

Você sabe: o seu TK-2000 COLOR é rápido e poderoso, mas é preciso um software para fazê-lo trabalhar. E ele mostrará um desempenho cada vez melhor se você souber programá-lo para fazer exatamente o que você espera que ele faça...

O TK-2000 NA MATEMÁTICA é um livro bem prático, que contém vinte e um programas completos, sérios, comentados, permitindo que você, com a sua criatividade, os modifique ou faça deles modelos para outros programas que facilitem os seus cálculos matemáticos.

No TK-2000 NA MATEMÁTICA você também encontrará a interessante história de alguns números, curiosidades sobre eles e as superstições que os cercam.

ISBN 85-213-0282-7

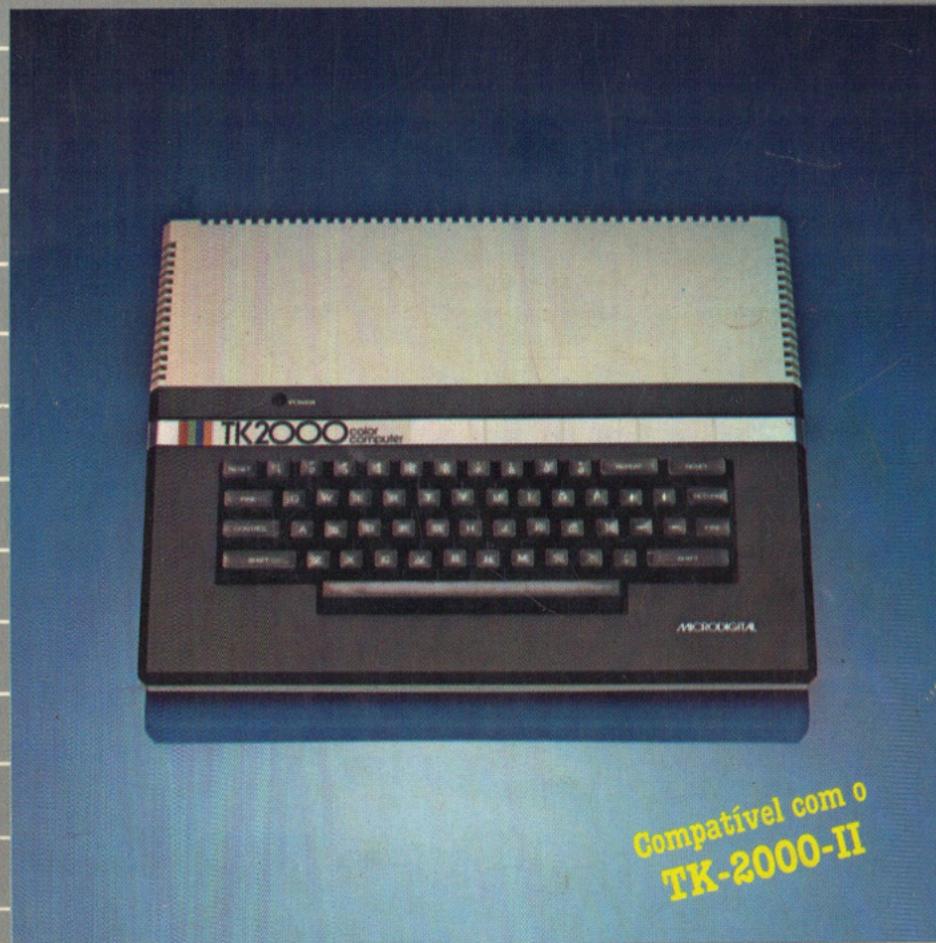
nobel

TK-2000 NA MATEMÁTICA

Victor Mirshawka

TK-2000

NA MATEMÁTICA



VICTOR MIRSHAWKA

nobel

TK - 2000
NA MATEMÁTICA

Cálculo Numérico
 Exercícios de Cálculo Numérico
 Probabilidades e estatística para a Engenharia (vol. 1 e 2)
 Exercícios de Probabilidades e Estatística para Engenharia
 Tabelas de Estatística
 Pesquisa Operacional (vol. 1, 2 e 3)
 Aplicações de Pesquisa Operacional (vol. 1, 2 e 3)
 Caderno de Elementos de Computação (Linguagem FORTRAN)
 Linguagem BASIC
 BASIC sem segredos
 TK-Divertindo
 TK-Lembrando
 TK-Calculando
 Conhecendo e Utilizando o TK-2000
 TK-2000 na Matemática
 TK-2000 nos Gráficos e na Música (a sair)
 TK-2000 nas Ciências Humanas (a sair)
 Dê um APPLE à sua vida
 TK S800 Resolvendo seus problemas
 Jogos e Desenhos com o TK S800

CIP-Brasil. Catalogação-na-Publicação
 Câmara Brasileira do Livro, SP

M655t Mirshawka, Vítor, 1941-
 TK-2000 na matemática / Victor Mirshawka. --
 São Paulo : Nobel, 1985.

Bibliografia.
 ISBN 85-213-0282-7

1. Matemática - Programas de computador
 2. TK-2000 color (Computador) - Programação
- I. Título.

17.CDD-510.028
 18. -510.28542
 17. -651.8
 18. -001.6425

85-0085

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Programação : Processamento de dados
 510.028 (17.) 510.28542 (18.)
2. Programação : TK-2000 color : Computadores : Processamento de dados
 651.8 (17.) 001.6425 (18.)
3. Programação para matemática : Processamento de dados
 510.028 (17.) 510.28542 (18.)
4. TK-2000 color : Computadores : Programação : Processamento de dados
 651.8 (17.) 001.6425 (18.)

Capa: Lírio Fissao Yuasa
 Datilografia: Ioshiro Iqueda

Victor Mirshawka

Professor titular de Cálculo Numérico, Estatística e Pesquisa Operacional da Faculdade de Engenharia da Fundação Armando Álvares Penteado.

Professor titular de Cálculo Numérico e Ciência da Computação, Estatística e Pesquisa Operacional da Universidade Mackenzie.

Professor associado do departamento fundamental da Escola de Engenharia Mauá.

Mestre em Estatística pela Universidade de São Paulo.

TK - 2000 NA MATEMÁTICA

2ª edição

1985



LIVRARIA NOBEL S.A.
 EDITORA — DISTRIBUIDORA
 LOJA 1: RUA DA CONSOLAÇÃO, 49 - CEP01301
 LOJA 2: RUA MARIA ANTÔNIA, 108 - CEP01222
 LOJA 3: RUA PEDROSO ALVARENGA, 704 - CEP04531
 LOJA 4: RUA BARÃO DO TRIUNFO, 371 - CEP04602
 EDITORA: RUA DA BALSA, 559 - CEP02910
 FONES: (PABX) 857-9444 e 257-2144 - SÃO PAULO - SP.

É PROIBIDA A REPRODUÇÃO

Nenhuma parte desta obra poderá ser reproduzida, sem a permissão por escrito dos editores, através de qualquer meio: XEROX, FOTOCÓPIA, FOTOGRAFICO, FOTOMECÂNICO. Tampouco poderá ser copiada ou transcrita, nem mesmo transmitida através de meios eletrônicos ou gravações. Os infratores serão punidos através da Lei 5.988, de 14 de Dezembro de 1973, artigos 122-130.

Entre os objetivos que tivemos em vista, ao escrever este livro, cumpre destacar:

1. Fazer uma obra acentuadamente didática, isto é, um livro que possa ser útil aos professores e aos estudantes de Matemática.
2. Elaborar um livro que possa ser lido com interesse e real aproveitamento por todos, até mesmo pelas pessoas que vivem afastadas do mundo maravilhoso das fórmulas e das equações.
3. Exaltar, dentro das justas proporções, os grandes vultos da história da Matemática.
4. Destacar a "influência" dos números no mundo que nos rodeia e salientar alguns fatos pitorescos, motivadores do ensino vivo, dinâmico e eficiente da Matemática.
5. Utilizar a mais moderna ferramenta para a área da Educação, ou seja, o microcomputador, elaborando 21 programas completos para variados temas da Matemática lecionada principalmente no 1º e 2º graus, no sofisticado, e ao mesmo tempo muito simples de usar, TK-2000 COLOR da Microdigital.
6. Acabar, com o auxílio do TK-2000 COLOR, com alguns "tabus" e ao mesmo tempo economizar esforço manual e economizar pensamento.

Dizem os bons didatas que o ensino da Matemática, para maior eficiência e segurança da aprendizagem, deve atender às seguintes condições:

1. ser dinâmico e atraente;
2. ser prático e simples;
3. ser metódico e rigoroso.

Acreditamos que não é fácil atender a todas as condições ao mesmo tempo, porém com o auxílio do TK-2000 COLOR a primeira condição você, caro(a) leitor(a), tirará de "letra". A praticidade e a simplicidade são condições que acreditamos ter atingido, pois foi o caminho que escolhemos nos nossos exemplos, não deixando de ser metódicos mas perdendo, entretanto, um pouco do rigor.

Os matemáticos, estes mestres dos números, costumam repetir que os números governam o mundo. Isto, porém, não é exato, visto que os números são criações do nosso espírito e nada governam.

Os estatísticos, menos ambiciosos, contentam-se em dizer que os números servem para explicar como o mundo é governado.

A superstição desde logo se apoderou dos números e a própria filosofia grega deu-lhes, com Pitágoras e Platão, um papel demasiado importante na teoria das idéias.

Onde pudemos, contamos um pouco da história de cada número, sem compactuar, entretanto, com Pitágoras ou Platão.

A Matemática surgiu com o despertar da alma humana, porém não orientou seu desenvolvimento apenas para fins utilitários. Foi a ânsia de resolver o mistério do Universo, diante do qual o homem é um simples grão de areia (ou muito menos), que lhe deu o primeiro grande impulso. O seu verdadeiro desenvolvimento resultou, antes de tudo, do esforço em penetrar o Infinito. Depois de havermos passado séculos a tentar, em vão, afastar o espesso velário, ainda hoje é a busca do Infinito que nos leva adiante.

Existem pessoas que consideram a Matemática árida e fria. Existem aqueles que pensam que o espírito matemático é incompatível com o sentimento literário e o sentimento artístico, e há quem afirme que a Educação matemática seca completamente a inspiração estética. Os dois exemplos mais importantes que contrariam essas três afirmações são o de Leonardo da Vinci, que está inscrito em letras de ouro tanto na história da arte como na história da Matemática e da Física, e o de Miguel Ângelo, o grande pintor e o maravilhoso geômetra.

O seu TK-2000 COLOR lhe mostrará o caminho simples e rápido para os cálculos, porém jamais impedirá a evolução do seu espírito artístico. Aliás, um dos livros que compõem essa série é o *TK-2000 nos gráficos e na música* e você verá que é totalmente compatível o(a) mesmo(a) leitor(a) ser usuário(a) de ambos os livros (daquele e deste).

Nossa opinião é que a pintura e a poesia são revelações veladas da Matemática. A imaginação é a qualidade primordial para poder ser grande na poesia e na Matemática. É na imaginação que está a força do poeta, é na imaginação que está a força do geômetra e é na imaginação que está a força de um programador.

Você, após ter entendido os 21 programas por nós apresentados, e ter feito os "trabalhos" por nós propostos, estará cheio(a) de imaginação! "Podes crer", caro(a) leitor(a).

Assim como a música é a mais subjetiva das artes, também a Matemática é a mais subjetiva das ciências. O gênio musical forma, com sons e acordes, seguindo-se em tempos medidos, melodias, que são o encanto do ouvido. O gênio matemático forma, com idéias harmonicamante ligadas, proposições e teorias que são o enlevo da razão. Tanto na música como na Matemática existem belezas que emocionam.

O seu TK-2000 COLOR (estamos supondo que você tenha um) é bom tanto para a música como para a Matemática e

mesmo que você não se torne um gênio em nenhuma das duas áreas, ele irá ajudá-lo(a) a sentir ou a entender as obras geniais que existem em cada uma delas.

Hã até quem diga que a música é a Matemática do ouvido...

A menos que a Matemática seja muito mal ensinada, ela constitui um dos melhores jogos intelectuais que a Escola pode oferecer a seus alunos.

A Matemática é um trabalho bem definido, no qual o aluno pode saber de forma clara o que tem de fazer, quanto fez e como realizou a tarefa. Os novos métodos tornam a Matemática um jogo cheio de atrativos para os jovens cérebros e um poderoso estímulo para a pessoa interessada em obter resultados e dominar dificuldades.

Optamos, neste livro, por desenvolver 21 programas completos, abordando tópicos de Álgebra, Geometria, Trigonometria e Geometria Analítica, crescendo em grau de dificuldade, à medida que se vai avançando em seu conteúdo, como se o(a) leitor(a) estivesse passando do 1º para o 2º grau e ultrapassando todas as barreiras desse último.

Em todos os casos apresentamos a justificativa do método, da teoria ou dos conceitos, formalizamos um plano para compreender o algoritmo, que permite resolver o problema, e em muitos casos desenhamos o seu fluxograma e em seguida apresentamos o programa em BASIC para o seu TK-2000 COLOR.

É o programa que tem o papel principal, visto que é ele que dará a você todas as respostas para as "perguntas" matemáticas que forem feitas.

Esperamos ansiosamente que o livro atinja os objetivos inicialmente estabelecidos.

Estimado(a) leitor(a), não esqueça que dentro do mesmo estilo existem também os livros:

TK-2000 na Física

TK-2000 nas Ciências Humanas

TK-2000 nos Gráficos e na Música

Conhecendo e Utilizando o TK-2000

Agradecimentos

Foi contínua e cada vez mais indispensável a ajuda da minha querida esposa e amiga Nilza Maria e dos meus dois filhos maiores, Victor Junior e Sergio, na elaboração deste livro. Cumpre destacar que o terceiro filho, Alexandre (Sacha, para os íntimos) se não ajudou muito, também não atrapalhou...

Sem dúvida nenhuma, sem o auxílio deles não poderia jamais apresentar, em prazo tão curto, uma série de textos, diferenciados quanto ao conteúdo específico, porém todos eles voltados para o uso do microcomputador.

Acredito muito hoje (e o TK-2000 foi fundamental nisto) na frase: "Uma família unida trabalha e se diverte unida..."

Muito obrigado a George Kovari diretor da MICRODIGITAL, por ter permitido ser eu um dos primeiros a possuir e a usar um TK-2000 COLOR. Sem isto seria impossível escrever este livro.

"Thank you", Toshiro Iqueda, datilógrafo incomparável e amigo de muitos anos, que decifrou os originais e os transformou em mais um livro.

"Merci", Angélica Ayres e novamente Toshiro Iqueda, pelo excelente trabalho de editoração.

Finalmente, sou grato mais uma vez aos amigos da Livraria Nobel S.A., Ary K. Benclowicz e Luigi Zamboni, por acreditarem na validade deste trabalho, colocando à nossa disposição todo o setor de publicação e divulgação.

Feliz possuidor de um TK-2000 COLOR não resista e atenda o pedido da moça...

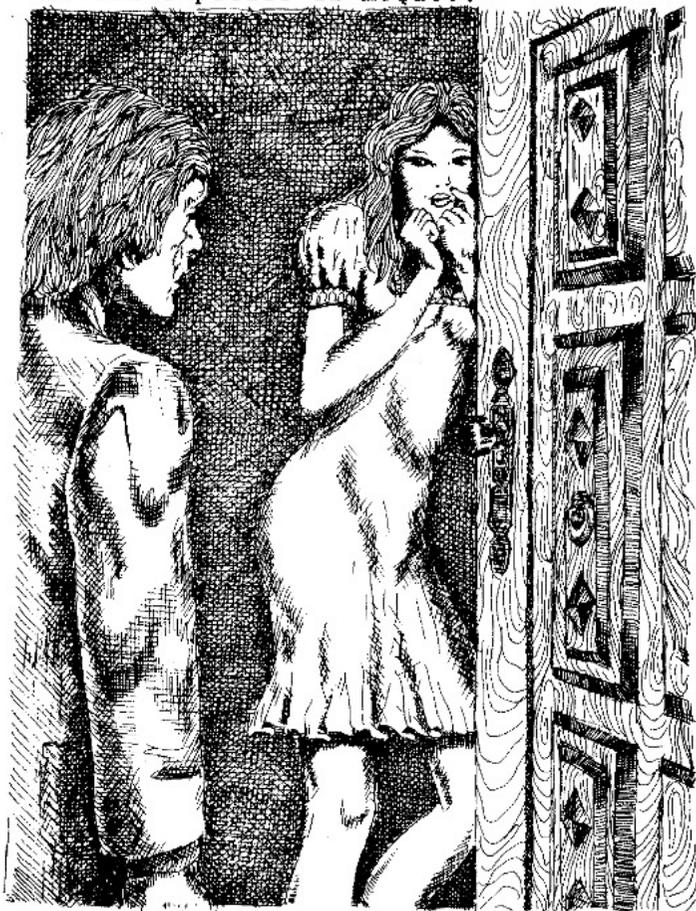


Figura 0 - "Venha comigo que vou lhe mostrar o TK-2000 COLOR..."

Sumário

1. Números perfeitos, abundantes e deficientes	1
2. Frações racionais	21
3. Definindo a circunferência	32
4. Quatro em 1 (um)	38
5. A função quadrática - resolução da equação do 2º grau	51
6. Sequências	63
7. Ordenando	77
8. Intersecções de circunferências	91
9. A fórmula da distância	103
10. Eixo de simetria de uma parábola	113
11. Calculando o π	133
12. Obtenção do π pelo método de Monte Carlo	143
13. O importante uso da fórmula de Maclaurin	153
14. A lei dos senos	171
15. A lei dos cossenos	179
16. Verificação de identidades trigonométricas	185
17. Fatorial - arranjos e combinações	191
18. Operações com matrizes	203
19. Inversão de uma matriz	217
20. Divisão sintética de polinômios por binômios do 1º grau	223
21. Números complexos	231
Impressora GRAFIX	241
Bibliografia	243

Números perfeitos, abundantes e deficientes

Santo Agostinho compreendeu o primitivo anseio dos hititas pela perfeição, quando afirmou "ter Deus criado todas as coisas em seis dias, por ser o seis um número perfeito".

$$1 + 2 + 3 = 6$$

↓
 Divisores
 próprios

↓ Perfeito

O traço característico da primitiva ciência numérica dos chineses é que nela os números eram *figurados* ou seja representados por traços, linhas, círculos e pontos (veja a Figura 1).

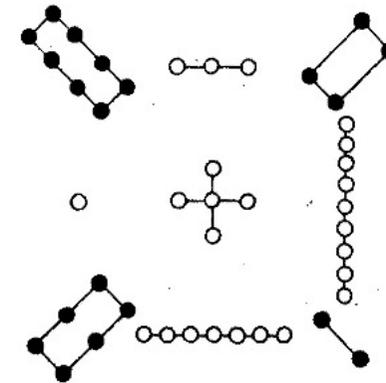


Figura 1 - Representação do primeiro quadrado mágico da história construído originalmente cerca de 1000 anos antes de Cristo. Livro chinês das Permutações .

Para nossos propósitos, isto é muito importante pois ajuda a reconstituir as origens de um ramo muito útil da Matemática que é o estudo das séries.

No Livro Chinês das Permutações, escrito cerca de 500 anos antes que Pitágoras tenha nascido, representavam-se os oito primeiros números por combinações de traços horizontais ora inteiros (-), ora interrompidos, (- -), os primeiros representando o princípio macho dos números ímpares e os últimos o princípio feminino dos números pares.

A separação, na primitiva ciência numeral dos chineses dos números pares e ímpares, aliás fêmeas e machos mostra a preocupação do homem primitivo com a fertilidade do seu rebanho, de seus campos e com o grupo familiar patriarcal.

O tratamento "animístico" dado aos números nos primeiros livros chineses de Matemática (veja a Figura 2) entrelaçava-se, aparentemente, com o re-

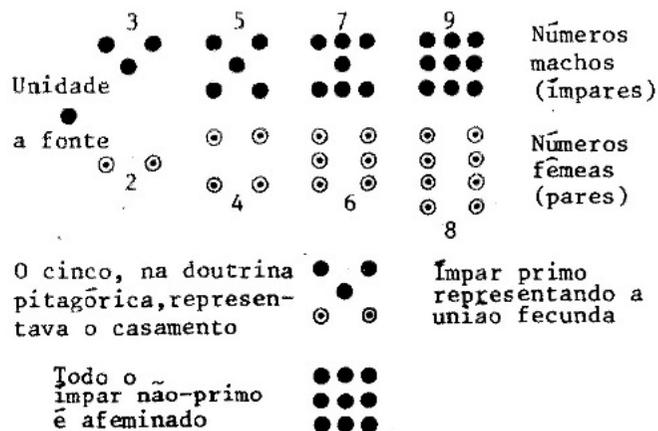


Figura 2 - O animismo e o gênero, na ciência numeral dos chineses e dos pitagóricos.

conhecimento de uma classe especial de números ímpares, os hoje chamados primos que analisaremos com mais detalhes no 2º programa.

Números primos são aqueles insuscetíveis de divisão em um número exato (inteiro) de números inteiros.

É por isso que eles são insuscetíveis de representação em grupos equivalentes (veja a Figura 2) de pontos ou círculos

3,5,7,11,13, etc. são primos

9,15,21,25,etc. embora ímpares não são primos.

A interpretação de Pitágoras sobre os números era a seguinte: o 1(um), tido como a fonte de todos os outros números era a razão, o 2(dois) era a opinião, o 3(três) era o primeiro número macho e era a potência, o 4 (quatro) era a justiça, o 5(cinco) era o matrimônio pois era a fusão do 3 (primeiro número macho) e do 2 (primeiro número fêmea).

No 5 (cinco) residia o segredo da cor, no 6 (seis) o segredo do frio, no 7 (sete) o segredo da saúde, no 8 (oito) o segredo do amor isto é 3(potência) "ajuntado" a 5 (casamento).

O sólido de seis faces encerrava o segredo da Terra.

A pirâmide continha, o segredo do fogo.

O sólido de doze faces continha o segredo dos ceus.

A esfera era a figura mais perfeita.

Havia os números perfeitos, abundantes, deficientes, amigáveis etc.

Nicômaco de Alexandria perdeu muito tempo para mostrar que 496 e 8128 são números perfeitos.

O pior é que o próximo número perfeito é 33 550 336.

Nicômaco num esforço improfícuo de alcançá-lo concluiu amargamente que: "o feio e o mal são prolíficos ao passo que o belo e o bom são raros e contáveis nos dedos".

Observação Importante - O.I.

Toda vez que aparecer o zero (0) o mesmo será representado por \emptyset para não confundir com a letra O.

Isto parece brincadeira mas não é!!!!

Com esta distinção você evitará muitos erros no futuro.

No nosso primeiro programa estudaremos os números que podem ser definidos e classificados em função da soma dos seus *divisores próprios*.

Definições

- 1 Entende-se por *divisores próprios* de um número inteiro positivo a todos os divisores inteiros que são menores que o próprio número. Por exemplo, os divisores próprios de 10 são 1, 2 e 5.
- 2 Um número é *abundante* se a soma dos seus divisores próprios é maior do que o número em si. Assim o número 12, que tem como divisores 1, 2, 3, 4 e 6 com soma:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16 \quad (16 > 12)$$

é um número abundante.

- 3 Um número é *deficiente* se a soma dos seus divisores próprios é menor que o número em si. É o caso do 10, pois:

$$1 + 2 + 5 = 8 < 10$$

- 4 Um número é *perfeito* quando a soma dos divisores próprios é igual ao número em si. Por exemplo, o número 6 é perfeito pois tem como divisores

$$1, 2 \text{ e } 3 \text{ e } 1 + 2 + 3 = 6$$

O nosso problema, tendo entrado com um número, é saber se ele é perfeito, abundante ou deficiente!!!!!!!

ANÁLISE DO PROBLEMA

Para determinar se um número N é perfeito, abundante ou deficiente precisa-se comparar a soma dos seus divisores S com o próprio número N.

- I) Se $S > N$ então o número é abundante
- II) Se $S = N$ então o número é perfeito
- III) Se $S < N$ então o número é deficiente

Algoritmo para obter a soma dos divisores próprios de um número N, que é um inteiro positivo maior que 1.

Em primeiro lugar deve-se entrar com N, a seguir deve-se inicializar a soma S em 1 e o divisor em 2.

Caso o divisor D seja maior que o quociente N/D deve-se comparar S com N imprimir a mensa-

gem correspondente e ir para (GOTO) 1 [veja o fluxograma da Figura 3].

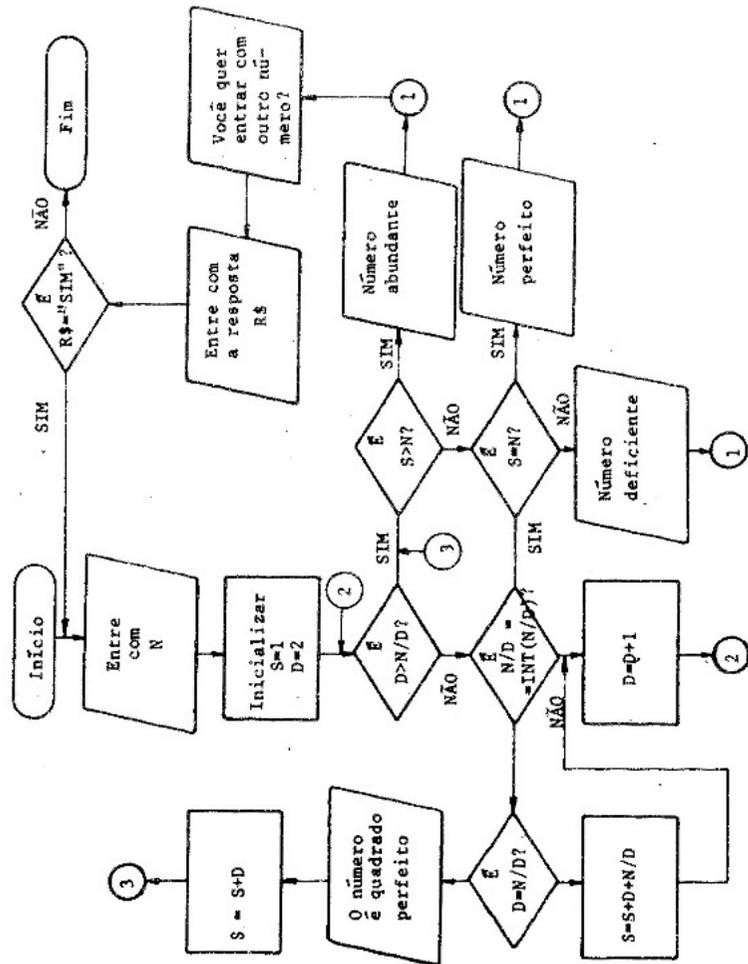


Figura 3 - Fluxograma para facilitar o entendimento do programa

Se por outro lado D não for maior que N/D deve-se continuar.

Faz-se o teste, se $N/D = \text{INT}(N/D)$ então D é um divisor e devem ser feitas outras verificações como por exemplo se $D = N/D$ então o número N é um *quadrado perfeito* quando então usa-se a instrução de atribuição $S = S + D$, imprime-se a mensagem, o valor de S e deve-se ir para ③.

Se por outro lado $D \neq N/D$ então o D e o quociente (N/D) são fatores, usa-se a instrução de atribuição $S = S + D + N/D$ e a seguir deve-se aumentar D de uma unidade e ir para ③ [veja o fluxograma da Figura 3].

Finalmente se $N/D \neq \text{INT}(N/D)$ então D não é um divisor de N , aumenta-se D de 1 e deve-se ir para ②.

Aí vai o plano final para o "ataque"

- 1 - Entre com o número N (maior do que 1).
- 2 - Ache a soma dos divisores próprios de N ; chame essa soma de S .
- 3 - a) Se $S > N$ então imprima "NÚMERO ABUNDANTE" e vá para ①
 b) Se $S = N$ então imprima "NÚMERO PERFEITO" e vá para ①
 c) Se $S < N$ então imprima "NÚMERO DEFICIENTE" e vá para ①.

Observação Importante (O.I)

Símbolos usados nos fluxogramas e o seu significado.

Símbolo	Significado
	O micro isto é o seu TK-2000 deve começar ou terminar um programa.
Início/Fim	
	O operador (você) deve entrar com informação dentro do TK-2000 COLOR ou pede-se ao TK-2000 que imprima uma informação que já foi processada.
	O seu TK-2000 COLOR vai decidir entre instruções alternativas.
DECISÃO	
	O TK-2000 COLOR atribue a variável no membro da esquerda ou seja à esquerda do sinal de igual (=) o valor que está à direita.
Atribuição	
	O programa vem de ou vai para outra parte do fluxograma.
Conectar	

Figura 4

E finalmente chegamos ao programa em BASIC para o seu TK-2000 COLOR.

```

10 PRINT "ABUNDANTE, PERFEITO OU DEFICIENTE"
20 INPUT "ENTRE COM UM NÚMERO INTEIRO";N
30 S = 1
40 D = 2
50 IF D > N/D THEN 90
60 IF N/D = INT (N/D) THEN 130
70 D = D+1
80 GOTO 50
90 IF S > N THEN PRINT N;"É UM NÚMERO ABUNDANTE";GOTO 120
100 IF S = N THEN PRINT N;"É UM NÚMERO PERFEITO";GOTO 120
110 PRINT N;"É UM NÚMERO DEFICIENTE"
120 PRINT : PRINT : GOTO 200
130 IF D = N/D THEN PRINT "ANTES DE MAIS NADA O NÚMERO";
    N;" É UM QUADRADO PERFEITO": S=S+D:GOTO 90
140 S = S + D + N/D : GOTO 70
200 FOR I = 1 TO 40
205 PRINT "*";           As instruções 200, 205 e 210 não
210 NEXT                 aparecem no fluxograma da Figura 3
220 PRINT "VOCÊ QUER ENTRAR COM OUTRO NÚMERO?(SIM/NÃO)"
230 INPUT R$
240 IF R$ = "SIM" THEN HOME : GOTO 10
250 END.

```

Comentários resumidos sobre as instruções BASIC do seu TK-2000 COLOR.

- 1) **PRINT** (veja as linhas de números 10, 90, 100, 110, 120, 130, 205, 220).

PRINT (expressões) (; ou ,)

Com essa instrução imprime-se expressões de diversas formas no modo texto.

Existem três modos de operação na tela.

Um deles é usado para a apresentação de textos (modo texto) em preto e branco e os outros dois que usaremos principalmente no livro "TK-2000 no gráfico e no som" são usados fundamentalmente para gráficos coloridos.

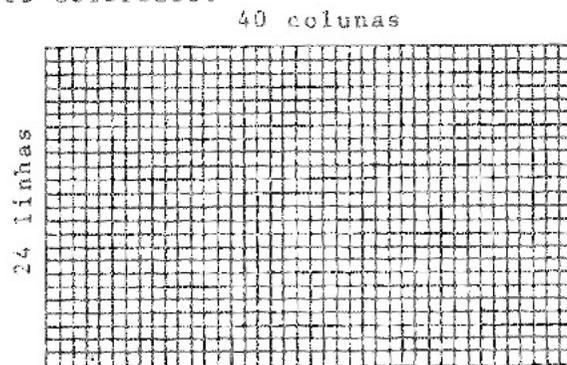


Figura 5

No modo texto, a tela pode conter até 24 linhas de 40 caracteres cada uma (Figura 5).

O sinal de interrogação (?) pode ser utilizado como abreviação da palavra reservada PRINT e quando se pedir um LIST será impresso como PRINT.

Além com a instrução LIST todas as linhas de comando do programa são apresentadas, ou seja, listadas na tela.

Pode-se também listar apenas um segmento ou trecho do programa utilizando-se

LIST X,Y ou LIST X-Y ou LIST-Y ou LIST X-

onde X é a primeira linha que se quer listar e Y é a última.

Sem qualquer opção, PRINT provocará a execução de um salto de linha e a volta do cursor à primeira posição da linha seguinte na tela (veja a linha 120 onde saltamos duas linhas).

Opcionalmente pode-se especificar uma lista de expressões separadas por vírgula e ponto e vírgula que será avaliada e impressa item por item (veja o PRINT na linha 130).

Se um item numa lista é seguido por um ponto e vírgula, então o próximo item é concatenado, isto é, impresso sem espaços separando-o do item anterior (veja a linha 205).

Para que um programa apresente o conteúdo fixo ou que utilize caracteres alfabéticos deve-se usar a instrução PRINT, após a qual digitar este conteúdo entre *aspas*.

2) HOME

O sinal de COMANDO (>) que você vê na primeira posição da tela (primeira coluna da primeira linha), indica que o TK-2000 COLOR está apto para receber instruções através do teclado.

O cursor (█) sempre indica a posição da tela na qual será registrado o próximo caractere digitado no teclado.

Quando se utiliza a instrução HOME (linha 240) todos os caracteres são sumpridos e o cursor se posiciona na primeira coluna da primeira linha.

3) INPUT (veja as linhas 20 e 230)

O formato usado por esta instrução é:

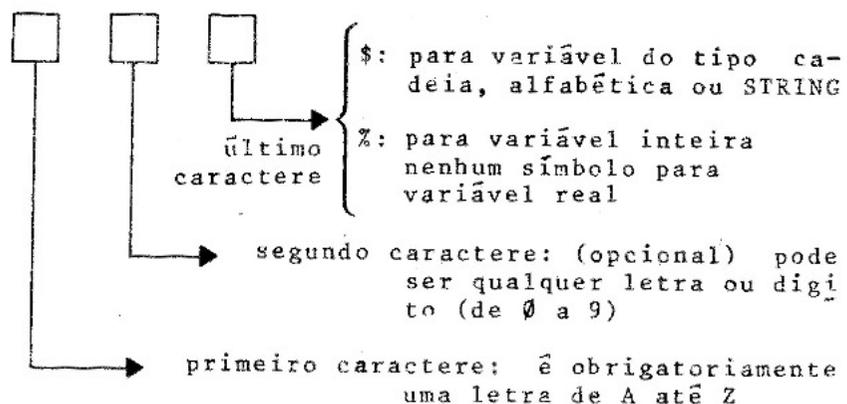
```
INPUT nome de variável (, nome de variável, ...)
```

Esse comando, permite uma associação entre nome de variável e o seu valor.

Vejamus então como se escolhe o nome de uma variável.

No BASIC do TK-2000 COLOR o nome de uma variável pode ter um, dois ou três caracteres.

Para determinar este nome deve-se observar as seguintes regras.



Ressaltamos assim que pode-se ter três tipos de variáveis de acordo com o tipo de dados que elas contêm: as variáveis tipo cadeia, que são relacionadas com qualquer conjunto de até 255 caracteres (com exceção das aspas), as variáveis inteiras que correspondem a números sem parte fracionária e as variáveis reais associadas a qualquer número inteiro, fracionário ou com parte inteira e fracionária.

No nosso primeiro programa todas as variáveis são reais com exceção de R\$ que é uma variável do tipo cadeia que pode inclusive tomar o valor "SIM".

A instrução 230 INPUT R\$ executa as seguintes operações

- apresenta um ponto de interrogação na tela;
- aciona o cursor;

c) espera pela digitação da variável alfabética.

Quando a cadeia é digitada e a tecla RETURN é calcada, faz com que a mesma seja associada a variável R\$ e só depois disso é que se permite que o programa prossiga para a próxima linha de comando.

No caso da linha 20 temos inicialmente a apresentação na tela da frase "ENTRE COM UM NÚMERO INTEIRO" e aguarda-se a introdução de um dado que é associado ao nome da variável real N.

4) MODO PROGRAMADO

É evidente que o seu TK-2000 COLOR está pronto para ser usado no modo imediato, também chamado de direto ou modo calculadora.

Nesta forma de operação o micro responde imediatamente as instruções desejadas.

Digite a instrução PRINT 385*44 e pressione a tecla RETURN.

Surgirá na linha seguinte do vídeo a resposta do produto ou seja 16940.

O modo imediato é porém muito limitado em termos da capacidade real de um micro.

É no modo programado que o micro TK-2000 poderá ter todo o seu potencial explorado.

Para se executar um programa é imprescindível que cada linha do mesmo seja relacionada a um número inteiro positivo.

Não existem números fixos a serem utilizados para esta numeração mas, comumente as linhas são numeradas em ordem crescente de dez em dez, no decorrer do desenvolvimento do programa.

Toda instrução, precedida com um número de linha, uma vez terminada a sua digitação deve ser seguida de um RETURN.

A tecla RETURN indica ao TK-2000 COLOR que a linha de comando foi terminada.

Você irá notar que o cursor vai para a próxima linha depois de ter sido pressionada a tecla RETURN porém a instrução não foi executada.

Para que uma instrução ou um conjunto de instruções (programa) seja executado é necessário usar a instrução `RUN`.

`RUN` é a instrução que "dá partida" na execução de um programa ou como se costuma dizer na gíria dos "computacas", faz com que o programa "rode".

As vezes, para analisar um programa, é útil que este seja executado a partir de uma linha de programa.

Para tanto, podemos usar o comando:

`RUN nulín`

onde *nulín* representa uma linha genérica do programa a partir da qual se quer a execução do mesmo.

Não esqueça portanto no fim do programa de digitar a palavra RUN em modo imediato e a seguir pressionar a tecla RETURN.

5) `LET` (linhas 30, 40, 70, 130 e 140)

Através do comando LET relacionamos ou melhor atribuímos um valor numérico ou alfabético, conforme o caso, a uma variável.

No seu TK-2000 COLOR o comando LET é opcional, de maneira que podemos omiti-lo para executar

a associação entre um nome de variável e o seu valor.

Foi aliás o que fizemos nas linhas 30, 40, 70, 130 e 140.

6) `IF-THEN nulín`

A instrução IF-THEN é uma instrução de desvio condicionado.

Sempre que em um programa a sequência numérica de execução das linhas não é obedecida diz-se que ocorreu um *desvio*.

Caso a afirmação ou a expressão matemática que inclui um operador relacional após o IF for verdadeira desviamos o programa para uma linha de número *nulín*.

Se por outro lado a condição após o IF não for verdadeira o programa prossegue normalmente na próxima linha.

Dessa maneira na linha 50 se D for maior que N/D vai-se para a instrução de número de linha 90 e em caso contrário vai-se para a linha 60.

Na linha 60 se N/D for igual a parte inteira de (N/D) então vai-se para a linha 130 e em caso contrário atinge-se a linha 70.

Temos ainda IF-THEN nas linhas 90, 100 e 240.

7) `GOTO nulín`

O comando GOTO permite desviar a execução do programa para qualquer número de linha do mesmo de forma incondicional.

Assim uma vez atingida a linha 80 o GOTO que aí aparece faz retroceder o programa para a linha 50.

É semelhante a interpretação dos GOTO que aparecem nas linhas 90, 100, 120, 130, 140 e 240.

8) O USO DE DOIS PONTOS (:) NUMA LINHA DE PROGRAMA

Através do uso de dois pontos (:) podemos incluir mais do que um comando numa única linha de programa.

Isto tem como vantagem por exemplo a minimização do esforço de digitação.

Tem também alguns inconvenientes.

As linhas 90, 100, 120, 130, 140 e 240 são portanto linhas com instruções múltiplas.

9) O PAR FOR-NEXT

A instrução FOR-NEXT é na realidade dividida em duas ordens que são: a ordem FOR e a ordem NEXT.

Ela tem por finalidade básica repetir um determinado número de vezes, as instruções que se encontram entre as ordens FOR e NEXT.

No nosso caso por exemplo entre o FOR (linha 200) e o NEXT (linha 210) só temos uma instrução que é a 205 PRINT "*";

O FOR é sempre seguido de uma variável à qual se atribui um valor inicial (no nosso caso I = 1) após o que aparece a palavra chave TO e finalmente após a mesma vem o valor máximo que esta variável pode assumir (no nosso caso I = 40).

O número de vezes que será repetido o "PRINT "*";" é igual a

$$\langle n \rangle = (\langle \text{valor final} \rangle - \langle \text{valor inicial} \rangle + 1)$$

No nosso caso particular

$$\langle n \rangle = 40 - 1 + 1 = 40 \text{ vezes}$$

Como no PRINT se pede a impressão de um asterisco (*) e como a próxima impressão é concatenada ou justaposta obteremos uma linha de 40 asteriscos.

Você não esqueceu que em uma linha no modo texto cabem exatamente 40 caracteres, esqueceu?

Na realidade esta é uma explicação bem resumida do poderoso e importante par FOR-NEXT.

Falaremos muito dele daqui para frente...

10) Indicamos com $\bar{\bar{K}}$ o espaço branco muito importante por exemplo na linha 110 para que o valor da variável N não saia "encostado" na mensagem "É UM NÚMERO DEFICIENTE".

A mesma interpretação é válida para as linhas 90, 110 e 130.

11) END

A instrução END (linha 250) faz com que a execução de um programa seja interrompida ou finalizada.

Usaremos sempre o END para finalizar os programas deste livro, porém como "dica" para economia de espaço e tempo no futuro não use o END pois a sua omissão não trará nenhum malefício e fará apenas com que o programa pare no último comando executado.

Agora que está tudo explicadinho que tal você verificar que 496, 8128 e 33550336 são todos perfeitos. Quem vai ficar agradecido é o Nicômaco!!!!!!

Um pouco mais de trabalho para você caro(a) leitor(a)

Para cada um dos problemas abaixo apresente:

- um plano para resolver o mesmo;
- o desenho do fluxograma correspondente;
- a codificação em BASIC para o TK-2000

COLOR.

I) Entre com um número inteiro positivo e obtenha todos os divisores do mesmo.

II) Dois números chamam-se "amigáveis" ou "cordiais" se a soma dos divisores próprios de cada um é igual ao outro número.

Foi o famoso matemático suíço Leonard Euler (Figura 6) que nasceu em 1707 e morreu em 1783



Figura 6

que deu a primeira grande lista dos números amigáveis.

Nicolò Paganini, com dezesseis anos de idade em 1866 achou um par de números amigáveis que Euler tinha esquecido na sua lista.

O par de números é 1184 e 1210.

Os divisores de 1210 são

1, 2, 5, 10, 11, 22, 55, 110, 121, 242, 605
cuja soma é 1184.

Por sua vez os divisores próprios de 1184 são

1, 2, 4, 8, 16, 32, 37, 74, 118, 296, 592
cuja soma é 1210.

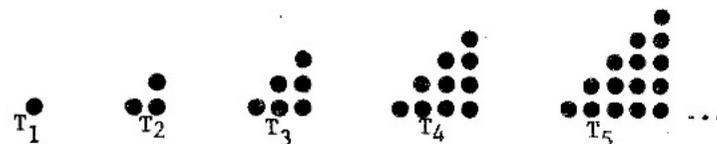
Explicado o que são números amigáveis obtenha com o auxílio do seu prestativo e "amigável" TK-2000 COLOR o número amigável de 220.

Será que o seu TK-2000 dá como resposta o número 284?

III) Obtenha a soma dos 20 primeiros termos das seqüências formadas pelos seguintes números:

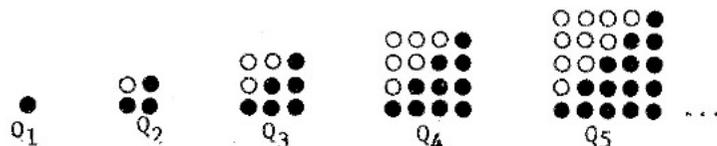
a) Os números triangulares simples

(1... 3... 6... 10... 15... 21... 28... 36, etc.)



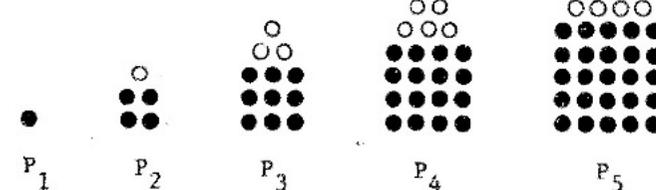
b) Os números quadrados

(1... 4... 9... 16... 25... 36... 49... 64... 81... 100)

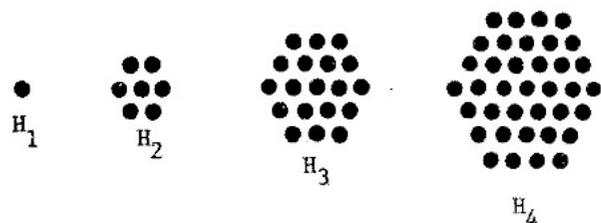


c) Os números pentagonais

(1 - 5 - 12 - 22 - 35 etc.)



d) Os números hexagonais
(1 - 7 - 19 - 37 etc.)



e) Os números estrelados
(1 - 8 - 21 - 40 etc.)

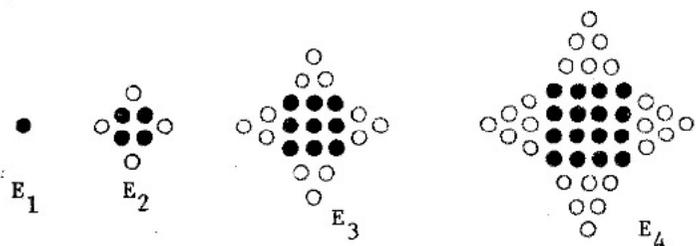


Figura 7

O.I. Como ajuda olhe o programa Nº 6 e a Tabela 10.

Frações racionais

Antes de elaborarmos o nosso segundo programa falemos um pouco do número dois (2).

O número dois, na antiguidade, era em geral representado por duas pequenas barras, ou, então, por dois pequenos pontos.

Se o número *um* simboliza a identidade, a igualdade, a concordância e a simpatia reinante no mundo o *dois* implica na idéia da multiplicidade, de sigualdade, discriminação.

Acima do cardinal *um* e abaixo do vinte, o *dois* é o único inteiro natural que oferece a dupla forma - sendo uma para o masculino e outra para o feminino.

Muitos são os vocábulos que derivam do número dois.

A pessoa que hesitava entre duas decisões o romano criticava severamente apontando-o como um indivíduo *dubius*.

Do verbo *dubitare* (hesitar, ficar indeciso entre dois) surgiu duvidar.

Nós temos certeza que você estimado(a) leitor(a) não parará no 2º programa, irá até o fim com o que, além de aprender muita Matemática saberá dominá-la com o auxílio do seu TK-2000 COLOR.

É comum o uso do prefixo latino *bi* ou *bis* com o significado de duas vezes.

Análise os vocábulo bicicleta, bilateral, binário, bimestre, bicampeão, etc.

O prefixo grego *di* ou *dis* é equivalente a bis e aparece nas palavras: diedro, diálogo, dissílabo, etc.

O número dois aparece na frase:

"Tão certo como dois e dois serem quatro"

Porque se escolheu a soma dois mais dois, seguida do seu resultado quatro, como indício de coisa certa, infalível, preferindo-a a qualquer outra?

A explicação é a seguinte:

Os números dois e dois conduzem ao resultado quatro nas operações elementares por composição, isto é, na adição, na multiplicação e na potenciação.

{	Adição → $2 + 2 = 4$ (dois mais dois é igual a quatro)
	Multiplicação → $2 \times 2 = 4$ (dois vezes dois é igual a quatro)
	Potenciação → $2^2 = 4$ (dois elevado a dois é igual a quatro)

Não acontece esta mesma concordância de resultados com qualquer outro par de números iguais.

O algebrista define o binômio como "o polinômio de dois termos".

Porém não esqueça que ao desenvolver um binômio de Newton, você poderá ter muitos termos...

Muitos são os provérbios que envolvem o número dois e entre eles destacamos:

{	Homem avisado vale por dois.
	Dois bicudos não se beijam
	Não há dois altos sem um baixo no meio
	Com uma só cajadada matar dois coelhos
	Dois pesos e duas medidas
}	Dá duas vezes quem de pronto dá

Para finalizar este rápido apanhado sobre o número dois o que seria dos computadores com os seus bits e bytes se não houvesse o sistema binário?!?!?

E além do que, um par ou seja duas pessoas um homem e uma mulher é uma junção que quase leva ao infinito em todos os sentidos...

Para homenagear o número dois nada melhor do que tentar representar um número em duas partes ou seja através de uma fração racional.

É muito comum em algumas áreas ter que expressar um número como fração racional.

Um exemplo típico está na área de engenharia civil onde quase tudo é expresso em frações de polegadas.

Até o tamanho dos disquetes é expresso como $5 \frac{1}{4}$, em polegadas.

Quem não diz minha cara-metade (designação carinhosa dada à esposa), meia-colher (designação dada, em São Paulo, ao servente de pedreiro), meia-idade (pessoa que já não é moça, mas que não pode ser incluída entre os velhos), meia-luz (condição de iluminação que acalma alguns e incentiva os outros...) meio-dia (hora que deveria dividir o dia em duas partes iguais), etc.

O justo é não esquecer que a estrada do conhecimento é calcada nos números.

Jamais poderá o homem libertar-se do predomínio e da suplantação do número.

Neste programa entra-se com um número (racional ou irracional) e gera-se sucessivamente aproximações do mesmo cada vez melhores em forma de frações racionais.

Na saída, no início tem-se uma aproximação bem grosseira que nada mais é do que a parte inteira do número e a seguir são impressas aproximações cada vez melhores.

Como no caso de um número irracional estas aproximações vão ser tantas, até que se atinja a precisão do TK-2000 COLOR, o programa pergunta a respeito de um limite para o número de iterações desejado.

Caso se entre com um número racional, após um número finito de iterações obtém-se a mensagem "FRAÇÃO EXATA" indicando obviamente que se atingiu o "fim" dentro do número de iterações especificando previamente.

Aí vai o programa:

```

10 HOME
20 PRINT : PRINT
30 HTAB 10: VTAB 7
40 PRINT "PROGRAMA PARA FRAÇÕES RACIONAIS"
50 FOR Z = 1 TO 3999 : NEXT Z
60 CALL - 936
70 PRINT : PRINT : PRINT : PRINT
80 PRINT "ESTE PROGRAMA ACEITARÁ QUALQUER NÚMERO REAL
    POSITIVO COMO ENTRADA E PRODUZIRÁ SUCESSIVAMENTE APRO-
    XIMAÇÕES CADA VEZ MELHORES DO MESMO EM FORMA DE FRAÇÕES
    RACIONAIS"
90 PRINT : PRINT : PRINT : PRINT : PRINT
100 GOSUB 500
110 PRINT "SE ENTRARMOS COM UM NÚMERO RACIONAL, O PROGRAMA
    INDICARÁ QUE A RESPOSTA FINAL É EXATA, DESDE QUE SE
    ESTEJA DENTRO DO LIMITE DE ITERAÇÕES ESPECIFICADO".
120 GOSUB 500
130 PRINT : PRINT : PRINT
140 INPUT "ENTRE COM O SEU NÚMERO:V"; V
150 PRINT : INPUT "QUANTAS ITERAÇÕES QUER FAZER?W"; I
155 HOME

```

```

160 M = V
170 A1 = 0 : A2 = 1 : B1 = 1 : B2 = 0
180 PRINT : PRINT : PRINT
190 FOR J = 1 TO I
200 N = INT (V) ←toma-se a parte inteira do número
210 TEMP = A2
220 A2 = N * A2 + A1
230 A1 = TEMP
240 TEMP = B2
250 B2 = N * B2 + B1
260 B1 = TEMP
270 PRINT:PRINT A2;"/";B2;
280 IF V = N OR M = A2/B2 THEN 330
290 PRINT : PRINT
300 V = 1/(V-N)
310 NEXT J
320 GOTO 400
330 PRINT "FRAÇÃO EXATA"
340 PRINT:PRINT:PRINT
350 PRINT "VOCÊ QUER ENTRAR COM OUTRO NÚMERO (S/N)?
360 INPUT R$
370 IF R$ = "S" THEN 10
380 IF R$ <> "N" THEN 360
400 END
500 FOR L=1 TO 40
510 PRINT "*";
520 NEXT L
530 RETURN

```

Uma possível saída pode ser:

ENTRE COM O SEU NUMERO 6.12318

QUANTAS ITERACOES QUER FAZER 15

6/1

49/8

398/65

845/138

4623/755

5468/893

21027/3434

47522/7761

306159/50000 FRACAO EXATA

VOCE QUER ENTRAR COM OUTRO NUMERO (S/N)?
?N

Explicações sobre o programa

1) VTAB E HTAB (linha 30)

Através de VTAB pode-se mover o cursor para qualquer linha do vídeo.

Este movimento é sempre executado no sentido vertical, para baixo ou para cima, sendo que a posição é dada relativamente ao limite superior da tela (veja a linha 1 da Figura 5) dentro dos limites de 1 a 24.

Qualquer valor fora dos limites citados faz com que o TK-2000 COLOR emita a mensagem de erro:

?VALOR ILEGAL ERRO

A instrução HTAB é usada de forma análoga a VTAB mas move o cursor no sentido horizontal. Neste caso, entretanto, os limites utilizados vão de 1 a 255, relativamente à margem esquerda da tela.

Uma vez que a tela só possui 40 posições horizontais, os números 41 a 80 passam a posicionar o cursor na linha seguinte e assim por diante.

Você notou que a mensagem "PROGRAMA PARA FRAÇÕES RACIONAIS" apareceu na linha 7 e a partir da coluna 10 do vídeo?

Ótimo!!!

2) CALL (linha 60)

Esta instrução provoca o desvio do programa para uma rotina em linguagem de máquina.

Sua forma geral é:

CALL xyz

onde xyz é o endereço inicial da rotina desejada.

Para que após a execução da rotina, o programa volte automaticamente para a próxima ordem após o CALL, a última instrução deverá ser RETURN.

Com o CALL-936 obtém-se um efeito exatamente igual ao HOME (volte à página 11 para ler novamente qual é efeito do HOME).

3) GOSUB (linhas 100 e 120)

GOSUB é a instrução que desvia o programa para uma subrotina.

O uso de subrotinas é um artifício bastante usado em programação.

Entende-se por subrotina, um programa secundário, que se pode usar diversas vezes dentro de um programa maior.

Por exemplo, no nosso caso a subrotina que começa na instrução de número de linha 500 é apenas para traçar uma linha de asteriscos (*) acima e outra abaixo da mensagem que é enviada pela linha 110.

Além de facilitar o trabalho do(a) programador(a) que não precisará escrever repetidas vezes um mesmo trecho do programa, as subrotinas economizam espaço na memória do seu TK-2000 COLOR.

Ao final da execução da subrotina, a instrução RETURN faz com que o programa volte para a sua sequência normal, uma instrução após o GOSUB.

4) Operadores lógicos ou Booleanos (linha 280)

Você pode usar três operadores lógicos no seu TK-2000 COLOR ou seja AND(E), OR(OU) e NOT(não).

Apresentamos a seguir as *tabelas verdade*

Entrada	Saída
1 AND 1	1
1 AND 0	0
0 AND 1	0
0 AND 0	0

Tabela 1 AND

Entrada	Saída
1 OR 1	1
1 OR 0	1
0 OR 1	1
0 OR 0	0

Tabela 2 OR

Entrada	Saída
NOT 1	0
NOT 0	1

Tabela 3 NOT

Caso existir alguma dificuldade para você entender o que é um operador Booleano pense na seguinte situação: suponha que está com a sua namorada discutindo o que vão fazer a noite.

O operador AND diz que você irá a uma "danceteria" se você e ela desejarem isto.

O operador OR diz que você irá a danceteria se ao menos você ou ela quiser isto.

Já o operador NOT é o da "contrariedade" isto é, se você discordar da namorada a sua decisão é a NOT da dela.

Os micros não operam com analogia; eles trabalham com números.

No caso da lógica Booleana tem-se os valores 1 para verdadeiro e 0 para o falso (veja as Tabelas 1, 2 e 3).

Como os operadores Booleanos trabalham com "uns" e "zeros", eles comumente são usados dentro de expressões relacionais ou seja nas operações de comparação.

Além das operações comparativas sempre resultam em "uns" e "zeros" sendo, como já dissemos, o

1 (um) para a condição *verdadeira* e o 0 (zero) para a condição *falsa*.

Para verificar isto escreva em modo imediato

```
> PRINT (7 > 5) AND (4 > 3.5)
```

e verá aparecer o 1 (um)

1

Por outro lado se você escrever:

```
> PRINT (13 < 7) OR (7.23 < 5.27)
```

aparecerá o 0 (zero)

0

Na linha 280 temos o operador OR e caso ocorra $V = N$ ou $M = A2/B2$ ocorre o desvio para a linha 330 pois nesta situação temos a condição verdadeira.

Em caso contrário vai-se para a linha 290.

5) Operações comparativas (linhas 370 e 380)

Na Tabela 4 indicamos os tipos de operações comparativas, bem como os respectivos símbolos usados pelo TK-2000 COLOR

OPERAÇÃO	SÍMBOLO
menor que	<
maior que	>
igual	=
diferente de	<>
maior ou igual a	>=
menor ou igual a	<=

Tabela 4

Estes sinais de operação são usados para comparar dois números. No TK-2000 COLOR se a comparação for verdadeira, ela fornecerá o valor 1 (um); se não for, ela fornecerá o valor 0 (zero).

As operações comparativas geralmente, aparecem dentro da instrução `IF - THEN`.

Trabalhinho intelectual para você respeitado(a) leitor(leitora).

Elabore um programa que permita calcular o logarítmo de um número em qualquer base.

"RECUERDO"-Geralmente apenas duas bases são usadas para calcular logarítmos: a base 10 e a base e onde $e = 2,71828$ é o número de Neper (veja a Figura 8).

Os logarítmos de base e , além de serem chamados logarítmos neperianos também são chamados de logarítmos naturais. Aliás, o seu TK-20000 COLOR só sabe calcular diretamente os logarítmos neperianos.

O programa obviamente deve se basear na definição de logarítmo ou seja:

"logarítmo de um número é a potência a qual a base do logarítmo deve ser elevada para produzir o número".

Assim o logarítmo de 64 na base 4 é igual a 3 pois $64 = 4^3$

Ou genericamente

$$(\text{base})^{\text{logarítmo}} = \text{número}$$

ou ainda

$$B^L = N \quad \rightarrow (1)$$

Tomando logarítmos de ambos os membros da

(1) vem:

$$\log(B^L) = \log N$$

$$L * \log(B) = \log(N) \quad \rightarrow (2)$$

Definindo a circunferência

Este é o nosso terceiro programa e inicialmente destaques a importância do número três na Matemática e em geral.

O prestígio do número três decorre certamente de vários conjuntos notáveis que são trípliques.

Três são as partes do universo: céu, terra e inferno.

Três são as fases da existência humana: nascimento, vida e morte.

Três são as parcelas da eternidade: passado, presente e futuro.

Três são os reinos da natureza: animal, vegetal e mineral.

Três são as partes do corpo humano: cabeça, tronco e membros.

Três são as dimensões do espaço: comprimento, largura e altura.

Três são os elementos principais do mundo material: terra, água e ar (o homem levou muito tempo para descobrir o fogo).

Três são os meus filhos Victor Jr., Sergio e Alexandre.

Três são em Matemática, as condições possíveis para a situação de uma variável, ou cresce ou se mantém constante ou decresce.

Observação Importante - O.I.

(*) é agora o símbolo para a operação de multiplicação no BASIC e LOG(B) ou LOG(N) é a forma de escrever a função logarítmica.

De (2) vem:

$$L = \frac{\log(N)}{\log(B)}$$

ou em BASIC $L = \text{LOG}(N)/\text{LOG}(B)$ \longrightarrow (3)

A (3) é a expressão básica para obter o logaritmo de um número N em qualquer base B positiva.



Figura 8 - NEPER (1550-1617)

Três são os lados de um triângulo.

Três pontos definem um plano desde que não estejam alinhados.

Três pontos definem uma única circunferência, novamente se não estiverem alinhados...

Três são os pontos que formam o sinal gráfico chamado "reticência" (...) e que as vezes deixam a maior dúvida e não algo óbvio.

É depois de tanto "três" nada melhor do que mostrar como se pode *definir uma circunferência*.

Quem não lembra de umas leis da Geometria que estabelecia que se três pontos estão no plano e não alinhados é possível passar uma única circunferência pelos mesmos.

Não é muito "sopa" obter, dadas as coordenadas dos três pontos (x_1, y_1) ; (x_2, y_2) ; (x_3, y_3) , as coordenadas do centro da circunferência (x, y) e o raio da mesma.

Porém supondo que recebemos de um "matemático-mágico" bonzinho as seguintes expressões:

$$y = \frac{\frac{x_3^2 - x_1^2 + y_3^2 - y_1^2}{2(x_3 - x_1)} - \frac{x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2}{2(x_2 - x_1)}}{\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}} \longrightarrow (1)$$

$$x = \frac{x_3^2 - x_1^2 + (y_3 - y_1)(y_3 + y_1 - 2y)}{2(x_3 - x_1)} \longrightarrow (2)$$

$$r = \sqrt{(x_3 - x)^2 + (y_3 - y)^2} \longrightarrow (3)$$

No programa abaixo, que por sinal é muito simples, (será?) o que se faz é ensinar o seu TK-2000 COLOR a usar convenientemente as equações (1), (2) e (3) acima indicadas.

Para não escrever expressões matemáticas muito extensas separamos a equação (1) em algumas partes componentes.

Foi apenas uma questão de simplificação...

```

10 CALL - 936
20 PRINT: PRINT: PRINT
30 PRINT "NESTE PROGRAMA DEVEM SER DADOS TRÊS PONTOS NO
  PLANO SEM ESTAREM ALINHADOS E AÍ OBTÊM-SE O CENTRO DA
  CIRCUNFERÊNCIA (X,Y) QUE PASSA PELOS MESMOS ASSIM COM
  O SEU RAIO"
40 FOR Z = 1 TO 3999 : NEXT Z
50 PRINT: PRINT: PRINT
60 PRINT DEFININDO A CIRCUNFERÊNCIA"
70 PRINT: PRINT: PRINT
80 INPUT "ENTRE COM O PRIMEIRO PONTO (X1,Y1) "; X1,Y1
90 INPUT "ENTRE COM O SEGUNDO PONTO (X2,Y2) "; X2,Y2
100 INPUT "ENTRE COM O TERCEIRO PONTO (X3,Y3) "; X3,Y3
110 A = (Y2-Y1)/(X2-X1)
120 B = (Y3-Y1)/(X3-X1)
130 IF A = B THEN PRINT "OS PONTOS ESTÃO ALINHADOS":
  PRINT "VOCÊ DEVE ENTRAR COM OUTROS DADOS": GOTO 70
140 HOME
150 PRINT: PRINT: PRINT
200 C = ((X2-X1)*(X2+X1)+(Y2-Y1)*(Y2+Y1))/(2*(X2-X1))
210 D = ((X3-X1)*(X3+X1)+(Y3-Y1)*(Y3+Y1))/(2*(X3-X1))
220 Y = (D-C)/(B-A)
230 X = D - B*Y
240 R = SQR((X3-X)*(X3-X)+(Y3-Y)*(Y3-Y))
250 PRINT "A CIRCUNFERÊNCIA DEFINIDA PELOS TRÊS PONTOS:"
260 PRINT: PRINT
270 PRINT "X1=";X1;"Y1=";Y1
280 PRINT "X2=";X2;"Y2=";Y2
290 PRINT "X3=";X3;"Y3=";Y3
300 PRINT: PRINT: PRINT
310 PRINT "TEM UM RAIO = "; INT (1000*R+.5)/1000
320 PRINT: PRINT "E UM CENTRO NO PONTO:"
330 PRINT: PRINT "X=";X;"Y=";Y
340 PRINT: PRINT: PRINT: PRINT
350 PRINT "VOCÊ QUER ALGUM OUTRO CÁLCULO (S/N)?"
360 INPUT R$: PRINT R$
370 IF R$ = "S" THEN HOME: GOTO 10
380 END

```

Obtêm-se o raio com
três casas deci-
mais

Uma possível saída pode ser a seguinte:

DEFININDO A CIRCUNFERENCIA

```

ENTRE COM O PRIMEIRO PONTO (X1,Y1) 4
??1
ENTRE COM O SEGUNDO PONTO (X2,Y2) 1
??4
ENTRE COM O TERCEIRO PONTO (X3,Y3) 7
??3

```

A CIRCUNFERENCIA DEFINIDA PELOS TRES PONTOS

```

X1= 4   Y1= 1
X2= 1   Y2= 4
X3= 7   Y3= 3

```

TEM UM RAIO = 3.102

E UM CENTRO NO PONTO:

X= 4.1 Y= 4.1

VOCE QUER ALGUM OUTRO CALCULO (S/N)?

?N

O.I. Todo mundo sabe que a equação de uma circunferência de círculo é

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2 \quad \rightarrow (4)$$

onde (α, β) são as coordenadas do centro.

Daí vem a equação de uma circunferência

$$x^2 - 2\alpha x + y^2 - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0$$

ou ainda

$$x^2 + Ax + y^2 + By + C = 0 \quad \rightarrow (5)$$

onde

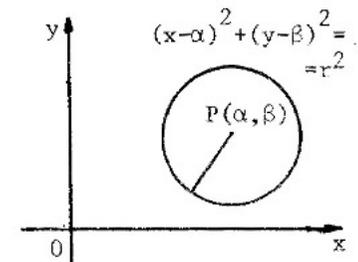


Figura 9

$$\alpha = -\frac{A}{2}; \quad \beta = -\frac{B}{2}; \quad c = \alpha^2 + \beta^2 - r^2$$

Para os três pontos (x_1, y_1) ; (x_2, y_2) e (x_3, y_3) temos:

$$\begin{cases} x_1^2 + Ax_1 + y_1^2 + By_1 + C = 0 & \longrightarrow (6) \\ x_2^2 + Ax_2 + y_2^2 + By_2 + C = 0 & \longrightarrow (7) \\ x_3^2 + Ax_3 + y_3^2 + By_3 + C = 0 & \longrightarrow (8) \end{cases}$$

Será que manipulando as equações (6), (7) e (8) você não consegue chegar pelo menos na (1)?

Tente rapazinho (mocinha)!!!!

Assim você se transformará no mágico bonzinho ou na fada maravilhosa (cada um na sua, tá...).

Probleminhas raxakukinha para você esperto(a) leitor(leitora).

1) Três são os lados que definem um triângulo e conhecendo os mesmos pode-se achar a área do triângulo em questão.

Quem não conhece a famosa fórmula de Heron (alguns também escrevem Hierão...)?

Ah! Ah! Ah!

Você não conhece e por isto, aí vai a própria

$$\text{Área de um triângulo} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \longrightarrow (9)$$

onde $p = \frac{a+b+c}{2}$ (p é o semi-perímetro e a , b e c são os lados do triângulo)

Vamos, deixe Heron contente e elabore um programa que permita achar a área dos triângulos indicados na Tabela 5.

Caso	a	b	c	Área (S)
1	2	5	7	?
2	30,25	40,33	50,66	?
3	5	6	7	?
4	11	12	15	?
5	8	8	8	?
6	348	$\sqrt{330}$	$\sqrt{625}$?

Tabela 5

Dica

Se você não souber fazer este programa consulte o nosso livrinho "CONHECENDO E UTILIZANDO O TK-2000" onde ele aparece totalmente "destrinchado".

4

Quatro em 1 (um)

Chegamos ao quarto programa e na realidade vamos apresentar aqui quatro pequenos programas que entretanto são muito úteis e que aparecem em um só, daí o nome que escolhemos...

Mas falemos antes um pouco também sobre o número quatro.

O quatro é um *número pitagórico*.

Cinco séculos antes de Cristo viveu na Grécia um filósofo, geômetra e moralista cujo nome fulgura com excepcional destaque na história da Matemática.

Chamava-se Pitágoras e nasceu na ilha de Samos.

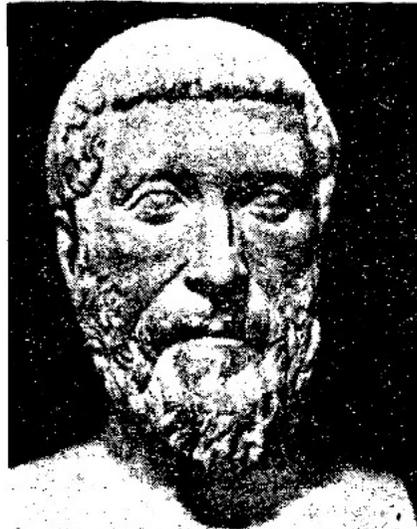


Figura 10
PITÁGORAS

Ensinava Pitágoras a seus fiéis e aplicados discípulos que os números governavam o mundo e que por isso, todos os fenômenos que ocorriam na terra, no ar, no fogo ou na água podiam ser expres-

sos, avaliados e previstos por meio de números.

Os números, proclamava o mestre, exercem decisiva influência sobre a vida de cada ser.

Existem números felizes e números fatídicos.

As doutrinas do filósofo de Samos atingiram no meio intelectual de Crotona, naquela época uma pequena colônia grega, um prestígio incalculável.

Para os pitagóricos o número quatro, imagem do sólido, é o primeiro quadrado perfeito par e representa a matéria nos quatro elementos que deveriam integrá-la: o fogo, o ar, a terra e água.

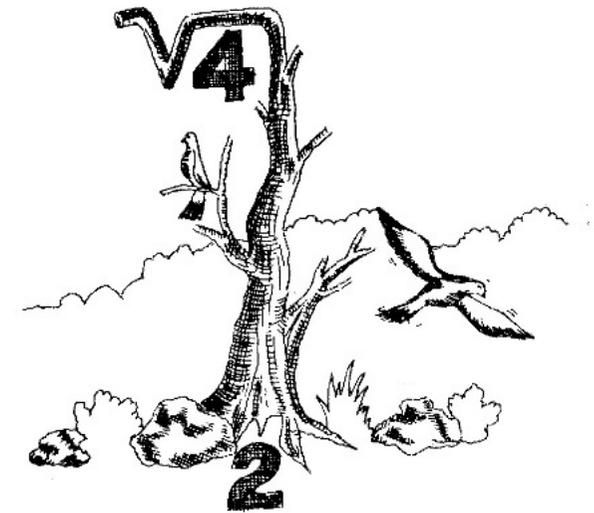


Figura 11

Os famosos Versos Dourados, atribuídos a Pitágoras, começam por uma exaltação do número quatro: "Salve número famoso, gerador dos deuses e dos homens".

O número quatro, na linguagem mística, lembra a figura de um quadrado, simboliza a extensão limitada do mundo físico, pois segundo a crença dos

antigos sacerdotes caldeus, a Terra era plana e tinha a forma perfeita de um *quadrilátero regular*.

O templo dos maometanos, em Meca - a Caaba - tem a forma exata de um quadrado e os árabes veneram uma pedra negra de forma cúbica, isto é, com todas as faces regulares e quadrangulares.

Os sacerdotes chineses, vinte séculos antes do nascimento de Cristo, já ensinavam que "a terra era representada pela cor amarela e que tinha a forma de um quadrado".

O 4 (quatro) simboliza a criação, o quaternário terrestre da yoga oriental, as 4 Nobres Verdades de Buda, os 4 seres mitológicos do Celeste Império, que se o mundo ocidental não abrir o olho vai dominar o mundo antes do ano 2100...) ou seja, o dragão, o fênix, o unicórnio e a tartaruga.

E agora que já estamos "informadinhos" um pouco sobre o quanto o quatro é importante partamos para os quatro programas prometidos em um só.

É muito comum ao se fazer análise de dados (por exemplo querer construir um histograma...) ser necessário saber qual é o menor e o maior valor do conjunto dado.

Caso você entre com o código K=1 o seu programa lhe imprimirá o menor valor (MIN) e o maior valor (MAX) de um conjunto de A(I) números onde $2 \leq I \leq N$.

Desta forma com K=1 entramos no programa "MIN MAX".

Muitas vezes este programa é usado como uma subrotina em um programa maior.

O TK-2000 COLOR é um micro maravilhoso!!!!

Ele permite executar milhares de cálculos

em frações de segundo e apresenta os resultados com muitas casas decimais.

Contudo na maior parte das vezes não precisamos de muitas casas decimais.

Aliás, a forma dos números no microcomputador TK-2000 COLOR segue as seguintes regras.

Regra 1 - Zeros a direita do número após o ponto decimal, ou zeros à esquerda do número são eliminados.

Regra 2 - Números muito próximos de zero entre $-3,10^{-39}$ e $3,10^{-39}$ (em BASIC $-3*10^{-39}$ e $3*10^{-39}$) são arredondados para zero.

Regra 3 - Números com partes inteiras e decimais, com mais de 9 algarismos, são arredondados.

Regra 4 - Números com mais de 9 algarismos inteiros passam a ser representados através da notação científica.

Para evitar números de muitas casas decimais é que apresentamos o programa "ARREDONDANDO UM NÚMERO" que se obtém entrando com o código K=2 no programa principal.

Neste "segmento" do programa "QUATRO EM 1 (UM)" você pode entrar com qualquer número e arredondá-lo para um número de casas decimais menor (dentro dos limites do seu TK-2000, é claro...)

Caso você entre com K=3 se desviará para o programa "OBTENDO A RAIZ N-ÉSIMA DE UM NÚMERO".

Neste trecho do programa calculam-se sucessivamente várias aproximações da raiz de um número até que o nível desejado de precisão seja atingido.

Faz-se nesta parte do programa um arredondamento.

Para se ter uma precisão total especifique


```

560 IF R = 0 THEN P = 1 : GOTO 660
570 P = X/R
580 FOR V = 1 TO 100
590 Z = P
600 RR = R - 1
610 P = (X/P^RR + RR * P)/R
620 IF ABS(Z-P)/(ABS(P) < 1E-7 THEN 640
630 NEXT V
640 P = INT(P * 10^AD + .5)/INT(10^AD + .5)
650 PRINT: PRINT: PRINT "A RAIZ DE ";R; " É DE "; X; " É ";P
660 GOTO 880
670 PRINT: PRINT: PRINT: PRINT
680 PRINT TAB(15); "HISTOGRAMA"
690 PRINT: PRINT: PRINT: PRINT
700 K = 0
710 K = 1
720 IF K = 1 THEN 850
730 INPUT "ENTRE COM YMIN, YMAX"; Y1, Y2
740 INPUT "ENTRE XMIN, XMAX, INCREMENTO "; X1, X2, IX
750 PRINT: PRINT: PRINT
760 FOR X = X1 TO X2 STEP IX
770 Y = FN A(X)
780 YE = INT(39*(Y-Y1)/(Y2-Y1) + .5)
790 FOR L = 1 TO YE
800 PRINT "*";
810 NEXT L
820 PRINT
830 NEXT X
840 GOTO 880
850 PRINT "ESTE PROGRAMA DESENHA PARA VOCÊ UM HISTOGRAMA"
860 PRINT "VOCÊ DEVE ENTRAR COM A FUNÇÃO QUE QUER
REPRESENTAR NA INSTRUÇÃO DE NÚMERO DE LINHA 710"
870 PRINT "ESCREVA POR EXEMPLO: ":PRINT
872 PRINT "710 DEF FN A(X) = F(X), POR EXEMPLO SIN(X)"
874 PRINT "AÍ PODE TECLAR O RUN "
880 PRINT: PRINT: PRINT
890 PRINT "VOCÊ QUER FAZER USO OUTRA VEZ DO PROGRAMA
(SIM/NÃO)"
900 INPUT R$
910 IF R$ = "SIM" THEN HOME : GOTO 20
920 IF R$ <> "NÃO" THEN 880
930 END

```

Comentários

1) A instrução ON-GOTO (linha 50)

A forma geral desta instrução é

ON <Número inteiro> GOTO 1 nulin, 2 nulin, 3 nulin,...

Desta forma, se o número inteiro após o ON, for K=1 o programa será desviado para a linha do programa correspondendo ao primeiro número de linha que vem após o GOTO (no nosso caso para a linha 60), o programa será desviado para o 2º número de linha caso K=2 (no nosso caso particular para a linha 260), caso K=3 irá para o 3º número de linha após o GOTO (no nosso caso particular para a linha 420), etc.

2) DIM (linha 100)

A instrução DIM é imprescindível para o uso de matrizes num programa (veja mais detalhes nos programas 18 e 19).

Com o DIM tem-se a instrução que permite que se dimensione na memória do TK-2000 COLOR a área necessária para conter todos os dados de cada matriz.

No nosso caso temos uma matriz unidimensional.

Se por exemplo N for 4, DIM A(4) é uma matriz unidimensional, e indica que o nome da matriz é A e existem ao todo 5 variáveis A(0), A(1), A(2), A(3) e A(4) [veja a Figura 14].

O método de acesso a estas 5 variáveis é o mesmo que usado normalmente para qualquer variável comum.

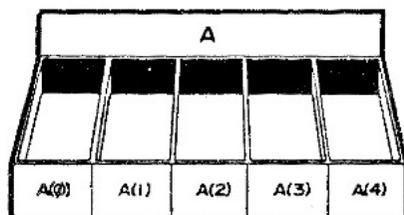


Figura 14

3) TAB (linhas 290, 430 e 680)

A instrução TAB é usada para deslocar o cursor horizontalmente.

Este comando pode ser utilizado para iniciar a impressão de dados a partir de uma qualquer coluna.

TAB é normalmente associado a PRINT.

No nosso caso particular a mensagem "ARREDONDANDO UM NÚMERO" será impressa a partir da coluna 5 devido a instrução PRINT TAB(5); (linha 290).

4) ABS (linha 630)

Em Matemática às vezes é necessário obter-se valores absolutos.

É para esta finalidade que se usa em BASIC a instrução ABS (linha 630).

Deve-se notar que a precisão imposta na linha 630 pode ser modificada dentro dos limites de cada microcomputador.

Neste caso optamos por 10^{-7} ou seja 0.0000001.

5) INT (linhas 360, 370, 640, 780)

A função INT já apareceu nos programas anteriores e aparecerá nos seguintes e com ela a parte fracionária de um número real é desprezada.

Assim por exemplo >PRINT INT (12.7893) dará como resultado 12

6) DEF FN (linha 872)

A instrução DEF FN permite que se defina funções no TK-2000 COLOR.

Aliás o segmento do programa que permite desenhar uma função como um histograma pode parecer meio confuso para você estudioso(a) leitor(leitora).

A primeira vista parece que a linha 700 é totalmente desnecessária pois logo a seguir vem a linha 710 na qual se modifica o valor de K de zero (0) para um (1).

Esta linha, contudo é essencial para o funcionamento conveniente do programa.

A variável K está agindo como uma chave.

Se é a primeira vez que você está passando pelo programa, então o valor final de K é 1 e o seu TK-2000 COLOR lhe exibe as instruções para funcionar e então para.

Caso K não seja ajustado para o valor 1 na linha 710 estas instruções de funcionamento nunca serão vistas.

Seguindo as instruções dadas pelo seu TK-2000 COLOR a linha 710 será substituída pela definição de uma função.

Teste por exemplo as seguintes situações:

função	Y1	Y2	X1	X2	IX
sen(x)	-1	1	0	4	0.2
e^x	1	8	0	2	0.1
$x^2 + 3x$	130	378	10	18	0.5
cos(x)	-1	1	0	4	0.3

Tabela 6

Com $K=0$ o TK-2000 COLOR exibe o histograma, após o que salta a parte das instruções e vai para a linha 880.

O histograma é desenhado com o eixo Oy na horizontal e o eixo Ox na vertical.

O gráfico é tanto melhor quanto menor for o valor de IX que pode ser usado.

7) Para dar ênfase aos diversos tipos de histograma que podem ser obtidos na linha 800 você pode substituir o asterisco (*) por um dos diversos símbolos gráficos que o seu TK-2000 COLOR possui.

Aí vai um programa que permite a impressão dos caracteres gráficos.

```
>10 FOR I = 193 TO 243
>20 PRINT I; "BB";CHR$(242); CHR$(I);"BBBBB";
>30 NEXT I
```

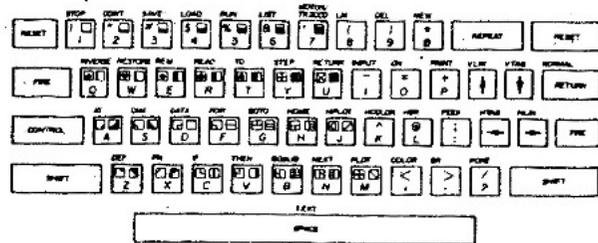


Figura 15

Se você gostou de algum dos caracteres acima (Figura 15) que tal substituir o asterisco na linha 800 por `800 CHR$(242); CHR$(I);`

A função CHR\$ é usada para transformar o código ASCII decimal em caracteres ASCII.

ASCII é a abreviação de "American Standard Code for Information Interchange".

Trabalhinho "calo na poupança"

I) Você lembra o que significava o teorema de Pitágoras?(veja a Figura 16).

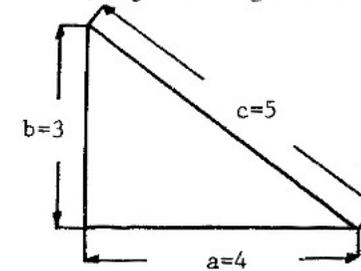


Figura 16 - Triângulo retângulo

Elabore um programa que permita obter as triplas pitagóricas.

Não esqueça que para tanto se a , b e c são os lados de um triângulo retângulo então

$$\text{se } a^2 + b^2 = c^2 \rightarrow \begin{cases} a = m^2 - n^2 \\ b = 2mn \\ c = m^2 + n^2 \end{cases}$$

Aplique o seu programa para $2 \leq m \leq 9$ e $1 \leq n \leq 7$.

Dica- Vá novamente ao livro CONHECENDO E UTILIZANDO O TK-2000" caso não saiba elaborar este programa.

II) Elabore um programa que permita obter o produto escalar de dois vetores.

Note que se um vetor \vec{a} tem componentes (x_a, y_a, z_a) e outro \vec{b} tem componentes (x_b, y_b, z_b) então o produto escalar $\vec{a} \cdot \vec{b}$ é dado por $x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$.

Caso o produto escalar seja nulo isto significa que os vetores são ortogonais ou seja perpendiculares (Figura 17).

Aplique o seu programa para os seguintes pares de vetores \vec{a} e \vec{b} (Tabela 7).

Entre eles algum par é ortogonal?

Par	\vec{a}			\vec{b}		
	x_a	y_a	z_a	x_b	y_b	z_b
1	2	3	4	-2	-3	4
2	2	3	4	-2	-3	3,25
3	5	6	-7	8	3	9
4	-1	2	-3	2	4	2

Tabela 7

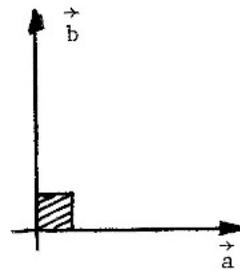


Figura 17

III) Elabore um programa que permita a obtenção do vetor \vec{c} , resultado de um produto vetorial de dois vetores \vec{a} e \vec{b} (Figura 18).

Note que se os componentes do vetor \vec{a} forem x_1, y_1, z_1 e do vetor \vec{b} forem x_2, y_2, z_2 então as componentes do vetor \vec{c} , produto vetorial de \vec{a} vezes \vec{b} , nesta ordem, são:

$$\begin{cases} x = y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ y = z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ z = x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{cases}$$

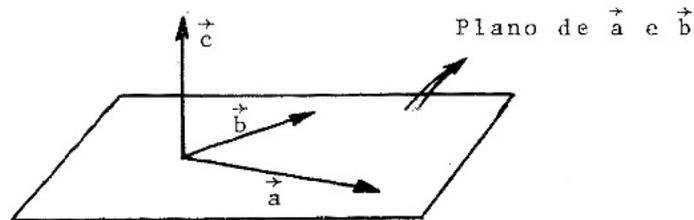


Figura 18 - $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ onde \times é o símbolo para representar o produto vetorial (e não a exponenciação do BASIC...) e o vetor c é perpendicular ao plano de a e b .

A função quadrática - resolução da equação do 2º grau

Antes de mais nada falemos um pouco do 5 (cinco).

Devido à importância dos cinco dedos das mãos e em menor extensão, dos pés, o número 5 assumiu grande significado na vida humana e consequentemente no espírito humano.

O 5 é consequentemente um número útil, "amigo" e ao mesmo tempo, na linguagem do simbolismo universal, está do lado "feliz".

Os chineses tinham em alta conta as cinco bênçãos ou mais precisamente:

longevidade, riqueza, paz, serenidade e amor

Os cinco ideais eternos são: humanidade, propriedade, discernimento, retidão (probidade) e fidelidade.

O pentáculo ou pentagrama, uma estrela de 5 pontas, é uma engenhosa elaboração a partir de triângulos e era usado pelos discípulos de Pitágoras e outros, como emblema místico da perfeição do universo.

Ao período de cinco anos costuma-se chamar *lustro*.

O *ordinal* correspondente ao cardinal cinco é quinto, que veio do latim *quinta*.

O *quinto* (quinta parte) designava também o imposto cobrado, no Brasil, durante o período colonial, pelo fisco português.

Como se vê o tempo passa e as coisas voltam a ser como antes.

Quem se vê as voltas com o imposto de renda de hoje paga as vezes mais até que um quinto.

Sem dúvida nenhuma dá vontade de mandar tu do para os quintos, não é!?!?

Aliás chamava-se nau dos quintos a que levava ao reino esse imposto. Na vinda, era na naudos quintos que chegavam os degredados para o Brasil, lugar longínquo e desconhecido nas eras coloniais.

Bem, chega de falar do cinco, de imposto de renda, de problemas financeiros e vamos ao programa Nº 5.

Definição:

Chama-se função quadrática a uma função real do tipo

$$f(x) = ax^2 + bx + c \longrightarrow (1)$$

onde a, b e c são inteiros e $a \neq 0$.

Para se obter a solução geral da equação

$$ax^2 + bx + c = 0 \longrightarrow (2)$$

devem ser feitas as seguintes operações em ambos os membros da (2).

1) Multiplicar por $4a$:

$$4a(ax^2 + bx + c = 0)$$

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

2) Subtrair $4ac$:

$$\frac{-4ac = -4ac}{4a^2x^2 + 4abx = -4ac}$$

3) Adicionar b^2

$$\frac{b^2 = b^2}{4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac}$$

4) O membro da esquerda é um quadrado perfeito

$$(2ax+b)^2 = b^2 - 4ac$$

5) Obtem-se agora a raiz quadrada de ambos os membros

$$2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

6) Resolvendo em relação a x tem-se

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ e \\ x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{array} \right.$$

Essas duas últimas podem ser combinadas e obtém-se assim a fórmula de

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \longrightarrow (3)$$

Exemplos numéricas:

$$I) x^2 + 7x + 12 = 0$$

Temos: $a = 1$; $b = 7$; $c = 12$ e entrando em (3) vem

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{-7 + 1}{2} = -3 & (1^{\text{a}} \text{ raiz}) \\ x = \frac{-7 - 1}{2} = -4 & (2^{\text{a}} \text{ raiz}) \end{cases}$$

Como se vê temos duas raízes reais racionais e distintas.

$$\text{II)} \quad x^2 + 6x + 9 = 0$$

$$\text{Temos: } a = 1; \quad b = 6; \quad c = 9$$

O valor do discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0$$

Entrando na (3)

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = -3$$

Portanto tem-se duas raízes iguais a -3 ou seja

$$x_1 = x_2 = -3$$

Nesse caso dizemos que a equação possui uma raiz de multiplicidade dois ou ainda uma raiz dupla igual a -3.

III) Caso o discriminante Δ for negativo, então $\sqrt{\Delta}$ não é um número real e a equação dada não possui raízes reais.

Assim na equação $x^2 + 4x + 13 = 0$ temos:

$$a = 1; \quad b = 4; \quad c = 13$$

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = 16 - 52 = -36$$

Como se vê $\Delta < 0$ (Δ é negativo).

Então

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{-36}}{2 \cdot 1}$$

não pertence ao campo dos números reais.

No último programa "NÚMEROS COMPLEXOS" analisaremos como sair da situação em que aparece uma raiz quadrada de um número negativo.

O.I. - As origens da fórmula de resolução da equação do 2º grau.

As referências mais antigas sobre a solução de problemas do 2º grau foram encontradas em textos babilônicos escritos cerca de 4000 anos atrás.

Na Grécia, as equações do 2º grau eram resolvidas por meio de construções geométricas.

O problema da divisão áurea, certamente conhecido pelos pitagóricos é um problema do 2º grau.

Em "Os Elementos" de Euclides encontra-se a interpretação geométrica para $(a+b)^2$ que se utiliza para deduzir a (3) e que é conhecida como a fórmula de Bhaskara.

Aliás no século XIII d.C., Bhaskara (1114-1185) em suas obras "Lilavati" e "Vija Ganita", apresenta diversos problemas do 2º grau.

Entre eles destacamos, aqui, o curioso problema do *bando de macacos*.

"O quadrado da oitava parte de um bando de macacos saltitava num bosque, enquanto os 12 restantes brincavam no alto de um outeiro.

Quantos macacos constituem o bando?

Resposta: Tanto pode ser 16 como 48.

Mas, antes de Bhaskara, nos princípios do século IX d.C., o matemático árabe Al-Kowarismi, influenciado pela álgebra geométrica dos gregos (sobretudo por Euclides) resolveu metodicamente as equações do 2º grau, chegando a (3) que hoje chamamos de fórmula de Bhaskara.

Aliás o nome *algoritmo* é em homenagem a Al-Kowarismi.

Bem, já estamos quase no ano 2000, temos o TK-2000 COLOR e não é nada difícil obter todas as mensagens e resultados para qualquer equação do 2º grau.

Comentários finais sobre a equação do 2º grau

Assim para resolver equações quadráticas ou seja do tipo dado pela equação (2) você deve fazer as seguintes verificações:

- 1) Ter certeza que $a \neq 0$
- 2) Não deve ter $b^2 - 4ac < 0$

Por enquanto, você ainda não sabe como fazer para obter a raiz quadrada de um número negativo.

Portanto, ao se fazer o programa obrigatoriamente você deve verificar isto.

Aí vai o fluxograma para se resolver uma equação do 2º grau (Figura 19).

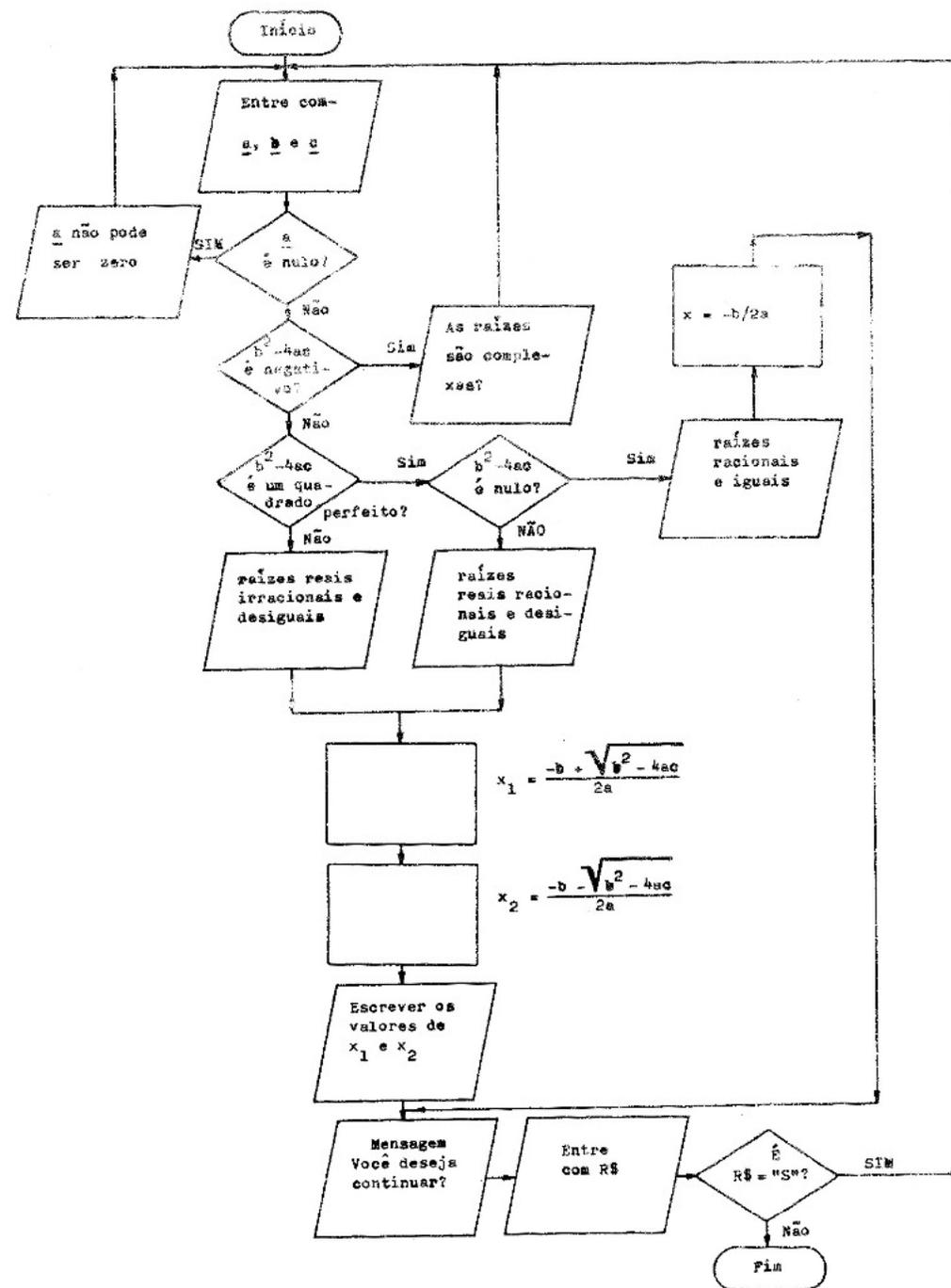


Figura 19

Nele incluímos a análise completa da natureza das raízes de uma equação quadrática.

As raízes de uma equação quadrática caem em uma das seguintes categorias.

- a) reais ou complexas
- b) racionais ou irracionais
- c) iguais ou desiguais

Caso a)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{se } b^2 - 4ac \geq 0 \text{ as raízes são reais} \\ \text{se } b^2 - 4ac < 0 \text{ as raízes são complexas} \end{array} \right.$$

Caso b)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{se } b^2 - 4ac \text{ é igual a um quadrado perfeito} \\ \text{então as raízes são racionais} \\ \text{se } b^2 - 4ac \text{ não é igual a um quadrado perfeito} \\ \text{então as raízes são irracionais} \end{array} \right.$$

Caso c)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{se } b^2 - 4ac = 0 \text{ as raízes são iguais} \\ \text{se } b^2 - 4ac \neq 0 \text{ as raízes são distintas ou de} \\ \text{iguais} \end{array} \right.$$

Aí vai a listagem do programa:

```

3 FOR Z = 1 TO 2000 }
4 NEXT Z             } Este é um truque para se ter
5 HOME              } uma pausa antes de limpar a
6                   } tela
7
8 PRINT "SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES QUADRÁTICAS"
9
10 FOR J = 1 TO 40
11 PRINT "?";
12 NEXT J
13
14 PRINT "ENTRE COM A,B E C"
15 INPUT A,B,C
16 IF A = 0 THEN 160
17 IF B * B - 4 * A * C < 0 THEN 180
18 W = B * B - 4 * A * C
19 W = SQR (W)
20 PRINT W
21 Z = INT (W)
22 PRINT Z           } essa parte é para verificar
23                   } se as raízes são racionais ou
24                   } irracionais inclusive mandan-
25                   } do a mensagem clara para o
26                   } usuário
27 IF W = Z THEN 200
28 PRINT "AS RAÍZES SÃO REAIS, IRRACIONAIS E DESIGUAIS"
29 X1 = (-B + SQR(B * B - 4 * A * C)) / (2 * A)
30 X2 = (-B - SQR (B * B - 4 * A * C)) / (2 * A)
31 PRINT "X1=";X1;" "; "X2=";X2
32 PRINT : PRINT
33 PRINT "VOCÊ DESEJA CONTINUAR (S/N)?"
34 INPUT R$
35 IF R$ = "S" THEN 3
36 END
37 PRINT "O COEFICIENTE DO TERMO DO SEGUNDO GRAU (A) NÃO
38     PODE SER NULO"
39 GOTO 3
40 PRINT "AS RAÍZES SÃO COMPLEXAS"
41 GOTO 3
42 IF W = 0 THEN 230
43 PRINT "AS RAÍZES SÃO REAIS, RACIONAIS E DESIGUAIS"

```


perfeições aritméticas.

Os seus divisores próprios são 1, 2 e 3 o seu produto é também 6.

Logo o 6 (seis) não é perfeito apenas pela soma como também pelo produto e portanto ele é duplamente perfeito.

Uma outra observação interessante é que o número 6 é o único número perfeito cujos divisores menores são números inteiros e consecutivos.

E, assim, o seis (número triangular) resulta da soma e do produto de três números inteiros consecutivos.

O seis em grego é designado por *hex*.

O prefixo hexa (de origem grega) designativo de seis, aparece em alguns vocábulos do nosso idioma:

Hexaedro - Sólido geométrico que apresenta seis faces.

O hexaedro regular é também chamado *cubo*.

Hexágono - Polígono de seis lados.

Hexagrama - O hexagrama é a figura formada por dois triângulos equiláteros iguais com o mesmo centro e dispostos de forma que os lados de um sejam respectivamente paralelos aos lados do outro.

O hexagrama, para os israelitas, é uma figura simbólica (símbolo de Salomão) e desempenha, por isso, importante papel na arte decorativa judaica.

No livro "Diversões Matemáticas" do Dr. Martin Gardner aparece a descrição do jogo do Hex apresentado pela primeira vez no Instituto Niels

Bohr de Física Teórica de Copenhague e o nome Hex apareceu pela primeira vez em 1952 quando a firma Parker Brothers publicou uma versão do jogo, que tinha esse nome.

O Hex é jogado sobre um tabuleiro em forma de losango e com casas hexagonais (veja a Figura 20).

O número de hexágonos pode variar, porém geralmente são 11 em cada lado.

Dois lados opostos são *brancos* e os outros dois são pretos.

Os hexágonos dos cantos do losango são comuns aos dois lados.

Um dos adversários joga com fichas brancas e o outro com fichas pretas.

Em lances alternados elas vão sendo colocadas sobre qualquer casa livre.

O objetivo das pretas é completar uma cadeia ininterrupta de *fichas pretas* entre os dois lados pretos.

As brancas tentam completar cadeia semelhante entre os lados brancos.

A corrente pode dobrar e torcer livremente e na Figura 20 mostra-se uma cadeia vitoriosa.

Os jogadores continuam colocando fichas até que um deles tenha completado uma corrente.

O jogo nunca termina sem vencedor visto que só se pode bloquear o jogo do adversário completando a própria corrente.

Como se vê as regras são muito simples e no entanto o Hex é um jogo de surpreendente sutileza matemática.

Aos caros leitores que queiram experimentá-lo aconselhamos a fazer cópias mimeografadas do

tabuleiro e nessas folhas será fácil jogar fazendo círculos e cruzes a lápis.

Preferindo tabuleiro e fichas móveis é bem fácil desenhar num cartão ou mesmo colar "ladrilhos" hexagonais em uma tábua.

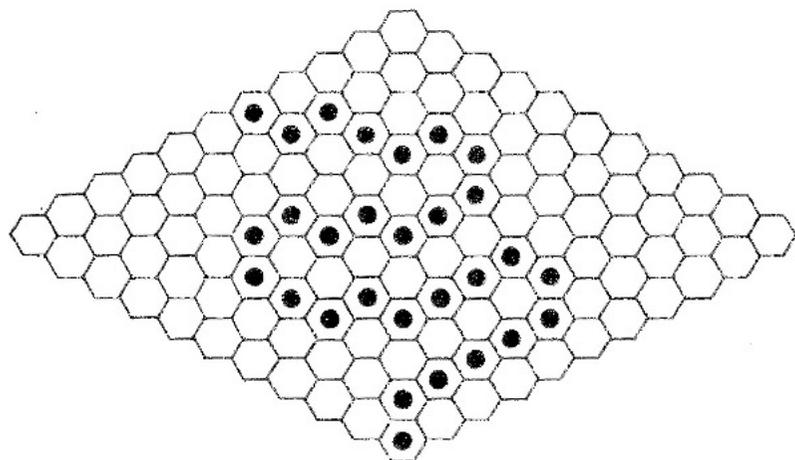


Figura 20 - Uma cadeia vitoriosa para o Hex

Mas falando de sutileza é uma boa hora para repetir a história popular sobre Karl F. Gauss (1777-1855).

Com 10 anos de idade Gauss descobriu a soma dos 100 primeiros números naturais em questão de alguns segundos!!!

O professor de Gauss tinha como hábito deixar os alunos ocupados fazendo-os efetuar cálculos trabalhosos (para aquela época).

Um dia o professor disse aos alunos para obter a soma da seguinte sequência aritmética,

$$1+2+3+4+ \dots + 98+99+100$$

comumente conhecida como progressão aritmética.

O professor pensou consigo mesmo que com isto tinha conseguido pelo menos uma hora de descanso dos intrépidos alunos.

Mas assim que terminou o enunciado o jovem Gauss apresentou-lhe a resposta correta.

Entre surpresa e um pouco aborrecido o professor perguntou a Gauss como ele conseguiu a resposta.

Gauss explicou ao mestre que no lugar de simplesmente somar os números, ele considerou os seguintes pares:

$$1+2+3+ \dots + 98+99+100$$

$$3+98=101$$

$$2+99=101$$

$$1+100=101$$

Como havia 50 desses pares fez o produto

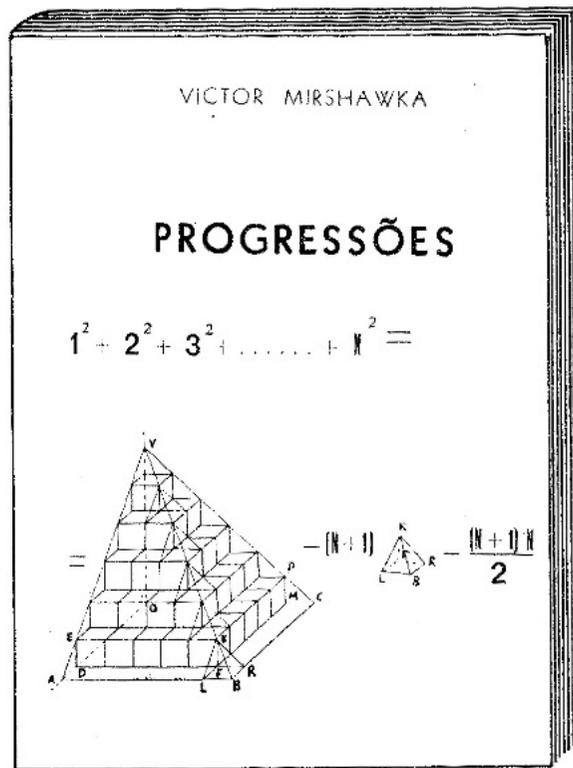
$$50 \cdot 101 = 5050$$

Realmente em qualquer série do tipo progressão aritmética se multiplicarmos a soma do primeiro termo (a_1) com o último termo (a_n) pelo número de termos dividido por 2 obteremos a soma de todos os termos.

O primeiro livro de Matemática que escrevemos foi sobre PROGRESSÕES e isto em 1960 (veja a Figura 21) e nele aparece a seguinte definição:

"Uma progressão aritmética é uma sucessão em que a diferença obtida subtraindo qualquer termo do seu sucessor é sempre a mesma e é chamada razão (r)".

Qualquer termo a_n é obtido a partir do primeiro a_1 pela expressão:



LIVRARIA NOBEL S. A.
Figura 21

$$a_n = a_1 + (n-1)r \quad \longrightarrow (1)$$

A soma de n termos de uma progressão aritmética (P.A.) é igual a

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \quad \longrightarrow (2)$$

É evidente que pode-se somar qualquer P.A. ou qualquer sucessão que tenha lei de formação (progressão harmônica, progressão geométrica, etc.) no

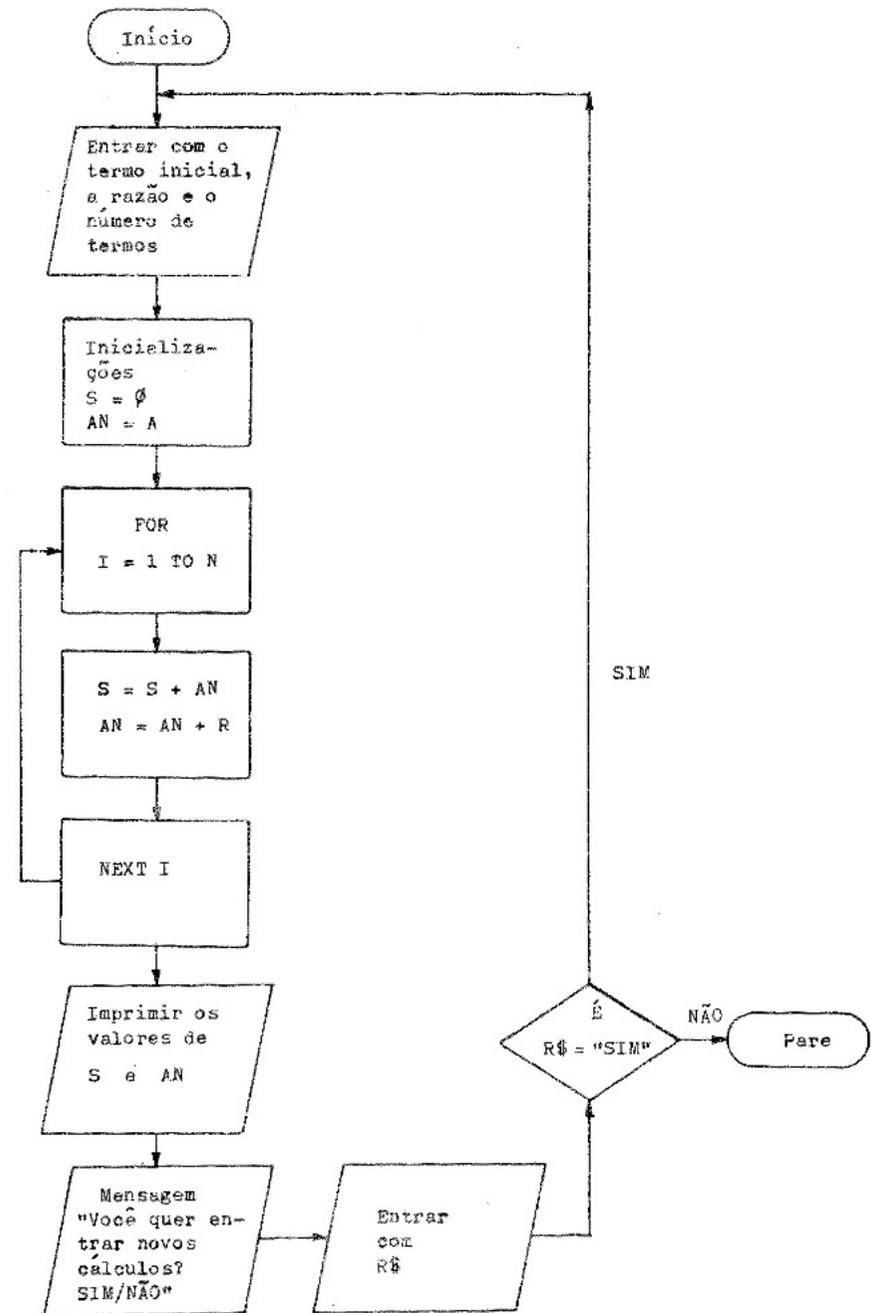


Figura 22

seu super TK-2000 COLOR pelo método da força bruta e sem nenhuma sutileza e genialidade gaussiana.

É claro que com isto não estamos sugerindo a eliminação da sua criatividade futuro(a) excelente programador(a). Porém em certas situações, para que complicar ou melhor se não percebermos um caminho mais simples mas muito sofisticado para a nossa "cuca", usaremos o incansável e imperturbável TK-2000 COLOR.

Veja o fluxograma (Figura 22) para se obter a soma de n termos e o último termo de uma P.A. pelo método da "força bruta".

Aí vai o programa em BASIC

```

10 PRINT "CÁLCULO DA SOMA E DO ÚLTIMO TERMO DE UMA P.A."
20 FOR I = 1 TO 8
25 PRINT "*PA*";
30 NEXT I
35 PRINT
40 PRINT "ENTRE COM N, R E A1"
45 INPUT N, R, A
50 S = 0 : AN = A
60 FOR I = 1 TO N
70 S = S + AN
80 AN = AN + R
90 NEXT I
100 PRINT "A SOMA É:";S;"O ÚLTIMO TERMO É:";AN-R
105 PRINT : PRINT
110 PRINT "VOCÊ QUER NOVOS CÁLCULOS? (SIM/NÃO)"
120 INPUT R$
130 IF R$ = "SIM" THEN 20
140 END

```

Aplique este programa para os dados da Tabela 8.

Caso	a_1	r	n	a_n	S_n
1	2	3	80	?	?
2	10	-2	40	?	?
3	13	1,5	25	?	?
4	55	8	13	?	?
5	14	3	5	?	?

Tabela 8

O.I. - Já falamos um pouco do modo imediato do seu TK-2000 COLOR porém convém falar mais, visto que as vezes pode acontecer de você precisar do seu TK-2000 apenas como uma calculadora (por sinal bem sofisticada...).

Para se executar uma operação aritmética através do *MODO IMEDIATO*, basta emitir o comando PRINT, um espaço e em seguida digitar a expressão matemática desejada.

Na Matemática usam-se vários símbolos para indicar a mesma operação porém o seu TK-2000 COLOR apesar de rápido e eficiente é incapaz de deduzir qualquer coisa.

Portanto caso você queira usar símbolos matemáticos deve se restringir apenas e somente aquilo que está indicado na Tabela 9.

Ordem de precedência	Tipo de Operação	Símbolo utilizado
1	Potenciação	^
2	Multiplicação	*
	Divisão	/
3	Adição	+
	Subtração	-

Tabela 9

Suponha que você queira verificar que 220 e 284 são números amigos.



Figura 23

Para isso digite para o 220

```
> PRINT 1+2+4+71+142 (RETURN)
```

220

[Não esqueça no fim de apertar a tecla RETURN]

ou seja o número 220 deverá surgir na próxima linha do vídeo.

Espero que você não tenha esquecido que 1, 2, 4, 71 e 142 são divisores próprios de 284.

Digite para o 284

```
> PRINT 1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110 (RETURN)
```

284

ou seja o número 284 surgirá na próxima linha do vídeo já que somamos os divisores próprios de 220.

O TK-2000 COLOR permite que diversas funções sejam usadas no modo imediato, tais como araiiz quadrada [SQR(X)], seno [SIN(X)], cosseno [COS(X)] e^x [EXP(X)], arcotangente [ATN(X)], logarítmo neperiano [LOG(X)] etc.

Caso a vírgula seja digitada entre dois conteúdos no PRINT tanto em modo imediato como no modo programa, eles são apresentados com uma tabulação padrão de 15 espaços entre cada um.

Já o ponto e vírgula entre dois conteúdos faz com que eles sejam apresentados sequencialmente, sem que haja intervalo entre os mesmos.

Isto é as vezes inconveniente e precisamos inserir um espaço em branco que representamos por \emptyset .

Aliás já falamos disso no 1º programa.

Use o sensacional recurso do modo imediato do seu TK-2000 COLOR e faça as seguintes verificações ou cálculos.

a) Os cubos dos números naturais podem ser decompostos em interessantes P.A.

Verifique que as contas estão corretas e tente obter a decomposição do 6^3 e 7^3 .

$$1 = 1^3 = 1$$

$$2 + 6 = 2^3 = 3 + 5$$

$$3 + 9 + 15 = 3^3 = 6 + 9 + 12$$

$$4 + 12 + 20 + 28 = 4^3 = 10 + 14 + 18 + 22$$

$$5 + 15 + 25 + 35 + 45 = 5^3 = 15 + 20 + 25 + 30 + 35$$

.....

b) No programa Nº 1 falamos já sobre os "números" poligonais mas aí vai uma tabela dos 10 primeiros termos de cada série (Tabela 10).

Ache com o auxílio do modo imediato do seu TK-2000 COLOR a soma (S_{10}) dos mesmos.

Posição \ Números	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
triangulares	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
quadrados	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
pentagonais	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145
hexagonais	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190
heptagonais	1	7	18	34	55	81	112	148	189	235
octogonais	1	8	21	40	65	96	133	176	225	280
eneagonais	1	9	24	46	75	111	154	204	261	325
decaagonais	1	10	27	52	85	126	175	232	297	370

Tabela 10

c) Elabore um programa que permita calcular na força bruta a soma da série:

$$2, 6, 18, 54, 162, \dots, 1458$$

que é uma progressão geométrica.

Você sabe o que é uma progressão geométrica (P.G.)?

Resposta: Uma progressão geométrica é uma sucessão ou sequência de números na qual a razão de qualquer termo para o antecedente é a mesma para todos os termos.

Assim se a P.G. é

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots$$

deve-se ter:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = q \quad (\text{razão}) \longrightarrow (3)$$

É evidente que q não pode ser zero.

Numa P.G. é válida a relação

$$q^{n-1} = \frac{a_n}{a_1} \longrightarrow (4)$$

e a soma dos n primeiros termos é

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \longrightarrow (5)$$

Ordenando

Chegou a hora tão esperada ou melhor desejada por mim para explicar ao(a) leitor(a) porque em todos os nossos livros brincamos tanto com o filho caçula Alexandre ("Sacha") sobre os números 7 e o 13.

O Sacha adora o 7 e não é para menos pois o sete é considerado o número sagrado.

Aliás no capítulo segundo do Gênesis lê-se

"E acabou Deus no dia sexto a obra que tinha feito; e descansou no dia sétimo depois de ter acabado todas as suas obras".

"E abençoou Deus o dia sétimo e o santificou; porque nesse dia cessou. Ele de produzir todas as obras que havia criado".

O número sete representa muita coisa no catolicismo.

Citemos somente as que nos parecem mais conhecidas:

$$\left\{ \begin{array}{l} 7, \text{ as palavras de Cristo;} \\ 7, \text{ as glórias da Virgem;} \\ 7, \text{ as petições do Padre-Nosso;} \end{array} \right.$$

- 7, os pecados mortais;
- 7, os sacramentos;
- 7, as ordens eclesiásticas.

O número sete, mais do que qualquer um outro, era na antiguidade, focalizado pela preferência dos sacerdotes e dos sábios: sete eram os altares, sete as velas, sete os animais levados ao sacrifício, sete as palavras iniciais, sete os salmos penitenciais.

Entre os vários conjuntos importantes que totalizam sete, podemos destacar:

- Sete, os dias da semana;
- Sete, as maravilhas do mundo;
- Sete, as cores do arco-iris;
- Sete, os sábios da Grécia;
- Sete, as notas musicais;
- Sete, as colinas de Roma;
- Sete, os príncipes do Inferno;
- Sete, as artes na antiguidade.

Para os muçulmanos a existência dos *sete céus* não é mera fantasia ou simples expressão poética.

É um *dogma*, isto é deve-se apresentar, aos olhos do crente, com todas as características de perfeita realidade.

Usa-se, na linguagem usual, a expressão "sétimo-céu" ou "subir ao sétimo céu" para indicar o máximo de felicidade, a realização de um ideal ou ainda atingir uma condição invejável.

É verdade também que "pintar o sete" na linguagem popular significa fazer estrepólias ou tra-

vessuras.

Viu Sacha!!!

Muitas são as trovas populares que citam o número sete.

A mais conhecida é do tipo:

"Sete e sete são quatorze
Com mais sete vinte e um
Todo dia morre gente
Mas no céu não tem nenhum!"

Será que você consegue escrever o 7 com auxílio apenas do 2 (dois), do 3 (três) e de operações indicadas na Tabela 9?

Resposta: Aí vão algumas possibilidades

$$7 = 2 + 2/2 + 2 + 2 \rightarrow [\text{PRINT } 2+2/2+2+2 \text{ e depois RETURN}]$$

$$7 = 3 \wedge 2 - 2 \rightarrow [\text{PRINT } 3 \wedge 2 - 2 \text{ e depois RETURN}] \text{ etc.}$$

$$7 = 2 \wedge 3 - 2/2$$

$$7 = (2 \wedge 2) \wedge 2 - 3 \wedge 2$$

$$7 = \underbrace{3 \wedge 3 - 2 \wedge 2 - (2 \wedge 2) \wedge 2}$$

Caro(a) leitor(a) entre com o membro da direita, das expressões acima no modo imediato, no seu TK-2000 COLOR e verifique isto!!!

Veja que linda propriedade apresentam "alguns" 7...

$$\begin{array}{r} 77 \\ \times 77 \\ \hline 49 \\ 4949 \\ \hline 49 \\ \hline 5929 \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{r} 77 \\ \times 77 \\ \hline 7 \\ \hline 777 \\ \hline 847 \times 7 = 5929 \end{array}$$

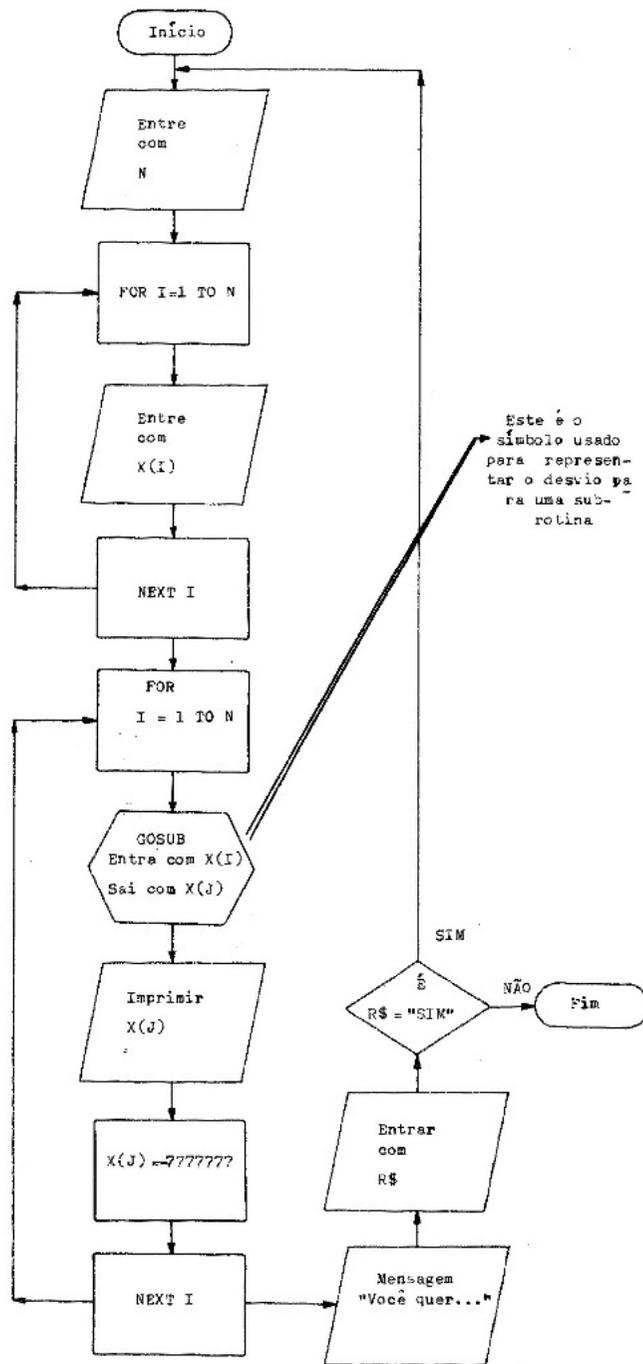


Figura 24

O plano total seria:

- I) Entre com o número de números (que bonito!!!) que devem ser classificados ou ordenados.
- II) Entre com todos os números que devem ser classificados dentro da variável coletiva $X()$ ou seja use uma variável indexada $X(I)$.
- III) Utilize uma subrotina para achar o maior número e imprima o mesmo.
- IV) Substitua esse número por um bem pequeno, digamos - 7777777 ou seja sete "setes" com sinal menos (-) na frente.
- V) Repetir esse processo começando com a etapa III.

Aí vai o fluxograma da subrotina:

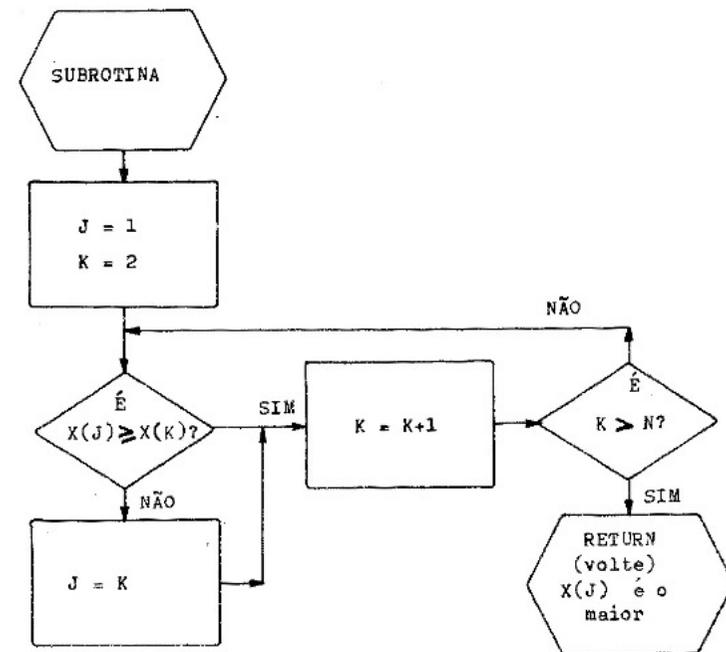


Figura 25

Programa em BASIC

```

10 PRINT "CLASSIFICANDO NÚMEROS DO MAIOR PARA O MENOR"
15 PRINT : PRINT
20 INPUT "QUANTOS NÚMEROS DEVEM SER CLASSIFICADOS?";N
30 DIM X(N)
40 PRINT "OS NÚMEROS SÃO:"
45 FOR I = 1 TO N
50 INPUT X(I) : PRINT
60 NEXT I
65 PRINT : PRINT
70 FOR I = 1 TO N
80 GOSUB 1000
90 PRINT "X(I)"; X(I);
95 X(J) = -7777777 → Substitui-se aqui o maior
100 NEXT I : PRINT : PRINT          número por um bem pequeno
110 GOTO 2000
1000 J = 1 : K = 2
1010 IF X(J) >= X(K) THEN 1030 → } Esta é a subrotina para
1020 J = K                          voltar o maior número
1030 K = K + 1                       de uma lista de N núme-
1040 IF K > N THEN RETURN             ros para o programa
1050 GOTO 1010                        principal
2000 FOR I = 1 TO 40
2010 PRINT CHR$(35); → O que é isto?
2020 NEXT I
2030 PRINT : PRINT
2040 PRINT "VOCÊ DESEJA ENTRAR COM OUTRO CONJUNTO DE
      NÚMEROS? (SIM/NÃO)"
2050 INPUT R$
2060 IF R$ = "SIM" THEN HOME: CLEAR: GOTO 10
2070 END

```

Teste o seu programa para os números

X(1) = 999999, X(2) = 111111, X(3) = 222222,
 X(4) = 777777, X(5) = 888888, X(6) = 666666,
 X(7) = 444444, X(8) = 555555, X(9) = 333333.

Aliás, veja que propriedade mágica tem o 7 que o Sacha tanto gosta.

Se os termos da P.A. de primeiro termo e razão 15873 forem multiplicados por 7 obteremos respectivamente os números:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 15873 \cdot 7 = 111\ 111 \\
 31746 \cdot 7 = 222\ 222 \\
 \dots\dots\dots \\
 79365 \cdot 7 = 555\ 555 \\
 \dots\dots\dots \\
 142857 \cdot 7 = 999\ 999
 \end{array} \right.$$

Comentários:

1) Linha 2010 - A função CHR\$ é usada para transformar o código ASCII decimal em caracteres ASCII (American Standard Code for Information Interchange ou seja, Código Padrão Americano para Intercâmbio de Informações).

Caso se escreva em modo imediato PRINT CHR\$(65) e se apertarmos a tecla RETURN aparecerá no vídeo a letra A.

Na Tabela 11 aparecem os valores decimais e os correspondentes símbolos ASCII.

32		33 !	34 "
35 #		36 \$	37 %
38 &		39 '	40 (
41 (42 *	43 +
44 ,		45 -	46 .
47 /		48 Ø	49 1
50 2		51 3	52 4
53 5		54 6	55 7
56 8		57 9	58 :
59 ;		60 <	61 =
62 >		63 ?	64 @
65 A		66 B	67 C
68 D		69 E	70 F
71 G		72 H	73 I
74 J		75 K	76 L
77 M		78 N	79 O
80 P		81 Q	82 R
83 S		84 T	85 U
86 V		87 W	88 X
89 Y		90 Z	91 [
92 \		93]	94 ^

Tabela 11 - Trecho do ASCII

Dessa forma em vista das linhas 2000 e 2020 será impressa uma linha com 40 caracteres # .

2) Linhas 50, 55, 90, 95, 1010

Nós já falamos um pouco sobre variáveis coletivas [veja o programa "QUATRO EM 1 (UM)"] ou simplesmente chamadas de matrizes.

Através de matrizes ou seja variáveis coletivas pode-se associar mais que um valor a uma variável.

Por exemplo, imagine que você tem uma caixa com diversas subdivisões.

Podemos nos referir as subdivisões da caixa pelo nome N e a cada subdivisão individualmente pelos nomes N(0), N(1), N(2), N(3), N(4) e N(5) conforme se mostra na Figura

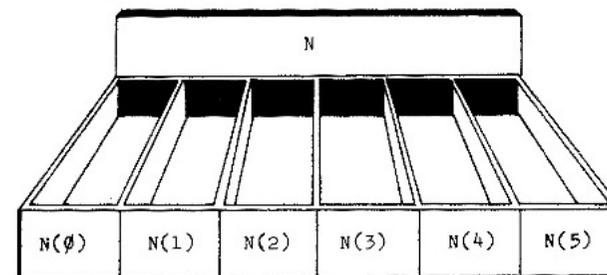


Figura 26

A matriz representada acima é chamada de unidimensional e os números apresentados entre parênteses, que especificam cada um dos elementos da matriz, recebem o nome de índices.

De forma análoga pode-se ter matrizes bidimensionais, tridimensionais, etc.

Adiante veremos aplicações com matrizes bidimensionais. No nosso caso X() é uma matriz unidimensional.

3) No TK-2000 COLOR, as matrizes podem ainda ser divididas em três grupos:

- variáveis tipo matriz ou coletivas inteiras, tais como: N%(7), B%(13,13).
- variáveis tipo matriz ou coletivas reais, tais como: A(9), B(7,13).
- variáveis tipo matriz cadeias ou STRINGS, tais como: A\$(4); B\$(5,4).

4) **DIM** Você já viu isto na página 45, não é?

A instrução DIM é imprescindível para que se possa usar matrizes em um programa.

Ela permite que se dimensione a matriz a ser utilizada.

Dessa forma se escrevermos DIM A(13) indicamos ao TK-2000 COLOR que o nome da matriz é A e existem ao todo 14 variáveis, a saber

A(0), A(1), A(2), ..., A(13)

A forma de acesso a estas 14 variáveis é a mesma que é usada normalmente para qualquer variável comum.

Portanto com a instrução DIM define-se antecipadamente e reserva-se lugar na memória para matrizes numéricas ou do tipo STRING multidimensionais.

No nosso caso particular na linha 20 entra-se com a quantidade de números N que irão ser classificados e na linha 30 temos o DIM X(N) que significa que reservou-se lugar para os números

X(0), X(1), ..., X(N).

Como na linha 45 a variável I começa com o valor I não se "guarda" nada na "subdivisão" X(0).

5) **GOSUB-RETURN** Você já viu isto na página 27, não é?

GOSUB é a instrução que desvia o programa para a subrotina desejada.

Ao final da execução da subrotina, a instrução RETURN faz com que o programa volte para a sua sequência normal, uma instrução imediatamente após aquela que tem o GOSUB.

No nosso caso particular, na linha 80 temos a instrução GOSUB que desvia o programa para a

linha 1000.

Uma vez feitas todas as comparações quando K tornar-se maior que N a expressão dentro do IF é verdadeira e atinge-se o RETURN com o que volta-se para a linha 90 que manda imprimir o "último" maior número.

ATENÇÃO - Cuidadoso(a) leitor(a) note que a instrução RETURN não tem nada a ver com a tecla RETURN.

Não confunda e não esqueça que você deve teclar letra por letra até obter a "palavra chave" RETURN.

O uso de subrotinas é um artifício bastante usado em programação.

Subrotina como acabamos de ver é um programa secundário que pode ser usado várias vezes dentro de um programa maior.

Problema para você obnubilado(a) leitor(a)

Entre com um inteiro (I) e com o número de dígitos (N) do mesmo.

Elabore um programa que imprima um número com um espaço em branco entre os seus dígitos.

Chama-se a esse processo de isolamento dos dígitos de um número.

Você consegue separar cada dígito do número com 3 espaços em branco?

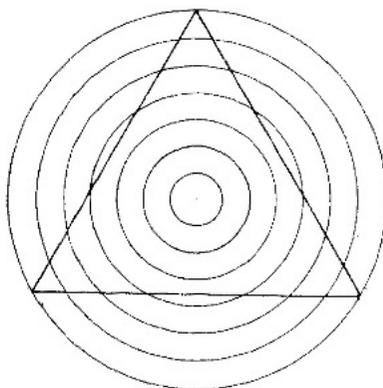


Figura 27 - 7 círculos em homenagem
ao Sacha

Intersecções de circunferências

Chegamos ao oitavo programa, que é o número da igualdade.

Tinham os pitagóricos especial veneração pelo número oito, visto que supunham, dentro do nebuloso misticismo numérico, que esse número representava a lei natural, ou melhor, a lei primitiva e sagrada que prescrevia a igualdade absoluta entre os homens.

Não é possível encontrar base matemática que justifique tal superstição, mas o fato é que os discípulos de Pitágoras, inspirados pelos ensinamentos do *mestre* elegeram o número oito como símbolo da igualdade.

Para quem joga xadrez o número oito é fundamental.

Basta dizer que o tabuleiro adotado pelos enxadristas é quadrado e tem oito casas de cada lado.

Cada jogador dispõe de 16 peças, entre as quais figuram oito peões.

O jogo de xadrez em todas as suas nuances é dominado pelo número oito, pelos múltiplos ou submúltiplos de oito.

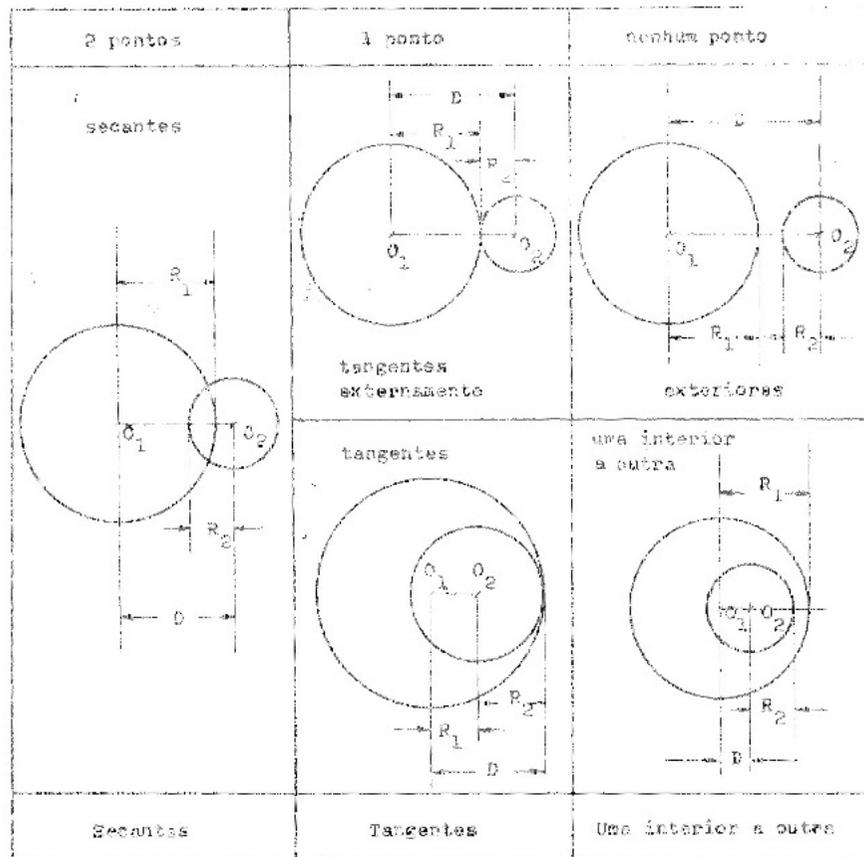
O mesmo ocorre em menor proporção no jogo de damas.

É muito usual a expressão: "oito ou oitenta" para designar "ou tudo ou nada".

E agora vamos ao "oito ou oitenta" quanto as posições relativas de duas circunferências.

Aliás duas circunferências tangentes conforme a posição das mesmas e se forem de mesmo raio constituem um 8 (oito), não é?

Duas circunferências distintas podem apresentar em comum (Figura 28):



O.I. - Legenda para a Figura 28

- O_1 → centro da circunferência ①
- R_1 → raio da circunferência ①
- O_2 → centro da circunferência ②
- R_2 → raio da circunferência ②
- D → distância entre os centros das circunferências.

Vamos elaborar um programa que permita classificar quanto a intersecção duas circunferências de círculo dadas as coordenadas do centro e o comprimento do raio de cada circunferência.

Análise do problema

Em vista da Figura 28, analisando os diversos casos torna-se claro que apenas se:

$$D > R_1 + R_2$$

tem-se circunferências que não se interceptam e são externas. Em todos os outros casos tem-se:

$$D < R_1 + R_2$$

A análise analítica completa está na Tabela 12.

Condição matemática	Condição geométrica das duas circunferências
a) $D > R_1 + R_2$	não se interceptam e são externas
b) $D = R_1 + R_2$	tangentes externamente [eis um oito (8)]
c) $D < R_1 + R_2$	ver os casos ①, ② ou ③
c1) $D > R_1 - R_2 $	interceptam-se em dois pontos
c2) $D = R_1 - R_2 $	tangentes internamente
c3) $D < R_1 - R_2 $	aninhadas ou embutidas

Tabela 12

O.I. - Será que na Tabela 12 perdemos o caso da Figura 29 ?

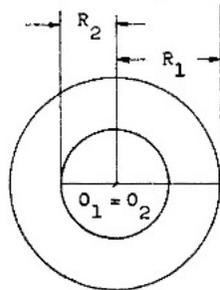


Figura 29

Resposta: Não pois $D = 0$ e é menor que $|R_1 - R_2|$ e "caímos" em c3.

Aí vai o fluxograma resumido que irá auxiliar de forma fundamental para que se possa escrever o programa em BASIC para o seu TK-2000 COLOR.

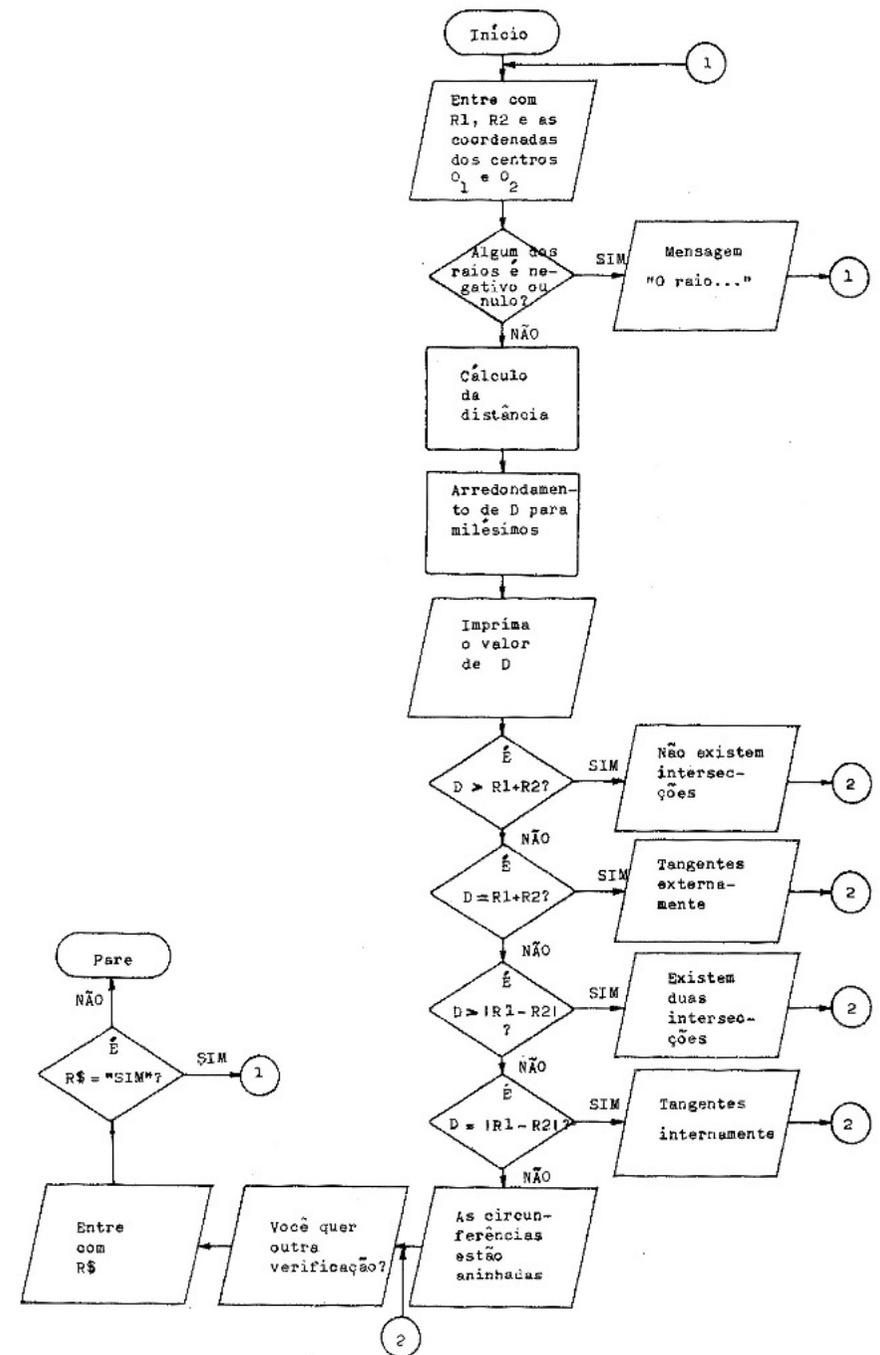


Figura 30

```

10 PRINT "ANÁLISE DA POSIÇÃO RELATIVA DE DUAS CIRCUNFERÊN-
CIAS"
15 FOR K = 1 TO 40 } Essa parte vai criar uma linha de 40
20 PRINT "O";      } letras "O" e não está no fluxograma.
25 NEXT K          } Aliás nem é preciso colocar isto no
                  } fluxograma pois a finalidade é dar
                  } uma saída mais expressiva e isto não
                  } em nada o "plano matemático" pa-
                  } ra se chegar a conclusão correta.
30 PRINT : PRINT
35 PRINT "ENTRE COM OS RAIOS DAS CIRCUNFERÊNCIAS"
40 INPUT R1, R2
50 IF R1 <= 0 OR R2 <= 0 THEN 300
60 INPUT "ENTRE COM AS COORDENADAS DO CENTRO DA PRIMEIRA
CIRCUNFERÊNCIA (X1, Y1)"; X1, Y1
65 INPUT "ENTRE COM AS COORDENADAS DO CENTRO DA SEGUNDA
CIRCUNFERÊNCIA (X2, Y2)"; X2, Y2
70 PRINT "RAIO 1=";R1;"OBS(X1,Y1)=(";X1;" ";Y1;"")"
80 PRINT : PRINT
90 PRINT "RAIO 2=";R2;"OBS(X2,Y2)=(";X2;" ";Y2;"")"
95 PRINT : PRINT
100 D=SQR((X2-X1)*(X2-X1)+(Y2-Y1)*(Y2-Y1))
110 D=INT (1000 * (D + .0005) / 1000)
120 PRINT "O SEGMENTO O1 -O2 TEM COMPRIMENTO D="; D:PRINT
130 IF D > R1+R2 THEN 210
140 IF D = R1+R2 THEN 230
145 IF D > ABS(R1-R2) THEN 250
150 IF D = ABS(R1-R2) THEN 270
160 PRINT "AS CIRCUNFERÊNCIAS ESTÃO ANINHADAS"
170 FOR K=1 TO 40
175 PRINT "O";
180 NEXT K
185 PRINT "VOCÊ QUER OUTRA VERIFICAÇÃO? (SIM/NÃO)"
190 INPUT R$
195 IF R$ = "SIM" THEN HOME: GOTO 10
200 END
210 PRINT "AS CIRCUNFERÊNCIAS NÃO SE INTERCEPTAM"
220 GOTO 170

```

```

230 PRINT "AS CIRCUNFERÊNCIAS SÃO TANGENTES EXTERNAMENTE"
240 GOTO 170
250 PRINT "AS CIRCUNFERÊNCIAS SE INTERCEPTAM"
260 GOTO 170
270 PRINT "AS CIRCUNFERÊNCIAS SÃO TANGENTES INTERNAMENTE"
280 GOTO 170
300 PRINT "O RAIOS DE UMA CIRCUNFERÊNCIA NÃO PODE SER NEM
NULO E NEM NEGATIVO"
310 PRINT "NÃO BRINQUE COMIGO SEU HUMANÓIDE DISTRAÍDO"
320 FOR J = 1 TO 1000 } eis aqui uma pausa para a sua
325 NEXT J             } meditação
330 HOME
340 GOTO 10

```

Aplique este programa para os seguintes ca

sos:

Caso	1ª Circunferência		2ª Circunferência		D	Condição geométrica das duas circunferências
	R1	(X1, Y1)	R2	(X2, Y2)		
1	3	(2, 4)	6	(0, 0)	?	?
2	5	(4, -3)	7	(3, -4)	?	?
3	1	(1, 2)	5	(4, 5)	?	?
4	4	(5, 5)	5	(4, 5)	?	?
5	1	(1, 2)	4	(5, 5)	?	?

Tabela 13

Comentários:

1) Linhas 145-150 - Função ABS

Em Matemática frequentemente é necessário obter-se valores absolutos e para tanto usa-se a instrução

ABS(X)

Dessa forma quando escrevemos $ABS(R1-R2)$ obtemos o módulo da diferença entre $R1$ e $R2$ mesmo que $R1$ seja menor que $R2$ a distância D será sempre positiva!!!

2) Na linha 100 aparece uma fórmula da distância que ficará clara quando for estudado o programa Nº 9 "A FÓRMULA DA DISTÂNCIA".

0.I.1 - Arquimedes e o círculo

Um problema onde Arquimedes mostrou toda sua habilidade como matemático foi, sem dúvida, aquele em que calculou a área de um círculo de raio R .

Para isso usou um raciocínio que só mais tarde (1600 a 1700 d.C.) iria ser utilizado por Newton e Leibniz na invenção do cálculo infinitesimal.

Seja S a área do círculo.

Dividamos tal círculo em um número muito grande de partes iguais (por meio de triângulos) (Figura 31).

Obteremos assim, um polígono cuja área A é menor que S (área do círculo) (Figura 32).

Coloquemos, agora, tais triângulos sobre uma reta (Figura 33).

O segmento AB tem para medida um número que chamaremos de P .

P é menor que o comprimento C da circunferência do círculo.

Com esta tira de triângulos podemos formar um "retângulo" de altura R (aproximadamente), e base $(1/2)P$, obtido dobrando-se a tira ao meio (para um número finito de triângulos, temos um retângulo [Figura 34]).

A área desse "retângulo" é A , e é menor que S .

A área A se aproximará de S quanto maior for o número de divisões.

Se o número n de divisões for infinito, a área A coincidirá com S e o comprimento P coincidirá com C , e assim teremos o retângulo (Figura 35).

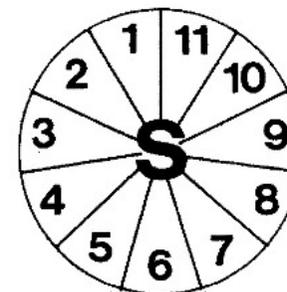


Figura 31

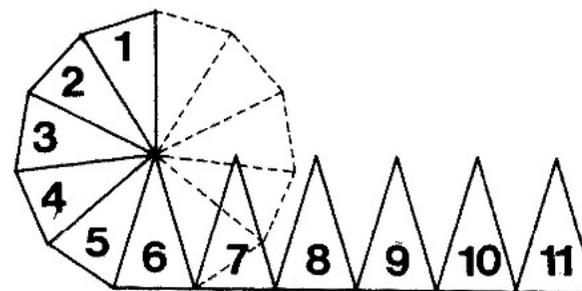


Figura 32

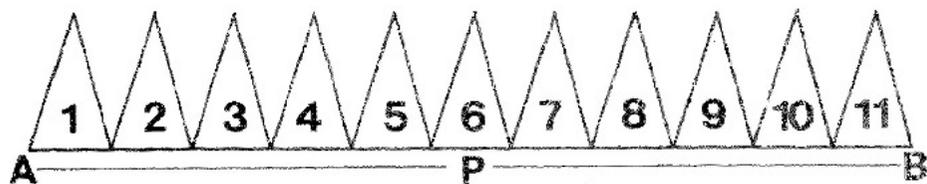


Figura 33

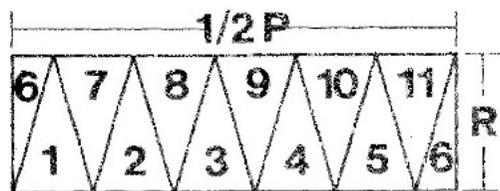


Figura 34

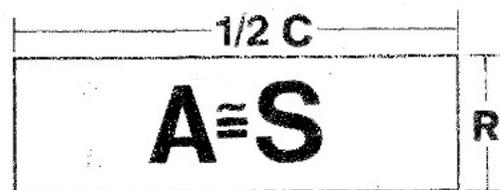


Figura 35

Então agora você já sabe que:

a) retificar uma circunferência é determinar graficamente o seu comprimento.

b) o comprimento da circunferência é medido três vezes o diâmetro mais $\frac{1}{7}$ do mesmo e este valor aproximado foi determinado por Arquimedes, ilustre sábio nascido em Siracusa.

COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA	$\approx (3 + \frac{1}{7})D$
-------------------------------	------------------------------

E daí surgiu o primeiro valor aproximado do $\pi \approx \frac{22}{7} = 3,142857$.

Nos programas nº 11 e 12 aparecem mais detalhes sobre o cálculo do π .

O.I. 2 - A divisão da circunferência, em arcos iguais, constitui um dos problemas mais antigos da história de nossa civilização.

Os sumerianos e acadianos, há 3000 anos a. C., apresentavam as rodas de seus carros com 6 raios opostos diametralmente, formando ângulos centrais iguais, o que nos leva a concluir que os mesopotâmios, já naquela época, sabiam dividir a circunferência de círculo em 6 partes iguais.

Seus descendentes, assírios e caldeus, foram quem nos ensinaram a dividir a circunferência em 360 graus; os graus em minutos e os minutos em segundos.

O.I. 3 - Para Aristóteles, a circunferência era a linha "mais perfeita"; antes de Copérnico, os astrônomos admitiam para os planetas, apenas movimentos conforme circunferências.

Kepler, com o pretexto de que o círculo era a "mais bela das figuras", também afirmava que os planetas descreviam circunferências de círculos.

No círculo encontrou Timeu, discípulo de Pitágoras, um símbolo para caracterizar a divindade, símbolo que foi repetido por Platão e Pascal e foi muitas vezes citado por Voltaire.

No livro "Poesias" de Sergio Milliet encontramos o seguinte verso:

"Assim o amor em nossa vida forma um círculo completo".

Chama-se círculo, em Geometria, a porção do plano limitada pela circunferência.

O círculo é, portanto, figura invariável.

Não pode haver círculo que seja *incompleto*, pois o círculo incompleto deixa de ser *círculo*.

Desde Euclides (no século III a.C.) até hoje, a figura denominada *círculo* ou era *completa* ou não era *círculo*.

Mas em poesia vale tudo...

"TRABALHINHO PARA VOCÊ "

E aí vai um pequeno problema para treinar sua "cuquinha".

Entre com as coordenadas do centro de uma circunferência de círculo e um ponto sobre a circunferência.

Ache a área do círculo com precisão de *três casas decimais*.

A fórmula da distância

A presença do *número nove*, em qualquer data ou evento, era encarada sempre com desconfiança e temor pelos matemáticos gregos.

O nove não era, também, de bom agouro para cristão, pois Jesus expirou, precisamente, na nona hora.

Esse número, dentro do complicado misticismo pitagórico, era apontado como o símbolo da fragilidade da vida, como fator preponderante nas incertezas do destino.

Nada melhor para o número do destino que o programa para calcular a *distância* ("entre onde estamos e para onde vamos").

Embora a chamada "prova dos nove" não ofereça a menor segurança (a conta pode estar inteiramente errada e a prova apontá-la como rigorosa ou certa) a expressão "prova dos nove", é na linguagem usual, sinônimo de certeza ou verificação segura.

Veja algumas lindas "coincidências" aritméticas entre o sete e o nove.



Figura 36

Aí vão alguns produtos bem interessantes:

$$\begin{aligned}
 9 \cdot 7 &= 63 \\
 99 \cdot 77 &= 7623 \\
 999 \cdot 777 &= 776223 \\
 9999 \cdot 7777 &= 77762223 \\
 99999 \cdot 77777 &= 7777622223 \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

O nove multiplicado por qualquer número ou ao contrário qualquer número multiplicado por nove, como resultado dá um número que tem a soma dos seus diversos algarismos divisível por nove ou igual a 9.

$$\begin{aligned}
 9 \cdot 1 &= 09 \longrightarrow 0 + 9 = 9 \\
 9 \cdot 2 &= 18 \longrightarrow 1 + 8 = 9 \\
 9 \cdot 3 &= 27 \longrightarrow 2 + 7 = 9 \\
 9 \cdot 4 &= 36 \longrightarrow 3 + 6 = 9 \\
 9 \cdot 5 &= 45 \longrightarrow 4 + 5 = 9 \\
 9 \cdot 6 &= 54 \longrightarrow 5 + 4 = 9 \\
 &\dots\dots\dots \\
 9 \cdot 9 &= 81 \longrightarrow 8 + 1 = 9 \\
 10 \cdot 9 &= 90 \longrightarrow 9 + 0 = 9 \\
 11 \cdot 9 &= 99 \longrightarrow 9 + 9 = 18, \text{ a } 1 + 8 = 9 \\
 12 \cdot 9 &= 108 \longrightarrow 1 + 0 + 8 = 9 \\
 13 \cdot 9 &= 117 \longrightarrow 1 + 1 + 7 = 9 \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

Um resultado muito interessante ocorre com os quadrados dos números que são constituídos apenas de "noves".

$$\begin{aligned}
 9^2 &= 81 \\
 99^2 &= 9801 \\
 999^2 &= 998001 \\
 9999^2 &= 99980001 \\
 99999^2 &= 9999800001 \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

E para terminar os "truques" com o 9 (nove) aí vão mais algumas operações aritméticas interessantes:

$$\begin{aligned}
 1 \cdot 9 + 2 &= 11 \\
 12 \cdot 9 + 3 &= 111 \\
 123 \cdot 9 + 4 &= 1111 \\
 1234 \cdot 9 + 5 &= 11111 \\
 12345 \cdot 9 + 6 &= 111111 \\
 123456 \cdot 9 + 7 &= 1111111 \\
 1234567 \cdot 9 + 8 &= 11111111 \\
 12345678 \cdot 9 + 9 &= 111111111 \\
 &\dots\dots\dots \\
 9 \cdot 9 + 7 &= 88 \\
 98 \cdot 9 + 6 &= 888 \\
 987 \cdot 9 + 5 &= 8888 \\
 9876 \cdot 9 + 4 &= 88888 \\
 98765 \cdot 9 + 3 &= 888888 \\
 987654 \cdot 9 + 2 &= 8888888 \\
 9876543 \cdot 9 + 1 &= 88888888 \\
 98765432 \cdot 9 + 0 &= 888888888 \\
 987654321 \cdot 9 - 1 &= 888888888
 \end{aligned}$$

Bem, já conversamos muito sobre o nove e é hora de "atacar" o 9º programa "A FÓRMULA DA DISTÂNCIA".

Inicialmente vamos aplicar o teorema de Pitágoras para achar a distância entre dois pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ [veja a Figura 37].

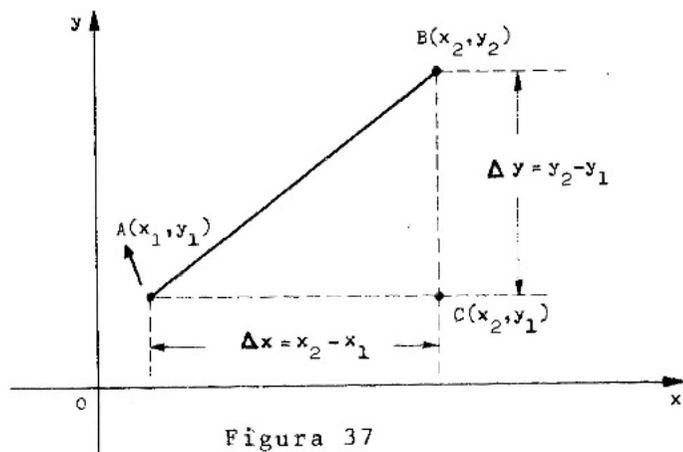


Figura 37

Na Figura 37 temos um triângulo retângulo com hipotenusa AB.

Esse triângulo retângulo foi construído baixando do ponto B uma perpendicular em relação ao eixo Ox e do ponto A uma paralela ao eixo Ox.

Para se obter os comprimentos dos catetos AC e BC é necessário conhecer as coordenadas de C.

Desde que C está na mesma horizontal que A a sua ordenada y é a mesma de A ou seja y_1 e como C está na mesma vertical de B a abscissa x de C é a mesma de B ou seja x_2 .

Consequentemente as coordenadas de C são (x_2, y_1) .

Daí vem

$$\begin{cases} BC = \Delta y = y_2 - y_1 \\ AC = \Delta x = x_2 - x_1 \end{cases} \quad \text{(Conforme está indicado na Figura 37)}$$

Em vista do teorema de Pitágoras obtém-se:

$$AB = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \quad \longrightarrow (1)$$

ou

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \longrightarrow (2)$$

Que mudanças devem ser feitas na (2) para "expandir" a mesma idéia e achar a distância entre dois pontos $P(x_1, y_1, z_1)$ e $Q(x_2, y_2, z_2)$ no espaço?

Para começar "admire" o sistema de coordenadas apresentado na Figura 38.

É a três dimensões, viu?!!

Para uma compreensão melhor ainda suponha que no canto do seu quarto na vertical para o teto sobe o eixo Oz e no plano do assoalho estão Ox e Oy.

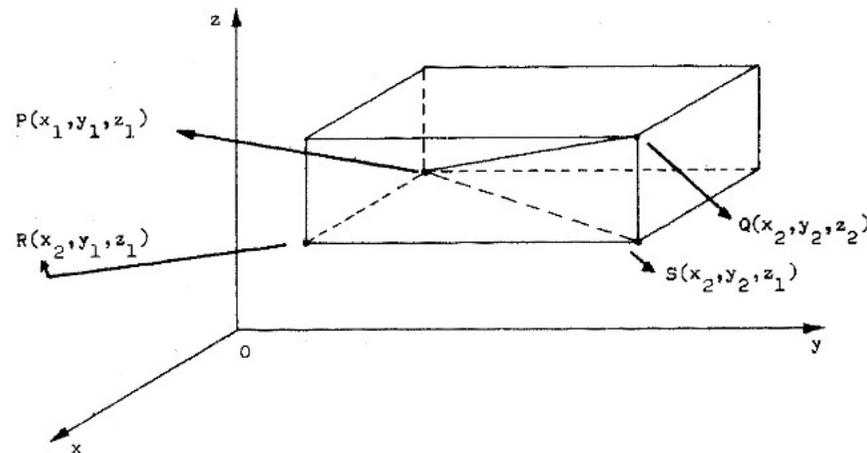


Figura 38

A distância que queremos encontrar é a da diagonal \overline{PQ} do paralelepípedo.

Para tanto precisamos antes de mais nada achar as coordenadas dos pontos R e S.

Desde que o ponto S está no mesmo plano horizontal que P e portanto na mesma cota (distância na direção Oz acima do plano xOy) e ainda como está na mesma vertical que Q as suas coordenadas são:

$$(x_2, y_2, z_1)$$

Por outro lado as coordenadas do ponto R são (x_2, y_1, z_1) visto que está no mesmo plano vertical (paralelo a yOz) que os pontos S e Q.

No triângulo retângulo PRS temos:

$$(PS)^2 = (PR)^2 + (RS)^2 \longrightarrow (3)$$

Porém

$$\left\{ \begin{array}{l} PR = x_2 - x_1 \longrightarrow (4) \\ RS = y_2 - y_1 \longrightarrow (5) \end{array} \right.$$

No triângulo retângulo PSQ temos:

$$(PQ)^2 = (PS)^2 + (SQ)^2 \longrightarrow (6)$$

Mas

$$SQ = z_2 - z_1 \longrightarrow (7)$$

De (3), (4), (5), (6) e (7) vem:

$$(PQ)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

ou ainda

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \longrightarrow (8)$$

Como exemplo de aplicação da fórmula da

distância vamos entrar com as coordenadas dos vértices de um quadrilátero e determinar se o mesmo é paralelogramo ou um retângulo.

No programa testamos antes de mais nada a condição de o quadrilátero ser ou não um paralelogramo.

Os comprimentos dos lados são arredondados para o centésimo mais próximo e os seus valores são impressos qualquer que seja o caso.

Análise do problema

Um quadrilátero é um paralelogramo se os lados opostos são *congruentes*.

Que tal você consultar um dicionário para saber o que significa congruente?

É necessário usar a fórmula da distância para obter os comprimentos de cada lado e então comparar os lados opostos (Figura 39).

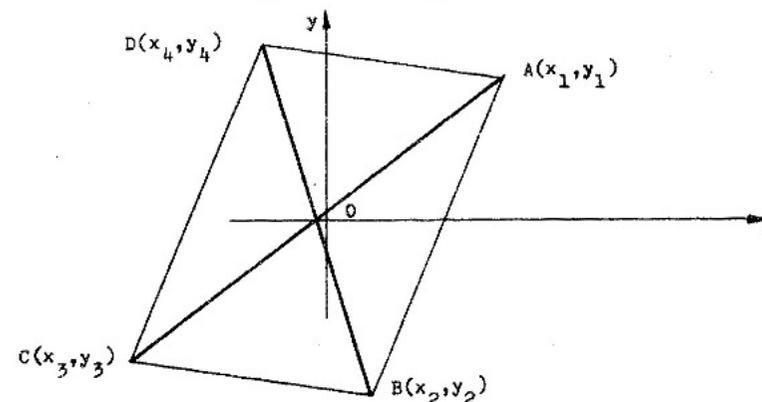


Figura 39

Por outro lado um paralelogramo é um retângulo quando as diagonais são congruentes.

Já viu o que é congruente?

Não!?!.

Aí vai a resposta: duas figuras ou dois segmentos são congruentes quando são iguais em tudo...

Aí vai o fluxograma

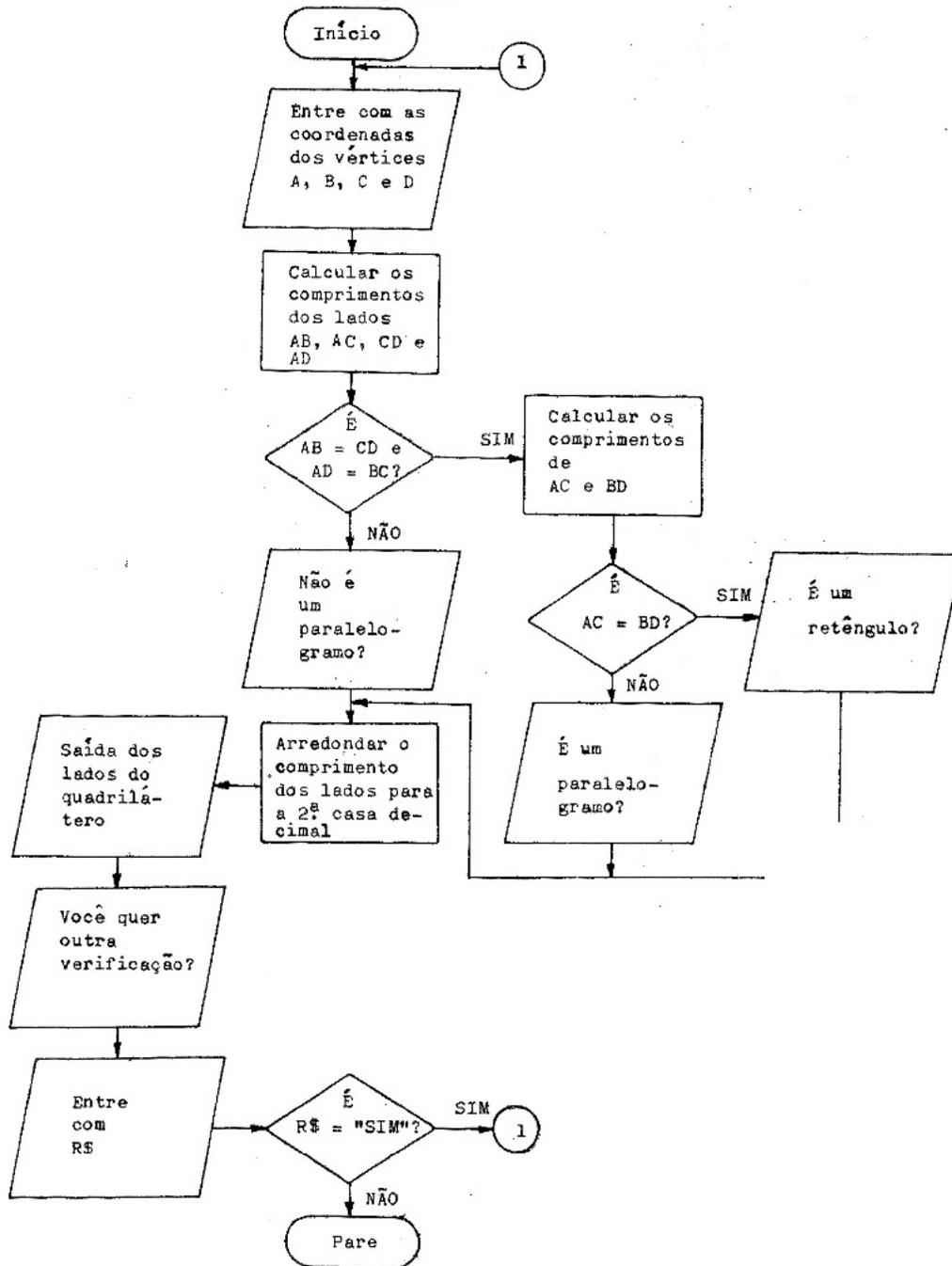


Figura 40

```

10 PRINT "TIPO DE QUADRILÁTERO"
15 PRINT "ENTRE COM AS COORDENADAS DO QUADRILÁTERO"
20 INPUT "A(X1,Y1)"; X1,Y1
30 INPUT "B(X2,Y2)"; X2,Y2
40 INPUT "C(X3,Y3)"; X3,Y3
50 INPUT "D(X4,Y4)"; X4,Y4
60 AB=SQR((X2-X1)*(X2-X1) + (Y2-Y1)*(Y2-Y1))
70 BC=SQR((X3-X2)*(X3-X2) + (Y3-Y2)*(Y3-Y2))
80 CD=SQR((X4-X3)*(X4-X3) + (Y4-Y3)*(Y4-Y3))
90 AD=SQR((X4-X1)*(X4-X1) + (Y4-Y1)*(Y4-Y1))
100 IF AB = CD AND BC = AD THEN 110
105 PRINT "NÃO É UM PARALELOGRAMO":GOTO 150
110 AC = SQR((X3-X1)*(X3-X1) + (Y3-Y1)*(Y3-Y1))
120 BD = SQR((X4-X2)*(X4-X2) + (Y4-Y2)*(Y4-Y2))
130 IF AC = BD THEN 240
140 PRINT "É UM PARALELOGRAMO"
150 AB = AB + 0.005 : AB = INT(AB*100)/100
160 BC = BC + 0.005 : BC = INT(BC*100)/100
170 CD = CD + 0.005 : CD = INT(CD*100)/100
180 AD = AD + 0.005 : AD = INT(AD*100)/100
185 PRINT "AB="; AB; "BC="; BC; "CD="; CD; "AD="; AD
190 PRINT : PRINT
200 PRINT "VOCÊ QUER UM OUTRO CÁLCULO? (SIM/NÃO)"
210 INPUT R$
220 IF R$ = "SIM" THEN GOTO 10
230 END
240 PRINT "É UM RETÂNGULO"
250 GOTO 150
  
```

Vamos aplicar agora esse programa para verificar as seguintes situações:

- a) A(1,6); B(8,6); C(3,4); D(-4,4)
- b) A(1,2); B(5,5); C(8,10); D(4,6)
- c) A(3,1), B(6,0), C(14,3), D(-2,5)

- d) A(1,2), B(5,-1), C(11,7), D(7,10)
 e) A(0,0), B(5,1), C(6,6), D(1,5)

Problemas para você

- I) O que você deveria fazer no seu programa para saber se o seu quadrilátero é um losango?
Sugestão: Consulte um livro bom de Geometria Analítica.

- II) Elabore um programa que calcule a distância entre os seguintes pontos no espaço.

- | | |
|---|---------------------------------|
| { | 1) $P_1(8,7,3); Q_1(-2,-3,-4)$ |
| | 2) $P_2(7,7,7); Q_2(2,2,2)$ |
| | 3) $P_3(5,5,5); Q_3(-1,-2,-3)$ |
| | 4) $P_4(0,0,0); Q_4(4,4,4)$ |
| | 5) $P_5(3,3,3); Q_5(13,13,13)$ |
| | 6) $P_6(-20,0,3); Q_6(-18,1,4)$ |
| | 7) $P_7(-1,-1,-1); Q_7(4,5,6)$ |
| | 8) $P_8(6,6,6); Q_8(3,2,1)$ |
| | 9) $P_9(9,9,9); Q_9(8,7,3)$ |

As distâncias depois de calculadas devem ser impressas da menor para a maior com três casas decimais (veja o programa N° 7).

Utilize, se souber, variável indexada.

Eixo de simetria de uma parábola

Estamos no décimo programa e o 10 (dez) é o número universal.

Destaca-se o número dez, entre todos os números, por ter sido escolhido para servir de base ao sistema usual de numeração.

Dez unidades de uma ordem formam uma de ordem imediatamente superior.

O grande segredo da numeração escrita fundamenta-se no princípio decimal.

Qualquer algarismo significativo, escrito à esquerda de outro vale dez vezes mais do que se estivesse escrito no lugar desse outro.

O sistema decimal é universalmente adotado.

Desde o tuaregue que contava pelos dedos, até o matemático ou um usuário privilegiado do TK-2000 COLOR, todos contam de dez em dez!!!

São profundas as divergências entre os povos em todos os assuntos (políticos, religiosos, linguísticos, artísticos, etc.) porém é surpreendente a universalidade no sentido de ser o número dez tomado como base de numeração.

Na Tabela 14 temos as palavras numéricas

de algumas línguas indo-européias mostrando a extraordinária estabilidade das mesmas.

Número	Sânscrito	Grego antigo	Latim	Alemão	Inglês	Francês	Português	Russo
1	eka	en	unus	eins	one	un	um	odin
2	dua	duo	duo	zwei	two	deux	dois	dva
3	tri	tri	tres	drei	three	trois	três	tri
4	catu	tetra	quatuor	vier	four	quatre	quatro	tchetire
5	panca	pente	quinque	fünf	five	cinq	cinco	piat
6	sas	hex	sex	sechs	six	six	seis	chest
7	sapta	hepta	septem	sieben	seven	sept	sete	sem
8	asta	octo	octo	acht	eight	huit	oito	vossem
9	nava	ennea	novem	neun	nine	neuf	nove	deviat
10	daca	daca	decem	zehn	ten	dix	dez	dessiat
100	cata	ecaton	centum	hundert	hundred	cent	cem	sto
1000	sebastre	xilia	mille	tausend	thousand	mille	mil	ticiatcha

Tabela 14

Observando as tribos selvagens e a maneira de agir das crianças, é óbvio que os dedos, tomados como unidades nas contas, serviram de base ao sistema numérico.

Por serem dez os dedos de ambas as mãos começamos a contar até esse número e baseamos toda a nossa contagem no sistema de grupar os seres ou as coisas de dez em dez.

Na Figura 41 aparecem os símbolos digitais que já eram usados e conhecidos em 1520.

Tem sido usadas outras bases, mas quase sempre de números múltiplos de 10.

A base que seria a ideal é 12, pois se presta melhor que o 10 (dez) à subdivisões.

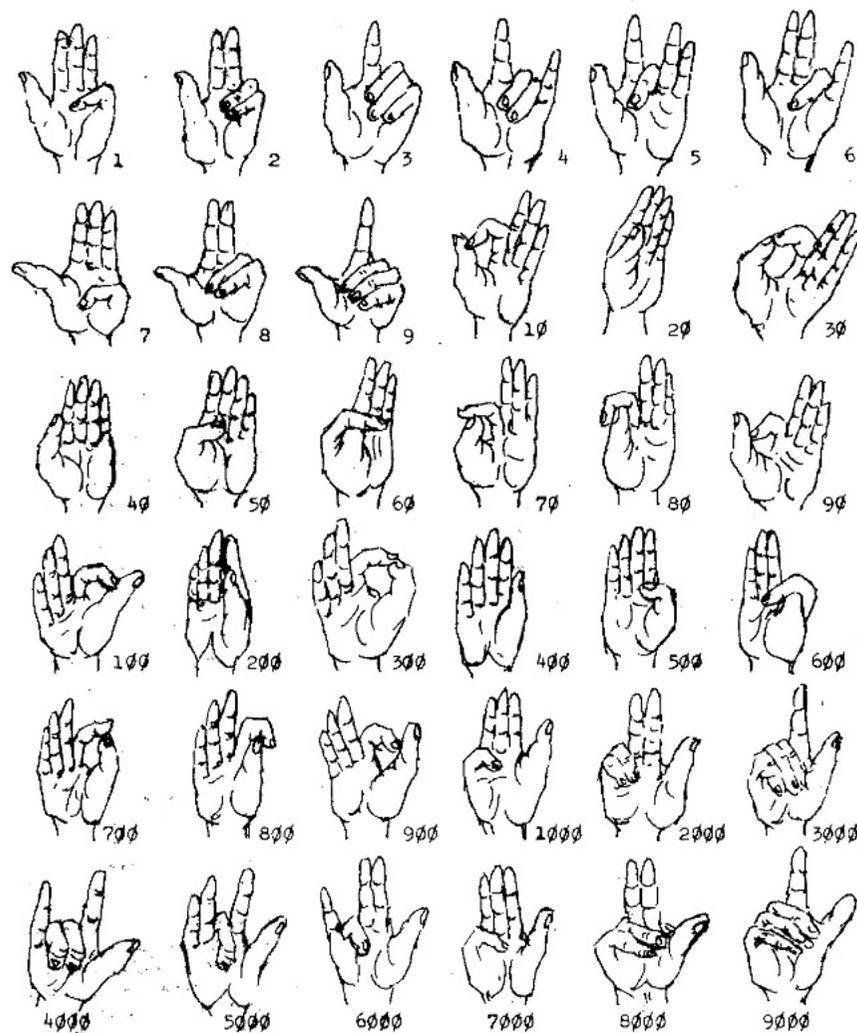


Figura 41

10 tem apenas dois divisores (2 e 5) diferentes dele próprio e da unidade.

Já o 12 tem quatro divisores o 2, o 3, o 4 e o 6.

Simão Stevin (falecido em 1633) estudou a possibilidade de substituir o sistema decimal pelo sistema duodecimal que seria mais prático, mais comodo e mais econômico.

Há quem prove que a melhor base seria a três.

Na Tabela 15 está indicada a representação decimal e a do sistema ternário.

Sistema decimal	Sistema ternário 3 ³ 3 ² 3 ¹ 3 ⁰
1	1
2	2
3	1 0
4	1 1
5	1 2
6	2 0
7	2 1
8	2 2
9	1 0 0
10	1 0 1
11	1 0 2
12	1 1 0
13	1 1 1
14	1 1 2
15	1 2 0
16	1 2 1
17	1 2 2
18	2 0 0
19	2 0 1
20	2 0 2
21	2 1 0
22	2 1 1
23	2 1 2
24	2 2 0
25	2 2 1
26	2 2 2
27	1 0 0 0

Tabela 15

Para se representar por exemplo o 21 no sistema ternário deve-se fazer

$$\begin{aligned} 21 &= 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0 \\ &= 18 + 3 + 0 = 21 \end{aligned}$$

Já para obter o 13 tem-se

$$1 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 = 9 + 3 + 1 = 13$$

Nos microcomputadores são muito usados o sistema binário e o sistema hexadecimal.

Recomendamos a leitura dos nossos livros "BASIC Sem Segredos" e "Dê um APPLE a sua vida" para conhecer melhor a justificativa do uso dos sistemas binário e hexadecimal.

Ovidio escreveu o seguinte sobre os "impresos digitais":

"Dez ciclos da Lua compreendia o ano romano

Este número era tido então em alta estima

Talvez porque estamos acostumados a contar pelos dedos,

Ou porque uma mulher em duas vezes cinco meses dá à luz,

Ou talvez porque os números crescem até alcançarem dez

E então começam seu ritmo de um, outra vez."

O número dez, ensina Santo Agostinho, leva o homem ao conhecimento de Deus.

E a pergunta é, como?

A resposta é dada pelo mais célebre dos padres da Igreja Latina: "basta decompor o número dez em duas parcelas: 3 (três) e 7 (sete); a primeira é o símbolo da Trindade e a outra assinala o dia do repouso depois da Criação".

A palavra Decálogo (formada de dois vocábulos gregos dez e palavra) é utilizada para designar os dez mandamentos que Deus promulgou, para o seu

povo, no monte Sinai:

Esses dez mandamentos são os seguintes:

- 1) Amar a Deus sobre todas as coisas
- 2) Não jurar o seu santo nome em vão
- 3) Guardar domingos e festas
- 4) Honrar pai e mãe
- 5) Não matar
- 6) Não pecar contra a castidade
- 7) Não furtar
- 8) Não levantar falso testemunho
- 9) Não desejar a mulher do próximo
- 10) Não cobiçar as coisas alheias.

Quando a gente dá grau dez indica o ótimo, representando-se com isto o elogio e a exaltação ao desempenho de alguém.

Não é proibido entretanto dizer que uma "mulher é nota dez"...

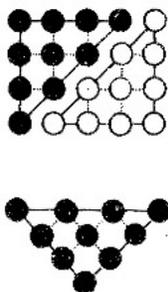


Figura 42

Bem, vamos ao 10º programa no qual vamos aprender a desenhar uma parábola.

O gráfico de uma função quadrática é chamada do parábola.

O nome parábola se dá ao lugar geométrico dos pontos de um plano que estão a igual distância de um ponto fixo F, chamado foco e de uma reta fixa chamada diretriz. ($PF = QP$).

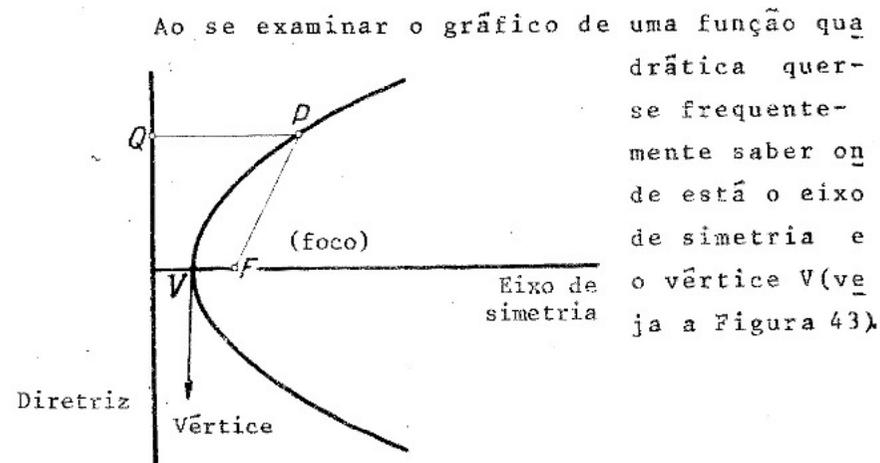


Figura 43

Para obter estas informações vamos completar o quadrado do membro da direita da função quadrática ou simplesmente da parábola

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f(x) = a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + c \right]$$

$$f(x) = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \right) - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \longrightarrow (1)$$

Na (1) o valor de $f(x)$ é mínimo se a é positivo e máximo se a é negativo e o valor de $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ é $\frac{4ac - b^2}{4a}$ visto que quando $x = -\frac{b}{2a}$ tem-se $x + \frac{b}{2a} = 0$.

Assim as coordenadas do vértice são:

$$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

A reta cuja equação é $x = -\frac{b}{2a}$ é chamada eixo de simetria.

Agora podemos escrever um programa que imprima as seguintes informações

- A condição de máximo e mínimo da parábola ou seja se é uma parábola côncava ou convexa [com $a > 0$ a parábola (veja a Figura 49) tem concavidade voltada para cima (mínimo) e com $a < 0$ a parábola tem a concavidade voltada para baixo e tem máximo].
- A equação do eixo de simetria.
- As coordenadas do vértice.

0.1. - No nosso livro de Geometria Analítica no plano que escrevemos em 1969 junto com o prof. Carlos E.C. de Carvalho analisamos com bastante detalhe as cônicas.



Figura 44

Aí vai o fluxograma resumido no qual mostra a solução do problema.

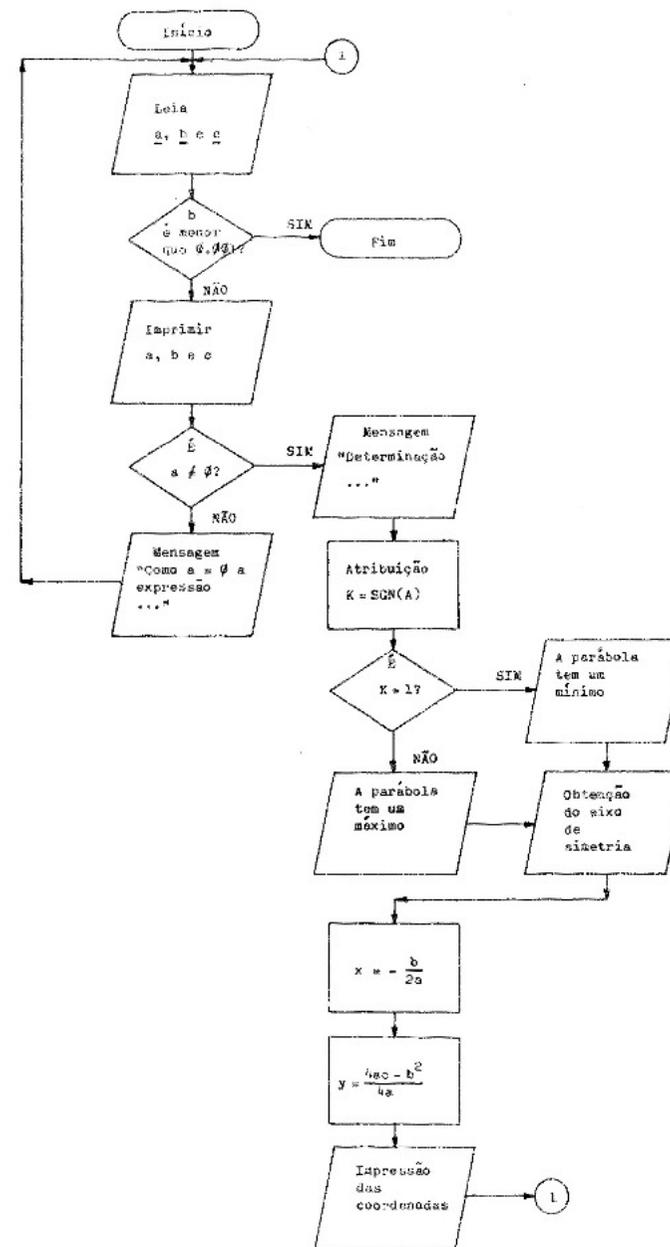


Figura 45

Aí vai o programa em BASIC

```

10 READ A,B,C
20 IF B<0.001 THEN 1000
30 PRINT A;" ";B;" ";C
40 IF A<>0 THEN 70
50 PRINT "COMO A=0 A EXPRESSÃO NÃO É
  QUADRÁTICA"
60 GOTO 10
70 PRINT "DETERMINAÇÃO SE A PARÁBOLA
  É CÔNCAVA OU CONVEXA"
75 PRINT
80 K = SGN(A)
90 IF K=1 THEN 120
100 PRINT "A PARÁBOLA TEM MÁXIMO"
110 GOTO 130
120 PRINT "A PARÁBOLA TEM MÍNIMO"
130 PRINT "OBTENÇÃO DO EIXO DE SIMETRIA"
135 PRINT
140 X = -B/(2*A)
150 PRINT "O EIXO DE SIMETRIA É X=";X
160 PRINT
165 Y = (4*A*C - B*B)/(4*A)
170 PRINT "AS COORDENADAS DO VÉRTICE, QUE É UM PONTO
  EXTREMO SÃO (X=";X;" ";Y="; Y;"")"
180 PRINT
190 GOTO 10
200 DATA 1,3,2
210 DATA 5,6,7
220 DATA 1,2,-4
230 DATA 6.1, 13.1, 6.2
240 DATA 7, 0.0001, 1
1000 END

```

Esta é uma forma automática de parar o programa entrando com um dado bem pequeno. No nosso caso particular quando b é pequeno o eixo de simetria é o próprio eixo Oy e o vértice está sobre esse eixo.

Comentários:

- 1) Nós já utilizamos como instrução de entrada a instrução INPUT e agora vamos usar o par de instruções READ-DATA.

As instruções DATA e READ são usadas em conjunto ou melhor um programa que contiver uma ou mais instruções DATA, deverá ter pelo menos uma instrução READ.

Com a instrução DATA pode-se definir um conjunto de dados (no nosso caso particular os valores dos coeficientes A,B e C) separados por vírgulas que serão lidos sequencialmente pela instrução READ.

Normalmente, por uma questão apenas de organização a instrução DATA é incluída no início ou no final do programa (foi o que nós fizemos nas linhas 200-240) porém nada nos impede que a mesma seja colocada em qualquer parte do programa.

Os dados lidos pela instrução READ (linha 10) e associados a nome de variáveis podem ser usados para qualquer tipo de operação.

Os dados contidos na instrução DATA podem ser variáveis, cadeias inteiras ou reais, devendo-se apenas ter o cuidado de associar ao dado o devido nome de variável.

O uso das instruções READ-DATA em conjunto com as matrizes é uma ferramenta muito útil na programação.

Caso nem todos os dados da instrução DATA forem usados o seu TK-2000 COLOR ignora os restantes.

2) SGN(X)

A instrução SGN(X) é usada para se poder reconhecer o sinal de uma variável.

Caso o valor de X for negativo, o TK-2000 apresenta na tela -1; se o valor for 0 ele apresenta 0; se o valor for positivo apresenta 1.

Na linha 80, SGN(A) reconhece o sinal do número atribuído a variável A.

Como será que se pode obter o gráfico da parábola?

Em primeiro lugar o programa que vamos apresentar desenhará a parábola com o eixo Ox na vertical e o eixo Oy na horizontal e como se pode perceber fizemos uma rotação de 90° graus no sentido horário do sistema convencional (Figura 46).

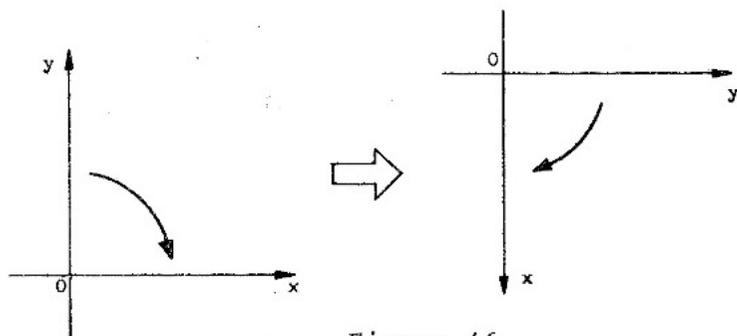


Figura 46

O gráfico mais simples é obtido quando a parábola tem a expressão $y = x^2$ e vamos desenhar um gráfico de -5 a 5 com o auxílio do seu TK-2000 COLOR.

Aí vai o fluxograma "explicativo":

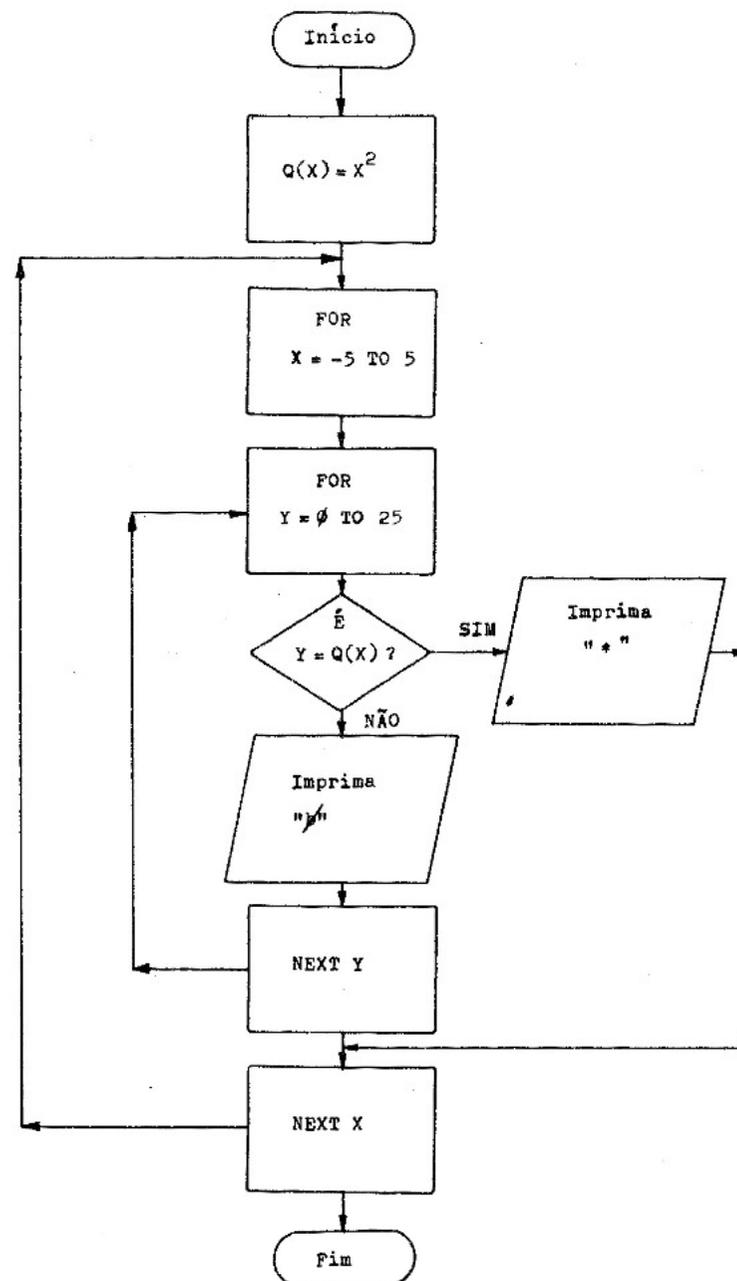


Figura 47

```

30 DEF FN Q(X) = X*X
60 FOR X = -5 TO 5
63 PRINT
90 FOR Y = 0 TO 36
120 IF Y = FN Q(X) THEN 210
150 PRINT "b";
180 NEXT Y
210 PRINT "*";
240 NEXT X
270 END

```

Como uma primeira tentativa para desenhar parábola não está nada mal, porém pode ser que se queira obter parábolas com valores de Y negativos de forma que a linha 90 talvez tenha que ser mudada e para isso convém fazer outras modificações tais como:

```

4 PRINT "ENTRE COM O NÚMERO DE ESPAÇOS QUE DESEJA A
   ESQUERDA DO ZERO";
5 INPUT E
6 PRINT
90 FOR Y = - E TO 30 - E

```

Podemos também colocar 0 na origem, traçar o eixo vertical Ox e o eixo horizontal Oy além de definir uma escala *no eixo vertical*.

Vamos agora apresentar um programa mais completo

```

10 PRINT "ENTRE COM O NÚMERO DE ESPAÇOS QUE DESEJA DETXAR
   A ESQUERDA DO EIXO OX"
20 INPUT E
25 PRINT
27 FOR J = 1 TO E

```

no nosso caso particular iremos entrar com E=4 e caso você queira mudar tome cuidado com o tamanho do vídeo e com a escala do eixo Oy.

```

30 PRINT "b";
32 NEXT J
40 FOR Y = 0 TO 30 STEP 10
50 PRINT Y; "BBBBBBBB";
60 NEXT Y
70 PRINT
80 FOR K = 1 TO 30
90 IF K/5 = INT(K/5) THEN 120
100 PRINT "-";
110 GOTO 130
120 PRINT "!";
130 NEXT K
140 DEF FN Q(X) = X*X
150 FOR X = -5 TO 5
160 PRINT
170 FOR Y = -E TO 35-E
180 IF Y <> 0 THEN 250
190 IF X=0 THEN 220
200 PRINT "!";
210 GOTO 230
220 PRINT "0";
230 IF FN Q(X) > 0 THEN 270
240 GOTO 290
250 IF Y = FN Q(X) THEN 280
260 PRINT "b";
270 NEXT Y
280 PRINT "*";
290 NEXT X
300 END

```

Este PRINT é muito importante para se poder passar para a próxima linha toda vez que for impressa a posição de um ponto ("*")

Comentários:

Muitas observações podem ser feitas para esse programa, mas a mais importante é que não teremos o eixo Ox caso as ordenadas Y sejam negativas.

A escala é fixa e existe a possibilidade de representar apenas uma função por vez.

Evidentemente se ocorrerem valores não inteiros para Y teremos sérios problemas nesse gráfico!!!

É evidente que com esses comentários abre-se uma ampla perspectiva para melhorar o programa apresentado tornando-o mais geral.

Por exemplo como uma aplicação um pouco mais sofisticada faça as seguintes mudanças

```

140 DEF FN Q(X) = X*X - 4*X+4
150 FOR X = -3 TO 3

```

Você terá uma imagem de um gráfico análogo ao mostrado na Figura 48.

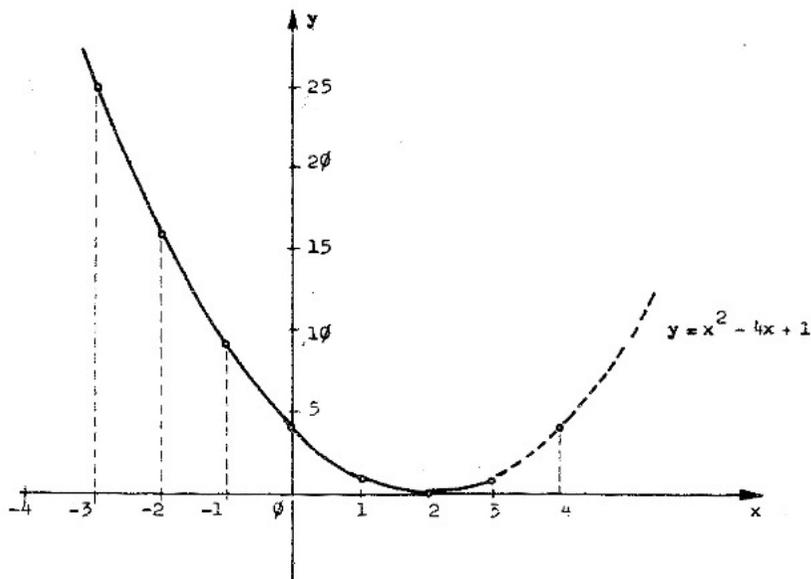


Figura 48

Note que

x	$y = x^2 - 4x + 4$	(x,y)
0	4	(0,4)
1	1	(1,1)
2	0	(2,0)
3	1	(3,1)
-1	9	(-1,9)
-2	16	(-2,16)
-3	25	(-3,25)

Cuidado com a posição da ordenada (y) quando a mesma é nula

Tabela 16

Trabalhinho para você

a) Elabore os gráficos convenientes para as seguintes funções quadráticas, também chamadas trinômios do 2º grau.

$$\begin{cases}
 \text{a) } y = x^2 - 3x - 4 & \text{para } -4 \leq x \leq 5 \\
 \text{b) } y = x^2 - 4 & \text{para } -6 \leq x \leq 5 \\
 \text{c) } y = -x^2 - 2x + 3 & \text{para } -6 \leq x \leq 2 \\
 \text{d) } y = -x^2 + 2x + 15 & \text{para } -2 \leq x \leq 3
 \end{cases}$$

b) Melhore o programa apresentado e além do gráfico faça o seu TK-2000 COLOR imprimir antes a tabela de valores (x,y) como indicado na Tabela 16.

O.I. - O.I. - O.I. - O.I. - O.I. - O.I. - O.I.

Já estamos quase "embarcando" para o próximo programa e esquecemos de falar sobre a definição de função que usamos por exemplo na linha 140 do último programa.

A instrução `DEF FN` permite que se defina funções no TK-2000 COLOR conforme ficou bem claro nos programas há pouco analisados.

Inicialmente o nome da função FN é definido usando DEF.

No nosso caso o nome que escolhemos foi Q(X).

Uma vez que a linha de programa que define a função (DEF) foi executada, a função pode ser usada na forma FN Q(X).

Veja no último programa as linhas 230 e 250.

Um último "oizinho" - O.I.

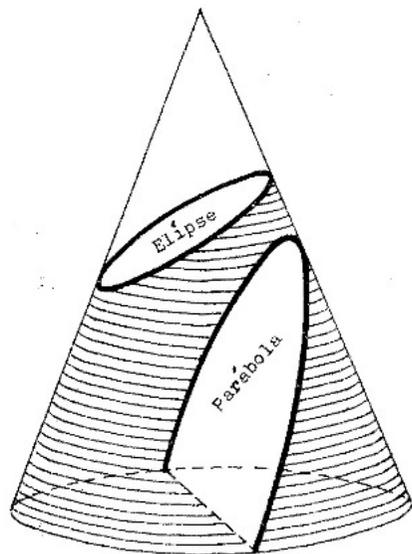


Figura 49 - Seções cônicas

Apolônio (cerca de 230 anos a.C.) rompeu com as regras platônicas e estudou curvas insuscetíveis de serem traçadas à régua e compasso. Estudou, em especial, três curvas: a elipse, a parábola

e a hipérbole. A elipse é a curva representativa da órbita dos planetas. A parábola, da trajetória de um projétil. A terceira secção cônica será estudada quando descrevermos a expansão dos gases num motor de combustão interna. Valendo-se da geometria dos sólidos de Euclides, Apolônio antecipou alguns dos princípios mais importantes da geometria da Reforma. Quando os homens começaram a se preocupar com as órbitas dos planetas, em vista das novas observações efetuadas com o telescópio, e quando a artilharia e os engenhos rodoviários caíram no domínio público, já se usavam cartas projetadas para propósitos náuticos. Essas cartas de projeção, baseadas no princípio da latitude e da longitude, foram o golpe de misericórdia desferido na geometria platônica e o germe da geometria da Reforma.

A terceira secção cônica ou seja a hipérbole será muito importante para a equação de Clapeyron e para conhecer melhor o seu uso você deverá ter o "TK-2000 na Física".

Calculando o π

Falemos inicialmente um pouco do número 11.

Na realidade por estar o número 11 (onze) compreendido entre dois notáveis da série natural - que são o dez e o doze - tornou-se esquecido pelos numerologistas.

Acresce a isto que o onze em alguns idiomas é expresso por "dez mais um" ou "um mais dez" e passa, por isso, despercebido pelos curiosos.

Assim no espanhol o *onze* é once e no italiano é *undici*.

No Brasil entretanto o onze é muito importante pois como alguns acham que aqui é o país do melhor futebol do mundo o número tem bastante prestígio visto que esse é o número de jogadores de um time de futebol.

A infração denominada "penalte" é cobrada a uma distância de onze jardas da meta.



Figura 50

Porém o 11 tem uma propriedade muito interessante ou seja para obter as suas potências não é necessário fazer o produto do onze por si mesmo várias vezes bastando para isto construir a seguinte pirâmide numérica:

$$11^1 = 11 \longrightarrow 1 + 1 = 2$$

$$11^2 = 121 \longrightarrow 1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$$

$$11^3 = 1331 \longrightarrow 1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$$

$$11^4 = 14641 \longrightarrow 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$$

Isto vale para 11^5 ?

Alguns produtos de números constituídos por apenas "uns" tem resultados bastante interessantes. Veja:

$$11 \cdot 111 = 1221$$

$$111 \cdot 11111 = 1233321$$

$$1111 \cdot 1111111 = 123444321$$

.....

Uma interessantíssima "pirâmide" numérica é obtida com o quadrado de números que tem apenas o dígito 1.

$$1^2 = 1$$

$$11^2 = 121$$

$$111^2 = 12321$$

$$1111^2 = 1234321$$

$$11111^2 = 123454321$$

$$111111^2 = 12345654321$$

$$1111111^2 = 1234567654321$$

$$11111111^2 = 123456787654321$$

$$111111111^2 = 12345678987654321$$

Vejamos agora como se pode obter o π que é um dos cinco números mais importantes da Matemática. Os outros números são 0 , 1 , e e i .

O e e o i iremos analisar logo em seguida.

O número π é a razão da circunferência de um círculo para o seu diâmetro. Aliás isto já foi dito anteriormente, não é?

Durante muitos séculos, os matemáticos tem procurado obter "boas aproximações" deste número tão importante. Os babilônios, os gregos, os hindus e os chineses tinham várias estimativas para o π .

A maior parte dessas aproximações estava ligada a desigualdades, círculos e polígonos escritos.

Já, após a descoberta do Brasil fórmulas muito importantes, baseadas em séries e frações infinitas, possibilitaram a obtenção de boas aproximações para o π .

Aliás a maturidade do número π foi alcançada com a invenção do Cálculo Infinitesimal por Newton e Leibniz.



Figura 51 - Leibniz (1646-1716)

Em 1592 o famoso matemático francês François Viète estabeleceu a fórmula

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \dots \rightarrow (1)$$

Em 1655 John Wallis apresentou a expressão:

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 11 \dots}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 12 \dots} \rightarrow (2)$$

Outras fórmulas surgiram depois e entre elas destacamos as de:

Lord Brounker (1658)

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{9}{2}} + \frac{25}{2 + \frac{49}{2}} + \dots \rightarrow (3)$$

Leibniz (1673)

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \dots \rightarrow (4)$$

Abraham Sharp

$$\frac{\pi}{6} = \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot (1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{3^2 \cdot 5} - \frac{1}{3^3 \cdot 7} + \frac{1}{3^4 \cdot 9} \dots) \rightarrow (5)$$

John Machin (1706)

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{\pi}{4} &= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \dots \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \dots \right) \\ \text{b) } \frac{\pi}{4} &= 4 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \dots \right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{3 \cdot 239^5} - \dots \right) \end{aligned} \rightarrow (6)$$

$$\text{c) } \frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) - \frac{1}{7} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{7} \right) + \dots \right]$$

Leonard Euler (1730)

$$\begin{aligned} \pi &= \sqrt{6 \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots \right)} = \\ &= 4 \sqrt{90 \left(1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \frac{1}{256} + \dots + \frac{1}{n^4} + \dots \right)} \rightarrow (7) \end{aligned}$$

Apesar de fora de ordem cronológica aí vão as contribuições de Leibniz

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{\pi}{4} &= \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11} \right) + \dots = \\ &= 2 \left[\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{9 \cdot 11} + \dots \right] \\ \text{b) } \frac{\pi^2}{6} &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \\ \text{c) } \frac{\pi^2}{8} &= 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots \\ \text{d) } \frac{\pi^2}{12} &= 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots \\ \text{e) } \frac{\pi^4}{90} &= 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots \end{aligned} \rightarrow (8)$$

Muitas aproximações diretas (sem séries) foram sugeridas ao longo dos anos e entre elas citamos:

$$\begin{aligned} \pi &= \frac{22}{7} \rightarrow \text{Franco de Liege (1066)} \\ \pi &= \frac{864}{274} \rightarrow \text{Fibonacci (1220)} \\ \pi &= \frac{88}{\sqrt{785}} \rightarrow \text{Tycho Brahe (1580)} \end{aligned}$$

$$\pi = \frac{355}{113} \longrightarrow \text{Adriaen Anthoniszoon (1600)}$$

$$\pi = \left(\frac{7}{4}\right)^2, \left(\frac{16}{9}\right)^2, \left(\frac{62}{35}\right)^2, \left(\frac{39}{22}\right)^2, \left(\frac{218}{123}\right)^2, \left(\frac{296}{167}\right)^2 \rightarrow \text{Lamber (1770)}$$

Que tal fazer essas continhas no TK-2000 para ver se elas estão perto do 3,141592...?

Bem, já vimos as muitas formas que se inventaram para chegar ao valor mais preciso do π e agora que tal fazer um programa no seu TK-2000 COLOR usando a fórmula de Leibniz [veja o sistema (8)]. É uma muito boa e instrutiva!!!

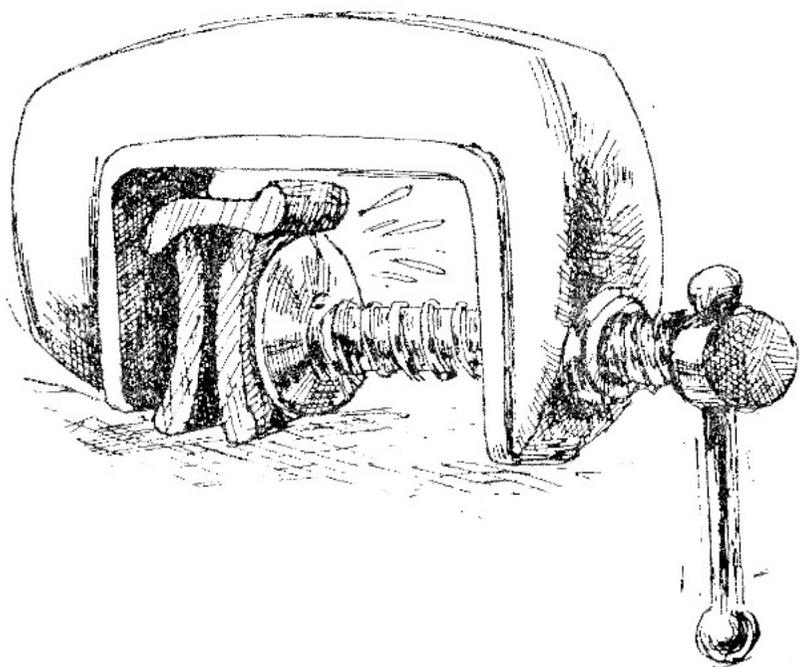


Figura 52

Aí vai o fluxograma para obter o π pela fórmula de Leibniz.

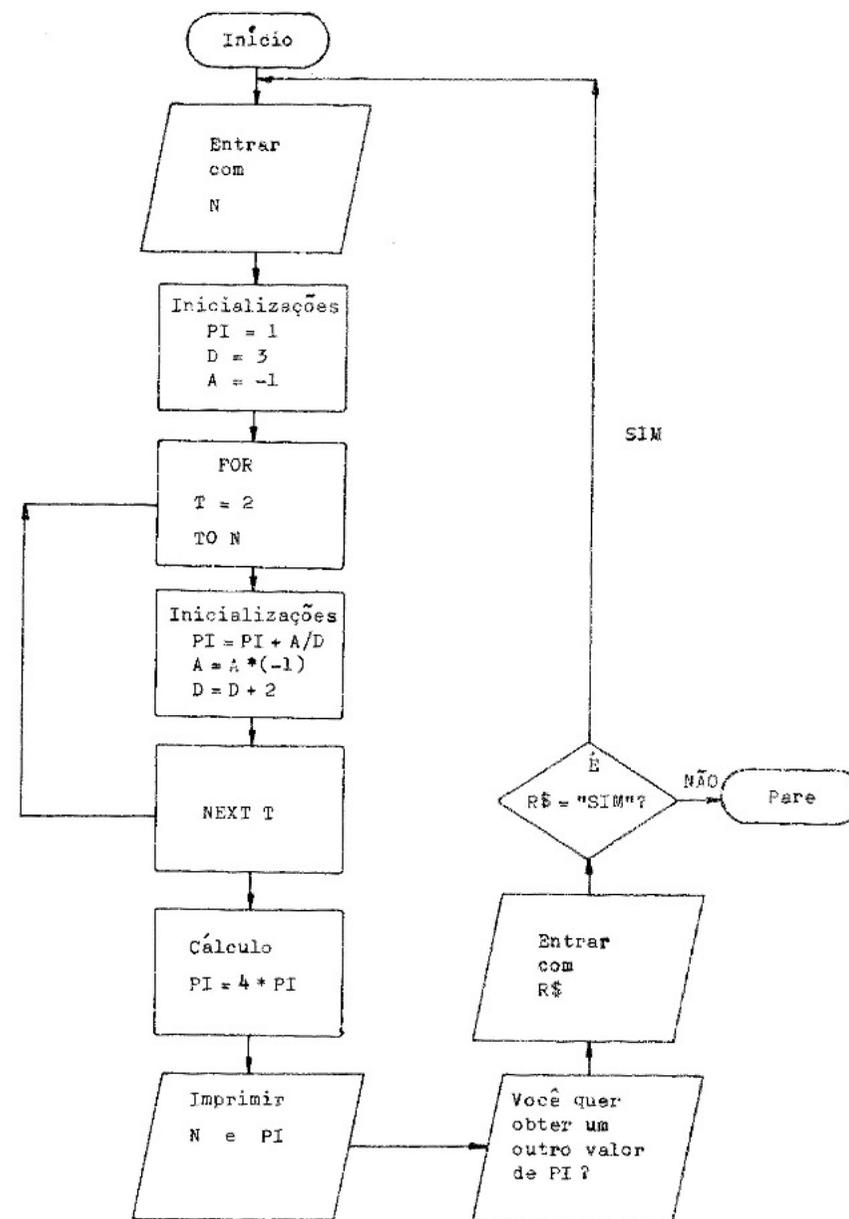


Figura 53

Codificação em BASIC para o cálculo de π pela fórmula de Leibniz (8a).

```

10 PRINT "OBTENDO O VALOR APROXIMADO DE PI"
20 FOR J = 1 TO 40
30 PRINT "*";
35 NEXT J
38 PRINT "ENTRE COM O NÚMERO DE TERMOS DA SÉRIE"
40 INPUT N
50 PI = 1
55 D = 3
60 A = -1
65 FOR T = 2 TO N
70 PI = PI + A/D
75 A = A*(-1)
80 D = D+2
85 NEXT T
90 PI = 4*PI
100 PRINT "N="; N; "PI="; PI
110 PRINT : PRINT
120 PRINT "VOCÊ QUER ENTRAR COM OUTRO VALOR PARA O NÚMERO
    DE TERMOS DA SÉRIE? (SIM/NÃO)"
130 INPUT R$
140 IF R$ = "SIM" THEN GOTO 20
150 END

```

Entre com $N = 10, 20, 30, 60, 120$ e 240 para "sentir" a diferença que se obtém no valor do π em relação ao "verdadeiro" valor que é:

3,141|592|653|897|932|384|6...

O.I. - O matemático alemão Ludolf van Ceulen, que viveu muitos anos na Holanda, calculou π com 35 casas decimais. Ele trabalhou nesse intento quase toda a sua vida e pediu que se inscrevesse na sua lápide os 35 dígitos do π que ele calculou.

Os alemães em sua homenagem chamam o π de número *ludolfiano* mas o melhor mesmo é chamá-lo de número "*arquimediano*".

Agora caro(a) amigo(a) mãos a obra para desenhar o fluxograma e escrever a codificação de cada uma das "lindas séries que começam com (1) e vão até a expressão (8e).

Comece com a fórmula de Viete e chegue até as outras fórmulas de Leibniz.

Boa sorte e veja qual é a série que dá a melhor aproximação para $n = 20$ termos.

Pode pular as fórmulas de Wallis e a do Lord Brounker. Bem que você merece um desconto em vista da tarefa toda que tem que realizar!!!?!!!

Obtenção do π pelo método de Monte Carlo

Na Matemática, para saborear com prazer o fruto é preciso conhecer bem as suas raízes.

Chegou a hora de destacar a importância e as "raízes" do número 12 (doze).

Sendo o número 12 produto de dois fatores (3 e 4) é claro que esse número está fadado a representar um papel notável nas relações humanas e divinas pois o 3 é a Divindade e o 4 é a Terra.

Doze foram os apóstolos de Jesus, doze as tribos de Israel, doze os profetas menores, doze os artigos ou afirmações dogmáticas contidas no credo.

Deixando a vida religiosa, podemos assinalar que doze são as constelações do Zodíaco, doze são os meses do ano.

Aparece, ainda, o número doze, no seu múltiplo 360 na divisão da circunferência, no seu dobro no número de horas do dia, no seu quádruplo no número de minutos da hora e no número de segundos do minuto.

A tendência popular é querer contar os objetos em dúzias e de reunir as dúzias formando a grossa (doze dúzias ou seja 144).

Muitas unidades ainda em uso admitem a *divisão duodecimal*.

A libra que é uma unidade de peso é subdividida em 12 onças.

O shilling, moeda inglesa era dividida em 12 pence.

O pé, medida inglesa de comprimento ainda usada, é dividida em 12 polegadas.

O número doze é empregado no modismo dentro da expressão "cortar um doze" e que equivale a vencer uma dificuldade.

Será que você vai "cortar um doze" para entender o 12º programa?

Acho que não e vamos por isto tentar explicar o mesmo da melhor forma possível.

De forma alguma queremos passar por um "professor confuso" de quem se diz o seguinte:

"Numa sala de aula, ele pensa A, diz B, escreve C, os alunos (vocês leitores) entendem D mas o certo é E".

Uma outra versão sobre o "autor (professor) confuso" diz; "que ele quase não fala, quando fala ninguém ouve, quando se ouve não se entende e quando alguém entende está errado".

Um autor corre sempre o risco do "professor confuso" só que no lugar de falar ele escreve...

Bem, vamos ao 12º programa e esperar pelo menos de não ganhar a alcunha de "autor distraído"...

O que os dardos lançados em um alvo, tem a ver com a obtenção do π ?

De saída temos que enfatizar que pode parecer uma questão ridícula, contudo um método para aproximar-se do π é lançando dardos.

Vamos inicialmente construir um alvo em forma de quadrado como o da Figura 54.

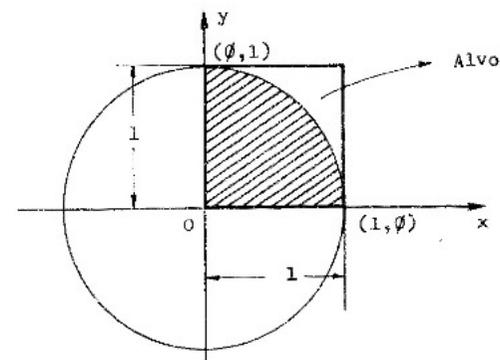


Figura 54

O quadrado está no 1º quadrante com dois de seus lados coincidindo com os eixos Ox e Oy .

Deve-se também traçar uma circunferência de raio unitário com o seu centro na origem.

Quando você lançar um dardo sobre o alvo quadrado considere um *acerto* se o dardo espetar na parte achuriada (dentro do quarto de círculo) e um erro em caso contrário.

Caso você erre o alvo completamente (o que aliás é lamentável) não conte esse lançamento, apresse-se e lance melhor...

Acumule o número de acertos e o número de lançamentos.

Após lançar o dardo várias vezes estará apto a coletar os resultados e tê-los em número suficiente para chegar a um valor bem aproximado do π .

Se você lançar um mesmo dardo muitas vezes ou o que é a mesma coisa muitos dardos iguais su-

cessivamente essa razão, pode ser aproximada pela expressão matemática.

$$\frac{\text{número de acertos}}{\text{número de lançamentos}} = \frac{\text{área achuriada (um quarto de círculo)}}{\text{área do quadrado}} \longrightarrow (1)$$

A justificativa disto pode ser encontrada na teoria das probabilidades ou melhor no nosso livro "Probabilidades e Estatística para a Engenharia" vol. 1. Que comercial discreto, não é?

Mas um quarto do círculo é $\frac{\pi r^2}{4}$ e como o raio (r) do círculo é unitário tem-se de (1)

$$\frac{\text{número de acertos}}{\text{número de lançamentos}} = f = \frac{\frac{\pi}{4}}{1} = \frac{\pi}{4} \longrightarrow (2)$$

Portanto

$$\boxed{\pi = 4 f} \longrightarrow (3)$$

A evidente dificuldade desse método não é a construção do alvo em forma de quadrado e do quarto de círculo dividindo o alvo em duas regiões, mas sim o tempo que se leva digamos para efetuar um grande número de lançamentos por exemplo 1000.

No seu TK-2000 COLOR você pode *simular* esse experimento e tantos outros que apresentamos principalmente no "TK-2000 na Física" e obter os resultados de milhares de lançamentos em segundos ou no máximo em minutos!!!

A esse método costuma-se chamar de Monte Carlo em vista de uma analogia com jogos de azar ou sorte como aqueles que existem nos cassinos de Monte Carlo.

O seu TK-2000 COLOR é uma "ferramenta" excelente para usar o método de Monte Carlo para simu-

lar problemas que envolvem teoria de estoques, teoria da localização industrial, teoria do congestionamento ou seja teoria das filas, etc. em vista da velocidade com a qual é feita a simulação.

Então agora, com a ajuda do TK-2000 COLOR, acharemos uma aproximação para o π usando o método de Monte Carlo.

Análise

O número desejado de lançamentos (N) deve ser dado no início.

O número de acertos (A) deve começar com zero.

Esta é uma inicialização natural e para aumentar a velocidade usa-se um laço FOR-NEXT para simular N lançamentos do dardo.

Para cada lançamento o TK-2000 COLOR gera dois números aleatórios entre 0 e 1 (1 excluído).

Vamos chamar esses números de x e y.

O par (x,y) representa as coordenadas de cada ponto onde o dardo acertou o alvo quadrado.

Note que cada ponto dentro do quadrado tem coordenadas entre 0 e 1.

Por outro lado na Geometria Analítica aprende-se que a equação da circunferência do círculo é $x^2 + y^2 = r^2$.

Aliás costuma-se chamar a essa equação de cartesiana em homenagem a Descartes, que é considerado o "inventor" da Geometria Analítica.

Faz muito tempo Descartes disse "A fim de alcançar a verdade, é necessário, uma vez na vida, colocar tudo em dúvida - até onde seja possível".

É, você não está ainda acreditando que com esse "experimento" obteremos o valor de π .

Pode até se comportar conforme Descartes queria, mas que o valor de π vai ser obtido, isto vai !!!

Voltando a nossa explicação, como $r^2=1$ tem-se que $x^2 + y^2 = 1$.

Essa circunferência divide a região do plano em 2 partes que podem ser descritas da seguinte forma:

Geometricamente (veja a Figura 55)	Analiticamente
dentro do círculo	$x^2 + y^2 < 1$
fora do círculo	$x^2 + y^2 > 1$

Tabela 17

É evidente que quando $x^2 + y^2 = 1$ estamos exatamente sobre a circunferência de círculo.

É isto aí, a circunferência é a periferia do círculo!!!!

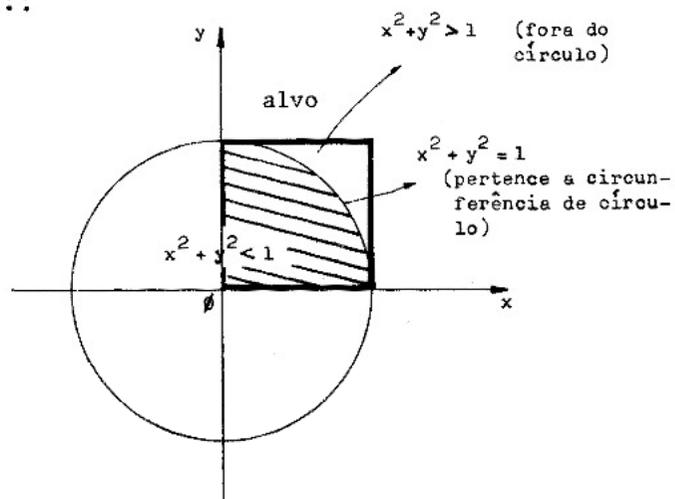


Figura 55

Usando essas informações devemos verificar se o ponto "gerado" pelo TK-2000 COLOR (x,y) está dentro do círculo, fora do círculo ou sobre a circunferência de círculo.

Caso aconteça um acerto, deve-se acrescentar 1 ao número de acertos A.

Ocorrido ou não um acerto todo lançamento feito deve ser registrado para que se possa ter no final o número total de lançamentos.

Depois que o número desejado de lançamentos tenha sido atingido o TK-2000 COLOR faz a conta $4*A/N$ e imprime essa razão como uma aproximação para o π .

No nosso programa como aplicação tomaremos $N = 500$, $N = 1000$ e $N = 1500$.

É óbvio ululante e isto antes de conhecer o programa que quanto maior for o número de lançamentos (N) maior será a precisão obtida no π !!!

Para estar bem preparado(a) para o 129 programa tire uma XEROX da Figura 56, coloque-a a uma distância de 3 m e veja se consegue em 60 lançamentos acertar aproximadamente 5 vezes em cada desenho deste alvo.

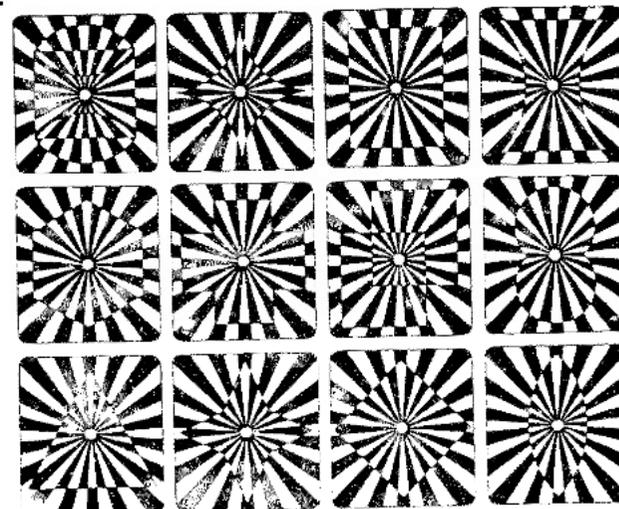


Figura 56

Aí vai o fluxograma:

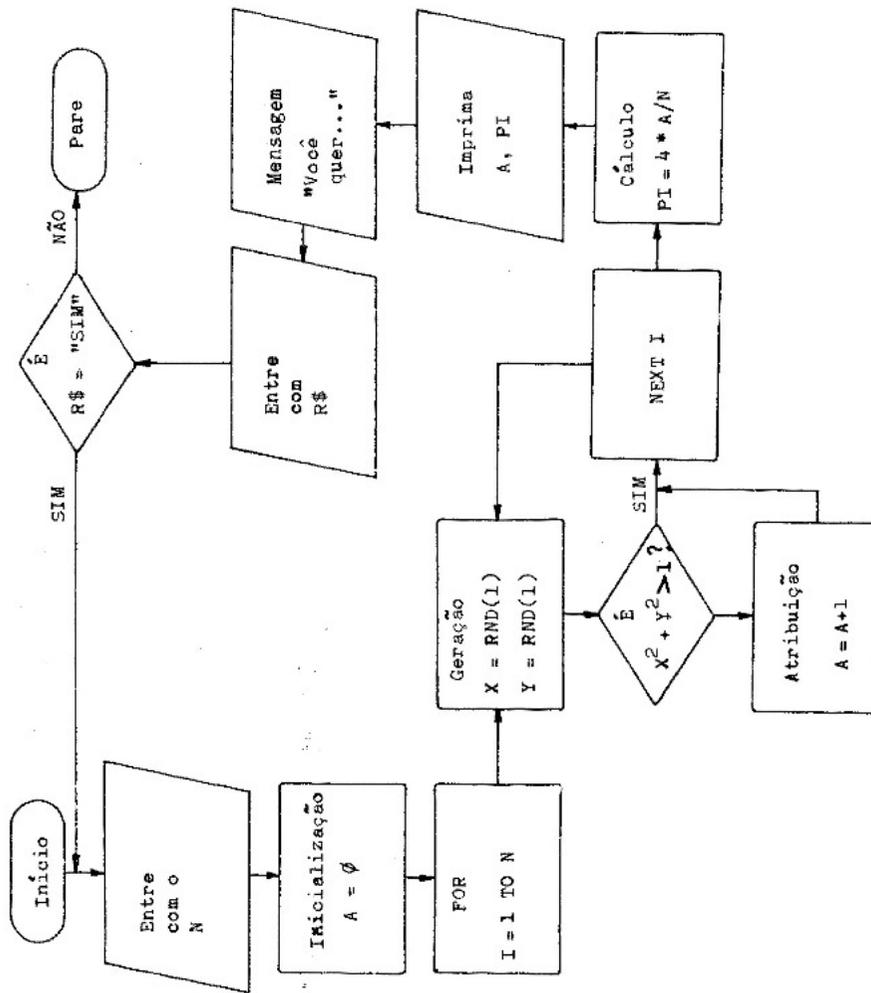


Figura 57

E aqui está o programa em BASIC:

```

10 PRINT "O MÉTODO DE MONTE CARLO PARA OBTEN O VALOR
    APROXIMADO DE PI"
15 PRINT "O NÚMERO DE LANÇAMENTOS OU TENTATIVAS É:";
20 INPUT N
25 PRINT N
30 A = 0
35 FOR I = 1 TO N
40 X = RND(1)
50 Y = RND(1)
60 IF X^2 + Y^2 > 1 THEN 80
70 A = A + 1
80 NEXT I
90 PI = 4*A/N
100 PRINT : PRINT
110 PRINT "OCORRERAM"; A; "ACERTOS"
120 PRINT "ASSIM PI É APROXIMADAMENTE =";PI
130 PRINT : PRINT
140 PRINT "VOCÊ QUER ENTRAR COM OUTRO VALOR DE N?(SIM/NÃO)"
150 INPUT R$
160 IF R$ = "SIM" THEN GOTO 15
170 END
  
```

é "meio difícil" ocorrer $x^2 + y^2 = 1$ mas quando se cair sobre a circunferência de círculo "procede-se" como se tivesse ocorrido um acerto

Sugestão de um pequeno trabalho:

Modifique um pouco esse programa de tal forma que saiam aproximações para π para cada 50 sorteios até que se completem 1500 simulações de lançamentos.

O importante uso da fórmula de Maclaurin

Pois é, chegamos ao 13º programa e escolhemos um de muita importância ou seja o conhecimento e o uso da fórmula de Maclaurin.

A nosso ver, a fórmula obtida pelo matemático escocês Colin Maclaurin em 1742, dois anos antes da sua morte, representou um ponto primordial para o desenvolvimento da Matemática e principalmente de todas as teorias da Engenharia.

Mas é também nosso dever e uma boa oportunidade para falar um pouco sobre o número 13 (treze).

Os meus filhos Sergio e Victor Jr., assim como eu, gostamos muito do número 13 (treze).

Para nós ele tem trazido muita sorte, porém na crença geral ele é um número de mau agouro.

A proposição mais simples sobre o 13 (treze) é:

"Treze é um número ímpar.

Treze é um número fatídico"

Admitem muitos autores que a origem da superstição relativa ao número 13, vem do famoso episódio que é um dos pontos culminantes da história evangélica - a Última Ceia de Cristo.

Na célebre tela de Leonardo da Vinci - a Ceia Sagrada - nada menos que 13 pessoas rodeavam a mesa - 12 apóstolos e o Salvador - e a morte de Jesus, na crença inabalável dos supersticiosos, parecia decorrer, como uma influência sinistra, daquele número fatídico.

O grande artista Antônio Francisco Lisboa, apelidado "o Aleijadinho", entre as obras maravilhosas que nos legou em Congonhas do Campo, imaginou uma ceia com 14 pessoas; o décimo quarto conviva é um soldado romano que aparece de improviso entre os apóstolos do Divino Mestre.

Surge diante da nossa mente uma dúvida: Teria o artista, com essa original inovação, em completa discordância com o Evangelho, procurado afastar, de sua obra, a nefasta influência do número 13?

O.I. - Quem quiser ver lindas réplicas das obras do Aleijadinho basta ir ao Museu da Fundação Armando Álvares Penteado na rua Alagoas Nº 903 em São Paulo e com isso economiza uma viagem para Congonhas do Campo.

Existem muitos hotéis que não oferecem a seus clientes o quarto treze, pois na numeração dos aposentos ao quarto número 12 segue-se o quarto número 14.

E, com essa anomalia na sucessão dos números, evitam os cautelosos hoteleiros certas contrariedades que o número treze viria "fatalmente" provocar !?!?!??

É famosa a seguinte trova de Bastos Tigre

Treze pessoas numa mesa
Certo, desgraça causará,
Porque das treze com certeza
Uma, primeiro morrerá.

O dia treze de qualquer mês, para muitos supersticiosos, não é data de boa sorte.

Tudo, para eles, deve correr mal em semelhante dia.

É número de azar na vida e no calendário.

A situação se agravará muito se o dia treze cair numa sexta-feira.

Apresenta-se, então, uma dupla razão de mau-agouro: ser dia treze e sexta-feira.

Interessante é a pesquisa feita, nesse sentido, pelo matemático inglês M.B. Brown.

O paciente Brown analisou os séculos que se amontoam no passado e os séculos ainda envoltos nas brumas do futuro e verificou ou melhor ainda provou que o dia treze tem uma tendência especial para cair em sexta-feira!!!

Mostrou o aludido matemático, com sua incrível "chinesice", que o dia 13 do mês, segundo as conclusões feitas, tem maior probabilidade de coincidir com uma sexta-feira do que com qualquer outro dia da semana.

Como se justifica essa preferência do 13 pela sexta-feira?

De 400 em 400 anos, o calendário se repete identicamente, havendo 97 anos bissextos e um total exato de 20871 semanas.

Dentro desse intervalo de tempo (quatro séculos), o dia 13 apresenta a seguinte distribuição

semanal: domingo, 687 vezes; segunda-feira, 685 vezes; terça-feira 685 vezes; quarta-feira, 687 vezes; quinta-feira, 684 vezes; sexta-feira 688 vezes e sábado 684 vezes.

Vê-se, pois, que o dia 13 tem uma *predileção* especial pelas sextas-feiras.

E assim, a coincidência do 13 "sexta-feira", ocorre em média, 172 vezes em cada século.

As conclusões de Brown em nada contrariam a sabedoria popular.

E nesta época de satélites, de fibras óticas, de astronautas passeando no espaço sem cordão umbelical, de microcomputadores espetaculares como o TK-2000 COLOR ainda encontramos quem, temeroso da velha superstição, advirta o companheiro distraído: "Cuidado, meu amigo! Hoje é 13, sexta-feira!"

É óbvio, que tudo o que relatamos não passa dos limites da pura fantasia e convém lembrar ainda com Shakespeare, que "há muitas coisas, entre o céu e a terra, de que não sonha a vã filosofia".

Existem entretanto também muitas pessoas que consideram o número 13 como número predileto ou seja o número de sorte.

Estamos dentro desse clube, dos a favor do treze.

Assim como para alguns supersticiosos é de conveniência total que o anel de formatura tenha 13 brilhantes, acreditamos que o 13º programa também tem um valor positivo igual ao desse anel.

Então vamos logo a essa jóia...

Como é que o seu TK-2000 COLOR consegue dar rapidamente tanto no modo imediato como no programa do os valores de $\sin 13^\circ$, $\ln 13$, $\text{tg } 13^\circ$, e 13 etc.?

O.I. - O valor do argumento das funções não precisa ser 13 (treze).

Foi apenas para enfatizar o número 13 (treze) do qual gostamos.

Resposta: É graças a Maclaurin que existe uma linda fórmula que nos permite desenvolver várias funções numéricas importantes em séries de potências cujas somas podem ser programadas em BASIC para o TK-2000 COLOR.

Conversemos um pouco mais sobre séries infinitas.

Já vimos alguma coisa no programa Nº 11.

Para ilustrar isto analisemos o estranho hábito da coelhinha Dolly.

Quando ela começa a saltitar, o faz segundo um método matemático, ou seja, o comprimento do próximo salto, é sempre a metade do anterior porque a medida que o número de saltos vai ficando maior a coelhinha fica cada vez mais cansada.

Se no primeiro salto Dolly atingiu 2 metros, no seguinte salta 1 m, no terceiro salta 0,5m, no quarto 0,25 m e assim por diante.

Aliás as posições da coelhinha estão indicadas na Figura 58.

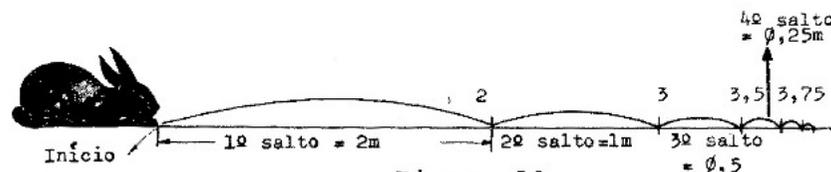


Figura 58

Se Dolly continuar saltando dessa forma indefinidamente quanto se afastará do ponto inicial?

Resposta: Para se obter a soma das distâncias saltadas pela Dolly é necessário somar a série.

$$S = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

Os números $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ constituem uma progressão geométrica (P.G.) decrescente infinita de razão $q = \frac{1}{2}$ e prova-se que a soma de infinitos termos é:

$$S_{\infty} = S = \frac{a_1}{1 - q} \longrightarrow (1)$$

Portanto, como $a_1 = 2$ e $q = \frac{1}{2}$ tem-se a resposta à última pergunta.

$$S_{\infty} = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}} = 4$$

ou seja o total "percorrido" pela Dolly é de 4 m.

Aliás a Figura 58 já sugeria algo aproximadamente assim...

Pode-se obter uma situação particular muito interessante se na (1) fizermos $a_1 = 1$ e $-1 < q = x < 1$.

Nesse caso tem-se que:

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \frac{1}{1-x} \longrightarrow (2)$$

A série $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$ é chamada série de Maclaurin ou série de potências para a função

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Maclaurin mostrou que uma função qualquer $f(x)$ pode ser desenvolvida em potências de x da seguinte forma:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots \longrightarrow (3)$$

onde

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots$$

e $a_0 = f(0)$.

Em outras palavras o coeficiente a_n da série de Maclaurin é obtido dividindo a derivada de ordem n da função $f(x)$ calculada no "ponto" zero (\emptyset) pelo $n!$ ($n = 1, 2, \dots$). Você sabe o que é $n!$?

Não entraremos por enquanto no Cálculo Diferencial, porém temos essa intenção no futuro.

Omitiremos dessa forma, explicações sobre a derivação, mas sabendo derivar sucessivamente torna-se razoavelmente simples obter os coeficientes da fórmula (3).

Sobre o fatorial ($n!$) daremos detalhes no 179 programa.

No nosso livro "Cálculo Numérico", no capítulo 4 estão justificadas as seguintes séries de Maclaurin para as funções mais importantes e por isso mesmo as mais comuns.

$$\begin{aligned}
 1) \quad \text{sen } x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots && \text{para } -\infty < x < \infty \\
 2) \quad \text{cos } x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots && \text{para } -\infty < x < \infty \\
 3) \quad e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots && \text{para } -\infty < x < \infty \\
 4) \quad \text{arcsen } x &= x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots && \text{para } |x| < 1 \\
 5) \quad \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots && \text{para } -1 < x \leq 1 \\
 6) \quad \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots && \text{para } -1 < x < 1 \\
 7) \quad (1+x)^{1/3} &= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3.6}x^2 + \frac{2.5}{3.6.9}x^3 - \dots && \text{para } -1 < x \leq 1
 \end{aligned}$$

Só essas 7 (sete) séries já dão idéia da importância da fórmula de Maclaurin. Querendo outras é só consultar "Cálculo Numérico" de nossa autoria...

Faremos agora o programa para obter o e^x . Aliás o que o seu TK-2000 tem na sua memória ROM (Read Only Memory) são programas prontos para outras séries e com uma única palavra chave pode-se obter o valor da função que se desejar.

Análise: Com o intuito de simplificar o problema usaremos o seguinte raciocínio

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

1º termo ou seja de ordem zero 2º termo ou seja o de ordem 1 3º termo ou seja o de ordem 2 4º termo

Começamos contando com zero no lugar de 1 de forma que o número do termo coincide com o expoente e o denominador do termo.

Na saída agrega-se ao número de termos o valor 1 para se ter o número correto de termos que foi usado na avaliação do e^x .

Três quantidades precisam ser inicializadas:

I) o número de termos da série (N) que começará com 0;

II) a soma inicial S que começará com 1;

III) o denominador inicial que começará com 1.

O número dos termos é acumulado na instrução de atribuição $N = N+1$ e o valor de cada termo seguinte é $\frac{x^n}{n!}$.

Com o intuito de se atingir uma dada precisão, digamos de seis casas decimais, testar-se-á cada termo seguinte na instrução IF-THEN através do cálculo de

$$\text{INT}(10^7 * X^N) / D$$

Isto irá revelar se o número (termo) adicionado à última soma tem zeros nas seis primeiras casas decimais.

Quando a precisão desejada for atingida de ve-se arredondar usando

$$S = \text{INT}(10^6 * S) / 10^6$$

Aí vai o fluxograma

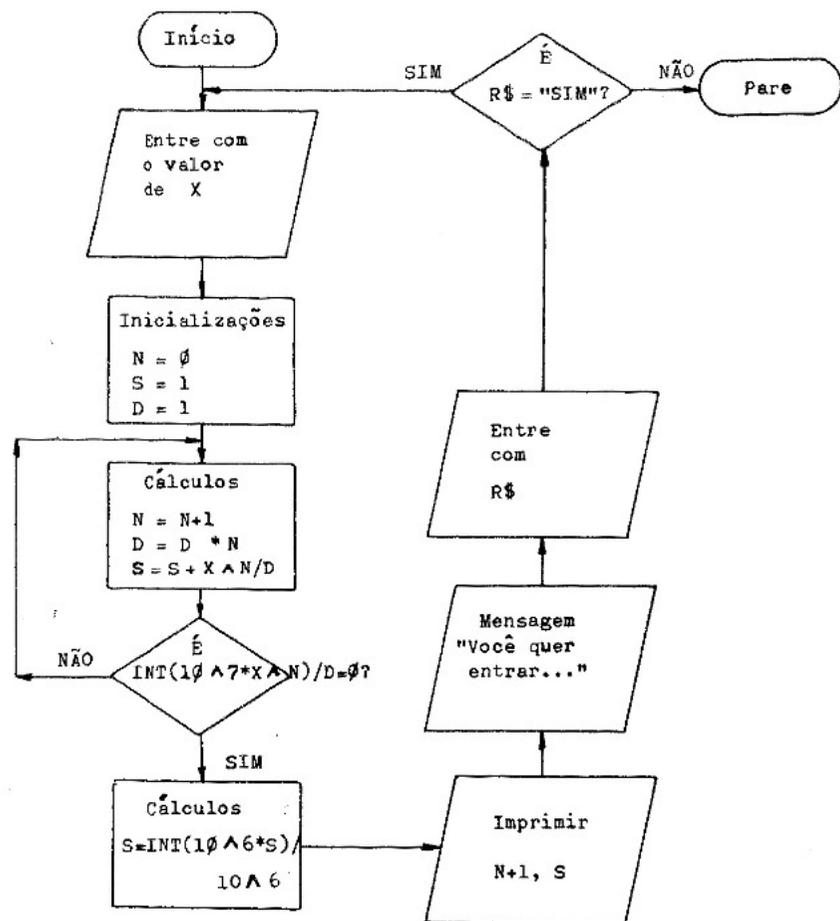


Figura 59

```

10 PRINT "VALORES DE E^X OBTIDOS ATRAVÉS DA SÉRIE DE
  MACLAURIN"
15 FOR I = 1 TO 20
20 PRINT "E^";
25 NEXT I
30 PRINT : PRINT
35 PRINT "PRECISÃO DE SEIS CASAS DECIMAIS"

```

```

40 PRINT : PRINT
45 PRINT "ENTRE COM O VALOR DE X";
50 INPUT X
55 PRINT
60 S = 1
65 N = 0
70 D = 1
80 N = N + 1
90 D = N*D
100 S = S + X^N/D
110 IF INT(10^7 * (X^N)/D) = 0 THEN 130
120 GOTO 80
130 S = INT(10^6 * S) / 10^6
140 PRINT : PRINT
150 PRINT "E^"; X; "="; S; "USANDO"; N+1; "TERMINOS DA
  SÉRIE"
160 PRINT "VOCÊ QUER ENTRAR COM OUTROS VALORES DE X?
  (SIM/NÃO)"
170 INPUT R$
180 IF R$ = "SIM" THEN 40
190 END

```

Uma vez teclado esse programa experimente o mesmo para os seguintes cálculos

$$e^{13} \quad e^{-13}$$

Para e^{13} você deve obter 442413.392 e e^{-13} que vale 2,8726496E56 dá "estouro" no seu TK-2000 COLOR.

Mas o estouro é por causa do E?

Resposta: Nada disso, e o E não quer dizer estouro.

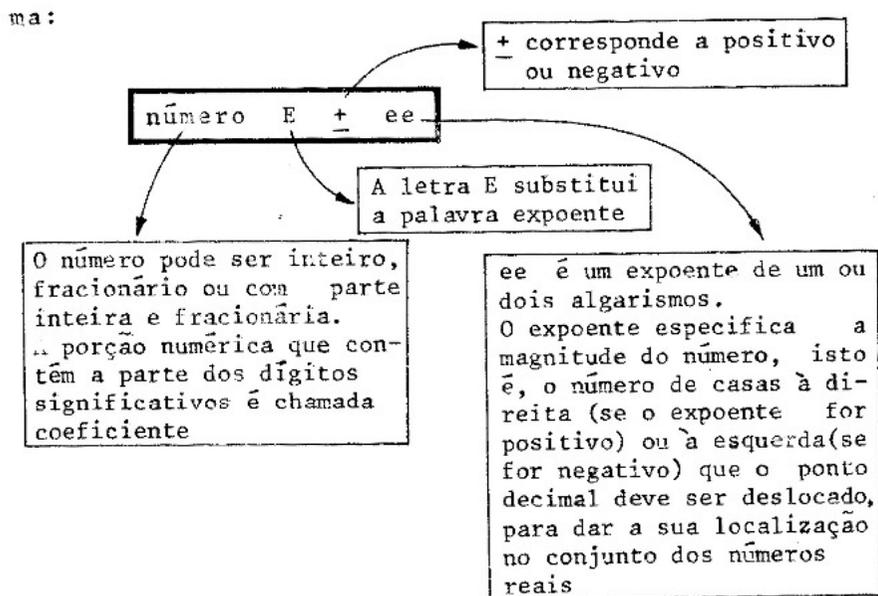
É uma boa oportunidade para falar de *notação científica*.

Números reais muito grandes ou muito pequenos ou seja qualquer número com mais de nove algarismos à esquerda do ponto decimal ou mais próximos do zero que $-0,01$ ou $0,01$, conforme se mostra na Figura 60, são representados no TK-2000 COLOR através da notação científica.



Figura 60 - Regiões onde os números são expressos em notação científica

Um número em notação científica tem a forma:



Na Tabela 18 temos alguns exemplos de notação

Notação usual	Notação científica
7000000000	7 E + 09
.0000000007	7 E - 09
-6000000000	-6 E + 09
-0.0000131313	-1.31313 E - 05
0.0000171717	1.71717 E + 05

Tabela 18

Os valores limites na notação científica são:

- números positivos: $1 E - 38$ e $1.7 E + 38$
(por isso que o TK-2000 COLOR dá "estouro" para e^{130})
- números negativos: $-1 E - 38$ e $-1.7 E + 38$
(é por isso que o TK-2000 COLOR dá zero para e^{-130}).

Os números reais podem ter no TK-2000 COLOR até nove algarismos de precisão.

Para números maiores que 1 ou menores que -1, isto significa que, não mais do que nove algarismos podem ser diferentes de zero.

O TK-2000 COLOR aproxima todos os números com mais de nove algarismos.

Números fracionários (entre 1 e -1) estão sujeitos às mesmas limitações.

Neste caso, porém os nove algarismos de precisão começam a ser contados a partir do primeiro algarismo diferente de zero à direita do ponto decimal.

0.I. - Falemos um pouco sobre o número e , que como dissemos anteriormente é um dos cinco números mais importantes da Matemática [os outros são o \emptyset (zero), o 1 (um), o π (discutido exaustivamente no programa Nº 11) e o i , que é discutido no programa Nº 21].

Na Revista do Professor de Matemática (R. P.M.) Nº 2 de 1983 que tem no comitê editorial a nossa colega e excelente professora Renate G. Watanabe aparece o artigo "Conceitos e controvérsias" de autoria do prof. Elon Lages Lima.

Nele surge a pergunta: "O número "e": por quê?".

Escreve o mestre Elon que os números mais frequentemente usados como base de um sistema de logaritmos são 10, que é a base do nosso sistema de numeração e o número $e = 2,718281828459\dots$

Caso você não acredite nesse valor faça $x=1$ no programa que acabou de teclar e veja para crer...

O número e é irracional, isto é, não pode ser obtido como quociente $e = \frac{p}{q}$ de dois inteiros.

Mais ainda, o e é um irracional *transcendente*.

Isto significa que não existe um polinômio $P(x)$ com inteiros, que se anule para $x = e$.

Por que então a escolha de um número tão estranho como base de logaritmos?

Mesmo depois de aprender na Faculdade que

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

a indagação ainda persiste: o que faz esse número ser tão importante?

A resposta mais concisa parece que é esta: "e" é importante porque é inevitável.

Surge espontaneamente em várias questões básicas.

Uma das razões pelas quais a Matemática é útil às Ciências em geral está no Cálculo Diferencial e Integral, que estuda a variação das grandezas.

Um tipo de variação dos mais simples e comumente encontrado, é aquele em que o crescimento (ou o decréscimo) da grandeza em cada instante é proporcional ao valor da grandeza naquele instante.

Este tipo de variação ocorre, por exemplo, em questões de juros, crescimento populacional (de pessoas ou bactérias), desintegração radioativa, etc.

O número "e" aparece na expressão da catenária tão importante na Mecânica, aparece nas leis de Poisson, de Weibull e da normal tão importantes para a Estatística, aparece nos fenômenos de carga e descarga de um capacitor em Eletrostática, nas leis de resfriamento e aquecimento em Transmissão do Calor, etc.

Os logaritmos que tem base "e" são as vezes impropriamente chamados de "logaritmos neperianos".

Na realidade, os logaritmos originalmente introduzidos por Napier tinham por base o número

$$a = (1 - 10^{-7})^7$$

Aliás, para sermos mais exatos, o verdadeiro "logaritmo neperiano" do número x era igual a

$$10^7 \log_a \left(\frac{x}{10^7}\right)$$

É mais conveniente chamar *logarítmos naturais* ao logarítmos de base "e".

Euler os chamava de logarítmos hiperbólicos.

Euler foi realmente um gênio, e dos mais de 800 trabalhos que publicou é raro aquele em que não fez uma contribuição permanente ao assunto abordado. Foi o mais fecundo de todos os cientistas.

A Matemática, a Física e a Engenharia mostram hoje a marca indelével da sua mão.



Figura 61 - EULER

O.I. - Você já não viu uma outra "3x2" dessa figura exponencial em algum outro lugar?

Uma das suas contribuições mais importantes ocorreu em 1749 no trabalho "Da controvérsia com os senhores Leibniz e Bernoulli sobre os logarítmos dos números negativos e imaginários".

Euler esclareceu nesse trabalho definitivamente a questão e para isso adotou como base de suas exponenciais e de seus logarítmos o seu famoso número "e".

O seu TK-2000 COLOR apesar de todas as suas excepcionais qualidades, ainda não sabe calcular logarítmos de números negativos e tão pouco executar exponenciações de base negativa.

Para calcular o valor de e Euler sugeria o limite da fração contínua:

$$e = 2 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{6} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{8} + \frac{1}{1} + \dots$$

As outras possibilidades são:

e = limite da sequência:

$$\left(1 \frac{1}{2}\right)^2, \left(1 \frac{1}{3}\right)^3, \left(1 \frac{1}{4}\right)^4, \left(1 \frac{1}{5}\right)^5, \dots$$

e = limite da série:

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \dots$$

esta série já é sua conhecida não é?

Um trabalhinho para você

Faça programas análogos ao feito para e^x para as funções $\sin x$, $\cos x$, $\arcsen x$, $\ln(1+x)$, $\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ e $(1+x)^{1/3}$.

Realmente não é um trabalhinho e sim um tra-
balhão porém uma vez realizado muito se aprenderá.

Boa sorte portanto e execute o mais breve
possível a tarefa!!!?!!!!

A lei dos senos

Chegamos no 14º programa!!!

O prestígio do número quatorze decorre uni-
camente do fato de ser esse número igual ao dobro
de sete.

É isso aí Sacha, o seu sete é fundamental.

Na Bíblia se encontra um destaque especial
para o número 14.

"De sorte que todas as gerações, desde
Abraão até David, são quatorze gerações; desde David
até a deportação para a Babilônia; e desde a depor-
tação para a Babilônia até Cristo são quatorze ge-
rações".

E aí vai mais uma, em sua homenagem Sacha!

"Sete e sete são quatorze;
Cada junta tem dois bois;
Quem me dera uns olhos negros
Como são aqueles dois!"

A dúvida quatorze ou catorze é esclarecida
da seguinte forma: as duas formas estão corretas!

Um exemplo interessante apontam os nume-
rologistas na vida de Henrique IV, rei da França.

A existência desse monarca foi enquadrada,
do princípio até o fim, pelo número 14.

Citemos as datas, sublinhando os fatos:

Nasceu no dia 14 de dezembro de 1553 (a so
ma dos algarismos de 1553 é 14).

Governou durante 42 anos ($3 \cdot 14 = 42$).

Foi ferido em 1594, quatorze dias depois
do dia 14 de dezembro (convém observar que no núme-
ro 1594 os algarismos extremos formam 14, e que a
soma dos dois outros é 14).

Foi assassinado no dia 14 de maio de 1610.

O número 1610 é o resultado do produto de
115 por 14.

Para o 14º programa escolhemos uma das mais
importantes leis da Trigonometria, que é a lei dos
senos.

Desenhamos o mesmo triângulo de três for-
mas e em cada uma delas um vértice diferente está
na origem do sistema de coordenadas (veja a Figura
62 a, b e c).

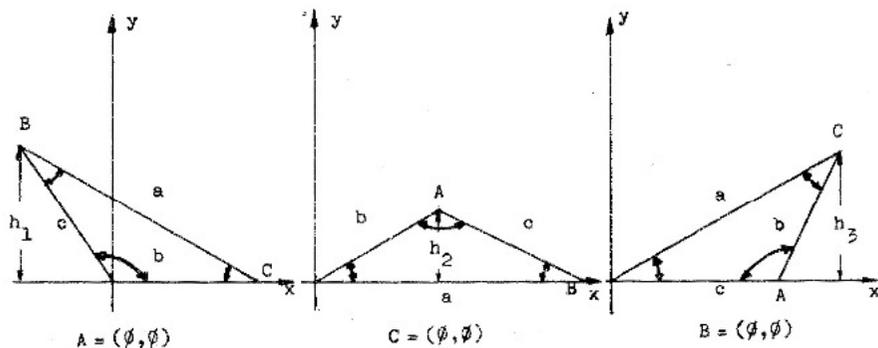


Figura 62

A área do triângulo (S) pode ser obtida da
seguinte forma

$$\begin{cases} S = \frac{1}{2} b \cdot h_1 & \longrightarrow (1) \\ S = \frac{1}{2} a \cdot h_2 & \longrightarrow (2) \\ S = \frac{1}{2} c \cdot h_3 & \longrightarrow (3) \end{cases}$$

Em todos os casos usou-se a conhecida fôr-
mula de que a área do triângulo é igual a "base ve-
zes altura dividido por dois (2)".

Por outro lado das Figuras 62 a, b, c respec-
tivamente tem-se:

$$\begin{cases} \text{sen } C = \frac{h_1}{a} \longrightarrow h_1 = a \text{ sen } C \longrightarrow (4) \\ \text{sen } B = \frac{h_2}{c} \longrightarrow h_2 = c \text{ sen } B \longrightarrow (5) \\ \text{sen } A = \frac{h_3}{b} \longrightarrow h_3 = b \text{ sen } A \longrightarrow (6) \end{cases}$$

$$\text{De (1) e (4) vem: } S = \frac{1}{2} ab \text{ sen } C \longrightarrow (7)$$

$$\text{De (2) e (5) vem: } S = \frac{1}{2} ac \text{ sen } B \longrightarrow (8)$$

$$\text{De (3) e (6) vem: } S = \frac{1}{2} bc \text{ sen } A \longrightarrow (9)$$

De (7), (8) e (9) tem-se

$$\frac{1}{a} ab \text{ sen } C = \frac{1}{2} ac \text{ sen } B = \frac{1}{2} bc \text{ sen } A \longrightarrow (10)$$

Dividindo todos os membros por abc e sim-
plificando obtém-se:

$$\boxed{\frac{\text{sen } C}{c} = \frac{\text{sen } B}{b} = \frac{\text{sen } A}{a}} \longrightarrow (11)$$

E aí vai a definição da lei dos senos

➔ Num triângulo qualquer, as medidas dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos.

Vamos elaborar um programa no qual dados dois ângulos A e B e o lado a de um triângulo qualquer se possa obter a medida do outro ângulo e os outros dois lados.

Dã-se também a área do triângulo com três casas decimais.

É evidente que iremos aplicar a lei dos senos.

O plano para esse problema é seguir os seguintes passos:

I) Desde que a soma das medidas dos ângulos de um triângulo é igual a 180° tem-se:

$$C = 180^\circ - (A+B) \longrightarrow (12)$$

II) A lei dos senos (11) permite obter

$$b = \frac{a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A} \longrightarrow (13)$$

e

$$c = \frac{b \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B} \longrightarrow (14)$$

III) A área do triângulo pode ser obtida pela expressão

$$S = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} C \longrightarrow (15)$$

O.I. 1 - Nesse caso não apresentamos o fluxograma, aliás quando se consegue fazer uma análise analítica detalhada e fica claro o algoritmo o fluxograma é totalmente dispensável.

Iremos portanto direto ao programa, sendo

que como no BASIC do TK-2000 COLOR tudo aparece em maiúsculo, manteremos os lados com a representação A, B e C, porém os ângulos opostos a esses lados representaremos por A1, B1 e C1.

O.I. 2 - Nós não podemos resolver todos os casos de triângulos apenas com a lei dos senos.

É o que ocorre por exemplo com o caso no qual são conhecidos os três lados quando então se deve aplicar a lei dos cossenos [veja o programa Nº 15].

```

10 PRINT "APLICAÇÃO DA LEI DOS SENOS"
20 PRINT : PRINT
30 FOR I = 1 TO 10
40 PRINT "SIN*";
50 NEXT I
60 K = 3.1415927/180
70 DEF FN T(G) = SIN(G*K)
80 DEF FN R(X) = INT(X*1000 + .5)/1000
85 PRINT "NOTE QUE A1 E B1 SÃO ÂNGULOS
    EM GRAUS E A É O LADO EM METROS"
90 READ A1, B1, A
100 IF A1 = 0 THEN 1000
110 C1 = 180 - (A1+B1)
120 B=A*FN T(B1)/FN T(A1)
130 C=B*FN T(C1)/FN T(B1)
140 S= .5*A*B*FN T(C1)
150 PRINT : PRINT "NO TRIÂNGULO ABC"
160 PRINT "OS ÂNGULOS SÃO:"
165 PRINT "A"; A1,B1,C1
170 PRINT "OS LADOS SÃO:"
175 PRINT "A"; FN R(A), FN R(B), FN R(C)
180 PRINT : PRINT
  
```

coeficiente para passar de graus para radianos

função que calcula os senos entrando com ângulo em graus

função para o arredondamento e truncamento

instrução para parada automática

veja a (12)

veja a (13)

veja a (14)

veja a (15)

```

185 PRINT "A ÁREA É IGUAL A:"; FN R(S)
190 PRINT
200 GOTO 20
400 DATA 45, 45, 20
410 DATA 32, 62, 18
420 DATA 25, 52, 12
430 DATA 33, 23, 65
440 DATA 0, 0, 0
1000 END

```

Comentário

A função seno - SIN(X)

Na linguagem BASIC utilizada pelo TK-2000 COLOR, as operações com funções trigonométricas são baseadas na unidade radiano.

Assim o valor entre parênteses deve ser expresso em radianos e não em graus.

No nosso caso particular na linha 60 introduzimos um fator de conversão (K) de graus para radianos o qual aparece na linha 70 na qual introduzimos uma função T de transformação, que tem como argumento graus (G) porém dentro da função seno introduzimos o fator de conversão K.

Lembre-se em outros casos que precisar que 360° correspondem aproximadamente a 6,28 radianos ($= 2 \times \pi$) e portanto, cada radiano é aproximadamente 57,324804 graus.

Probleminhas para você caro(a) leitor(a)

- I) Na guerra, o inimigo é atacado de dois pontos A e B (veja a Figura 63).

Feita a medição do ponto A em relação a posição do inimigo obtêm-se 32° e da posição B, 42° .

A separação entre A e B é de 840 m.

Ache as distâncias que separam as posições A e B do inimigo.

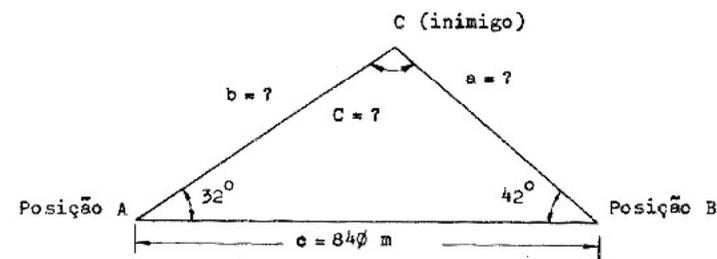


Figura 63

- II) Sacha deseja variar o comprimento de uma escada para atingir diferentes alturas de uma casa sabendo que a sua escada pode ter um comprimento L de 4 até 7 m (veja a Figura 64).

Por sua vez o ângulo A pode tomar apenas os valores 14° , 15° ou 16° .

Obtenha os valores de x (afastamento do prédio) e de y (altura atingida do prédio) se Sacha variar o comprimento da escada de 0,5 metro em 0,5 metro e aplicar cada um dos possíveis valores do ângulo A.

Quantas respostas serão obtidas?

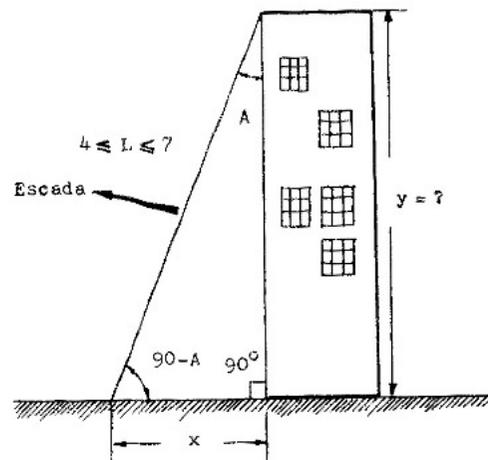


Figura 64

"Dica": Os seus DATA podem ser do tipo

{	400 DATA 76, 14, 4
	410 DATA 76, 14, 4.5
	420 DATA 76, 14, 5

	500 DATA 75, 15, 4
	510 DATA 75, 15, 4.5

700 DATA 74, 16, 7	

15

A lei dos cossenos

Não temos nada de especial para falar sobre o número 15, porém é muito especial o programa Nº 15 pois trata da imprescindível *leis dos cossenos*.

Etapas para se obter a *lei dos cossenos*

1) Do vértice A (veja a Figura 65) deve-se traçar a perpendicular ao lado \overline{CB} (a) de tal forma que $\overline{AD} \perp \overline{CB}$.

2) Calcula-se o valor de AD

$$\text{sen } C = \frac{AD}{b} \therefore AD = b \text{ sen } C \rightarrow (1)$$

3) Calcula-se o valor de CD

$$\text{cos } C = \frac{CD}{b} \therefore CD = b \text{ cos } C \rightarrow (2)$$

4) Obtêm-se DB

$$DB = a - b \text{ cos } C \rightarrow (3)$$

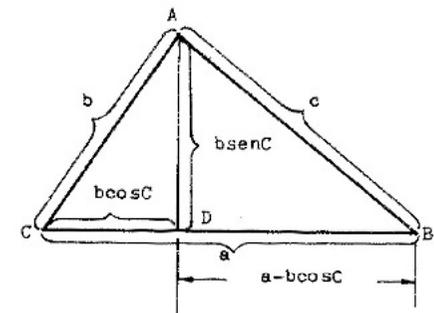


Figura 65

5) Aplica-se ao triângulo ABD o teorema de Pitágoras.

Em vista do teorema e de (1) e (3) vem:

$$c^2 = (b \operatorname{sen} C)^2 + (a - b \operatorname{cos} C)^2$$

ou

$$c^2 = b^2 \operatorname{sen}^2 C + a^2 - 2abc \operatorname{cos} C + b^2 \operatorname{cos}^2 C$$

$$c^2 = a^2 - 2abc \operatorname{cos} C + b^2 (\operatorname{sen}^2 C + \operatorname{cos}^2 C) \longrightarrow (4)$$

Como $\operatorname{sen}^2 C + \operatorname{cos}^2 C = 1$ (identidade fundamental da Trigonometria que você irá comprovar com o auxílio do seu TK-2000 COLOR no programa N° 16) de (4) vem:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abc \operatorname{cos} C \longrightarrow (5)$$

A equação (5) é a chamada lei dos cossenos e pode também ser escrita nas seguintes formas

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \operatorname{cos} A \longrightarrow (6) \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \operatorname{cos} B \longrightarrow (7) \end{cases}$$

Interpretando a (6) podemos dizer que: "em qualquer triângulo, o quadrado de um lado (a) é igual a soma dos quadrados dos outros dois lados (b e c), menos o duplo produto desses lados pelo cosseno do ângulo formado entre eles (A).

Vamos agora entrar com as medidas de dois lados de um triângulo e o ângulo formado pelos mesmos.

O intuito é elaborar um programa que permita identificar se o mesmo é retângulo, acutângulo ou obtusângulo.

Todos os lados serão apresentados no final do programa com apenas duas casas decimais.

a) *Análise*: Para poder classificar um triângulo através dos seus ângulos devem ser usadas as seguintes relações convencionando-se de antemão que c é a medida do maior lado.

1) se $c^2 > a^2 + b^2$ o triângulo é obtusângulo

2) se $c^2 = a^2 + b^2$ o triângulo é retângulo

3) se $c^2 < a^2 + b^2$ o triângulo é acutângulo

É óbvio que usaremos a lei dos cossenos para obter o lado que falta.

b) O algoritmo que devemos desenvolver terá as seguintes etapas:

- I) Entrar com os dois lados de um triângulo L1, L2 e o ângulo formado entre eles A3 (em graus).
Você observou que não estamos mais chamando os lados de A, B e C.
Isto não é para confundir você estimado(a) leitor(a) mas sim para lhe dar mais opções.
Pode ser até que você ache mais fácil identificar a situação pois com L1 e L2 dados, faltam os ângulos A1 e A2 e dado o ângulo A3 falta o lado L3.
Tã! Gostou!
- II) Converter A3 em radianos.
- III) Obter o lado L3 (nesse caso deve-se usar a lei dos cossenos)
- IV) Arredondar L1, L2 e L3 para o centésimo mais próximo.
- V) Obter o maior entre os três números L1, L2 e L3
- VI) Colocar o maior valor na variável L3
- VII) Aplicar os testes indicados na parte a).
- VIII) Imprimir (PRINT) a classificação do triângulo em função dos seus ângulos
- IX) C'est fini

Aí vai o fluxograma desse algoritmo.

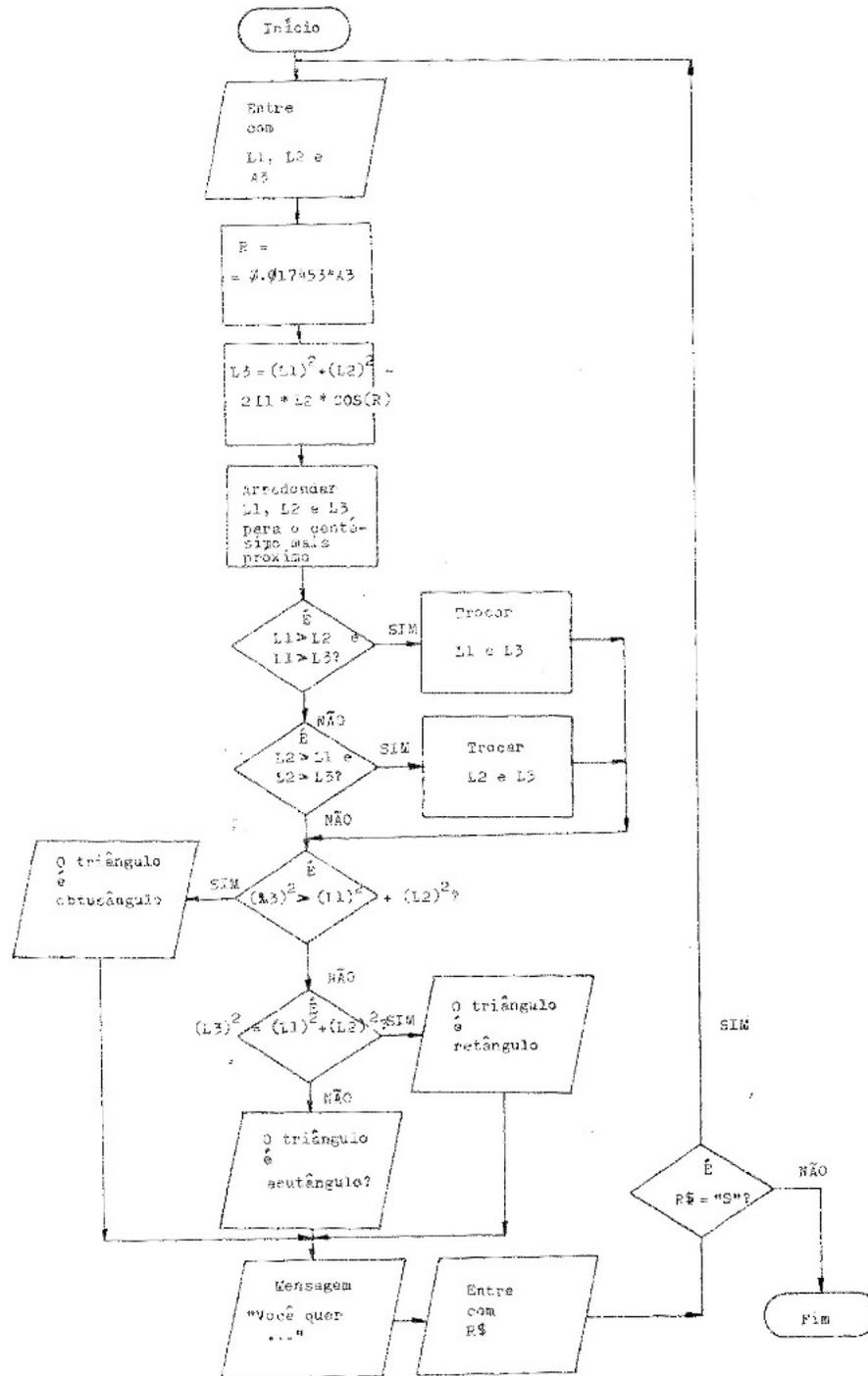


Figura 66

Aí vai o programa em BASIC para o TK-2000
COLOR

```

10 PRINT "APLICAÇÃO DA LEI DOS COSSENOS"
20 PRINT : PRINT
30 INPUT "ENTRE COM OS COMPRIMENTOS DOS DOIS LADOS"; L1,L2
40 INPUT "ENTRE COM O ÂNGULO FORMADO ENTRE L1 E L2"; A3
50 R = .0174533*A3
60 L3 = SQR(L1^2 + L2^2 - 2*L1*L2*COS(R))
70 L1 = L1 + 0.005 : L2=L2 + 0.005 : L3=L3 + 0.005
80 L1 = INT(100*L1)/100 : L2=INT(100*L2)/100 : L3=INT
  (100*L3)/100
85 PRINT
90 PRINT "O TERCEIRO LADO É: "; L3
95 FOR I = 1 TO 40
100 PRINT "?";
105 NEXT I
110 IF L1 > L2 AND L1 > L3 THEN 180
120 IF L2 > L1 AND L2 > L3 THEN 190
130 IF L3 > L1 AND L3 > L2 THEN 160
140 IF L3^2 = L1^2 + L2^2 THEN 170
150 PRINT "O TRIÂNGULO É ACUTÂNGULO": GOTO 200
160 PRINT "O TRIÂNGULO É OBTUSÂNGULO": GOTO 200
170 PRINT "O TRIÂNGULO É RETÂNGULO": GOTO 200
180 T=L3 : L3=L1 : L1=T : GOTO 130
190 T=L3 : L3=L2 : L2=T : GOTO 130
200 FOR I=1 TO 40
210 PRINT "!";
220 NEXT I
230 PRINT "VOCÊ QUER FAZER UM NOVO TESTE? (S/N)"
240 INPUT R$
250 IF R$ = "S" THEN HOME; GOTO 10
260 END
  
```

É aqui que se troca os conteúdos de L1 (linha 180) e de L2 (linha 190) com L3

Comentário e trabalho para você

Nesse programa apareceu a função cosseno que tem a seguinte forma para ser usada no TK-2000 COLOR

COS(X)

sendo o X em radianos.

Foi por isso que usamos a conversão indicada na linha 50.

Após ter teclado o programa "A LEI DOS COS SENOS" e ter aplicado para os seguintes casos.

- a) L1 = 13, L2 = 15, A3 = 40°
- b) L1 = 11, L2 = 11, A3 = 45°
- c) L1 = 16, L2 = 13, A3 = 120°
- d) L1 = 1, L2 = 2, A3 = 60°

elabore um programa que permita obter uma tabela do seno, do cosseno e da tangente [escreve-se TAN(X) em BASIC] com os valores dessas funções indicados até seis casas decimais.

A tabela deve ser desde 20° até 80° de 5° em 5°.

Na tabela deve aparecer a conversão de graus em radianos.

Como um segundo trabalho elabore os gráficos de $\text{sen}x$ e $\text{cos}x$ representando pelo menos 18 pontos no intervalo de 0° a 360°.

É necessário que saia impresso algum sistema de referência.

Verificação de identidades trigonométricas

Sobre o 16 também não temos muito o que dizer e por isso vamos direto a explicação do programa Nº 16.

Vamos apresentar um programa que verifica a famosa identidade

$$\boxed{\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1} \longrightarrow (1)$$

Aliás é uma boa hora de contar algo sobre a "mania de Pitágoras" de Elisha Scott Loomis, professor de Matemática em Cleveland, Ohio (Estados Unidos) que de 1907 a 1927 colecionou 230 demonstrações diferentes do teorema.

Na segunda edição do seu livro "The Pythagorean Proposition", que saiu em 1940, já apareciam 370 demonstrações diferentes.

O professor Loomis classifica as demonstrações do teorema de Pitágoras em basicamente dois tipos ou seja aquelas com:

- provas "algébricas", baseadas nas relações métricas nos triângulos retângulos;
- provas "geométricas", baseadas em comparações de áreas.

Ele se dá ao trabalho de observar que não é possível provar o teorema de Pitágoras com argumentos trigonométricos pois a igualdade fundamental da Trigonometria $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ já é um caso particular daquele teorema.

Na Revista Professor de Matemática (Nº 2-1983) o prof. Euclides Rosa no artigo "Mania de Pitágoras" dá detalhes muito interessantes sobre o teorema de Pitágoras.

Se você quer aprender de forma mais suave a Matemática não deixe de ler a RPM.

E agora vamos expor o plano de "ataque" para demonstrar a (1).

- a) Entrar com X em graus
- b) Converter X para radianos
- c) Obter $A = \sin^2 X$, $B = \cos^2 X$
- d) Arredondar A e B para seis casas decimais
- e) Imprimir A e B
- f) É $A + B = 1$?

Caso a afirmativa em f) seja verdadeira de ve-se voltar para a) para entrar com outros valores de X.

Em caso negativo ou seja a afirmativa em f) for falsa isto indica que a identidade não é identidade...

Porém você verá que isto não acontecerá!!!

g) Fim

Aí vai o fluxograma:

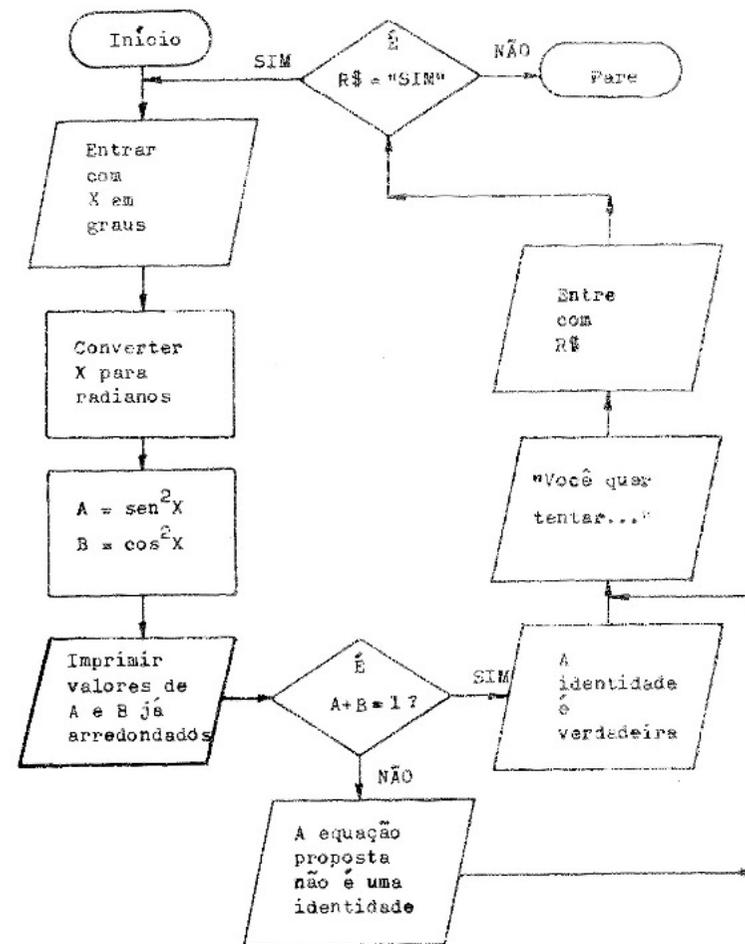


Figura 67

```

10 PRINT "VERIFICANDO A MAIS IMPORTANTE IDENTIDADE DA
TRIGONOMETRIA"
20 PRINT : PRINT
25 PRINT "*****SIN^2 + COS^2 = 1*****"
30 PRINT : PRINT
35 PRINT "ENTRE COM O ÂNGULO EM GRAUS: ";
40 INPUT X
50 PRINT X
  
```

```

55 R = X*.0174533
60 A = SIN(R) * SIN(R)
70 B = COS(R) * COS(R)
80 A = INT(A*1000000 + .5)/1000000
90 B = INT(B*1000000 + .5)/1000000
100 PRINT "A=B"; A; TAB(20); "B=B"; B
110 IF A+B=1 THEN 132
120 PRINT "A EQUAÇÃO PROPOSTA NÃO É UMA IDENTIDADE"
125 PRINT "O DESVIO É DE: "; ABS(A+B-1)
130 GOTO 145
132 FOR I=1 TO 3
135 PRINT "A IDENTIDADE É VERDADEIRA!!!!!"
138 PRINT
140 NEXT I
142 PRINT
145 PRINT "VOCÊ QUER TENTAR OUTRA VERIFICAÇÃO? (SIM/NÃO)"
150 INPUT R$
160 IF R$ = "SIM" THEN 30
170 END

```

Como um interessante trabalho mental e visando o aumento de sua cultura trigonométrica sugerimos os seguintes exercícios:

a) Verifique a identidade trigonométrica:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x}$$

para qualquer ângulo x dado em graus.

Cuidado com a tangente de 90° .

b) Elabore um fluxograma e a seguir escreva o conveniente programa em BASIC que permita expressar o seno de um ângulo entre 1° e 360° como função

de um ângulo agudo (positivo).

Não se deve entrar com os ângulos que definem os quadrantes ou seja 90° , 180° e 270° .

c) Repita o item b) para o cosseno, isto é entre com a medida de um ângulo entre 1° e 360° e expresse o cosseno desse ângulo como uma função de um ângulo positivo.

d) Obtenha uma tabela de 4 decimais para as funções $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cossec} x$, $\operatorname{sec} x$ para x variando de 7° a 27° de grau em grau.

$$\text{Note que } \operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}, \operatorname{sec} x = \frac{1}{\operatorname{cos} x}, \\ \operatorname{cossec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}.$$

e) Demonstre que

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x + y}{1 - xy}$$

f) Calcule o valor das seguintes expressões:

$$\left\{ \begin{array}{l} X = \operatorname{tg}(2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} 1) \\ Y = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{3} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{7} \\ Z = \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\sqrt{2} + 1) \\ W = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{5}} \right) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} A = \operatorname{cos} (2 \operatorname{arc} \operatorname{cos} 1) \\ B = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{1}{2} \\ C = \operatorname{sen}(2,5 \operatorname{arc} \operatorname{cos} 1,2) \\ D = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \left(\operatorname{cos} \frac{\pi}{3} \right) \end{array} \right.$$

"Dica" - O TK-2000 COLOR permite o uso direto da função trigonométrica inversa à tangente de X através da instrução $\operatorname{ATN}(X)$ que corresponde no BASIC a função arco tangente.

Pode-se obter as funções arco seno e o arco cosseno conhecida a função arco tangente através das expressões:

$$\begin{cases} \text{ARC SIN}(X) = \text{ATN}(X/\text{SQR}(-X * X+1)) \\ \text{ARC COS}(X) = -\text{ATN}(X/\text{SQR}(-X*X+1)) + 1.5708 \end{cases}$$

Fatorial - arranjos e combinações

a) Inicialmente vamos elaborar o fluxograma que permita obter $n!$ partindo da condição que $0! = 1$.

Já em 1972 aparecia a 5ª edição do nosso livro *Análise Combinatória*, escrito em colaboração com o prof. Sergio Sonnino, no qual dávamos as seguintes definições.



Definição 1 - Permutação

O número de permutações simples de n elementos é dado pelo produto dos n primeiros números naturais.

Esse produto é chamado "fatorial de n " e se indica com $n!$

Portanto

$$n! = n(n-1)(n-2) \dots 3.2.1 = \prod_{i=1}^n i \quad \longrightarrow (1)$$

Em vista da (1) os casos particulares são:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1! = 1 \\ 2! = 2.1 \\ 3! = 3.2.1 = 6 \\ 4! = 4.3.2.1 = 24 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ 10! = 10.9.8.7.6.5.4.3.2.1 = 3628800 \end{array} \right.$$

Vamos inicialmente apresentar o programa para obter o fatorial.

Análise

O seu TK-2000 COLOR precisa ter em "mente" duas quantidades:

1) O maior fator que precisa ser multiplicado (N).

Usando a instrução $N = N - 1$ serão obtidos novos fatores que também serão chamados de N.

É necessário aplicar um teste para saber quando N atingiu o valor 1.

2) O produto (P) será inicializado com o valor N.

A cada instante ou seja a cada volta se obterá um novo produto multiplicando o produto atual pelo valor atual ou seja o último de N.

Aí vai o fluxograma (Figura 68)

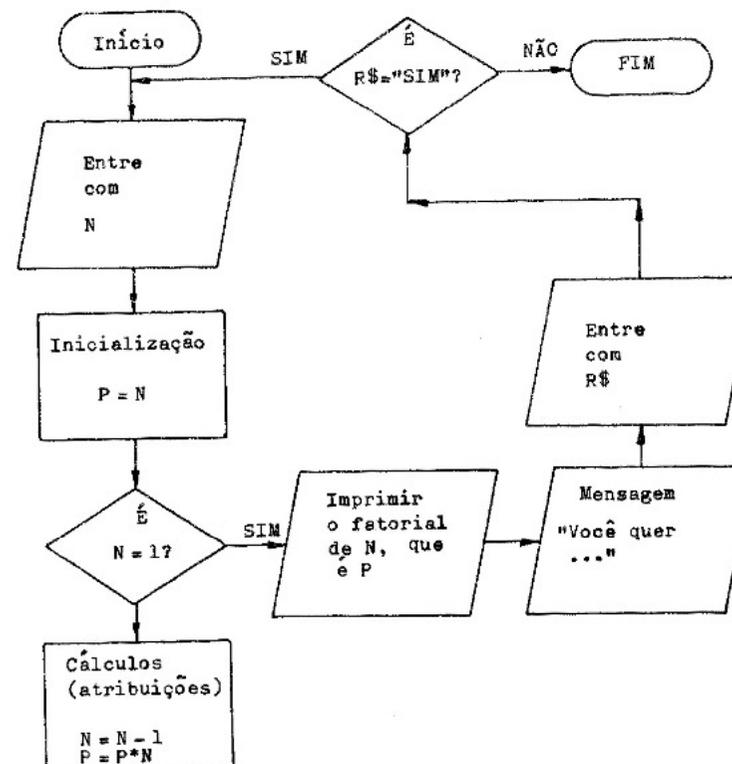


Figura 68

O programa correspondente é:

```

10 PRINT "CÁLCULO DO FATORIAL DE UM NÚMERO INTEIRO E
    POSITIVO"
20 PRINT : PRINT
30 INPUT "N=";N
40 P=N
50 IF N = 1 THEN 90
60 N=N-1
70 P=P*N
  
```

```

80 GOTO 50
90 PRINT "O FATORIAL DE ";N; "É:";P
100 PRINT "VOCÊ QUER OUTRO CÁLCULO?(SIM/NÃO)"
110 INPUT R$
120 IF R$ = "SIM" THEN HOME : GOTO 10
130 END
    
```

Aplique esse programa para saber quantas permutações diferentes podemos obter com as letras da palavra.

MICRODIGITAL

"Dica": Esse número é igual $\frac{12!}{3!}$

Faça a conveniente modificação para que o seu TK-2000 COLOR faça para você a divisão $12!/3!$.



Definição 2 - Arranjos simples

Dados n objetos distintos a_1, a_2, \dots, a_n chamaremos de arranjos simples destes n objetos r a r (ou classe r) a todos os possíveis grupos que se podem formar com r dos n objetos ($r < n$) de modo que cada grupo difira do outro ou por um objeto (elemento) ou pela ordem dos objetos.

A notação usada para representar os arranjos de n objetos (elementos) tomados r a r é

$A_{n,r}$

Assim tem-se:

$$\begin{aligned}
 A_{n,1} &= n \\
 A_{n,2} &= n(n-1) \\
 A_{n,3} &= n(n-1)(n-2) \\
 A_{n,4} &= n(n-1)(n-2)(n-3) \\
 &\dots \\
 &\dots \\
 A_{n,77} &= n(n-1)(n-2) \dots (n-76) \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Gostou dos dois "sete" Sacha?

$A_{n,r} = n(n-1)(n-2)(n-3) \dots [n-(r-1)]$

É evidente que quando $n=r$ tem-se

$A_{n,r} = n(n-1)(n-2) \dots 3.2.1 = n! = P_n$

Permutações simples de n elementos

Portanto quando $n=r$, aos grupos formados, costuma ser dado o nome de *permutações simples*.

Aí vai o fluxograma para obter *arranjos simples* usando uma subrotina para obter o $n!$

No nosso programa para o cálculo do fatorial nós não incluímos a possibilidade de ocorrer $0!$ cujo valor por definição é 1.

Precisamos entretanto desse valor e como já fizemos o programa para o $n!$ podemos usá-lo como uma subrotina.

Aí vão os fluxogramas para o programa principal e para a subrotina.

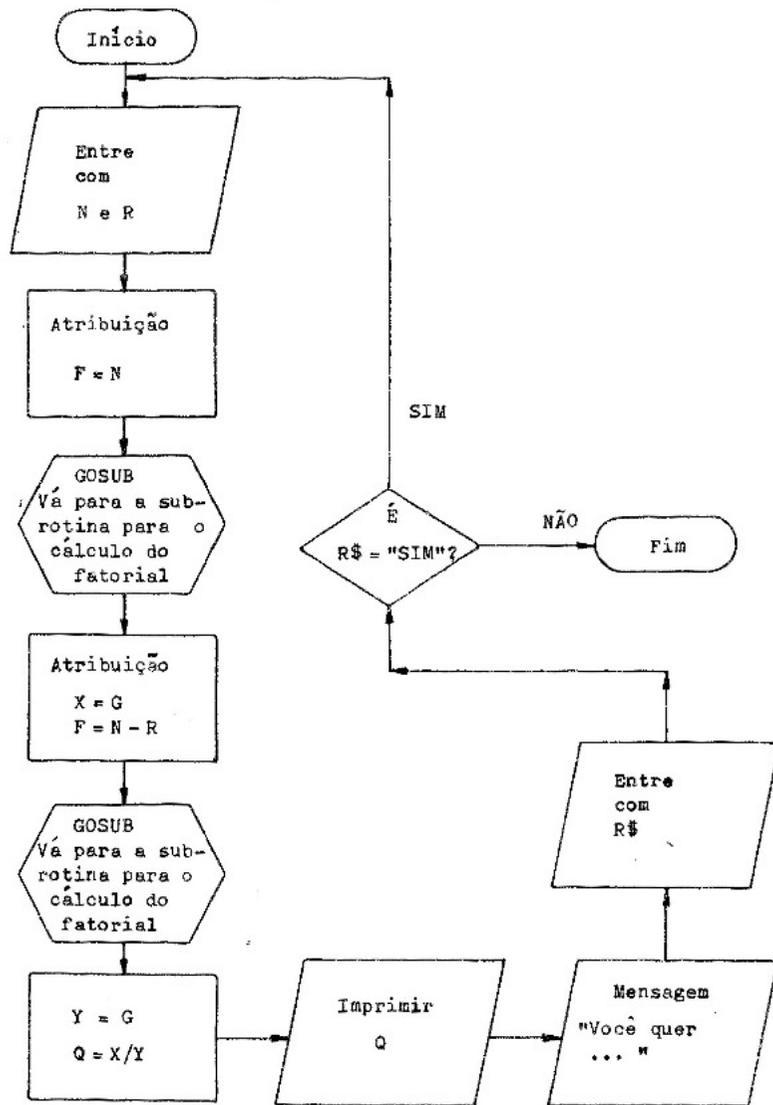
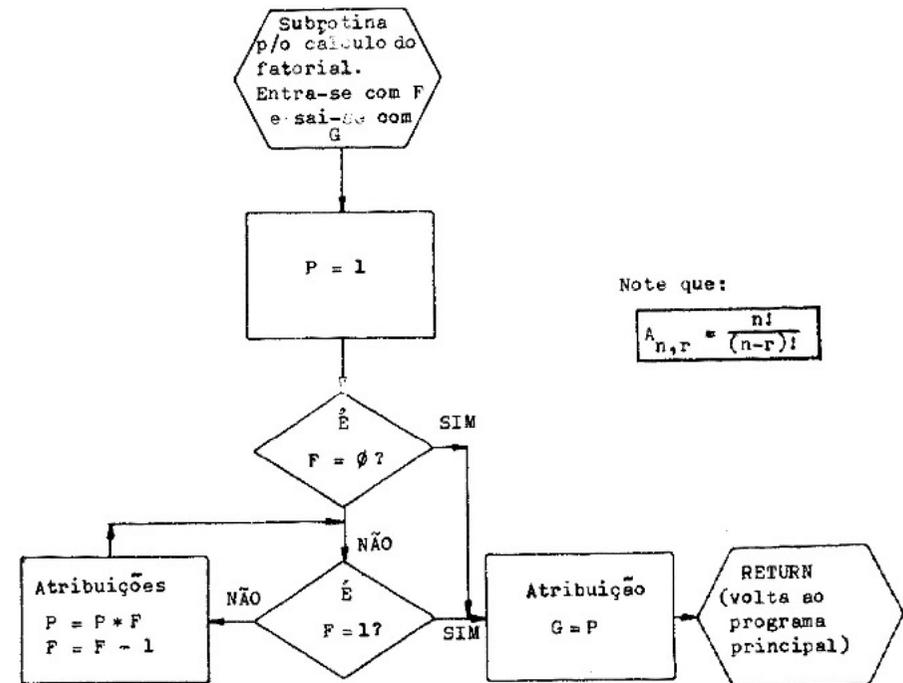


Figura 69 - Programa principal



Note que:

$$A_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Figura 70 - Subrotina para o programa "ARRANJOS SIMPLES"

Aí vai o programa em BASIC para o seu TK-2000 COLOR, submisso servo, executar e acabar com as terríveis complicações de cálculo que surgem na Análise Combinatória.

```

10 PRINT "CÁLCULO DE ARRANJOS SIMPLES"
20 PRINT : PRINT
30 INPUT "N="; N: INPUT "R="; R
40 F = N
  
```

```

50 GOSUB 1000
60 X = C
70 F = N-R
80 GOSUB 1000
90 Y=G
100 Q = X/Y
110 PRINT "A"; N","; R; "É IGUAL A B";Q
120 PRINT : PRINT
130 PRINT "VOCÊ QUER OUTRO CÁLCULO? (SIM/NÃO)"
140 INPUT R$
150 IF R$ = "SIM" THEN HOME : GOTO 10
160 END
1000 P = 1
1010 IF F=0 THEN 1060
1020 IF F = 1 THEN 1060
1030 P = P*F
1040 F = F-1
1050 GOTO 1020
1060 G = P
1070 RETURN

```

Problemas para você

Aplique o seu último programa para resolver os seguintes problemas:

a) Uma linha de estrada de ferro tem 10 estações.

Pergunta-se quantos bilhetes distintos deverão ser impressos, se cada estação tiver bilhete de partida e de chegada.

(Resposta $A_{10,2} = 90$)

b) Com os números 0,1,2,3,4,5,6,7,8 e 9 quantos números de 3 algarismos diferentes podemos formar se não devem aparecer algarismos repetidos?

(Resposta $A_{10,3} = A_{10,2} = 648$).

c) Quer-se pintar um armário e uma porta com cores diferentes.

Tem-se 6 tintas de cor diferente.

De quantos modos distintos pode-se fazer isto?

(Resposta $A_{6,2} = 30$)

d) Miss Brasil, Miss Estados Unidos, Miss Itália, Miss Espanha e Miss Taiti são as finalistas do concurso a *mais inteligente mulher do mundo*.

É isso aí..

Elas estão participando do concurso da "mulher informática - ano 2000".

De quantas formas diferentes elas podem ocupar do 1º ao 5º lugar?

(Resposta $A_{5,5} = P_5 = 5! = 120$)



e) *Definição 3 - Combinações simples*

Dados n elementos distintos a_1, a_2, \dots, a_n dir-se-á *combinações simples* destes elementos r a r (ou de classe r) a todos os grupos que se podem formar com r dos n elementos de modo que cada grupo difira do outro pelo menos por um elemento.

A notação de combinações simples de classe r é:

$$C_{n,r} \quad \text{onde } r \leq n$$

Prova-se que:

$$C_{n,r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{A_{n,r}}{P_r} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)}{r!} \rightarrow (4)$$

Elabore a análise, desenhe o fluxograma e finalmente apresente a codificação em BASIC para a obtenção de $C_{n,r}$.

Aplique o seu programa para obter a resposta de cada uma das seguintes questões:

- I) São dados 10 pontos dos quais 8 sobre uma mesma reta s e outros 2 não alinhados com estes 8 pontos.

Quantos triângulos podem ser formados usando os pontos dados como vértices?

(Resposta $C_{10,3} - C_{8,3} = 64$)

- II) De quantas maneiras pode-se dividir um baralho de 52 cartas (ás, rei, dama, ... quatro, três, dois) pela metade, de forma que em cada metade haja duas damas.

(Resposta $C_{52,26} \cdot C_{4,2}$)

Isto é trabalho para o seu TK-2000 COLOR e não para um "humanóide" qualquer!

0.I. - Se você gosta de combinar as coisas será que consegue obter os desenhos que aparecem na Figura 71 a partir de pedaços do quadrado representado na Figura 72 a) ou Figura 72 b)?

Note que os 7 pedaços do quadrado da Figura 72 devem ser usados obrigatoriamente.

Você é capaz de obter outras figuras simétricas do tipo indicado na Figura 71?

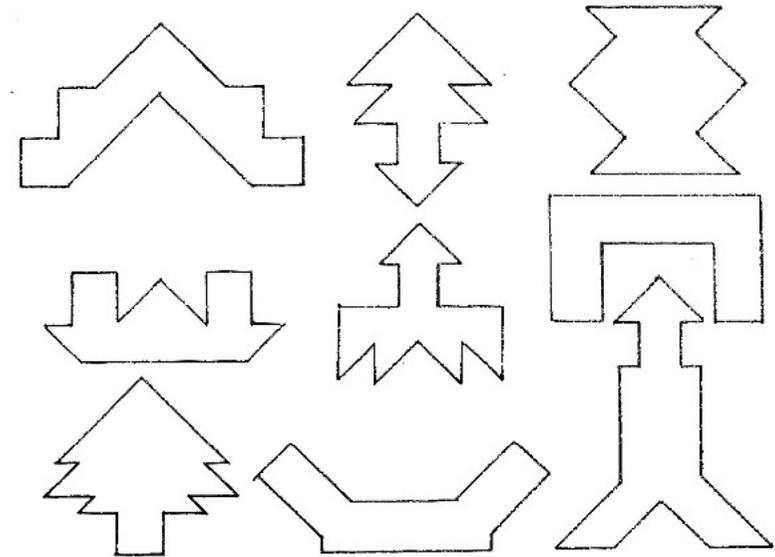


Figura 71

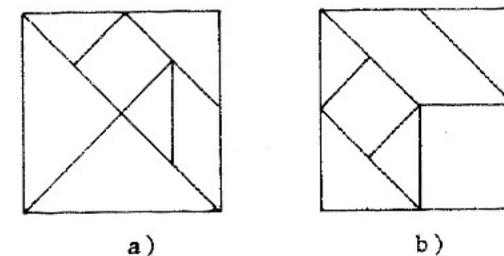


Figura 72

Operações com matrizes

O número dezoito oferece a particularidade de ser apresentado na numeração falada, sob três formas: aditiva, subtrativa e multiplicativa.

No latim popular encontramos "decem ac octo" - dez mais oito, sendo, portanto, nesse idioma, adotada a forma aditiva.

Sob a forma "okto-kai-deka" aparece em grego.

Nota-se a permutação das parcelas: oito mais dez.

Francês - "dix-huit" - dez e oito

Italiano - "di-ciotto" - dez e oito

Alemão - "ach-zehn" - oito e dez

Latim culto - "duo de viginti" - vinte menos dois

Baixo bretão - "tri omc'h" - três vezes seis

Azteca - "caxtalli-ou-ey" - quinze mais três

Bem, no programa Nº 18 apresentaremos os conceitos iniciais sobre matrizes.

As matrizes começaram a ser estudadas no século XIX pelos matemáticos ingleses J.J. Sylvester (1814-1897) e A. Cayley (1821-1895).

A teoria de matrizes foi, então desenvolvi

da e vem adquirindo uma grande importância, na medida que aumentam suas aplicações práticas, por exemplo na Pesquisa Operacional, no tópicó chamado Cadeias de Markov ou então em todos os ramos de Engenharia onde se precisa resolver sistemas lineares ou ainda em Economia ao se aplicar o famoso modelo de matriz de "input-output" de Leontieff.

O programa N° 18 permite somar, subtrair, multiplicar uma matriz por um escalar e inclusive multiplicar matrizes.

Deve-se entrar com o valor de cada elemento da matriz.

É evidente, que para a adição e para a subtração as dimensões das duas matrizes devem ser as mesmas.

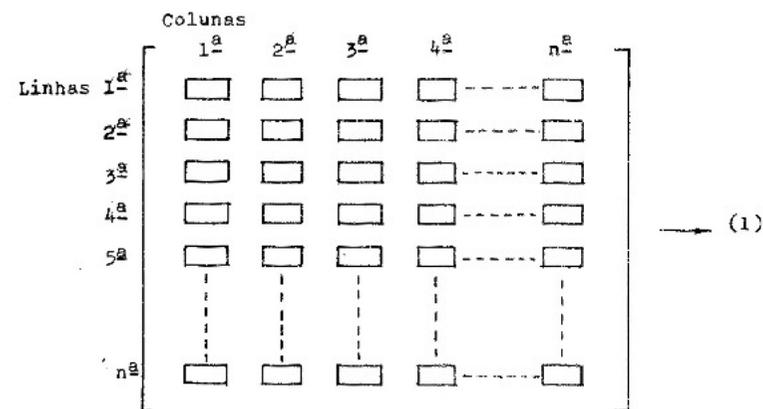
As dimensões das matrizes são declaradas a priori (L = número de linhas e C = número de colunas).

De maneira geral, quando representamos uma matriz qualquer A, do tipo (m x n) convencionam-se numerar as suas linhas de 1 a m (no nosso caso de 1 até L), de cima para baixo.

Também convencionam-se numerar suas colunas de 1 a n (no nosso caso de 1 até C), da esquerda para a direita.

Na parte referente a multiplicação é a primeira matriz que é multiplicada pela segunda.

É claro que para ocorrer o produto matricial deve ser verificada a condição: o número de colunas da 1ª matriz é igual ao número de linhas da 2ª matriz.



Em outras palavras se a 1ª matriz A tem ordem (r,s), a ordem da 2ª matriz B deve ser (s,p) sendo r e p quaisquer.

A Tabela 19 ilustra bem essa última observação.

tipo da matriz A	tipo da matriz B	tipo da matriz C = A.B
(3 x 4)	(4 x 2)	(3 x 2)
(3 x 2)	(3 x 2)	não é definida
(8 x 5)	(5 x 6)	(8 x 6)
(3 x 3)	(3 x 3)	(3 x 3)

Tabela 19



O.I. 1 - Definição 1 - Soma de duas matrizes A e B de mesma ordem

Chama-se a matriz C soma de A+B desde que qualquer elemento de C (c_{rs}) seja dado pela expressão:

$$c_{rs} = a_{rs} + b_{rs} \quad \longrightarrow \quad (2)$$

Exemplo:

$$A+B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \\ \emptyset & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+4 & 2+1 \\ 3+2 & 4+3 \\ 5+\emptyset & 6+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 7 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} = C$$

O.I.2 - *Definição 2 - Diferença de duas matrizes A e B de mesma ordem*

Dadas duas matrizes A e B (de mesma ordem), diz-se que C é a diferença dessas duas matrizes quando $C = A - B$ ou seja é a soma da matriz A com o oposto de B.

O.I.3 - *Definição 3 - Produto de uma matriz por um número*

Seja m um número real e A uma matriz de qualquer ordem.

Diz-se que o produto do número real (escalar) m pela matriz A é a matriz B da mesma ordem que a matriz A e cujos elementos b_{rs} são obtidos dos elementos da matriz A multiplicados por m .

$$\text{Portanto } b_{rs} = m a_{rs} \longrightarrow (3)$$

Exemplo:

$$5 \downarrow m \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \\ 35 & 40 \end{bmatrix}$$

A B

O.I.4 - *produto de duas matrizes quaisquer A e B onde*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & \dots & a_{rp} \end{bmatrix} \longrightarrow (4)$$

A(r × p)

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{ps} \end{bmatrix} \longrightarrow (5)$$

B(p × s)

Portanto o elemento genérico c_{ij} da matriz $C = AB$ de ordem (r × s) é

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj} \longrightarrow (6)$$

$$\begin{array}{c} \text{coluna } j \\ \downarrow \\ \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{Linha } i \rightarrow \\ \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \end{bmatrix} \end{array}$$

Portanto aplica-se a regra do LI CO (elementos de uma linha pelos elementos de uma coluna).

O.I.5 - Os "arranjos" matriciais quadrados já eram estudados há muito tempo, formando os chamados quadrados mágicos em que a soma dos elementos das linha, das coluna e das diagonais tinham o mesmo valor.

Aí vão algumas matrizes quadradas mágicas.

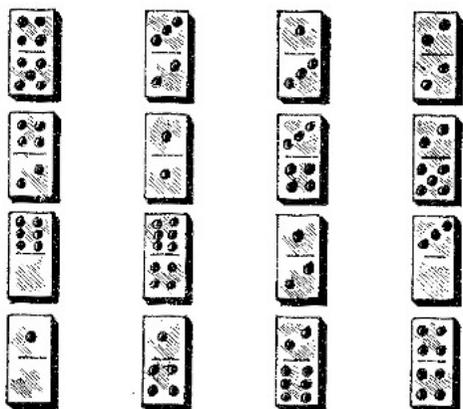


Figura 73

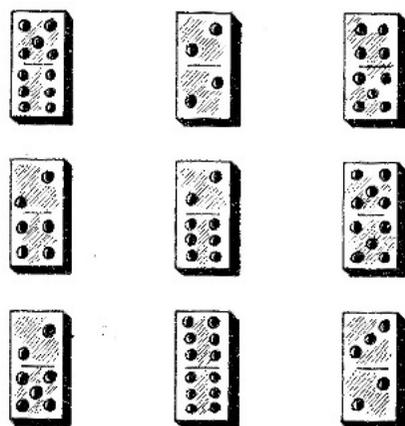


Figura 74

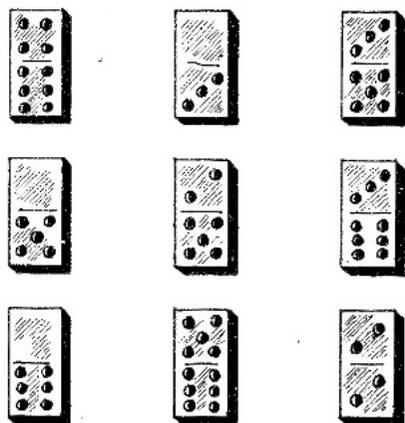


Figura 75

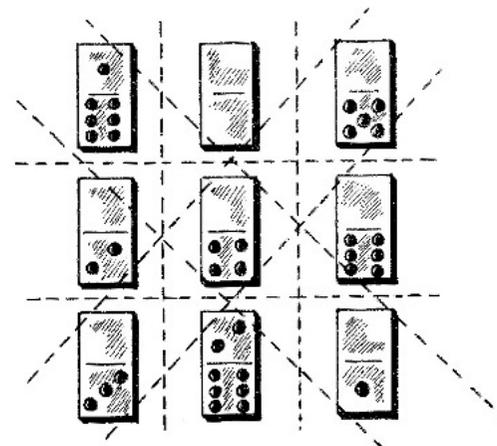


Figura 76 - Quadrado mágico de soma 12

19	8	11	25	7
12	1	4	18	0
16	5	8	22	4
21	10	13	27	9
14	3	6	20	2

Figura 77 - Matriz mágica nas diagonais

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
12	2	3	16

Figura 78 - Matriz quadrada mágica de "soma 34"

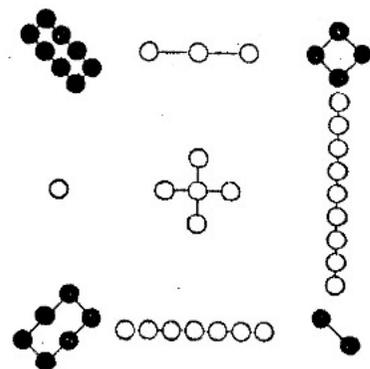


Figura 79 - O mais antigo quadrado mágico. Conhecido 4000 anos antes de Cristo.

Aí vai o nosso programão N^o 18 :

```

10 PRINT "SOMA E SUBTRAÇÃO DE MATRIZES"
15 PRINT "PRODUTO DE UM REAL POR UMA MATRIZ"
20 PRINT "PRODUTO DE MATRIZES"
25 PRINT : PRINT
30 PRINT "AÍ VÃO OS CÓDIGOS PARA CADA OPERAÇÃO"
40 PRINT "1= ADIÇÃO"
50 PRINT "2= SUBTRAÇÃO"
60 PRINT "3= MULTIPLICAÇÃO POR UM ESCALAR"
70 PRINT "4= MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES"
80 PRINT "ENTRE COM O CÓDIGO (1-4) DA OPERAÇÃO"
90 INPUT W
95 IF W < 1 OR W > 4 THEN 90
97 IF W > 3 THEN 500
100 IF W < > 3 THEN 135
110 PRINT "O VALOR DO NÚMERO REAL É:"
120 INPUT M
125 PRINT M
135 PRINT "DIMENSÃO DA MATRIZ (L,C) - L(LINHAS) * C(COLUNAS)"
140 INPUT L,C

```

```

145 DIM A(L,C), B(L,C)
150 FOR K = 1 TO 2
160 IF K = 2 THEN 180
170 PRINT "PRIMEIRA MATRIZ:"
175 GOTO 190
180 PRINT "SEGUNDA MATRIZ:"
190 FOR I = 1 TO L
200 PRINT "LINHA"; I
210 FOR J = 1 TO C
220 PRINT "VALOR NA COLUNA"; J;
230 IF K = 2 THEN 260
240 INPUT A(I,J)
250 GOTO 270
260 INPUT B(I,J)
270 NEXT J
280 NEXT I
290 IF W=3 THEN 310
300 NEXT K
310 FOR I=1 TO L
320 FOR J=1 TO C
330 IF W <> 2 THEN 350
340 B(I,J) = - B(I,J)
350 IF W=3 THEN 380
360 PRINT A(I,J) + B(I,J); " ";
370 GOTO 390
380 PRINT M*A(I,J); " ";
390 NEXT J
400 PRINT : PRINT
410 NEXT I
420 PRINT: GOTO 910
500 PRINT "DIMENSÃO DA PRIMEIRA MATRIZ L(LINHAS)* C(COLUNAS)"
510 INPUT L1,C1

```

A multiplicação por um real (escalar) é apenas para a 1^a matriz

```

520 DIM A(L1,C1)
530 PRINT "DIMENSÃO DA SEGUNDA MATRIZ L(LINHAS) * C(COLUNAS)"
540 INPUT L2,C2
550 DIM B(L2,C2)
560 PRINT "NÃO ESQUEÇA DA REGRA LICO"
570 IF L1 = C2 THEN 600
580 PRINT "NÃO É POSSÍVEL MULTIPLICAR ESSAS MATRIZES -
    ENTRE COM OUTRAS DIMENSÕES"
590 GOTO 500
600 PRINT "PRIMEIRA MATRIZ"
610 FOR I=1 TO L1
620 PRINT "LINHA#"; I
630 FOR J=1 TO C1
640 PRINT "VALOR DA COLUNA #"; J;
650 INPUT A(I,J)
660 NEXT J
670 NEXT I
680 PRINT
690 PRINT "SEGUNDA MATRIZ"
700 FOR I=1 TO L2
710 PRINT "LINHA#";I
720 FOR J=1 TO C2
730 PRINT "VALOR NA COLUNA#"; J;
740 INPUT B(I,J)
750 NEXT J
760 NEXT I
770 PRINT : PRINT
780 PRINT "E AGORA QUE VAI SAIR O RESULTADO OU SEJA A
    MATRIZ PRODUTO"
790 PRINT : PRINT
800 FOR I=1 TO L1
810 FOR J=1 TO C2
820 S = 0

```

```

830 FOR K=1 TO C1
840 S = S+A(I,K) * B(K,J)
850 NEXT K
860 PRINT S; "##";
870 NEXT J
880 PRINT : PRINT
890 NEXT I
900 PRINT :PRINT
910 PRINT "VOCÊ QUER EXECUTAR ALGUMA OUTRA OPERAÇÃO OU
    NOVO CÁLCULO? (SIM/NÃO)"
920 INPUT R$
930 IF R$ = "SIM" THEN HOME : CLEAR: GOTO 10
940 END

```

O.I. - Já falamos de matrizes unidimensionais e finalmente agora podemos lhes apresentar as matrizes bidimensionais.

A representação matricial, assim a "evolução" dos preços de diversos tipos de carro em diferentes anos podem ser representados de forma conveniente em uma matriz bidimensional (veja a Tabela 20).

Se quiséssemos armazenar os valores da Tabela 20 precisamos inicialmente no nosso programa declarar que a matriz de preços P tem dimensão 6 x 4 e antes de entrarmos com os valores de p_{ij} (P(I,J)) deve aparecer no programa a instrução DIM P(6,4).

Foi por essa razão que na linha 145 tivemos que inicialmente dimensionar as matrizes A e B.

As matrizes assim dimensionadas tem reserva na memória também para os elementos de índice zero (0) porém no nosso caso estas posições não são

Se por outro lado quiséssemos guardar o nome dos donos dos apartamentos, deveríamos usar a variável tipo matriz cadeia tal como $N\$(2,3,7)$ à qual estaria associado um nome.

Nesse caso também deve-se usar a instrução DIM que para o caso do prédio seria $DIM N\$(2,3,10)$ reservando-se antecipadamente 60 posições na memória para esse fim.

Trabalhinho para você

Use o seu programa N° 18 para obter as seguintes operações

a) O produto $C = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Resposta: $\begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 & 0 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

b) O produto $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

Resposta: $\begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 14 \end{bmatrix}$

c) O quadrado da matriz quadrada mágica da Figura 78.

d) Matriz (Figura 74) + 3 × Matriz (Figura 75) - 2 × Matriz (Figura 76)

e) O quadrado da matriz da Figura 77.

Inversão de uma matriz

Neste programa inverte-se uma matriz quadrada com o auxílio do método de Gauss-Jordan.

Não é muito comum no 2º grau ensinar esse método e por isso não entraremos em explicações mais detalhadas sobre o mesmo.

Quem desejar maiores esclarecimentos pode recorrer ao nosso livro de Cálculo Numérico.

Vamos entretanto recordar alguns conceitos fundamentais.


Definição 1

Matriz identidade (ou matriz unidade) de ordem n é a matriz I_n cujos elementos a_{ij} são iguais a 1 se $i=j$ e zero em caso contrário.

Portanto

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Note que:

. A matriz identidade de ordem n é uma matriz quadrada.

- Os elementos da diagonal principal da matriz identidade são todos iguais a 1.
- Os elementos não pertencentes à diagonal principal são todos nulos.

Sendo A uma matriz do tipo $m \times n$ prova-se que

$$\boxed{A I_n = A} \quad \text{e} \quad \boxed{I_n A = A} \quad \longrightarrow \quad (1)$$



Definição 2 - Matriz inversa

Dada uma matriz quadrada A, de ordem n, a matriz inversa de A (se existir) é uma matriz B tal que:

$$\boxed{AB = BA = I_n} \quad \longrightarrow \quad (2)$$

Note que:

- Sendo A e I_n matrizes quadradas de ordem n, a matriz B, se existir, também deverá ser quadrada de ordem n.

Quando A não é inversível dizemos que A é uma *matriz singular* e a condição para uma matriz ser singular é que o determinante extraído da mesma seja nulo, isto é

$$\boxed{\det A = 0} \quad \longrightarrow \quad (3)$$

- Quando existe a matriz B, dizemos que A é invertível ou inversível e representa-se B por A^{-1} .

Tem-se assim

$$\boxed{A \cdot A^{-1} = A^{-1} A = I_n} \quad \longrightarrow \quad (4)$$

Bem, vamos imediatamente ao programa que permite obter a matriz inversa $B = A^{-1}$.

```

10 PRINT "INVERSÃO MATRICIAL POR GAUSS-JORDAN"
20 PRINT : PRINT
30 PRINT "ENTRE COM A ORDEM OU A DIMENSÃO DA MÁTRIZ N";
40 INPUT N
42 DIM A(N,N), B(N,N)
45 PRINT N
50 PRINT "ENTRADA DOS ELEMENTOS DA MATRIZ"
60 FOR I=1 TO N
70 PRINT "LINHA";I
80 FOR J=1 TO N
85 PRINT "ELEMENTO DA COLUNA"; J;
90 INPUT A(I,J)
95 NEXT J
100 B(I,I) = 1
110 NEXT I
120 PRINT "TENHA UM POUCO DE PACIÊNCIA POIS É AGORA QUE O
      TK-2000 VAI COMEÇAR A INVERTER A MATRIZ"
130 PRINT : PRINT
140 FOR I=1 TO N
150 FOR J=1 TO N
160 IF A(I,J) <> 0 THEN 200
170 NEXT J
180 PRINT "LAMENTAVELMENTE A MATRIZ É SINGULAR"
190 GOTO 1000
200 FOR K=1 TO N
210 A = A(I,K)
220 A(I,K) = A(J,K)
230 A(J,K) = A
240 A = B(I,K)
250 B(I,K) = B(J,K)
260 B(J,K) = A
270 NEXT K
280 Q = 1/A(I,I)
290 FOR K = 1 TO N

```

```

300 A(I,K) = Q*A(I,K)
310 B(I,K) = Q*B(I,K)
320 NEXT K
330 FOR L=1 TO N
340 IF L=I THEN 380
350 Q = -A(L,I)
360 FOR K=1 TO N
365 A(L,K) = A(L,K) + Q*A(I,K)
370 B(L,K) = B(L,K) + Q*B(I,K)
375 NEXT K
380 NEXT L
385 NEXT I
390 PRINT "AÍ VAI A MATRIZ INVERSA"
395 PRINT
400 PRINT "OS ELEMENTOS DA MATRIZ SÃO ARREDONDADOS NA
    TERCEIRA CASA DECIMAL"
410 FOR I=1 TO N
420 FOR J=1 TO N
430 PRINT INT(B(I,J)*1000 + .5)/1000; " ";
440 NEXT J
450 PRINT
460 NEXT I
1000 END

```

O.I. - Faz muito tempo escrevemos junto com o prof. Sergio Sonnino o livro "Matrizes" e dele extraímos três problemas teste do programa que ora apresentamos.

Calcule pois com o auxílio do programa N^o 19 as inversas das seguintes matrizes:

a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Resposta } A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 11 & -38 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Resposta exata } A^{-1} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 30 & -20 & -15 & 25 & -5 \\ 30 & -11 & -18 & 7 & -8 \\ -30 & 12 & 21 & -9 & 6 \\ -15 & 12 & 6 & -9 & 6 \\ 15 & -7 & -6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

c)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Resposta } A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -5 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Divisão sintética de polinômios por binômios do 1º grau

Quando se manipulam polinômios é muito comum a necessidade de executar a operação de divisão.

A frequência maior recai sobre a necessidade de dividir um polinômio por um binômio do tipo $x-a$ onde a é uma constante.

Como exemplo ilustrativo prêvio, antes de apresentar o programa Nº 20, efetuemos a divisão

$$2x^3 - 3x^2 - 10x + 3 \quad \text{por} \quad x - 3$$

e acompanhemos com atenção as operações para poder introduzi-las no TK-2000 COLOR.

Façamos a divisão "manualmente"

$$\begin{array}{r}
 \overbrace{2x^3 - 3x^2 - 10x + 3}^{P(x)} \quad \overbrace{x-3}^{x-a} \\
 \text{diminuindo de } \underline{2x^3 - 6x^2} \qquad \qquad \qquad \underline{2x^2 + 3x - 1 = Q(x)} \\
 \qquad \qquad \qquad \underline{3x^2 - 10x + 3} \\
 \text{diminuindo de } \underline{3x^2 - 9x} \\
 \qquad \qquad \qquad \underline{-x + 3} \\
 \text{diminuindo de } \underline{-x + 3} \\
 \qquad \qquad \qquad \underline{0} \longrightarrow \text{Resto}
 \end{array}$$

No programa que iremos apresentar, os binômios terão sempre a forma $x-a$ de forma que o coeficiente de x é sempre 1. O dispositivo para efetuar esta divisão é escrever os coeficientes como indica do na Tabela 21.

(a)	-3	x^3 2	x^2 -3	x -10	3
		0	-6	-9	3
		2	+3	-1	0
		x^2	x	termo independente	

Tabela 21

Análise do problema

O conjunto de etapas para obter o polinômio quociente $Q(x)$ é:

- 1) Copiar na linha de topo (Tabela 21) os coeficientes do polinômio original do maior grau para o termo independente.

Chamemos esses coeficientes de $A(J)$ e o polinômio de $P(x)$.

- 2) Multiplicar esses coeficientes por $-a$ (no nosso caso particular por -3).

Preenche-se a 2ª linha da Tabela 21 com os produtos obtidos, colocados em posição especial (coluna).

No nosso caso particular temos que 2 vezes -3 dá -6 (colocado abaixo do -3).

- 3) Subtrai-se do -3 o -6 e obtém-se o $+3$ (3ª linha da Tabela 21).

Multiplica-se agora o -3 por 3 e obtém-se o -9 que foi colocado abaixo do -10 que é o termo de 1º grau.

- 4) Subtrai-se do -10 o -9 e obtém -1 o qual multiplicado por -3 dá o $+3$ que foi colocado abaixo do 3 (termo independente).

- 5) Abaixo do termo de maior grau (no nosso caso particular x^3) não temos nada e representamos essa condição pelo 0 (zero).

2 que é o coeficiente de x^3 passa dessa forma a ser o coeficiente do termo do 2º grau do polinômio quociente $Q(x)$.

- 6) A subtração do 3 do 3 dá como resto o 0 (zero).

- 7) Dessa forma vê-se claramente que $2+3-1$ é interpretado como $2x^2 + 3x - 1 = Q(x)$ que é o polinômio quociente procurado.

Costuma-se chamar esse processo de *algoritmo* ou *dispositivo prático de Briot-Ruffini*.

É óbvio que se na Tabela 21 na 3ª linha e última coluna não obtivermos o zero (0) isto significa que temos um resto e não ocorre a divisão exata.

Aí vai o programa em BASIC para o seu TK-2000 COLOR.

```

10 PRINT "DIVISÃO SINTÉTICA OU DISPOSITIVO DE BRIOT-RUFFINI"
15 PRINT "ENTRE COM O VALOR DE A";
20 INPUT A
25 PRINT "ENTRE COM O GRAU DO POLINÔMIO"
30 INPUT N

```

entre aqui com valor do a

entre com 3 que é o grau

```

35 DIM A(N), B(N)
40 FOR J=N TO 0 STEP -1
50 READ A(J)
55 PRINT A(J); "  ";
60 NEXT J : PRINT : PRINT
70 PRINT "P(X) DIVIDIDO POR X-";A; "PRODUZ"
75 PRINT : PRINT
80 B(N) = A(N)
85 PRINT B(N);
90 FOR J=N-1 TO 0 STEP -1
100 B(J) = A(J) + B(J+1)*A
110 PRINT "  "; B(J);
120 NEXT J
130 DATA 2, -3,-10, 3
140 END

```

esse caso é bom exemplo do DIM pois precisaremos realmente do elemento A(0) ou seja o termo independente.

Comentários

1) Até agora, sempre que utilizamos FOR-NEXT, a cada vez que o programa passava em NEXT, o valor da variável indicada na ordem FOR era acrescida de uma unidade, até que seu valor se igualasse ao valor final.

Podemos então dizer que o passo padrão da instrução FOR-NEXT é 1. O passo da instrução FOR-NEXT pode ser alterado acrescentando-se junto ao FOR a ordem STEP.

No nosso caso (linha 40) demos um STEP(passo) igual a -1 e o valor de J foi diminuindo de N até 0 de 1 em 1.

O passo (STEP) pode ser qualquer número real.

2) Caso você queira entrar com outra divisão e com outro polinômio deve mudar basicamente a linha do DATA (130) e obviamente entrar com outros valores de a e n, (linhas 20 e 30) respectivamente.

Em 1969 escrevemos com o prof. José Justino Castilho o livro "Polinômios" e hoje podemos com tanta facilidade aplicar o tão usado algoritmo de Briot-Ruffini.

Do nosso livro "Polinômios" tiramos alguns exercícios para você aplicar no programa Nº 20.

Efetue pois as seguintes divisões

- a) $P(x) \equiv 3x^4 - 2x^2 + 5x - 2$ por $(x+2)$ (não esqueça de entrar com -2 para o a)
- b) $P(x) \equiv 6x^5 + 19x^4 - 59x^3 - 160x^2 - 4x + 48$ por $(x+4)$
- c) $P(x) \equiv 2x^4 + x^3 - 6x^2 + x + 2$ por $(x-1)$
- d) $P(x) \equiv x^3 - 3x^2 - 4x + 2$ por $(x-2)$

Trabalho para você

Elabore um programa que permita a obtenção de raízes inteiras de uma função polinomial do 3º grau.

Aplique o mesmo para as seguintes equações:

- a) $x^3 - 2x^2 - 11x + 12 = 0$
- b) $x^3 + x^2 - 5x - 2 = 0$
- c) $x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = 0$
- d) $2x^3 - 3x^2 - 10x + 3 = 0$

O.I. - Uma nota histórica sobre aqueles que ajudaram a desenvolver a teoria das equações de grau superior ao 2º

Foi apenas no Renascimento que matemáticos italianos como Cardano (1501-1576), Tartaglia (1500-1557) e Ferrari (1522-1565) conseguiram resolver as equações do 3º e 4º grau por meio de fórmulas usando radicais.

Em 1629 o matemático A. Girard (1590-1633) obteve informações gerais sobre as raízes de uma equação polinomial ao relacioná-las com os seus coeficientes.

O matemático francês d'Alembert (1717-1783) em 1746 pensou ter demonstrado o seguinte teorema:

"Toda equação algébrica de grau n ($n \geq 1$) admite pelo menos uma raiz complexa".



Figura 81 - d'Alembert (1717-1783)

Este teorema é conhecido como teorema de d'Alembert ou teorema fundamental da Álgebra e só foi provado por Karl F. Gauss em 1799 em sua tese de doutoramento.

Na sua tese, Gauss desconfiava da impossibilidade de resolver equações de grau maior que 4 atra

vés de fórmulas envolvendo seus coeficientes. Este fato só foi demonstrado nos trabalhos do norueguês N.H. Abel (1802-1829) e do francês E. Galois (1811-1832) que, apesar de terem ambos morte prematura, deram os fundamentos da Álgebra moderna a qual se desenvolveu muito graças às pesquisas envolvendo a resolução de equações algébricas.

Hoje em dia podemos resolver por métodos iterativos tanto equações algébricas como as não algébricas ou transcendentais.

Aí o microcomputador desempenha um auxílio fundamental.

Na próxima edição desse livro entraremos um pouco na Matemática da Faculdade e aí com os programas e com as aplicações, isto se tornará bem evidente.

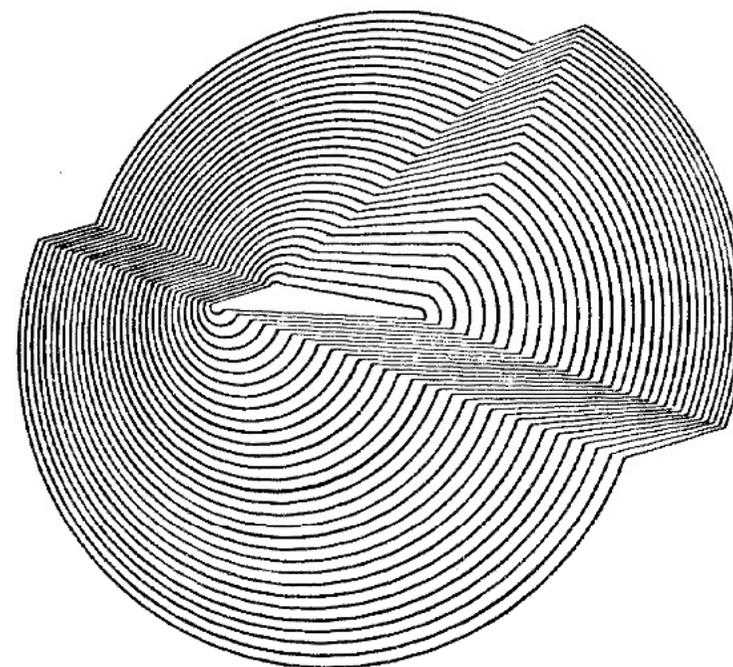


Figura 82

Números complexos

Atingimos o programa N^o 21 e espero que se já também a maioria de cada um no manuseio do BASIC para qualquer outro problema da Matemática.

Neste programa apresentaremos um programa para operar com os números complexos, porém antes contaremos um pouco da história dos números imaginários.

Ao se resolver a equação $x^2 + x + 1 = 0$ no campo real temos

$$x = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$$

e como $\sqrt{-3}$ não pertence ao campo dos reais (\mathbb{R}) a equação não admite soluções em \mathbb{R} , visto que estas exigem a raiz quadrada de um número negativo, o que é impossível para os reais.

Aliás a pergunta "qual é o número que multiplicado por si mesmo é igual a -1?" levou muito tempo para ser respondida.

Note que se $\sqrt{-1} = x \rightarrow -1 = x^2$ e como se vê x não pertence ao campo dos números reais.

Problemas como estes já preocupavam os matemáticos há muito tempo.

A criação do sistema numérico dos assim chamados números "complexos", que comumente se representam por \mathbf{C} , teve uma evolução muito lenta em vista da resistência dos matemáticos "conservadores".

Em Bologna, no século XVI surgiu uma grande escola de algebristas entre os quais destacavam-se Girolamo Cardano (1501-1576) e Rafaele Bombelli (1526-1573) os quais deram as primeiras interpretações dos assim chamados números "sem significado", "místicos", "impossíveis" ou "imaginários".

Nome aliás que se utiliza até hoje.

Em 1545, Cardano publicou um trabalho no qual propunha o seguinte problema:

"Dividir o número 10 em duas partes, de forma que o seu produto seja 40".

Devia-se resolver o sistema:

$$\begin{cases} x+y = 10 \\ xy = 40 \end{cases} \quad \text{cuja solução é} \quad \begin{cases} x = 5 + \sqrt{-15} \\ y = 5 - \sqrt{-15} \end{cases}$$

Nos séculos XVII e XVIII continuaram aparecendo raízes quadradas de números negativos não só nas equações.

Com a introdução dos números complexos conseguiu-se calcular os logaritmos dos números negativos, conseguiu-se determinar relações entre certas funções transcendentais, conseguiu-se ampliar o campo da Análise Infinitesimal com o estudo das funções de variável complexa (em analogia com o que é feito para a variável real).

Um agrimensor noruego Wessel e um "vendedor" de livros, o parisiense Argand, nos fins do século XVIII e começo do século XIX descobriram inde-

pendentemente uma forma de representar geometricamente os números "imaginários".

Ampliando a idéia, Gauss conseguiu representar analiticamente os pontos de um plano complexo.

Deve-se ter entretanto muito cuidado com a manipulação de raízes quadradas de números negativos.

Foi o genial L. Euler que representou $\sqrt{-1}$ por i pela primeira vez e até hoje usa-se este "símbolo".

Aliás deve-se a Euler quase todas as notações usadas hoje, inclusive a do π .

O manuseio do número imaginário i (raiz quadrada de -1) é muito arriscado. Como testemunha vai a seguinte demonstração "falaciosa":

$$\begin{aligned} \sqrt{-1} &= \sqrt{-1} \\ \sqrt{\frac{1}{-1}} &= \sqrt{\frac{-1}{1}} \\ \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} &= \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}} \\ \sqrt{1} \times \sqrt{1} &= \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} \\ \boxed{1} &= \boxed{-1} \end{aligned}$$

O.I. - Na Revista do Professor da Matemática (Nº 3-1983) discute-se uma outra forma dessa demonstração incorreta.

Quem for professor ou amante da Matemática deve ser assinante e colaborador da R.P.M.

Precisamos disto, para que todos se comuniquem e tornem o aprendizado da Matemática mais agradável.

Já falamos dos cinco números mais importantes da Matemática.

Não custa nada repetir e destacar que são

$$0 \text{ (zero)}, 1 \text{ (um)}, e, \pi, i = \sqrt{-1}$$

É notável que esses números estejam relacionados pela belíssima equação

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi$$

que para $\varphi = \pi$ dá

$$e^{i\pi} = -1 + i \cdot 0$$

donde

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Esta equação é mais um fruto do genial matemático suíço Leonard Euler.

E para finalizar, vejamos o máximo de para nãia envolvendo de certa forma variáveis complexas.

O eminente matemático inglês G.H. Hardy (1877-1947) tinha algumas idéias fixas.

Uma delas era a de demonstrar a chamada "hipótese de Riemann" (um famoso problema sobre variáveis complexas, até hoje não resolvido).

A outra era de que Deus era inimigo pessoal e o perseguiu incessantemente.

Certa feita, ao regressar de uma viagem da Dinamarca, num barco pequeno e mar bravio, enviou de bordo um telegrama a seu amigo, o matemático Harold Bohr, em Copenhague, contendo a mensagem: "Consegui provar a hipótese de Riemann".

O seu raciocínio era o seguinte: se o navio naufragasse (coisa que ele muito temia), ele

passaria à História como tendo resolvido um difícil problema matemático, todos supondo que sua demonstração afundara com ele. Como entretanto, Deus o odiava, não ia permitir que isso acontecesse, protegeria a viagem e ele chegaria são e salvo à Inglaterra.

O.I. - Esta "linda" historinha sobre o Hardy saiu na R.P.M. no seu Nº 2.

Há muito tempo atrás, mais precisamente 20 anos, escrevi um livro com o prof. Sérgio Sonnino chamado "Números Complexos" e vou transcrever alguns conceitos para que se possa entender facilmente o programa Nº 21 que permite, dados dois números complexos $z_1 = a+ib$ e $z_2 = c+id$ obter a sua soma, diferença, produto, quociente e o módulo de cada um.

Foi Gauss que ao invés de escrever um número complexo como

$$z = a + b\sqrt{-1} = a + ib$$

\downarrow \downarrow
 parte real coeficiente do imaginário

escreveu somente o par ordenado de números reais (a,b).

Assim a adição, subtração, multiplicação e divisão de dois complexos ou seja de dois pares ordenados é obtida da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Adição: } (a,b) + (c,d) = (a+c, b+d) \longrightarrow (1) \\ \text{Subtração: } (a,b) - (c,d) = (a-c, b-d) \longrightarrow (2) \\ \text{Multiplicação: } (a,b) * (c,d) = (ac-bd, ad+bc) \longrightarrow (3) \end{array} \right.$$

Para a divisão esta representação não é tão cômoda assim:

Divisão:

$$\frac{z_1}{z_2} = z = \frac{a+ib}{c+id} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i \longrightarrow (4)$$

Finalmente o módulo de um número complexo

$$z_1 = a + ib \text{ é}$$

$$M_1 = |z_1| = \sqrt{a^2 + b^2} \longrightarrow (5)$$

Analogamente o módulo de um número complexo

$$z_2 = c + id \text{ é}$$

$$M_2 = |z_2| = \sqrt{c^2 + d^2} \longrightarrow (6)$$

Estamos agora aptos para entender o programa N° 21.

```

5 REM O TK-2000 COLOR ESTRAÇALHANDO OS NÚMEROS COMPLEXOS
10 PRINT "OPERAÇÕES ELEMENTARES COM OS NÚMEROS COMPLEXOS"
20 PRINT : PRINT
30 PRINT "ENTRE COM O PRIMEIRO NÚMERO COMPLEXO #Z1"
40 INPUT A,B
45 IF A = 0 AND B = 0 THEN 40
50 PRINT "ENTRE COM O SEGUNDO NÚMERO COMPLEXO #Z2"
60 INPUT C,D
70 IF C = 0 AND D = 0 THEN 60
80 PRINT : PRINT
90 M1 = SQR(A*A + B*B) : M2 = SQR(C*C + D*D)
95 M1 = INT(M1*1000 + .5)/1000 : M2=INT(M2*1000 +.5)/1000
100 PRINT "O MÓDULO DO PRIMEIRO NÚMERO COMPLEXO É: #"; M1
110 PRINT : PRINT

```

```

115 PRINT "O MÓDULO DO SEGUNDO NÚMERO COMPLEXO É: #"; M2
120 PRINT : PRINT : PRINT
130 PRINT "A SOMA DE Z1 E Z2 É:"
135 PRINT "("; A+C; ", "; B+D; ")"
140 PRINT : PRINT
150 PRINT "A DIFERENÇA ENTRE Z1 E Z2 É:"
155 PRINT "("; A-C; ", "; B-D; ")"
160 PRINT : PRINT
165 PRINT "O PRODUTO DOS DOIS COMPLEXOS Z1*Z2 É:"
170 PRINT "("; A*C - B*D; ", "; A*D + B*C; ")"
175 PRINT : PRINT
180 PRINT "O QUOCIENTE DE DOIS COMPLEXOS Z1/Z2 É:"
185 PRINT "("; (A*C+B*D)/(C*C+D*D); ", "; (B*C-A*D)/(C*C+D*D);
    ")"
190 PRINT : PRINT
200 FOR I = 1 TO 20
205 PRINT "*I";
210 NEXT I
215 PRINT
220 PRINT "VOCÊ QUER ENTRAR COM OUTRO PAR DE NÚMEROS
    COMPLEXOS? (SIM/NÃO)"
225 INPUT R$
230 IF R$ = "SIM" THEN HOME: GOTO 10
240 END

```

Comentário

Quando utilizamos programas curtos, é bastante fácil lembrarmos, mesmo após algum tempo, o que cada parte deste programa está executando, porém com o passar do tempo e a sofisticação dos programas esta tarefa se torna cada vez mais difícil, ou seja, depois de alguns meses, só um indivíduo com memória muito boa pode lembrar a sequência lógica

de um programa de 250 linhas, imagine então vários programas com este número de linhas.

Para solucionar este problema, existe a instrução REM que colocamos apenas neste último programa (linha 5) para fazer o destaque da mesma, visto que a maior parte dos programas apresentados neste livro são curtos.

A instrução REM permite acrescentar lembretes ou comentários dentro do programa, sem que o seu TK-2000 COLOR tome "grande" conhecimento da mesma.

Desta forma, se os três primeiros caracteres de uma linha de programa forem REM, durante a execução do programa esta linha é ignorada.

A função do REM (remark) é de uma observação importante para você caro(a) humanoíde.

Os programadores experientes utilizam frequentemente esse recurso.

Aplique o programa Nº 21 para os seguintes números complexos

$$a) z_1 = 5 + 3i; \quad z_2 = 12 + i$$

$$b) z_1 = 1 + 4i; \quad z_2 = -1 - 4i$$

$$c) z_1 = 3 + i; \quad z_2 = 2i - 1$$

$$d) z_1 = 63 + 16i; \quad z_2 = -4 + 3i$$

$$e) z_1 = 4 + 4i; \quad z_2 = 5 - i$$

Um último trabalho para você, o qual irá exigir um pouco de pesquisa da sua parte em algum texto de Matemática que trate de números complexos no nível de 2º grau.

- a) Elabore um programa que permita obter a forma trigonométrica de um número complexo e a seguir entre com dois números complexos na forma algébrica e obtenha o seu produto e quociente já representados na forma trigonométrica ou polar.
- b) Elabore um programa que permita obter a potência n e a raiz n -ésima de um número complexo que já vem na forma trigonométrica

$$z = \rho (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$$

Sugestão:

Lembre que $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $\varphi = \operatorname{arctg}(\frac{b}{a})$ e não esqueça entre outras coisas que existe a fórmula de De Moivre.

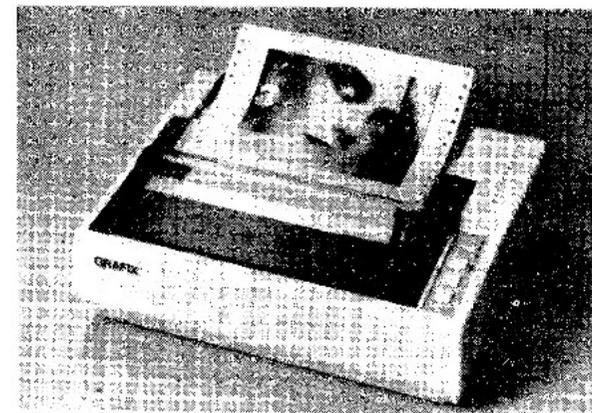
ATÉ BREVE, VOLTAREMOS NA PRÓXIMA EDIÇÃO COM PELO MENOS 50% A MAIS DE PROGRAMAS E AÍ PODEREMOS REALMENTE DIZER EDIÇÃO REVISTA E DE FATO AMPLIADA.

Impressora GRAFIX

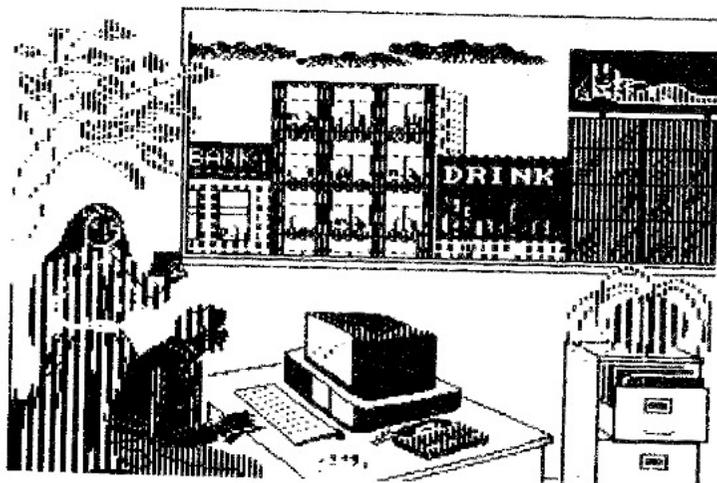
GRAFIX é a nova impressora da SCRITTA, que entra no mercado de informática com um produto de alta tecnologia e bom índice de nacionalização.

Imprime com uma matriz 9x9, a 100 cps, bidirecionalmente com procura lógica, isto é, não perde tempo voltando ao início da linha ou indo até o final. A GRAFIX imprime em quatro modos: normal, comprimido, expandido e comprimido-expandido. Além disso, ela imprime nas metades superior e inferior da linha, justamente o que se esperava no mercado para acabar com os problemas de índices, expoentes e uma série infundável de sinais. Para os grifos, a GRAFIX apresenta a grande vantagem de imprimir também em itálico, por exemplo, comprimidos expandidos, em cima ou em baixo, como quiser, até mesmo com as famosas linhas de sublinhar, que podem ser diretas, contínuas ou com outros truques. A impressora da SCRITTA permite ainda o controle de espaçamento entre as linhas, tabulação horizontal com 112 posições e vertical com 64, controle de posição de picote (pode pulá-lo automaticamente), usa papel de qualquer largura entre 4 e 10 polegadas, avisa o computador que o papel acabou, imprime acentos, cedilhas sem ter que voltar. Ela tem 207 caracteres, incluídos §, 1º, & e outros.

O mais importante é que a GRAFIX opera com resolução de 120 pontos por polegadas, ou seja, 960 pontos em papel de 8". A GRAFIX é fabricada em dois modelos: GRAFIX-80 (80 colunas) e GRAFIX-100 (132 colunas). A GRAFIX possui caracteres acentuados da língua portuguesa.



Com a GRAFIX é muito fácil obter desenhos como os indicados abaixo:



E no momento o que podemos dizer é: "Parabéns engenheiros Ivan Bettito (Mackenzie), Edmundo Panzoldo Teixeira (Mackenzie), Caio S. Shimada (ITA) e Ivaldo Bettito (FAAP) pelas "joias" que são as impressoras que vocês desenvolveram com quase todos os componentes *realmente* feitos no Brasil".

Bibliografia

- ABREU, C.A.C.
77 Programas para a linha APPLE
Edições Micro-kit - Rio de Janeiro - 1984
- BELL, F.
APPLE Programming for Learning and Teaching
Reston Publishing Company, Inc. - 1984
- CAMPBELL, J.
Programming Tips and Techniques for the APPLE II and IIE
Robert J. Brady Co. - A Prentice-Hall Publishing and
Communications Company - 1984
- CASTRUCCI, B.-GIOVANNI, J.R.
A coñquista da matemática - 8ª série - 1º grau
Editora FTD - São Paulo - 1983
- CHAMBADAL, L.
Dicionário da matemática moderna
Companhia Editora Nacional
- COAN, J.S.
Basic Basic
Hayden Book Company, Inc. - Rochelle Park, New Jersey
- DANTIZIG, T.
Número: A Linguagem da Ciência
Zahar Editores - Rio de Janeiro
- DI PIERRO NETTO, S.
Matemática - volumes 1,2,3 - 2º grau
Scipione autores editores - São Paulo - 1984
- ELGARTEN, G.H. - POSAMENTIER, A.S. - MORESH, S.E.
Using Computers in Mathematics
Addison-Wesley Publishing Company - Menlo Park, California
- GILDER, J.H.
BASIC Computer Programs in Science and Engineering
Hayden Book Company, Inc. - New Jersey - 1980
- GUELLI, C.A. - IEZZI, G. - DOLCE, D.
Álgebra II
Conjuntos, Funções, Inequações

- HENKE, J. - RICE, J.
Friendly BASIC
Reston Publishing Company, Inc. - 1984
- HOGBEN, L.
Maravilhas da matemática
Fundo de Cultura Geral - vol. 1 - Edit. Globo - R.J.
- IEZZI, G. - DOIÇE, D. - MACHADO, N.J. - GOULART, M.C.
MACHADO, A.S. - CASTRO, L.R.S.
Aulas de Matemática - volumes 1,2,3
Atual Editora Ltda. - São Paulo - 1984
- JONAH, A.F.
General College Mathematics
McGraw-Hill Book Company, Inc.
New Jersey - 1952
- KARLSON, P.
A Magia dos Números
Editora Globo - Porto Alegre
- KASNER, E. - NEWMAN, J.
Matemáticas e Imaginación
Librería Hachette S.A. - Argentina
- MANUAL DO TK-2000 COLOR
Microdigital Eletrônica Ltda - 1984
- MIRSHAWKA, V.
BASIC sem segredos
Livraria Nobel S.A. - São Paulo - 1984
- MIRSHAWKA, V.
Conhecendo e Utilizando o TK-2000
Livraria Nobel S.A. - São Paulo - 1984
- MIRSHAWKA, V.
Dê um APPLE à sua vida
Livraria Nobel S.A. - São Paulo - 1984
- MIRSHAWKA, V.
Cálculo Numérico
Livraria Nobel S.A. - São Paulo - 1984
- MIRSHAWKA, V.-CASTILHO, J.J.
Polinômios
Livraria Nobel S.A. - São Paulo - 1972
- MIRSHAWKA, V.-SONNINO, S.
Números Complexos
Livraria Nobel S.A. - São Paulo - 1965
- MIRSHAWKA, V.-SONNINO, S.
Elementos de Análise Combinatória
Livraria Nobel S.A. - São Paulo - 1972

- MIRSHAWKA, V.-SONNINO, S.
Séries
Livraria Nobel S.A. - São Paulo - 1969
- MIRSHAWKA, V.-SONNINO, S.
Matrizes
Livraria Nobel S.A. - São Paulo - 1974
- MYERS, R.E. - SCHNEIDER, D.I.
Handbook of Applesoft BASIC for the APPLE II and IIE
Brady Communications Company, Inc. -
A Prentice-Hall Publishing Company - 1984
- PASTOR, J.R.-BABINI, J.
História de la Matemática
Espasa - Calpe Argentina, S.A. - Buenos Aires - México
- POOLE, L.-BORCHERS, M.
Some Common Basic Programs
Osborne/Mc Graw-Hill - Berkley, California
- REVISTA NOVA MATEMÁTICA MODERNA
Editora Lisa
- REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA
São Paulo - 1983
- SERRÃO, A.N.
Exercícios e Problemas de Álgebra - vols. 1,2 e 3
Ao Livro Técnico Ltda. - Rio de Janeiro - 1960
- SMITH, D.E.
History of Mathematics, volume II
Dover Publications, Inc. - New Jersey
- SOUZA, M.
Folclore da Matemática
Conquista - 1954
- TAHAN, M.
O Homem que Calculava
Conquista - Rio 1952
- TAHAN, M.
Antologia da Matemática - volumes 1 e 2
Edição Saraiva - São Paulo 1961
- TEBBE, P.
Programming the APPLE II in BASIC
Prentice-Hall, Inc. - New Jersey - 1983
- YOUSSEF, A.N. - FERNANDEZ, V.P.
Linguagem BASIC e Programas para Matemática
Editora Scipione - São Paulo - 1985

DAG GRÁFICA E EDITORIAL LTDA.

Imprimiu

Av. Nossa Senhora do Ó, 1.782

Tel.: 857-6044

