19	51	+
20	15 22	g 1/x
21	31	↑
22	31	↑
23	31	↑
24	24 05	RCL 5

Visor		Introdução
Linha	Código	
25	61	x
26	24 04	RCL 4
27	51	+
28	61	x
29	24 03	RCL 3
30	51	+
31	61	x
32	24 02	RCL 2
33	51	+
34	61	x
35	24 01	RCL 1
36	51	+
37	61	x
38	24 07	RCL 7
39	61	x
40	13 00	GTO 00
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

Registros
R_0 r
R_1 b_1
R_2 b_2
R_3 b_3
R_4 b_4
R_5 b_5
R_6 x
R_7 f(x)

Etapa	Instruções	Dados de Entrada	Teclas				Dados de Saída
1	Gravar o programa						
2	Iniciar		f	PRGM			
3	Armazenar as constantes	r	STO	0			
		b_1	STO	1			
		b_2	STO	2			
		b_3	STO	3			
		b_4	STO	4			
		b_5	STO	5			
4	Introduzir x e computar f(x)	x	R/S				f(x)
5	Computar Q (x)		R/S				Q(x)
6	Para novo caso, passa para 4						

Exemplos:

1. $x = 1{,}18$

2. $x = 2{,}28$

Soluções:

1. $f(x) = 0{,}20$
   $Q(x) = 0{,}12$

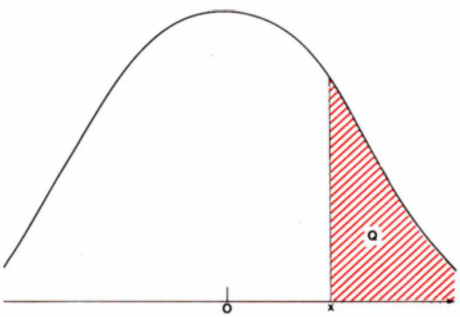
2. $f(x) = 0{,}03$
   $Q(x) = 0{,}01$

Inversa da Distribuição Normal

O programa em pauta determina o valor de x, de modo que

$$Q = \int_x^{\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, dt$$

onde Q é dado e $0 < Q \leqslant 0{,}5$.



Utiliza-se a seguinte aproximação racional:

$$x = t - \frac{c_0 + c_1\, t + c_2\, t^2}{1 + d_1\, t + d_2\, t^2 + d_3\, t^3} + \epsilon(Q)$$

onde $|\epsilon(Q)| < 4.5 \times 10^{-4}$

$$t = \sqrt{\ln \frac{1}{Q^2}}$$

$c_0 = 2.515517$ $\quad d_1 = 1.432788$

$c_1 = 0.802853$ $\quad d_2 = 0.189269$

$c_2 = 0.010328$ $\quad d_3 = 0.001308$

Referência:

Abramowitz and Stegun, "Handbook of Mathematical Functions," National Bureau of Standards, 1968.

Visor		Intro-dução
Linha	Código	
00		
01	31	↑
02	61	x
03	15 22	g 1/x
04	14 07	f LN
05	14 02	$f\sqrt{x}$
06	23 06	STO 6
07	31	↑
08	31	↑
09	31	↑
10	24 05	RCL 5
11	61	x
12	24 04	RCL 4
13	51	+
14	61	x
15	24 03	RCL 3
16	51	+
17	61	x
18	01	1
19	51	+
20	23 07	STO 7
21	34	CLX
22	24 02	RCL 2
23	61	x
24	24 01	RCL 1

Visor		Intro-dução
Linha	Código	
25	51	+
26	61	x
27	24 00	RCL 0
28	51	+
29	24 07	RCL 7
30	71	÷
31	41	–
32	13 00	GTO 00
33		
34		
35		
36		
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

Registros
R_0 c_0
R_1 c_1
R_2 c_2
R_3 d_1
R_4 d_2
R_5 d_3
R_6 t
R_7 $1 + d_1 t + d_2 t^2 + d_3 t^3$

Etapa	Instruções	Dados de Entrada	Teclas				Dados de Saída
1	Gravar o programa						
2	Iniciar		f	PRGM			
3	Armazenar as constantes	c_0	STO	0			
		c_1	STO	1			
		c_2	STO	2			
		d_1	STO	3			
		d_2	STO	4			
		d_3	STO	5			
4	Introduzir Q	Q	R/S				
5	Para novo caso, passar para 4						

Exemplos:

1. Q = 0.12
2. Q = 0.05

Soluções:

1. x = 1.18
2. x = 1.65

Fatorial

O programa em pauta computa os fatoriais de números positivos inteiros de 2 a 69.

$$n! = n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,(2)\,(1)$$

Observações:

1. Para valores elevados de n, o programa rodará por alguns segundos, até um máximo de 20 segundos no caso de n = 69.

2. O programa não verifica os valores introduzidos e, no caso de valores de n <2, n> 69 ou n fracionário, dará respostas incorretas.

Visor		Introdução
Linha	Código	
00		
01	01	1
02	23 00	STO 0
03	21	x⇄y
04	23 61 00	STO x 0
05	01	1
06	41	-
07	14 61	f x≠y
08	13 04	GTO 04
09	24 00	RCL 0
10	13 00	GTO 00
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		
21		
22		
23		
24		

Visor		Introdução
Linha	Código	
25		
26		
27		
28		
29		
30		
31		
32		
33		
34		
35		
36		
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

Registros
R_0 Usado
R_1
R_2
R_3
R_4
R_5
R_6
R_7

Etapa	Instruções	Dados de Entrada	Teclas				Dados de Saída
1	Gravar o programa						
2	Registrar n ($2 \leqslant n \leqslant 69$)	n					
3	Iniciar		f	PRGM	R/S		n!
4	Para novo caso, passar para 2						

Exemplos:

1. 5! = 120.00

2. 10! = 3628800.00

Arranjo

Um arranjo é um subconjunto ordenado de um conjunto de distintos objetos. O número de arranjos possíveis, cada um dos quais contendo n objetos, formados a partir de uma coleção de m distintos objetos, é dado por

$$ {}_mA_n = \frac{m!}{(m-n)!} = m(m-1)\ldots(m-n+1) $$

onde m, n são inteiros e $0 \leqslant n \leqslant m$.

Observações:

1. ${}_mA_n$ também pode ser simbolizado por $A(m, n)$, $(m)_n$ ou ${}_nA_m$.
2. ${}_mA_0 = 1$, ${}_mA_1 = m$, ${}_mA_m = m!$

Visor		Introdução
Linha	Código	
00		
01	24 00	RCL 0
02	24 00	RCL 0
03	24 01	RCL 1
04	15 71	g x=0
05	13 29	GTO 29
06	14 71	f x=y
07	13 31	GTO 31
08	14 51	f x≥y
09	13 39	GTO 39
10	01	1
11	14 71	f x=y
12	13 41	GTO 41
13	22	R↓
14	41	–
15	01	1
16	51	+
17	61	x
18	14 73	f LASTx
19	24 00	RCL 0
20	01	1
21	41	–
22	14 71	f x=y
23	13 26	GTO 26
24	22	R↓

Visor		Introdução
Linha	Código	
25	13 15	GTO 15
26	22	R↓
27	22	R↓
28	13 00	GTO 00
29	01	1
30	13 00	GTO 00
31	01	1
32	41	–
33	15 71	g x=0
34	13 37	GTO 37
35	23 61 00	STO x 0
36	13 31	GTO 31
37	24 00	RCL 0
38	13 00	GTO 00
39	00	0
40	71	÷
41	22	R↓
42	22	R↓
43	13 00	GTO 00
44		
45		
46		
47		
48		
49		

Registros
R_0 m
R_1 n
R_2
R_3
R_4
R_5
R_6
R_7

Etapa	Instruções	Dados de Entrada	Teclas				Dados de Saída
1	Gravar o programa						
2	Armazenar m, n	m	STO	0			
		n	STO	1			
3	Computar os arranjos		f	PRGM	R/S		$_{m}A_{n}$
4	Para novo caso, passar para 2						

Exemplos:

1. $_{43}A_{3} = 74046{,}00$
2. $_{73}A_{4} = 26122320{,}00$

Combinação

Uma combinação é uma seleção de um ou mais objetos, de um conjunto de distintos objetos, sem consideração à sua ordem. O número de possíveis combinações, cada uma das quais contendo n objetos, formadas a partir de uma coleção de m objetos distintos, é dado por

$$ {}_mC_n = \frac{m!}{(m-n)!\,n!} = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n} $$

onde m, n são inteiros e $0 \leqslant n \leqslant m$.

O programa computa ${}_mC_n$ empregando o seguinte algoritmo:

1. Se $n \leqslant m - n$

$$ {}_mC_n = \frac{m-n+1}{1} \cdot \frac{m-n+2}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{m}{n} . $$

2. Se $n > m - n$, o programa computa ${}_mC_{m-n}$

Observações:

1. ${}_mC_m$, que também é chamado o coeficiente binomial, pode ser representado por

   C_n^m , C(m,n), or $\binom{m}{n}$.

2. ${}_mC_n = {}_mC_{m-n}$

3. ${}_mC_0 = {}_mC_m = 1$

4. ${}_mC_1 = {}_mC_{m-1} = m$

Visor		Introdução
Linha	Código	
00		
01	41	–
02	14 73	f LASTx
03	14 41	f x<y
04	21	x≷y
05	23 00	STO 0
06	01	1
07	23 01	STO 1
08	51	+
09	23 02	STO 2
10	22	R↓
11	15 71	g x=0
12	13 30	GTO 30
13	01	1
14	24 01	RCL 1
15	51	+
16	23 01	STO 1
17	21	x≷y
18	14 51	f x≥y
19	13 22	GTO 22
20	24 02	RCL 2
21	13 00	GTO 00
22	22	x≷y
23	24 00	RCL 0
24	51	+

Visor		Introdução
Linha	Código	
25	24 01	RCL 1
26	71	÷
27	23 61 02	STO x 2
28	22	R↓
29	13 13	GTO 13
30	01	1
31	13 00	GTO 00
32		
33		
34		
35		
36		
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

REGISTERS
R_0 max (n, m – n)
R_1 Usado
R_2 Usado
R_3
R_4
R_5
R_6
R_7

Etapa	Instruções	Dados de Entrada	Teclas				Dados de Saída
1	Gravar o programa						
2	Registrar m, n	m	↑				
		n	f	PRGM	R/S	-	$_mC_n$
3	Para novo caso, passar para 2						

Exemplos:

1. $_{73}C_4 = 1088430.00$

2. $_{43}C_3 = 12341.00$

Gerador de Número Aleatório

O programa em pauta fornece números aleatórios u_i uniformemente distribuídos na gama de

$$0 \leqslant u_i \leqslant 1$$

empregando a fórmula seguinte:

$$u_i = \text{parte fracionária de } [(\pi + u_{i-1})^5].$$

O usuário do programa terá que especificar um valor inicial de u_o (a "semente" da sequência) sujeito à condição:

$$0 \leqslant u_0 \leqslant 1.$$

Visor		Introdução
Linha	Código	
00		
01	15 73	g π
02	24 00	RCL 0
03	51	+
04	05	5
05	14 03	f y^x
06	15 01	g FRAC
07	23 00	STO 0
08	13 00	GTO 00
09		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		
21		
22		
23		
24		

Visor		Introdução
Linha	Código	
25		
26		
27		
28		
29		
30		
31		
32		
33		
34		
35		
36		
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

Registros
R_0 u_i
R_1
R_2
R_3
R_4
R_5
R_6
R_7

Etapa	Instruções	Dados de Entrada	Teclas				Dados de Saída
1	Gravar o programa						
2	Armazenar a semente	u_0	STO	0	f	PRGM	
3	Gerar números aleatórios		R/S				u_i
4	Repetir a etapa 3 tantas						
	vezes quanto desejado						
5	Para novo caso, passar para 2						

Exemplo:

Achar a sequência de números aleatórios gerados pela semente 0,192743568.

Solução:

0,14; 0,76; 0,15; 0,35; 0,62; 0,54; 0,62; 0,91; 0,48; 0,24; . . . .

Teste Chi-Quadrado

Este programa calcula o parâmetro estatístico χ^2, com a finalidade de testar a excelência de ajustagem, pela equação

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

onde O_i = frequência observada
E_i = frequência esperada

A estatística χ^2 mede o grau de concordância entre as frequências observadas e as frequências esperadas.

Observações:

1. Na aplicação do teste em apreço a um conjunto de dados conhecidos, é possível que a combinação de algumas classes seja necessária, a fim de garantir que cada frequência esperada não seja demasiadamente pequena (digamos, não inferior a 5).

2. Se todas as frequências E_i são idênticas a algum valor E, então o valor E deverá ser computado antecipadamente como $E = \frac{\Sigma O_i}{n}$, e devidamente introduzido à altura de cada etapa como a frequência esperada E_i.

Visor		Introdução
Linha	Código	
00		
01	00	0
02	23 00	STO 0
03	23 01	STO 1
04	74	R/S
05	23 02	STO 2
06	41	–
07	15 02	g x^2
08	24 02	RCL 2
09	71	÷
10	23 51 01	STO + 1
11	24 00	RCL 0
12	01	1
13	51	+
14	23 00	STO 0
15	13 04	GTO 04
16	23 02	STO 2
17	41	–
18	15 02	g x^2
19	24 02	RCL 2
20	71	÷
21	23 41 01	STO – 1
22	24 00	RCL 0
23	01	1
24	41	–

Visor		Introdução
Linha	Código	
25	23 00	STO 0
26	13 04	GTO 04
27		
28		
29		
30		
31		
32		
33		
34		
35		
36		
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

Registros
R_0 n
R_1 χ^2
R_2 E_i
R_3
R_4
R_5
R_6
R_7

Etapa	Instruções	Dados de Entrada	Teclas				Dados de Saída
1	Gravar o programa						
2	Iniciar		f	PRGM	R/S	-	0.00
3	Executar para i = 1, . . . , n:						
	Introduzir as frequências						
	observadas e esperadas	O_i	↑				
		E_i	R/S				i
4	Anular os dados errôneos	O_k	↑				
		E_k	GTO	16	R/S		
5	Apresentar χ^2		RCL	1			χ^2
6	Para novo caso, passar para 2						

Exemplo:

O_i	8	50	47	56	5	14
E_i	9.6	46.75	51.85	54.4	8.25	9.15

Solução:

$\chi^2 = 4{,}84$

Estatística t Para Pares de Observações

Dado um conjunto de observações emparelhadas, provenientes de duas populações normais caracterizadas por médias μ_1 e μ_2 (incógnitas)

x_i	x_1	x_2	...	x_n
y_i	y_1	y_2	...	y_n

sejam

$$D_i = x_i - y_i$$

$$\overline{D} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} D_i$$

$$s_D = \sqrt{\frac{\Sigma D_i^2 - \frac{1}{n}(\Sigma D_i)^2}{n-1}}$$

$$s_{\overline{D}} = \frac{s_D}{\sqrt{n}}$$

A estatística de teste

$$t = \frac{\overline{D}}{s_{\overline{D}}},$$

a qual é caracterizada por $n - 1$ graus de liberdade (gl), pode ser empregada para testar a hipótese:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 .$$

Visor		Introdução
Linha	Código	
00		
01	41	–
02	25	Σ+
03	13 00	GTO 00
04	14 22	f s
05	24 03	RCL 3
06	14 02	f $\sqrt{x}$
07	71	÷
08	14 21	f $\bar{x}$
09	21	x⇄y
10	71	÷
11	74	R/S
12	24 03	RCL 3
13	01	1
14	41	–
15	13 00	GTO 00
16		
17		
18		
19		
20		
21		
22		
23		
24		

Visor		Introdução
Linha	Código	
25		
26		
27		
28		
29		
30		
31		
32		
33		
34		
35		
36		
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

Registros
R_0
R_1
R_2
R_3 n
R_4 Usado
R_5 Usado
R_6 ΣD_i
R_7 ΣD_i^2

Etapa	Instruções	Dados de Entrada	Teclas				Dados de Saída
1	Gravar o programa						
2	Iniciar		f	REG	f	PRGM	
3	Executar para i = 1, . . . , n;						
	Introduzir os pares de	x_i	↑				
	observações	y_i	R/S				i
4	Retirar os dados errôneos	x_k	↑				
		y_k	–	f	Σ–		
5	Computar t e gl		GTO	04	R/S		t
			R/S				gl
6	Para novo caso, passar para 2						

Exemplo:

x_i	14	17.5	17	17.5	15.4
y_i	17	20.7	21.6	20.9	17.2

Solução:

$t = -7{,}16$

$gl = 4{,}00$

Estatística t Para Duas Médias

Suponhamos que $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}\}$ e $\{y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}\}$ sejam amostras independentes, ao acaso, de duas populações normais, caracterizadas por médias μ_1 e μ_2 (incógnitas) e idênticas variâncias desconhecidas σ^2.

Desejamos testar a hipótese:

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = D$$

onde D é um número dado.

Definir:

$$\bar{x} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} x_i$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} y_i$$

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y} - D}{\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \sqrt{\frac{\Sigma x_i^2 - n_1 \bar{x}^2 + \Sigma y_i^2 - n_2 \bar{y}^2}{n_1 + n_2 - 2}}}$$

Podemos empregar esta estatística t, a qual é caracterizada pela distribuição t com $n_1 + n_2 - 2$ graus de liberdade, para testar a hipótese H_0.

Visor		Intro-dução
Linha	Código	
00		
01	24 03	RCL 3
02	23 00	STO 0
03	24 06	RCL 6
04	23 01	STO 1
05	14 21	f $\bar{x}$
06	23 02	STO 2
07	34	CLX
08	23 03	STO 3
09	23 06	STO 6
10	23 07	STO 7
11	74	R/S
12	31	↑
13	14 21	f $\bar{x}$
14	51	+
15	24 02	RCL 2
16	21	$x \rightleftarrows y$
17	41	–
18	24 00	RCL 0
19	15 22	g 1/x
20	24 03	RCL 3
21	15 22	g 1/x
22	51	+
23	14 02	f $\sqrt{x}$
24	71	÷

Visor		Intro-dução
Linha	Código	
25	24 01	RCL 1
26	24 02	RCL 2
27	15 02	g x^2
28	24 00	RCL 0
29	61	x
30	41	–
31	24 06	RCL 6
32	51	+
33	14 21	f $\bar{x}$
34	15 02	g x^2
35	24 03	RCL 3
36	61	x
37	41	–
38	24 00	RCL 0
39	24 03	RCL 3
40	51	+
41	02	2
42	41	–
43	71	÷
44	14 02	f $\sqrt{x}$
45	71	÷
46	13 00	GTO 00
47		
48		
49		

Registros
R_0 n_1
R_1 Σx^2
R_2 $\bar{x}$
R_3 n_2
R_4 Usado
R_5 Usado
R_6 Σy^2
R_7 Σy

Etapa	Instruções	Dados de Entrada	Teclas				Dados de Saída
1	Gravar o programa						
2	Valores para x		f	REG			
3	Executar para $i = 1, \ldots, n_1$;						
	Introduzir o valor x	x_i	$\Sigma+$				i
4	Valores para y		f	PRGM	R/S		0.00
5	Executar para $i = 1, \ldots, n_2$;						
	Introduzir o valor y	y_i	$\Sigma+$				i
6	Introduzir D e computar t	D	R/S				t
7	Para achar as médias dos						
	valores x e y		RCL	2			$\bar{x}$
			f	$\bar{x}$			$\bar{y}$
8	Para novo caso, passar para 2						

Exemplo:

x: 79, 84, 108, 114, 120, 103, 122, 120

y: 91, 103, 90, 113, 108, 87, 100, 80, 99, 54

$n_1 = 8$

$n_2 = 10$

$D = 0$ (i.e., $H_0: \mu_1 = \mu_2$)

Solução:

$t = 1{,}73$

$\overline{x} = 106{,}25$

$\overline{y} = 92{,}50$

Teste da Média de Uma Amostra

Para uma população com distribuição normal $(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ de variância conhecida σ^2, um teste para a hipótese:

$$H_0: \text{ média } \quad \mu = \mu_0$$

é baseado na estatística z (que tem uma distribuição normal padrão).

$$z = \frac{\sqrt{n}\ (\bar{x} - \mu_0)}{\sigma}.$$

Se a variância σ^2 for desconhecida, então a estatística:

$$t = \frac{\sqrt{n}\ (\bar{x} - \mu_0)}{s}$$

é utilizada. Essa estatística t tem uma distribuição t com n — 1 graus de liberdade. x e s são a média e o desvio padrão da amostra.

Visor		Introdução
Linha	Código	
00		
01	14 21	f $\bar{x}$
02	21	x⇄y
03	41	–
04	24 03	RCL 3
05	14 02	f $\sqrt{x}$
06	61	x
07	23 00	STO 0
08	34	CLX
09	74	R/S
10	24 00	RCL 0
11	14 22	f s
12	71	÷
13	74	R/S
14	24 00	RCL 0
15	21	x⇄y
16	71	÷
17	13 00	GTO 00
18		
19		
20		
21		
22		
23		
24		

Visor		Introdução
Linha	Código	
25		
26		
27		
28		
29		
30		
31		
32		
33		
34		
35		
36		
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

Registros
R_0 $\sqrt{n}\ (\bar{x} - \mu_0)$
R_1
R_2
R_3 n
R_4 Usado
R_5 Usado
R_6 Σx
R_7 Σx^2

Etapa	Instruções	Dados de Entrada	Teclas				Dados de Saída
1	Gravar o programa						
2	Iniciar		f	REG			
3	Para i = 1, 2, . . . , n:						
	Introduzir x_i	x_i	$\Sigma+$				i
4	Introduzir μ_0	μ_0	f	PRGM	R/S		0.00
5	Calcular t		GTO	10	R/S		t
	ou						
5	Introduzir σ e calcular z	σ	GTO	14	R/S		z
6	Para novo caso, voltar à etapa 2						

Exemplo:

Suponha que a média do conjunto abaixo seja $\mu_0 = 2$:

$\{2.73, 0.45, 2.52, 1.19, 3.51, 2.75, 1.79, 1.83, 1, 0.87, 1.9, 1.62, 1.74, 1.92, 1.24, 2.68\}$

Solução:

teste com estatística $t = -0{,}69$

ou $z = -0{,}57$ para $\sigma = 1{,}0$

CAPÍTULO VII
TOPOGRAFIA

Linha Poligonal

Uma linha poligonal é uma série de segmentos consecutivos com comprimentos e ângulos bem definidos. A linha poligonal é utilizada em topografia para definir fronteiras, traçados de estrada e muitas outras aplicações. Para a medição dos ângulos e distâncias ao longo de uma poligonal utilizam-se o trânsito e a trena.

O agrimensor inicia seu trabalho definindo um ponto de partida e uma direção de referência. A direção de uma linha partindo deste ponto é definida pelo ângulo que a luneta do trânsito deve girar para que seu eixo coincida com a linha em questão. Mede-se, então, ao longo desta linha a distância até um ponto escolhido. As coordenadas deste ponto podem ser assim calculadas através do ângulo e da distância medidas. O trânsito é então colocado neste novo ponto, a linha de referência passa a ser esta última linha e o processo continua.

Para rodar este programa, o usuário deve introduzir a latitude e a longitude do ponto de partida, o azimute de referência e, ainda, a direção e a distância de cada ponto ao seu consecutivo ao longo da poligonal. A direção pode ser introduzida como uma defexão à direita ou à esquerda ou, então, como um ângulo à direita ou à esquerda. A distância pode ser introduzida como uma distância horizontal ou, então, como uma distância inclinada com ângulo zenital.

Equações:

$$\text{Dist H} = \text{Dist I sen (ang Zntl)}$$

$$N_{i+1} = N_i + \text{Dist H cos Az}$$

$$E_{i+1} = E_i + \text{Dist H sen Az}$$

$$\text{Área} = \tfrac{1}{2}[(N_2 + N_1)(E_2 - E_1) + (N_3 + N_2)(E_3 - E_2) + \ldots + (N_n + N_1)(E_1 - E_n)]$$

onde N, E = latitude e longitude (relativa) de um ponto
Índice i = associado ao ponto atual
Índice n = associado ao último ponto visitado
Índices numéricos = associados à ordem dos pontos
Az = Azimute de um caminhamento
Dist H = Distância horizontal
Dist I = Distância inclinada
Ang Zntl = Ângulo zenital

Observações:

1. A área de um polígono será calculada com pouca precisão quando a poligonal for muito grande. Neste caso, o usuário poderá utilizar o programa seguinte após obter os ângulos e distâncias a partir deste programa.
2. Todas as introduções e apresentações de ângulo são no formato graus, minutos e segundos (G.MS).

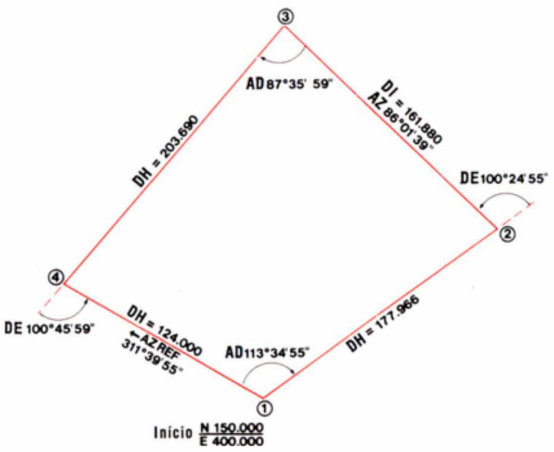
Visor		Introdução	X	Y	Z	T	Observações
Linha	Código						
00							
01	15 00	g →H	Az Ref				Converter para graus
02	01	1	1	Az Ref			decimais
03	08	8	18	Az Ref			
04	00	0	180	Az Ref			
05	51	+	180 + Az				
06	23 00	STO 0	180 + Az				
07	24 01	RCL 1	N_1	180 + Az			
08	23 05	STO 5	N_1	180 + Az			Valor de "N anterior"
09	00	0	0	N_1	180 + Az		Limpar R_3 e R_4 para
10	23 03	STO 3	0	N_1	180 + Az		acumulação
11	23 04	STO 4	0	N_1	180 + Az		
12	74	R/S	0	N_1	180 + Az		
13	15 00	g →H	ângulo				Converter para graus
14	01	1	1	ângulo			decimais
15	08	8	18	ângulo			
16	00	0	180	ângulo			
17	51	+	180 + Ang				
18	14 00	f →H.MS	G.MS				
19	15 00	g →H	Defl				Deflexão vem aqui
20	24 00	RCL 0	Az	Defl			
21	51	+	Az + Defl				Achar novo azimute
22	23 00	STO 0	Az_i				
23	14 00	f →H.MS	Az_i				Converter para G.MS
24	74	R/S	Az_i				para apresentação
25	13 29	GTO 29	Dist H				
26	21	x⇄y	Ang Zn	Dist I			
27	14 04	f SIN	sen Zn	Dist I			
28	61	x	Dist H				Dist H = (sen Zn) (Dist I)
29	23 51 03	STO + 3	Dist H				Acumular Dist H
30	24 00	RCL 0	Az	Dist H			
31	21	x⇄y	Dist H	Az			
32	14 09	f →R	ΔN	ΔE			
33	23 51 01	STO + 1	ΔN	ΔE			ΔN = (Dist H) (cos Az)
34	21	x⇄y	ΔE	ΔN			
35	23 51 02	STO + 2	ΔE	ΔN			ΔE = (Dist H) (sen Az)
36	24 05	RCL 5	N_{i-1}	ΔE	ΔN		
37	24 01	RCL 1	N_i	N_{i-1}	ΔE	ΔN	
38	23 05	STO 5	N_i	N_{i-1}	ΔE	ΔN	Atualizar "N anterior"
39	51	+	$(N_i + N_{i-1})$	ΔE	ΔN		
40	61	x	ΔA	ΔN			$\Delta A = (N_i + N_{i-1})\,\Delta E$
41	02	2	2	ΔA	ΔN		
42	71	÷	1/2 ΔA	ΔN			
43	23 51 04	STO + 4	1/2 ΔA	ΔN			Acumular a área
44	24 01	RCL 1	N_i	1/2 ΔA	ΔN		
45	74	R/S	N_i	1/2 ΔA	ΔN		Apresentar latitude
46	24 02	RCL 2	E_i	N_i	1/2 ΔA	ΔN	
47	13 12	GTO 12	E_i	N_i	1/2 ΔA	ΔN	Apresentar longitude
48							
49							

Registros	
R_0	Az
R_1	atual N
R_2	atual E
R_3	Σ Dist H
R_4	Área
R_5	Prévio N
R_6	
R_7	

Etapa	Instruções	Dados de Entrada	Teclas				Dados de Saída
1	Gravar o programa						
2	Introduzir coordenadas						
	do ponto de partida	N_1	STO	1			
		E_1	STO	2			
3	Introduzir azimute de referência	Az Ref, G.MS	f	PRGM	R/S		0.00
4a.	Se ângulo à direita	AD, G.MS	R/S				Azi, G.MS
4b.	Se ângulo à esquerda	AE, G.MS	CHS	R/S			Azi, G.MS
4c.	Se deflexão à direita	DD, G.MS	GTO	19	R/S		Azi, G.MS
4d.	Se deflexão à esquerda	DE, G.MS	CHS	GTO	19	R/S	Azi, G.MS
5a.	Se distância horizontal	Dist H	R/S				N_i
			R/S				E_i
5b.	Se distância inclinada						
	introduza ângulo zenital	Ang Zn, G.MS	↑				
	e distância inclinada	Dist I	GTO	26	R/S		N_i
			R/S				E_i
6	Repetir as etapas 4 e 5						
	para lados sucessivos						
7	Apresentar a distância total						
	horizontal		RCL	3			Σ Dist H
8	Apresentar a área da figura						
	fechada (desconsiderar o sinal)		RCL	4			Área

Exemplo:

O diagrama abaixo ilustra as medidas tomadas de uma linha poligonal. Achar as coordenadas dos pontos 2, 3 e 4, a distância horizontal total levantada por caminhamento e a área da figura.



Solução:

150 STO 1 400 STO 2 311.3955 f PRGM R/S → 0.00

113.3455 R/S 177.966 R/S → 224.515 (N_2)

R/S → 561.615 (E_2)

100.2455 CHS GTO 1 9 R/S 86.0139 ↑ 161.880 GTO

2 6 R/S → 356.526 (N_3)

R/S → 468.601 (E_3)

87.3559 R/S 203.690 R/S → 232.335 (N_4)

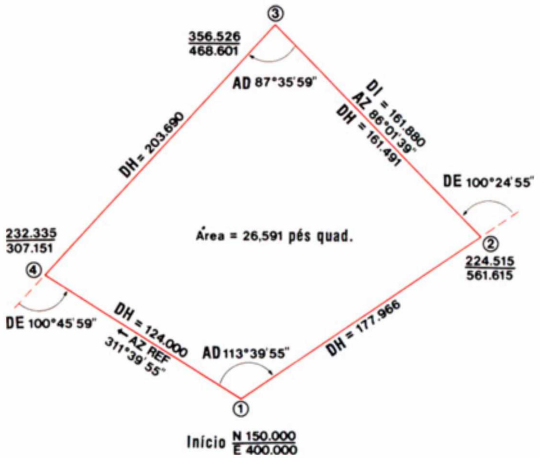
R/S → 307.151 (E_4)

100.4559 CHS GTO 1 9 R/S 124.0 R/S → 149.903 (N_1)

R/S → 399.784 (E_1)

RCL 3 → 667.144 (Σ Dist H)

RCL 4 → 26590.68 (Área)



Coordenadas finais calculadas $\frac{\text{N} = 149.903}{\text{E} = 399.784}$

Área Pela Distância Meridional Dupla

Este programa calcula a área de uma poligonal fechada a partir da direção e comprimento dos seus lados. É, de um modo geral, um método mais preciso do que outros que calculam a área a partir das coordenadas da figura em questão:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \sum_{i} \text{DMD}_i \times \text{Latitude}_i$$

$$\text{DMD}_i = \text{DMD}_{i-1} + \text{Variação}_{i-1} + \text{Variação}_i$$

onde

$$\text{Variação}_i = \text{Dist}_i \text{ seno } \text{Az}_i \qquad \text{Latitude}_i = \text{Dist}_i \text{ co-seno } \text{Az}_i$$

Observação:

Os ângulos são introduzidos dando-se a direção e o código do quadrante. O código é 1 para nordeste, 2 para sudeste, 3 para sudoeste e 4 para noroeste.

Visor		Introdução
Linha	Código	
00		
01	15 00	g →H
02	74	R/S
03	31	↑
04	02	2
05	71	÷
06	31	↑
07	14 01	f INT
08	14 61	f x = y
09	13 15	GTO 15
10	22	R↓
11	22	R↓
12	32	CHS
13	22	R↓
14	22	R↓
15	22	R↓
16	14 01	f INT
17	01	1
18	08	8
19	00	0
20	61	x
21	51	+
22	23 00	STO 0
23	14 00	f→H.MS
24	74	R/S

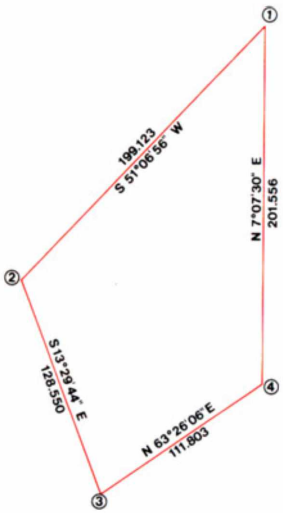
Visor		Introdução
Linha	Código	
25	24 00	RCL 0
26	21	x⇄y
27	14 09	f→R
28	21	x⇄y
29	24 02	RCL 2
30	21	x⇄y
31	23 02	STO 2
32	51	+
33	24 01	RCL 1
34	51	+
35	23 01	STO 1
36	61	x
37	02	2
38	71	÷
39	23 51 03	STO + 3
40	24 03	RCL 3
41	13 00	GTO 00
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

Registros	
R_0	Azi
R_1	Dir. G.MS
R_2	Variação i–1
R_3	Area
R_4	
R_5	
R_6	
R_7	

Etapa	Instruções	Dados de Entrada	Teclas				Dados de Saída
1	Gravar o programa						
2	Iniciar		f	REG	f	PRGM	
3	Introduzir a direção	Dir. G.MS	R/S				graus dec.
4	Introduzir o código do quadrante	Quad	R/S				Az, G.MS
5	Introduzir a distância	Dist	R/S				Área
6	Repetir as etapas 4 e 5 para						
	lados sucessivos. A área é						
	apresentada após a introdução da última distância						

Exemplo:

Calcular a área da figura abaixo:



Solução:

Área = 20937,44 metros quadrados

A Poligonal a Partir das Coordenadas

Este programa emprega coordenadas para calcular o comprimento e a direção de um caminhamento entre dois pontos de um polígono. A área em metros quadrados e um somatório das distâncias também são computados.

$$\text{Dist H} = \sqrt{(N_i - N_{i-1})^2 + (E_i - E_{i-1})^2} \qquad \text{Az} = \text{arco tan}\ \frac{E_i - E_{i-1}}{N_i - N_{i-1}}$$

$$\text{Área} = \tfrac{1}{2}[(N_2 + N_1)(E_2 - E_1) + (N_3 + N_2)(E_3 - E_2) + \ldots .(N_n + N_1)(E_1 - E_n)]$$

onde N, E = latitude e longitude de um ponto
O índice i se refere ao ponto atual
O índice n se refere ao último ponto visitado
O índice numérico se refere à ordem de determinado ponto
Dist H = Distância Horizontal
Az = Azimute de um caminhamento

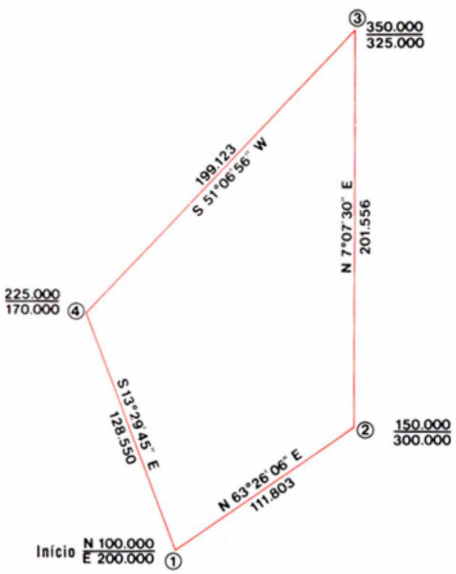
Visor		Introdução
Linha	Código	
00		
01	14 33	f REG
02	23 02	STO 2
03	21	x⇄y
04	23 00	STO 0
05	23 01	STO 1
06	74	R/S
07	24 02	RCL 2
08	41	-
09	23 51 02	STO + 2
10	23 05	STO 5
11	21	x⇄y
12	24 01	RCL 1
13	41	-
14	23 51 01	STO + 1
15	15 09	g →P
16	23 51 03	STO + 3
17	74	R/S
18	21	x⇄y
19	15 51	g x≥0
20	13 25	GTO 25
21	03	3
22	06	6
23	00	0
24	51	+

Visor		Introdução
Linha	Código	
25	31	↑
26	31	↑
27	09	9
28	00	0
29	71	÷
30	01	1
31	51	+
32	14 01	f INT
33	21	x⇄y
34	14 04	f SIN
35	15 04	g SIN^{-1}
36	15 41	g x<0
37	32	CHS
38	14 00	f →H.MS
39	24 00	RCL 0
40	24 01	RCL 1
41	23 00	STO 0
42	51	+
43	24 05	RCL 5
44	61	x
45	02	2
46	71	÷
47	23 51 04	STO + 4
48	22	R↓
49	13 06	GTO 06

Registros	
R_0	N anterior
R_1	N atual
R_2	E atual
R_3	Σ Dist H
R_4	Área
R_5	ΔE
R_6	
R_7	

Etapa	Instruções	Dados de Entrada	Teclas				Dados de Saída
1	Gravar o programa						
2	Introduzir as coordenadas	N_1	↑				
	iniciais	E_1	f	PRGM	R/S		
3	Introduzir as coordenadas						
	seguintes e apresentar a	N_i	↑				
	distância	E_i	R/S				Dist H
4	Computar a direção e o						
	código de quadrante		R/S				Dir. G.MS
			R↓				Quadr.
5	Repetir as etapas 3 e 4						
	para lados sucessivos						
6	Apresentar a distância total		RCL	3			Σ Dist H
7	Apresentar a área da figura						
	fechada (desconsiderar o sinal)		RCL	4			Área

Exemplo:



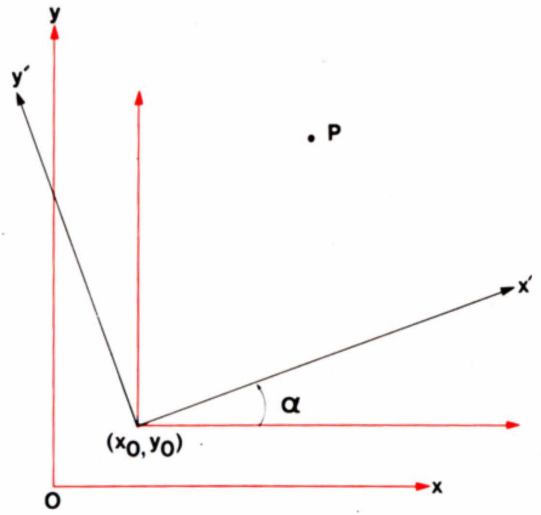
Área = 20937,5 metros quadrados

Distância Total = 641,033

CAPÍTULO VIII
TRIGONOMETRIA E GEOMETRIA ANALÍTICA

Translação e Rotação de Coordenadas

Há ocasiões em que se torna necessário ou simplesmente vatajoso efetuarmos uma mudança do nosso sistema de referência. Em termos matemáticos, tais ocasiões requerem a translação e/ou rotação do sistema de coordenadas. Para tanto, o ponto de origem é transladado de (0,0) para um novo ponto (x_o, y_o), e os eixos x e y giram em torno de um ângulo, a fim de proporcionar os novos eixos, x′ e y′. Suponhamos que as coordenadas de um ponto P sejam (x, y), em relação ao sistema primitivo de eixos, x e y. O problema, consequentemente, é o de achar as coordenadas (x′, y′) de P, em relação ao novo sistema de coordenadas, cujos eixos são x′ e y′. O diagrama abaixo serve para ilustrar esta situação:



Equações:

$$x' = (x - x_0)\cos\alpha + (y - y_0)\,\text{sen}\,\alpha$$

$$y' = -(x - x_0)\,\text{sen}\,\alpha + (y - y_0)\cos\alpha$$

Observações:

1. O programa em pauta pode ser empregado para a solução de problemas de apenas translação, para a solução de problemas de apenas rotação e, ainda, para a resolução de problemas compostos, de translação e de rotação. Tratando-se de problemas exclusivamente de translação, será necessária a introdução do valor $\alpha = 0$. Tratando-se de problemas exclusivamente de rotação, será necessária a introdução dos valores $x_o = y_o = 0$.

2. O programa adota a seguinte convenção, com relação à sinalização de entrada: o α deverá ser introduzido como um número positivo no caso da rotação ser em sentido contrário ao movimento dos ponteiros de um relógio, e como um número negativo no caso da rotação acompanhar o movimento dos ponteiros de um relógio.

Comentários sobre Programação:

O programa em apreço demonstra uma aplicação particularmente forte da conversão polar/cartesiana (f →R), combinada com a capacidade de pilha operacional. Os termos $(x - x_o) \cos \alpha$, $(x - x_o)$ sen α, $(y - y_o) \cos \alpha$, e $(y - y_o)$ sen α são todos gerados através de f →R e armazenados na pilha até quando necessários. Um programa mais direto, fazendo uso de f sin e f cos, teria exigido a utilização de 30 etapas de programação (comparadas com 19), bem como um registro adicional de armazenamento.

Visor		Introdução	X	Y	Z	T	Observações
Linha	Código						
00			y	x			
01	23 03	STO 3	y	x			
02	22	R↓	x			y	
03	24 02	RCL 2	α	x			
04	21	x⇄y	x	α			
05	24 00	RCL 0	x_0	x	α		
06	41	−	Δx	α			$\Delta x = x - x_0$
07	14 09	f→R	Δx cos α	Δx sin α			
08	24 03	RCL 3	y	Δx cos α	Δx sin α		
09	24 01	RCL 1	y_0	y	Δx cos α	Δx sin α	
10	41	−	Δy	Δx cos α	Δx sin α	Δx sin α	$\Delta y = y - y_0$
11	24 02	RCL 2	α	Δy	Δx cos α	Δx sin α	
12	21	x⇄y	Δy	α	Δx cos α	Δx sin α	
13	14 09	f→R	Δy cos α	Δy sin α	Δx cos α	Δx sin α	
14	22	R↓	Δy sin α	Δx cos α	Δx sin α	Δy cos α	
15	51	+	x′	Δx sin α	Δy cos α	Δy cos α	$x' = \Delta x \cos \alpha + \Delta y \sin \alpha$
16	74	R/S	x′	Δx sin α	Δy cos α	Δy cos α	
17	22	R↓	Δx sin α	Δy cos α	Δy cos α	x′	
18	41	−	y′	Δy cos α	x′	x′	$y' = -\Delta x \sin \alpha + \Delta y \cos \alpha$
19	13 00	GTO 00	y′	Δy cos α	x′	x′	
20							
21							
22							
23							
24							
25							
26							
27							
28							
29							
30							
31							
32							
33							
34							
35							
36							
37							
38							
39							
40							
41							
42							
43							
44							
45							
46							
47							
48							
49							

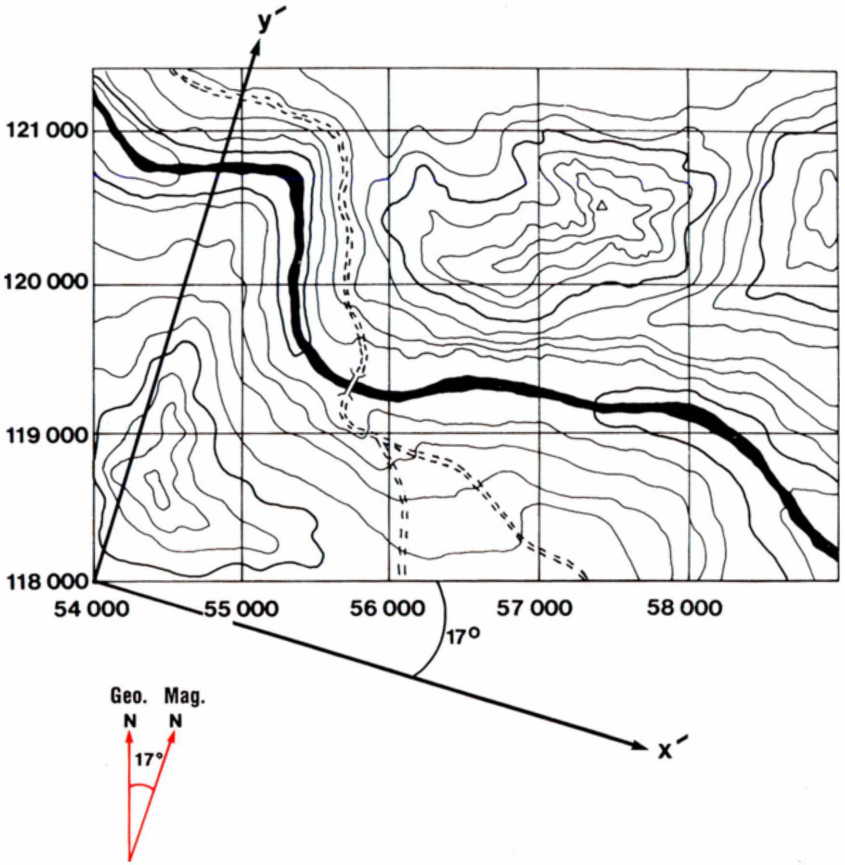
Registros	
R_0	x_0
R_1	y_0
R_2	α
R_3	y
R_4	
R_5	
R_6	
R_7	

Etapa	Instruções	Dados de Entrada	Teclas				Dados de Saída
1	Gravar o programa						
2	Armazenar a origem do novo						
	sistema de coordenadas	x_0	STO	0			
		y_0	STO	1			
3	Armazenar o ângulo de rotação	α	STO	2	f	PRGM	
4	Converter as coordenadas						
	do sistema primitivo para	x	↑				
	o novo sistema	y	R/S				x'
			R/S				y'
5	Executar a etapa 4 para						
	tantos pontos quanto desejado						
6	Para novo caso, passar para 2						

Exemplo:

A projetada caminhada de um solitário excursionista o levará através de um matagal onde, segundo consta, não há o menor vestígio de qualquer picada. Portanto, o excursionista sabe que, a partir do momento de sua entrada no espesso bosque, será obrigado a consultar a sua bússola com grande frequência, a fim de comparar as marcações da mesma com as indicações do mapa que levará consigo. Só lamenta que o formato do mapa seja bastante incoveniente. Em primeiro lugar, as quadrículas representam distâncias em metros, a partir de um ponto inicial que fica a uma distância de uns 25 km. Resultado: os números serão tão elevados que dificultarão qualquer tentativa de cálculo. Em segundo lugar, o quadriculado do mapa se baseia num Norte geográfico, ao passo que as leituras de sua bússola são relativas ao Norte magnético, sendo o ângulo entre os dois de 17°.

Antes de sair de casa, o excursionista decide fazer um esboço conveniente do mapa, localizando, para tanto, o seu ponto de partida no ponto (54 000, 118 000), e fazendo girar os eixos de 17° na direção do movimento dos ponteiros de um relógio. Logo de início, o excursionista deseja achar as novas coordenadas de uma ponte e do pico de uma colina, cujas coordenadas, primitivamente, eram (55 750, 119 300) e (57 450, 120 500), respectivamente.



Solução:

54000 STO 0 118000 STO 1 17 CHS STO 2 f PRGM

55750 ↑ 119300 R/S → 1293.45

R/S → 1754.85

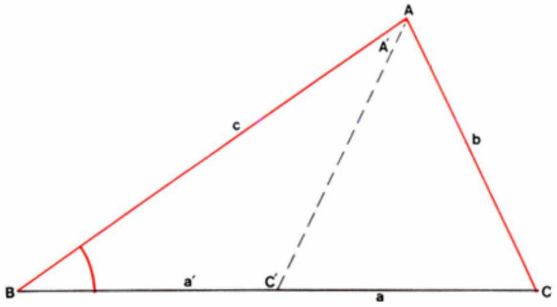
As novas coordenadas da ponte são (1293, 1755).

57450 ↑ 120500 R/S → 2568.32

R/S → 3399.44

As novas coordenadas do pico são (2568, 3399).

Resolução de Triângulo (B, b, c)



Dados dois lados e um ângulo não-comum, o programa resolve o triângulo, com relação aos demais parâmetros, através das fórmulas seguintes:

1. $C = \text{arco sen}\left(\frac{c \text{ sen } B}{b}\right)$

2. $A = 2 \text{ arco sen } 1 - (B + C) = \pi \text{ radianos} - (B + C) = 180^\circ - (B + C)$

   $= 200 \text{ grados} - (B + C)$

3. $a = \frac{b \text{ sen } A}{\text{sen } B}$

Se B é agudo ($< 90°$) e $b < c$, há outra solução possível, que poderá ser calculada através das seguintes fórmulas:

4. $C' = 2 \text{ arco sen } 1 - C$

5. $A' = 2 \text{ arco sen } 1 - (B + C')$

6. $a' = \frac{b \text{ sen } A'}{\text{sen } B}$

A área é calculada com a fórmula:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \text{ ac sen B}$$

O programa em pauta é adaptável a todas as unidades angulares. Entretanto, no caso de se adotar graus, presume-se que estes sejam graus decimais.

Visor		Introdução
Linha	Código	
00		
01	24 03	RCL 3
02	24 01	RCL 1
03	14 04	f SIN
04	61	x
05	24 02	RCL 2
06	71	÷
07	15 04	g SIN^{-1}
08	23 05	STO 5
09	74	R/S
10	24 01	RCL 1
11	51	+
12	01	1
13	15 04	g SIN^{-1}
14	02	2
15	61	x
16	23 04	STO 4
17	21	$x \rightleftarrows y$
18	41	–
19	74	R/S
20	14 04	f SIN
21	24 02	RCL 2
22	61	x
23	24 01	RCL 1
24	14 04	f SIN

Visor		Introdução
Linha	Código	
25	71	÷
26	74	R/S
27	24 03	RCL 3
28	61	x
29	24 01	RCL 1
30	14 04	f SIN
31	61	x
32	02	2
33	71	÷
34	74	R/S
35	24 04	RCL 4
36	24 05	RCL 5
37	41	–
38	74	R/S
39	13 10	GTO 10
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

Registros
R_0
R_1 B
R_2 b
R_3 c
R_4 2 arco sen 1
R_5 C
R_6
R_7

Etapa	Instruções	Dados de Entrada	Teclas				Dados de Saída
1	Gravar o programa						
2	Armazenar B, b e c	B	STO	1			
		b	STO	2			
		c	STO	3			
3	Resolver o triângulo		f	PRGM	R/S		C*
			R/S				A*
			R/S				a*
			R/S				Área
4	Se B < 90° e b < c,						
	achar solução alternativa		R/S				C'*
			R/S				A'*
			R/S				a'*
			R/S				Área'
	* A pilha não deverá sofrer qualquer alteração nos						
	pontos assinalados pelos asteriscos.						

Exemplo:

Dados os dois lados e um ângulo não-comum de um triângulo:

$B = 42.3^\circ$
$b = 25.6$
$c = 32.8$

Resolver o triângulo

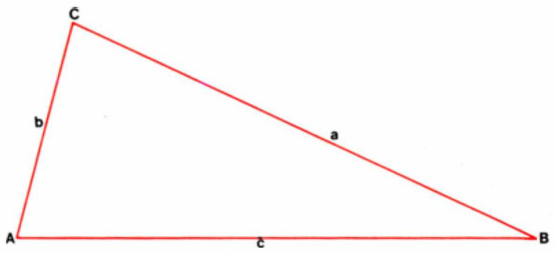
Solução:

Visto B ser inferior a 90° e $b < c$, existem duas soluções possíveis:

$C = 59.58^\circ$
$A = 78.12^\circ$
$a = 37.22$
Área = 410.85

$C' = 120.42^\circ$
$A' = 17.28^\circ$
$a' = 11.30$
Área' = 124.68

Resolução de Triângulo (a, b, c)



Dados três lados, o programa em pauta resolve o triângulo, com relação aos demais parâmetros, através das fórmulas seguintes:

$$C = \text{arco cos}\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)$$

$$B = \text{arco sen}\left(\frac{b \text{ seno } C}{c}\right) \qquad A = \text{arco sen}\left(\frac{a \text{ seno } C}{c}\right)$$

O programa também computa a área do triângulo pela seguinte fórmula:

$$\text{Área} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\text{onde } s = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

Caso necessário, adotar nova designação de letras, a fim de tornar c o lado de maior comprimento. O programa aceita todas as unidades angulares. Entretanto, no caso de se adotar graus, presume-se que estes sejam graus decimais.

Visor		Introdução
Linha	Código	
00		
01	24 01	RCL 1
02	24 02	RCL 2
03	15 09	g →P
04	15 02	g x^2
05	24 03	RCL 3
06	15 02	g x^2
07	41	–
08	24 01	RCL 1
09	24·02	RCL 2
10	61	x
11	02	2
12	61	x
13	71	÷
14	15 05	g COS^{-1}
15	74	R/S
16	14 04	f SIN
17	24 03	RCL 3
18	71	÷
19	23 00	STO 0
20	24 02	RCL 2
21	61	x
22	15 04	g SIN^{-1}
23	74	R/S
24	24 00	RCL 0

Visor		Introdução
Linha	Código	
25	24 01	RCL 1
26	61	x
27	15 05	g SIN^{-1}
28	74	R/S
29	24 01	RCL 1
30	24 02	RCL 2
31	51	+
32	24 03	RCL 3
33	51	+
34	02	2
35	71	÷
36	31	↑
37	23 00	STO 0
38	24 01	RCL 1
39	41	–
40	61	x
41	24 00	RCL 0
42	24 02	RCL 2
43	41	–
44	61	x
45	24 00	RCL 0
46	24 03	RCL 3
47	41	–
48	61	x
49	14 02	f $\sqrt{x}$

Registros
R_0 Usado
R_1 a
R_2 b
R_3 c
R_4
R_5
R_6
R_7

Etapa	Instruções	Dados de Entrada	Teclas				Dados de Saída
1	Gravar o programa						
2	Armazenar a, b, e c	a	STO	1			
	(sendo c o maior)	b	STO	2			
		c	STO	3			
3	Resolver o triângulo		f	PRGM	R/S		C*
			R/S				B*
			R/S				A
			R/S				Área
4	Precisando-se apenas	a	STO	1			
	da área:	b	STO	2			
		c	STO	3			
			GTO	29	R/S		Área
	* A pilha não deverá sofrer qualquer alteração nos						
	pontos assinalados pelos asteriscos.						

Exemplo:

Sejam a = 5,43; b = 10,46; c = 14,87

Solução:

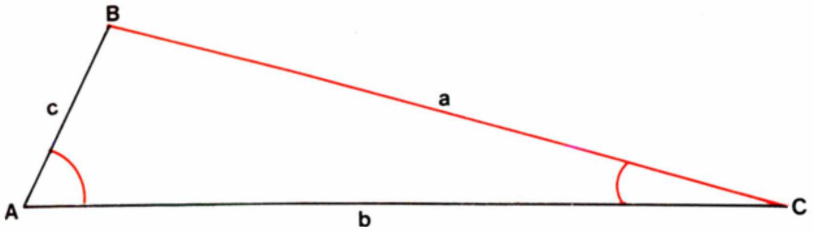
C = 136,37°

B = 29,04°

A = 14,59°

Área = 19,60

Resolução de Triângulo (a, A, C)



Dados dois ângulos e um lado não-comum, o programa em pauta resolve o triângulo, com relação aos demais parâmetros, através das fórmulas seguintes:

$$B = 2 \text{ arco sen } 1 - (A + C) = \pi \text{ radianos} - (A + C) = 180^\circ - (A + C)$$
$$= 200 \text{ grados} - (A + C)$$

$$b = \frac{a \text{ sen } B}{\text{sen } A}$$

$$c = \frac{a \text{ sen } C}{\text{sen } A}$$

Computa-se a área do triângulo pela seguinte fórmula:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \text{ ab sen C}$$

O programa aceita todas as unidades angulares. Entretanto, no caso de se adotarem graus, presume-se que estes sejam graus decimais.

Visor		Introdução
Linha	Código	
00		
01	01	1
02	15 04	g SIN^{-1}
03	02	2
04	61	x
05	24 02	RCL 2
06	24 03	RCL 3
07	51	+
08	41	–
09	74	R/S
10	14 04	f SIN
11	24 01	RCL 1
12	61	x
13	24 02	RCL 2
14	14 04	f SIN
15	71	÷
16	23 04	STO 4
17	74	R/S
18	24 01	RCL 1
19	14 73	f LASTx
20	71	÷
21	24 03	RCL 3
22	14 04	f SIN
23	61	x
24	74	R/S

Visor		Introdução
Linha	Código	
25	24 01	RCL 1
26	24 04	RCL 4
27	61	x
28	24 03	RCL 3
29	14 04	f SIN
30	61	x
31	02	2
32	71	÷
33	13 00	GTO 00
34		
35		
36		
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

Registros
R_0
R_1 a
R_2 A
R_3 C
R_4 b
R_5
R_6
R_7

Etapa	Instruções	Dados de Entrada	Teclas				Dados de Saída
1	Gravar o programa						
2	Armazenar a, A, e C	a	STO	1			
		A	STO	2			
		C	STO	3			
3	Resolver o triângulo		f	PRGM	R/S		B*
			R/S				b*
			R/S				c
			R/S				Área
	* A pilha não deverá sofrer qualquer alteração nos						
	pontos assinalados pelos asteriscos.						

Exemplo:

Sejam a = 19,6; A = 40,25°; C = 61,06°

Solução:

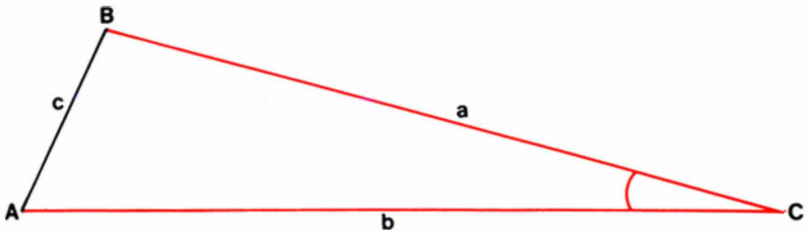
B = 78,69°

b = 29,75

c = 26,55

Área = 255,11

Resolução de Triângulo (a, b, C)



Dados dois lados e seu ângulo comum, o programa em pauta resolve o triângulo, com relação aos demais parâmetros, através das fórmulas seguintes:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C} \qquad A = \text{arco sen } \left(\frac{a \text{ sen } C}{c}\right)$$

$$B = 2 \text{ arco sen } 1 - (A + C) = \pi \text{ radianos} - (A + C) = 180^\circ - (A + C)$$
$$= 200 \text{ grados} - (A + C)$$

Calcula-se a área do triângulo pela seguinte fórmula:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \text{ ab sen C}$$

Caso necessário, adotar nova designação de letras, a fim de tornar o lado a menor que b. O programa aceita todas as unidades angulares. Entretanto, no caso de se adotarem graus, presume-se que estes sejam graus decimais.

Visor		Introdução
Linha	Código	
00		
01	24 01	RCL 1
02	24 02	RCL 2
03	15 09	g →P
04	15 02	g x^2
05	24 01	RCL 1
06	24 02	RCL 2
07	61	x
08	02	2
09	61	x
10	24 03	RCL 3
11	14 05	f COS
12	61	x
13	41	–
14	14 02	f $\sqrt{x}$
15	74	R/S
16	24 01	RCL 1
17	24 03	RCL 3
18	14 04	f SIN
19	61	x
20	21	$x \rightleftarrows y$
21	71	÷
22	15 04	g SIN^{-1}
23	74	R/S
24	01	1

Visor		Introdução
Linha	Código	
25	15 04	g SIN^{-1}
26	02	2
27	61	x
28	21	$x \rightleftarrows y$
29	24 03	RCL 3
30	51	+
31	41	–
32	74	R/S
33	24 03	RCL 3
34	14 04	f SIN
35	24 01	RCL 1
36	61	x
37	24 02	RCL 2
38	61	x
39	02	2
40	71	÷
41	13 00	GTO 00
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

Registros
R_0
R_1 a
R_2 b
R_3 C
R_4
R_5
R_6
R_7

Etapa	Instruções	Dados de Entrada	Teclas				Dados de Saída
1	Gravar o programa						
2	Armazenar a, b, e c						
	(sendo a menor que b)	a	STO	1			
		b	STO	2			
		C	STO	3			
3	Resolver o triângulo		f	PRGM	R/S		c*
			R/S				A*
			R/S				B
			R/S				Área
4	Precisando-se apenas	a	STO	1			
	da área:	b	STO	2			
		C	STO	3			
			GTO	33	R/S		Área
	* A pilha não deverá sofrer qualquer alteração nos						
	pontos assinalados pelos asteriscos.						

Exemplo:

Sejam a = 146; b = 227; C = 31,49°

Solução:

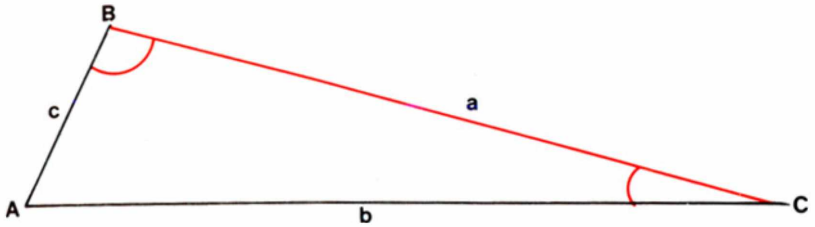
c = 127,76

A = 36,65°

B = 111,86°

Área = 8655,86

Resolução de Triângulo (a, B, C)



Dados dois ângulos e o lado comum, o programa em pauta resolve o triângulo, com relação aos demais parâmetros, através das fórmulas seguintes:

$$A = 2 \text{ arco sen } 1 - (B + C) = \pi \text{ radianos } - (B + C) = 180^\circ - (B + C)$$

$$= 200 \text{ grados} - (B + C)$$

$$b = \frac{a \text{ sen } B}{\text{sen } A}$$

$$c = \frac{a \text{ sen } C}{\text{sen } A}$$

Acha-se a área do triângulo pela seguinte fórmula:

$$\text{Área} = \frac{a^2 \text{ sen } B \text{ sen } C}{2 \text{ sen } (B + C)}$$

O programa aceita todas as unidades angulares. Entretanto, no caso de se adotarem graus, presume-se que estes sejam graus decimais.

Visor		Introdução
Linha	Código	
00		
01	01	1
02	15 04	g SIN^{-1}
03	02	2
04	61	x
05	24 02	RCL 2
06	24 03	RCL 3
07	51	+
08	41	–
09	23 04	STO 4
10	74	R/S
11	24 01	RCL 1
12	24 04	RCL 4
13	14 04	f SIN
14	71	÷
15	23 04	STO 4
16	24 02	RCL 2
17	14 04	f SIN
18	61	x
19	74	R/S
20	24 04	RCL 4
21	24 03	RCL 3
22	14 04	f SIN
23	61	x
24	74	R/S

Visor		Introdução
Linha	Código	
25	24 01	RCL 1
26	15 02	g x^2
27	02	2
28	71	÷
29	24 02	RCL 2
30	14 04	f SIN
31	61	x
32	24 03	RCL 3
33	14 04	f SIN
34	61	x
35	24 02	RCL 2
36	24 03	RCL 3
37	51	+
38	14 04	f SIN
39	71	÷
40	13 00	GTO 00
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

Registros
R_0
R_1 a
R_2 B
R_3 C
R_4 A, (a/sen A)
R_5
R_6
R_7

Etapa	Instruções	Dados de Entrada	Teclas				Dados de Saída
1	Gravar o programa						
2	Armazenar a, B, e C	a	STO	1			
		B	STO	2			
		C	STO	3			
3	Resolver o triângulo		f	PRGM	R/S		A*
			R/S				b*
			R/S				c
			R/S				Área
4	Precisando-se apenas	a	STO	1			
	da área:	B	STO	2			
		C	STO	3			
			GTO	25	R/S		Área
	* A pilha não deverá sofrer qualquer alteração nos						
	pontos assinalados pelos asteriscos.						

Exemplo:

Sejam a = 20,96; B = 64°32′; C = 35°06′.

Solução:

Primeiro, converter B e C para graus decimais.

A = 80,37°

b = 19,19

c = 12,22

Área = 115,66

Funções Hiperbólicas

O programa calcula as seis funções hiperbólicas através das fórmulas seguintes:

1. $\text{senh } x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

2. $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

3. $\tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

4. $\text{cosech } x = \dfrac{1}{\text{senh } x} \qquad (x \neq 0)$

5. $\text{sech } x = \dfrac{1}{\cosh x}$

6. $\coth x = \dfrac{1}{\tanh x} \qquad (x \neq 0)$

Visor		Introdução
Linha	Código	
00		
01	15 07	g e^x
02	31	↑
03	15 22	g 1/x
04	41	–
05	02	2
06	71	÷
07	13 00	GTO 00
08	15 07	g e^x
09	31	↑
10	15 22	g 1/x
11	51	+
12	13 05	GTO 05
13	15 07	g e^x
14	31	↑
15	15 22	g 1/x
16	41	–
17	31	↑
18	31	↑
19	14 73	f LASTx
20	02	2
21	61	x
22	51	+
23	71	÷
24	13 00	GTO 00

Visor		Introdução
Linha	Código	
25		
26		
27		
28		
29		
30		
31		
32		
33		
34		
35		
36		
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

Registros
R_0
R_1
R_2
R_3
R_4
R_5
R_6
R_7

Etapa	Instruções	Dados de Entrada	Teclas				Dados de Saída
1	Gravar o programa						
2	senh x	x	f	PRGM	R/S		senh x
	ou						
	cosh x	x	GTO	08	R/S		cosh x
	ou						
	tanh x	x	GTO	13	R/S		tanh x
	ou						
	cosech x	x	f	PRGM	R/S		
			g	$^1/_x$			cosech x
	ou						
	sech x	x	GTO	08	R/S		
			g	$^1/_x$			sech x
	ou						
	coth x	x	GTO	13	R/S		
			g	$^1/_x$			coth x

Exemplos:

1. senh 2,5 = 6,05
2. cosh 3,2 = 12,29
3. tanh 1,9 = 0,96
4. cosech 4,6 = 0,02
5. sech (−0,25) = 0,97
6. coth (−2,01) = −1,04

Funçoẽs Hiperbólicas Inversas

Este programa calcula as funções hiperbólicas inversas através das seguintes fórmulas:

1. $\text{senh}^{-1}\, x = \ln\,[x + (x^2 + 1)^{1/2}]$
2. $\cosh^{-1} x = \ln\,[x + (x^2 - 1)^{1/2}]$ $\quad x \geqslant 1$
3. $\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln\left[\frac{1 + x}{1 - x}\right]$ $\quad x^2 < 1$
4. $\text{cosech}^{-1} x = \text{senh}^{-1}\left[\frac{1}{x}\right]$ $\quad x \neq 0$
5. $\text{sech}^{-1} x = \cosh^{-1}\left[\frac{1}{x}\right]$ $\quad 0 < x \leqslant 1$
6. $\coth^{-1} x = \tanh^{-1}\left[\frac{1}{x}\right]$ $\quad x^2 > 1$

Visor		Introdução
Linha	Código	
00		
01	31	↑
02	31	↑
03	61	x
04	01	1
05	51	+
06	14 02	f $\sqrt{x}$
07	51	+
08	14 07	f LN
09	13 00	GTO 00
10	31	↑
11	31	↑
12	61	x
13	01	1
14	41	–
15	14 02	f $\sqrt{x}$
16	51	+
17	14 07	f LN
18	13 00	GTO 00
19	31	↑
20	31	↑
21	01	1
22	51	+
23	21	x⇄y
24	32	CHS

Visor		Introdução
Linha	Código	
25	01	1
26	51	+
27	71	÷
28	14 07	f LN
29	02	2
30	71	÷
31	13 00	GTO 00
32		
33		
34		
35		
36		
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		
47		
48		
49		

Registros
R_0
R_1
R_2
R_3
R_4
R_5
R_6
R_7

Etapa	Instruções	Dados de Entrada	Teclas				Dados de Saída
1	Gravar o programa						
2	$\text{senh}^{-1}\ x$	x	f	PRGM	R/S		$\text{senh}^{-1}\ x$
	ou						
	$\cosh^{-1}\ x$	x	GTO	10	R/S		$\cosh^{-1}\ x$
	ou						
	$\tanh^{-1}\ x$	x	GTO	19	R/S		$\tanh^{-1}\ x$
	ou						
	$\text{cosech}^{-1}\ x$	x	g	$^1/_x$	f	PRGM	
			R/S				$\text{cosech}^{-1}\ x$
	ou						
	$\text{sech}^{-1}\ x$	x	g	$^1/_x$	GTO	10	
			R/S				$\text{sech}^{-1}\ x$
	ou						
	$\coth^{-1}\ x$	x	g	$^1/_x$	GTO	19	
			R/S				$\coth^{-1}\ x$

Exemplo:

1. $\text{senh}^{-1}\ (2{,}4) = 1{,}61$
2. $\cosh^{-1}\ (90) = 5{,}19$
3. $\tanh^{-1}\ (-0{,}65) = -0{,}78$
4. $\text{cosech}^{-1}\ (2) = 0{,}48$
5. $\text{sech}^{-1}\ (0{,}4) = 1{,}57$
6. $\coth^{-1}\ (3{,}4) = 0{,}30$

Os programas aqui contidos não possuem qualquer garantia nem são formulados de forma a influenciar qualquer opinião. Portanto, a Companhia Hewlett-Packard não se responsabiliza nem assume quaisquer compromissos, seja direta ou indiretamente, quanto ao uso destes programas ou parte deles.

Impresso no Brasil

© HEWLETT-PACKARD COMPANY 1975

Formulário de Programação HP-25

Título _____ Folha No. ____ de ____

Adote o modo de programação (PRGM), pulse [f] [PRGM] , introduza então o programa.

Visor		Introdução	X	Y	Z	T	Observações
Linha	Código						
00							
01							
02							
03							
04							
05							
06							
07							
08							
09							
10							
11							
12							
13							
14							
15							
16							
17							
18							
19							
20							
21							
22							
23							
24							
25							
26							
27							
28							
29							
30							
31							
32							
33							
34							
35							
36							
37							
38							
39							
40							
41							
42							
43							
44							
45							
46							
47							
48							
49							

Registros	
R_0	
R_1	
R_2	
R_3	
R_4	
R_5	
R_6	
R_7	

HEWLETT hp PACKARD

HEWLETT hp PACKARD

Vendas e serviço em 172 centros em 65 p es
3200 Hillview Avenue, Palo Alto, California 9 , E.U

Para maiores informações dirija-se à sucursal u ac resen les
locais da Hewlett-Packard

No Brasil

Hewlett-Packard do Brasil, I.E.C. Ltda
Rua Frei Caneca, 1119, 01307, São Paulo – SP

Praça Dom Feliciano Alegre
Rua Siquei Cabana, io de Janeiro-GB.

S.A.
n 7, CH-1217
nebra, Suiça

Outros Países

ackard Intercontinental
Hilview Avenue
Palo Alto lifornia 94304, E.U.A.

MASSAIOLI - PABX 2 6076
CP 1594 - CAMPINAS - SP

00025-90018 (Portugues) IMPRESSO NO BRASIL