

Este livro permitir-lhe-á utilizar da maneira mais eficaz as possibilidades gráficas do seu microcomputador. Com ele, pode realizar curvas em coordenadas cartesianas e polares, translações, rotações, simetrias, redes, tabuleiros, polígonos regulares e semi-regulares, cónicas, ovais, espirais e muitos outros grafismos. As indicações são claras e foram ilustrados muitos exemplos que não requerem conhecimentos matemáticos muito profundos. Todos estes programas foram efectuados no ZX Spectrum ou no ZX81, mas são facilmente adaptáveis a outros computadores graças às equivalências fornecidas pelo autor. No final do livro são incluídas algumas noções matemáticas, na intenção de facilitar a programação dos grafismos.



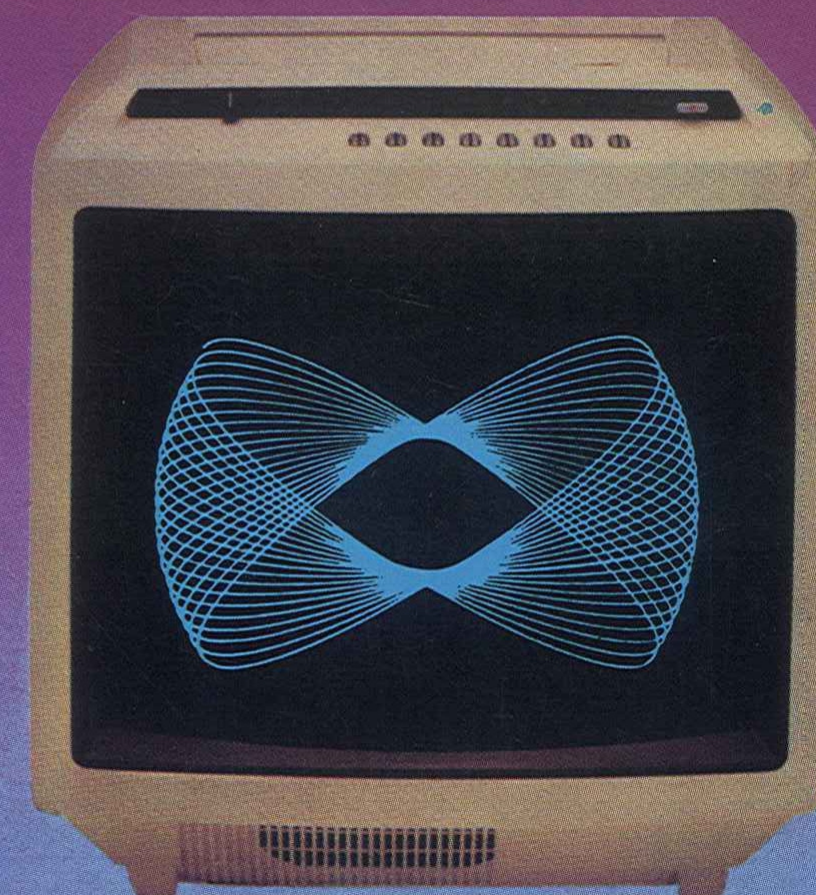
EDITORIAL PRESENÇA

Programar Grafismos no seu Computador

188

MICHEL ROUSSELET

# PROGRAMAR GRAFISMOS NO SEU COMPUTADOR



TEMPOS  
LIVRES



## CULTURA E TEMPOS LIVRES

1. ABC do Xadrez, *Peter Trifunovitch e Sava Vulkovitch*
4. ABC do Bridge, *Pierre Jais e H. Lahana*
5. Guia Prático de Fotografia, *W. D. Emanuel*
6. ABC do Judo, *E. J. Harrison*
7. Como Fazer Cinema, *Paul Petzold*
8. Bridge Moderno, *Pierre Jais e H. Lahana*
9. Fotografia – Técnicas e Truques I, *Edwin Smith*
10. ABC dos Estilos, da Arquitectura ao Mobiliário, *A. Aussel*
11. Fotografia – Técnicas e Truques II, *Edwin Smith*
12. A Pesca Submarina, *António Ribera*
13. Teoria dos Finais de Partida, *Yuri Averbach*
14. Aprenda Rádio, *B. Fighiera*
15. Guia do Cão, *Louise Laliberté-Robert e Jean-Pierre Robert*
16. ABC do Aquário, *Anthony Evans*
17. Iniciação à Electricidade e Electrónica, *Fernand Huré*
18. Os Transistores, *Fernand Huré*
19. Karaté I, *Albrecht Pflüger*
20. Iniciação ao Radiocomando dos Modelos Reduzidos, *C. Péricono*
21. Construa o seu Receptor, *B. Fighiera*
22. Montagens Electrónicas, *B. Fighiera*
23. O Berbequim Eléctrico, *Villy Dreier*
24. Cactos, *J. Nilaus Jensen*
25. Iniciação à Alta Fidelidade, *Peter Turner*
26. O Aquário de Água Doce, *Paulo de Oliveira*
27. ABC do Ténis, *Fonseca Vaz*
28. Karaté II, *Albrecht Pflüger*
29. ABC da Criação de Canários, *Curt Af Enehjelm*
30. Ginástica Feminina, *Sonja Helmer Jensen*
31. Cartomancia, *Rhea Koch*
32. Calculadoras Electrónicas de Bolso, *E. Dam Ravn*
33. O Pastor Alemão, *Gilles Legrand*
34. Xadrez – Teoria do Meio Jogo I, *I. Bondarevsky*
35. Manual do Super 8 – I, *Myron A. Matzkin*
36. ABC da Criação de Periquitos, *Cyril H. Rogers*
37. O Livro dos Gatos, *Barbel Gerber e Horst Bielfeld*
38. Manual do Super 8 – II, *Myron A. Matzkin*
39. ABC do Mergulho Desportivo, *Walter Mattes*
40. Circuitos Integrados/Aplicações Práticas, *F. Bergtold*
41. A Apicultura, *H. R. C. Riches*
42. ABC do Cultivo das Plantas, *H. G. Witham Fogg*
43. ABC da Criação de Pombos, *Kai R. Dahl*
44. Construção de Caixas Acústicas de Alta Fidelidade, *R. Brault*
45. Raças de Canários, *Klaus Speicher*
46. Jogos de Cartas, *Graciano Dolma*
47. Cocker Spaniels, *H. S. Lloyd*
48. ABC da Caça, *Fabian Abril*
49. Aprenda Televisão, *Gordon J. King*
50. Iniciação à Pesca, *Juan Nadal*
51. Basquetebol, *Marius Norregard*
52. Cães de Caça, *Santiago Pons*
53. Aprenda Electrónica, *T. L. Squires e C. M. Deason*
54. A Avicultura, *Jim Worthington*
55. A Produção de Coelho, *P. Surdeau e R. Henaff*
56. ABC dos Computadores, *T. F. Fry*
57. Natação para Crianças, *John Idorn*
58. O Boxer, *Anni Mortensen*
59. Voleibol, *Ole Hansen e Per-Göran Persson*
60. Iniciação à Vela, *Donald Law*
61. ABC da Filatelia, *Jacqueline Caurat*
62. A Pesca à Beira-Mar, *J.-M. Boëlle e D. Doyen*
63. Enxerto de Árvores de Fruto, *Alejo Rigau*
64. A Cultura do Morangueiro, *Luís Alsina Grau*
65. Emissores-Receptores (Walkies-Talkies), *P. Duranton*
66. Iniciação à Fotoelectrónica, *Heinz Richter*
67. Doces e Conservas de Fruta, *Robin Howe*
68. A Criação de Hamsters, *C. F. Snow*
69. A Criação de Porcos, *Rioy Genders*
70. Calendário do Horticultor, *Luís Alsina Grau*
71. Jogos Electrónicos, *F. G. Rayer*
72. Cultivo de Cogumelos e Trufas, *Alejo Rigau*
73. Aprenda Televisão a Cores, *Gordon J. King*
74. Gravação em Fita Magnética, *Ian R. Sinclair*
75. Poda de Árvores e Arbustos, *Roy Genders*
76. Como Treinar o Seu Cão, *E. Fitch Daglish*
77. Instrumentos de Medida e Verificação, *Heinrich Stöckle*
78. A Criação de Caracóis, *Matias Josa*
79. Rádio – Fundamentos e Técnicas, *Gordon J. King*
80. Como Fazer Gelados, *Sylvie Thiébaud*
81. Iniciação à Jardinagem, *Noel Clarasó*
82. A Congelação dos Alimentos, *Suzanne Lapointe*
83. Windsurf – Prancha à Vela, *Ernstfried Prade*
84. Raças de Cães, *O. Hasselfeldt*
85. Rummy e Canasta, *Claus D. Grupp*
86. A Encadernação, *Annie Persuy*
87. Aprenda Electricidade, *Heinz Richter*
88. Taxidermia, Embalsamamento de Aves e Mamíferos, *Harry Hjortaa*
89. Jogging – Correr Para Manter a Forma, *Werner Sonntag*
90. ABC da Cozinha Chinesa, *Sonya Richmond*
91. Jogos TV, *C. Tavernier*
92. Amplificadores de Som, *Richard Zierl*
93. O Livro do Poker, *Claus D. Grupp*
94. Aprenda a Desenhar, *Rose-Marie de Prémont e Nicole Philipp*
95. O Minitrampolim na Escola, *Sonja Helmer Jensen e Klaus Danø*
96. Jogos de Luzes e Efeitos Sonoros para Guitarras, *B. Fighiera*
97. O Cultivo do Tomate, *Louis N. Flawn*
98. Pilhas Solares, *F. Juster*
99. A Criação Doméstica de Coelho, *C. F. Snow*
100. Iniciação ao Futebol, *Wieland Männle e Heinz Arnold*
101. Horóscopos Chineses, *Georg Haddenbach*
102. Guia Prático de Marcenaria, *Charles H. Hayward*
103. Andebol, *Fritz e Peter Hattig*
104. Dispositivos Anti-Roubo, *H. Schreiber*
105. Perús, Pintadas e Codornizes, *Jérome Sauze*
106. Crepes – Doces e Salgados, *Florence Arzel*
107. Aperitivos e Entradas, *Myrette Tiano*
108. Ténis de Mesa, *Leslie Woollard*
109. Aprenda Surf, *R. Abbott e M. Baker*
110. Futebol – Técnica e Tática, *Kurt Lavall*
111. A Vaca Leiteira, *Colin T. Whittemore*
112. O Cubo Mágico, *Josef Trajber*
113. O Perdigueiro Português, *José M. Correia*
114. Pizzas e Massas à Italiana, *Marieanne Ränk*
115. O Cubo Para Quem Já o Faz, *Josef Trajber*
116. A Pirâmide Mágica, A Torre, O Barril do Diabo, *M. Mrowka-W. J. Weber*
117. Gansos e Patos, *Marie Mourthe*
118. Iniciação ao Kung-Fu, *A. P. Harrington*
119. Electrónica e Fotografia, *Hans-Peter Siebert*
120. O Livro da Fortuna, *Douglas Hill*
121. Construção de um Alimentador de Corrente, *Waldemar Baittinger*
122. Hóquei em Patins, *Francisco Velasco*
123. Técnicas de Tiro, *Anton Kovacic*
124. Aprenda a Tricotar, *Uta Mix*
125. ABC da Patinagem, *Christa-Maria e Richard Kerler*
126. A Pesca e os seus Segredos, *Armand Deschamps*
127. O Osciloscópio, *R. Rateau*

128. Guia Prático da Banda do Cidadão, *T. M. Normand*
129. Sumos e Batidos, *Manfred Donderski*
130. Introdução à Programação de Microcomputadores, *Peter C. Sanderson*
131. Aprenda Croché, *Uta Mix*
132. ABC do Microprocessador, *P. Mélusson*
133. Guia Prático de Basic, *Roger Hunt*
134. Introdução à Electrónica Digital, *Ian R. Sinclair*
135. ABC do Vídeo, *David Matthewson*
136. Fotografia em Movimento, *Don Morley*
137. Guia de Cobol, *Ray Welland*
138. Fotografia a Pequena Distância, *Sidney F. Ray*
139. Guia Moderno da Canaricultura, *Manuel Gonçalves*
140. Minieletrónica para Amadores, *Heinz Richter*
141. ABC da Programação de Computadores, *John Shelley*
142. Tarot - O Futuro Pelas Cartas, *Edwin J. Nigg*
143. ABC da Equitação, *Dorothy Johnson*
144. Como Programar o seu ZX 81, *Patrick Gueulle*
145. 100 Avarias TV e a Maneira Prática de as Detectar, *P. Duranton*
146. ABC da Horticultura, *Louis Giordano*
147. Basic Para Microcomputadores, *A. P. Stephenson*
148. Como Programar o seu ZX Spectrum, *Tim Hartnell e Dilwyn Jones*
149. Iniciação aos Motores Diesel, *David S. Maclean*
150. 60 Jogos Para o ZX Spectrum, *David Harwod*
151. As Linhas da Mão, *Rose Hubert*
152. Cozinha Italiana, *Rotraud Degner*
153. Manual do ZX Spectrum, *R. J. Simpson e T. J. Terrell*
154. Z80 Assembler Para o ZX Spectrum - Iniciação ao Código de Máquina, *João Paulo Fragosos*
155. Aeróbica, *Hans Schulz*
156. ABC do Atletismo, *Denis Watts*
157. 26 Programas Basic Para Microcomputadores, *Derrick Daines*
158. Aprenda Pascal no Seu Microcomputador, *Jeremy Ruston*
159. Guia Moderno da Suinicultura, *Colin Whittemore*
160. O Bar em Sua Casa - 888 Cocktails, *Aladar von Wesendonk*
161. Código de Máquina Para Principiantes, *James Walsh*
162. Código de Máquina Para Programadores Avançados, *Paul Holmes*
163. ABC da Fruticultura, *Henri Grosselin*
164. ABC da Canoagem, *Alan Bye*
165. Guia de Fortran, *Philip Ridler*
166. Manual da Secretária, *Phillippa Ramáge*
167. ABC das Antenas, *Gordon J. King*
168. Programar Aventuras no Seu Computador, *Anfrew Nelson*
169. Guia do Sinclair QL, *Boris Allan*
170. Novas Aventuras no Seu ZX Spectrum, *Peter Shaw e James Mortleman*
171. O Computador no Escritório, *John Shelley*
172. Sobremesas, *Fred Timber*
173. Rádio - Do Circuito Oscilante ao Receptor de Ondas Curtas, *Richard Zierl*
174. Xadrez: ABC das Aberturas, *V. N. Panov*
175. A Construção de Pequenos Transformadores, *M. Dorian e F. Juster*
176. Guia de Pascal, *David Watt*
177. O ZX Spectrum na Educação, *Tim Hartnell, Christine Johnson e David Valentine*
178. Iniciação ao Snooker, *John Pulman*
179. Circuitos com Diacs, Tiristores e Triacs, *Fritz Bergtold*
180. O Jogo do Mah-Jong, *Ursula Eschenbach*
181. Cultura Hidropónica, Culturas sem solo, *Laura Fronty*
182. 49 Jogos Explosivos para o ZX Spectrum, *Tim Hartnell, D. Perry, G. Charlton, N. Pellinacci e M. Young*
183. Iniciação ao Golfe, *J. C. Jessop*
184. Como se Constrói um Receptor de FM, *Richard Zierl*
185. Iniciação à Navegação Marítima, *Anselmo Vieira*
186. Processamento de Dados, *T. F. Fry*
187. O ZX Spectrum na Gestão de Pequenas Empresas, *Luis de Campos*
188. Programar Grafismos no seu Computador, *Michel Rousselet*

# PROGRAMAR GRAFISMOS NO SEU COMPUTADOR

*Para Sophie e Anne*

## **PREFÁCIO**

Cada um dos capítulos desta obra expõe diversas técnicas que permitem utilizar as possibilidades gráficas dos microcomputadores. A uma exposição teórica, talvez demasiado pesada, preferi um tratamento mais concreto, baseado na explosão de numerosos casos particulares, donde o título do livro.

A fim de tornar a leitura mais fácil, cada programa é apresentado de maneira linear, sendo as primeiras linhas reservadas à entrada das diversas variáveis. Salvo alguma excepção, cada linha contém uma única instrução, tendo sido evitadas quaisquer «astúcias» de programação.

O leitor que queira aumentar a velocidade de execução destes programas poderá consegui-lo modificando a listagem à sua maneira. Por exemplo, será possível:

- 1) Suprimir certas variáveis;
- 2) Evitar a repetição de certos cálculos;
- 3) Executar primeiro um subprograma, etc.

Quase todos os programas foram desenvolvidos num ZX81, e depois verificados e melhorados num ZX Spectrum: e o modo como são apresentados permite transpor qualquer das listagens para outros tipos de computadores. Bastará substituir o nome de uma instrução por outro. Por exemplo, a instrução PLOT x,y do Spectrum transforma-se em CURSET x,y,n num ORIC (sendo n o número da cor) PSET (x,y) num TO 7-70.

Título original:

GRAPHISMES EN KITS

© 1984 - E.T.S.F.

Tradução de Conceição Jardim e Miguel Nogueira

Capa de Rogério

Reservados todos os direitos

para a língua portuguesa à

EDITORIAL PRESENÇA, LDA.

Rua Augusto Gil, 35-A - 1000 Lisboa



As equivalências indicadas no último anexo do livro devem facilitar esta substituição.

Para utilizar esta obra, não é necessário ter conhecimentos especiais de matemáticas, dado que a importância dos cálculos foi voluntariamente reduzida.

Os cálculos efectuados em certos capítulos supõem, para serem seguidos pelo leitor:

- Um bom conhecimento das coordenadas cartesianas;
- Compreensão das propriedades elementares das funções trigonométricas.

A única dificuldade reside, em minha opinião, no uso das variáveis e índices.

Deve notar-se que as instruções que regem o uso da cor não foram usadas. Isto deve-se ao facto de não ser possível em qualquer microcomputador pessoal escolher individualmente a cor de cada um dos pixels da imagem. Em geral, a cor é aplicada a conjuntos de 64 pixels. Ora todo o interesse da cor reside precisamente na mistura de tonalidades.

Neste livro falta por outro lado um aspecto importante, o das imagens a três dimensões. Trata-se de um tema extremamente interessante que me proponho abordar numa outra obra.

Acrescentarei, para terminar, que todas as imagens publicadas nesta obra foram deliberadamente obtidas por cópia numa das pequenas impressoras usadas para o Spectrum. Pensadas essencialmente para a cópia do texto, estas não se prestam muito à execução de gráficos (notar o espaçamento excessivo entre as linhas em algumas das imagens).

## 1

### COORDENADAS CARTESIANAS

A ideia de utilizar dois números para definir a posição de um ponto num plano surgiu na antiguidade, tendo sido usado por Apolónio de Perge (262-180 a.C.) e Arquimedes (287-212 a.C.) nas suas investigações sobre as crónicas, recorrendo a coordenadas oblíquas. Hiparco (180-125 a.C.) e Ptolomeu (85-165) definiam a posição dos astros também graças a dois números, a altura acima do horizonte e o afastamento relativamente ao meridiano. No século XIV, Oresmo (1323-1382) utilizou os nomes de *latitudo* e *longitudo* para referir as coordenadas rectangulares.

O contributo dos fundadores da geometria analítica, como Descartes, Fermat e Roberval, consistiu essencialmente em associar curvas e equações.

#### 1. Referências Cartesianas

1.1 Em coordenadas cartesianas as posições dos pontos são definidas por duas rectas graduadas geralmente perpendiculares, os eixos de referência.

As graduações dos dois eixos podem ser diferentes.

A intersecção dos dois eixos define a *origem* do sistema de referência. Qualquer ponto  $M$  do plano é definido pelas suas duas coordenadas: a abcissa  $x = \overline{OH}$  e a ordenada  $y = \overline{OK}$ .

Escreve-se então  $M = (x, y)$ .

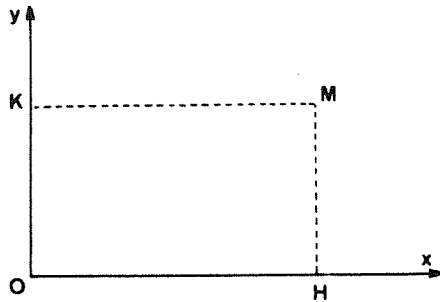


Figura 1

1.2 É frequente ter-se de mudar o sistema de referência, mas limitar-nos-emos aqui ao caso em que os novos eixos de referência são paralelos aos anteriores.

Sejam  $x_1$  e  $y_1$  as coordenadas de um ponto M relativamente à origem  $O_1$ , e  $x_2$  e  $y_2$  as coordenadas deste mesmo ponto relativamente a uma outra origem,  $O_2$ :

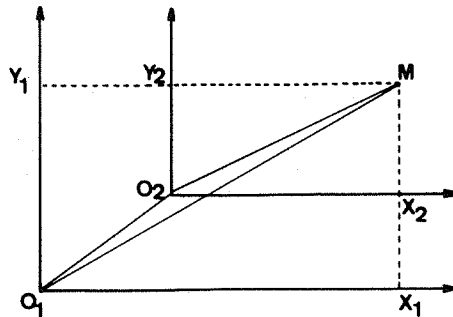


Figura 2

$$\text{Teremos } \vec{O_2M} = \vec{O_2O_1} + \vec{O_1M} = \vec{O_1M} - \vec{O_1O_2}$$

Se designarmos por a e b as coordenadas de  $O_2$  relativamente à origem  $O_1$ , poderemos escrever, a partir da igualdade anterior e após projecção sobre cada um dos eixos:

$$x_2 = x_1 - a, \quad y_2 = y_1 - b$$

## 2. Os elementos da imagem

2.1 Em modo gráfico, o visor de um microcomputador é constituído por pontos elementares designados por *pixels* (picture elements, em inglês).

Cada um destes pixels pode ser «pintado» ou não graças às instruções PLOT e PLOT OVER (ou UNPLOT). No caso do Spectrum, dispomos de uma resolução gráfica de 45056 pixels ( $256 \times 176$ ), sendo cada um deles definido pelas suas coordenadas x e y: teremos x compreendida entre 0 e 255, e y entre 0 e 175.

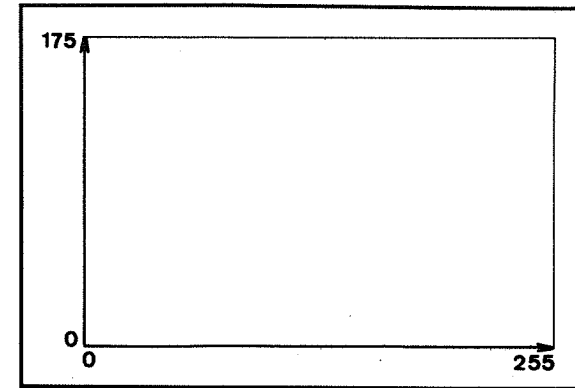


Figura 3

A origem das coordenadas encontra-se no canto inferior esquerdo (em certos computadores esta disposição é invertida, encontrando-se a origem no canto superior esquerdo).

2.2 Designaremos por espaço-visor o conjunto de pontos cujas coordenadas correspondem às de um pixel.

Não é evidentemente possível obter o traçado de um ponto cujas coordenadas sejam diferentes das de qualquer pixel: ao tentar imprimir um tal ponto o programa pára e envia ao utilizador uma mensagem de erro. Se não dispomos da instrução ON ERROR GO TO, teremos de utilizar uma instrução condicional do tipo IF  $x \geq 0$  AND  $x \leq 255$  AND  $y \geq 0$  AND  $y \leq 175$  THEN PLOT x,y, ou do tipo IF  $x < 0$  OR  $x > 255$  OR  $y < 0$  OR  $y > 175$  THEN GO TO... para evitar este tipo de problema.



### 3. Os métodos de desenho

Um desenho é sempre executado ponto por ponto, mas os métodos usados para tal são diversos.

3.1 Podem utilizar-se dispositivos periféricos: caneta óptica, etc.

A caneta óptica permite executar o desenho directamente no visor; em certos casos pode desenhar-se sobre uma superfície de trabalho quadriculada, horizontal, sendo o desenho reproduzido automaticamente no visor.

3.2 Na ausência destes periféricos ou no caso de desenhos demasiado complexos para poderem ser executados usando estes dispositivos, será necessário calcular as coordenadas de cada um dos pontos a traçar. Estes cálculos podem ser realizados previamente pelo utilizador, ou pela máquina comandada por um programa adequado. De qualquer modo, tratar-se-á de simplificar o desenho suprimindo certos pormenores, substituindo curvas por arcos de círculo ou segmentos de recta, etc.

### 4. Traçado aproximado e traçado real

Qualquer que seja o método usado para obter o traçado, este será sempre aproximado. De facto, as coordenadas são sempre números inteiros: a instrução PLOT  $x,y$  equivale portanto a uma PLOT INT  $x$ , INT  $y$  (designando INT a parte inteira de um número).

O traçado obtido será portanto ligeiramente diferente do traçado real, como se mostra no esboço seguinte:

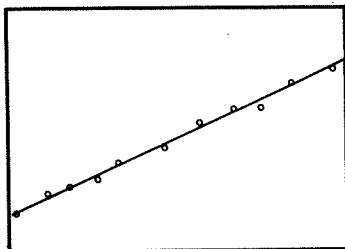


Figura 4

O efeito em «escala» é obviamente tanto menos óbvio quanto maior for a resolução da imagem.

Este efeito pode ser ligeiramente atenuado fazendo PLOT INT( $x+0.5$ ), INT ( $y+0.5$ ) em vez de PLOT  $x,y$ . Esta nova instrução permite com efeito escolher, em todos os casos, o pixel mais próximo do ponto real.

### 5. Centragem e mudança de escala

Quando devemos calcular as coordenadas de cada um dos pontos a traçar, acontece por vezes que as coordenadas assim calculadas correspondem a pontos fora do visor (ou espaço-visor). Seremos obrigados a efectuar uma nova centragem, e eventualmente, uma mudança de escala.

5.1 Para recentrar uma curva, substituiremos o ponto  $(x,y)$  pelo ponto  $(128 + x, 88 + y)$ , sendo as coordenadas 128 e 88 as correspondentes ao centro do visor.

Como se vê, a recentragem utiliza uma transformação geométrica designada por *translação*, que permite obter um desenho num local escolhido do visor (ver mais adiante, no capítulo 11).

5.2 Se as dimensões da curva que se pretende representar forem demasiado pequenas (ou excessivamente grandes, substituiremos o ponto  $(x,y)$  pelo ponto  $(k_1 x, k_2 y)$ , como veremos no capítulo 12. As constantes  $k_1$  e  $k_2$  serão obviamente escolhidas do modo mais indicado para cada caso.

5.3 Naturalmente, pode associar-se uma centragem a uma mudança de escala.

## CURVAS DEFINIDAS POR UMA EQUAÇÃO DA FORMA $y=f(x)$

### 1. Equação cartesiana de uma curva

1.1 Seja uma função numérica definida num dado intervalo. Consideremos que, para qualquer valor  $x$  desse intervalo,  $y=f(x)$ .

Se considerarmos um sistema de referência cartesiana, podemos representar  $(x,y)$  por um ponto:

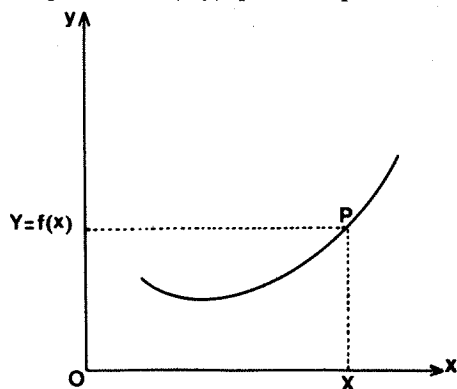


Figura 5

Obtemos assim uma representação gráfica da função  $f$ , representação que corresponde na maior parte dos casos a uma curva plana  $C$ .

A equação  $y=f(x)$  é chamada equação cartesiana da curva  $C$ .

*Exemplos:*

$y = x^2$  é a equação de uma parábola.

Para  $x$  compreendido entre  $-R$  e  $+R$ , a equação  $y = \sqrt{R^2 - x^2}$  é a equação de um semicírculo de raio  $R$  cujo centro coincide com a origem do sistema de referência.

Na equação  $y = f(x)$ , a coordenada  $y$  é uma função explícita da coordenada  $x$ . Mas pode acontecer que a equação de uma curva plana se apresente sob uma forma *implícita*: teremos então uma relação mais ou menos complexa entre  $x$  e  $y$ , por exemplo:

$$(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$$

1.2 É portanto errado pensar que uma única equação do tipo  $y = f(x)$  basta para descrever inteiramente uma curva.

Consideremos, por exemplo, um círculo de raio  $R$  e centro em  $0$ , origem do sistema de coordenadas. A equação deste círculo é  $x^2 + y^2 = R^2$  mas, se quisermos explicitá-la em função de  $x$ , teremos de escrever as duas equações seguintes:

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}$$

$$y = -\sqrt{R^2 - x^2}$$

Convencionalmente, dá-se a estas duas equações uma forma única do seguinte tipo:

$$y = \pm \sqrt{R^2 - x^2}$$

1.3 Uma equação implícita não é fácil de manejar; tentar-se-á portanto utilizar um outro tipo de representação, uma representação paramétrica (ver o capítulo 14) ou uma representação em coordenadas polares (ver o capítulo 16).

### 2. Traçado de uma curva

2.1 O traçado de uma curva é efectuado ponto por ponto,



exceptuando os círculos e segmentos de recta para os quais existem geralmente instruções específicas.

Para cada valor de  $x$  calcula-se  $y$  recorrendo à equação da curva, e em seguida marca-se o ponto correspondente no visor.

Isto obriga geralmente a perder algum tempo, em particular no caso das funções trigonométricas.

2.2 Em certos casos, pode ganhar-se algum tempo utilizando as simetrias que possam existir e que evitam a repetição de certos cálculos.

Os esboços seguintes exemplificam as simetrias habituais:

1) Simetria relativamente ao eixo dos XX:

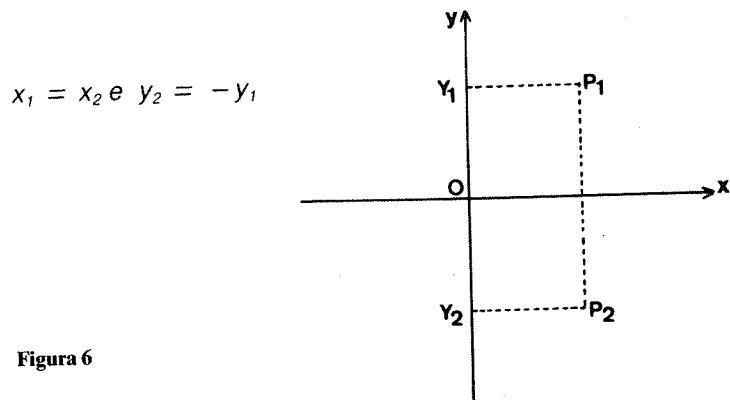


Figura 6

2) Simetria relativamente ao eixo dos YY:

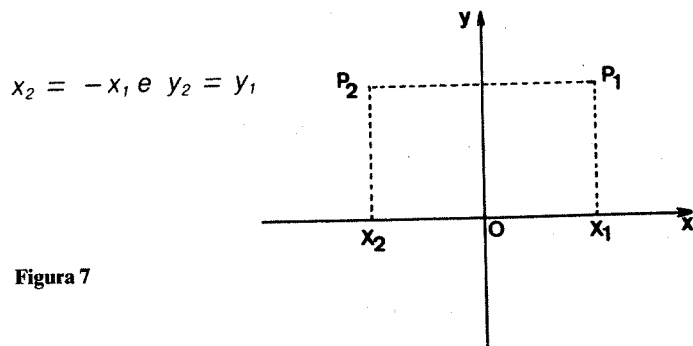


Figura 7

3) Simetria relativamente à origem:

$$x_2 = -x_1 \text{ e } y_2 = -y_1$$

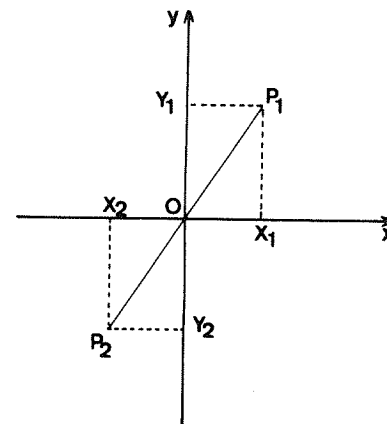


Figura 8

2.3 A fim de obter um traçado de aparência contínua, bastará escolher a variável  $X$  em função de um dado passo  $S$ , determinado empiricamente.

Como é natural, quanto menor for este passo, maior será o tempo usado nos cálculos.

Representemos, a título de exemplo, a função  $F$  definida para o intervalo:

$$-100 \leq x \leq 100$$

por:

$$f(x) = 30 \text{ sen } \frac{2 \pi x}{100}$$

Iremos utilizar o programa seguinte:

```

10 INPUT "Passo pretendido? ";
S
20 FOR X=-100 TO 100 STEP S
30 LET Y=30*SIN (2*PI*X/100)
40 PLOT 128+X,88+Y
50 NEXT X
60 PRINT AT 21,0;"S=";S

```

Os desenhos foram obtidos recorrendo a três passos diferentes:  $s=2$ ,  $s=1$  e  $s=0,5$ .

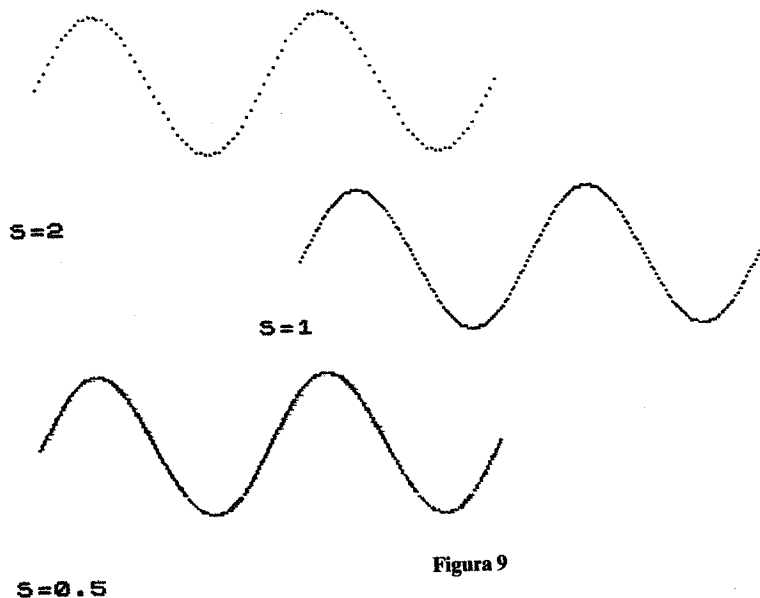


Figura 9

2.4 É igualmente possível substituir uma curva por uma linha poligonal: calculam-se as coordenadas de um certo número de pontos de curva, e ligam-se estes por segmentos de recta.

Este método, mais rápido do que o traçado ponto por ponto, pressupõe o conhecimento de que a curva a representar é contínua e definida para o intervalo escolhido.

### 3. Curvas clássicas

A história das matemáticas é rica em curvas variadas, muitas vezes bastante estéticas. Indicaremos algumas delas e daremos as suas definições geométricas.

Para construir cada uma das curvas apresentadas, utilizamos sempre que possível as simetrias existentes.

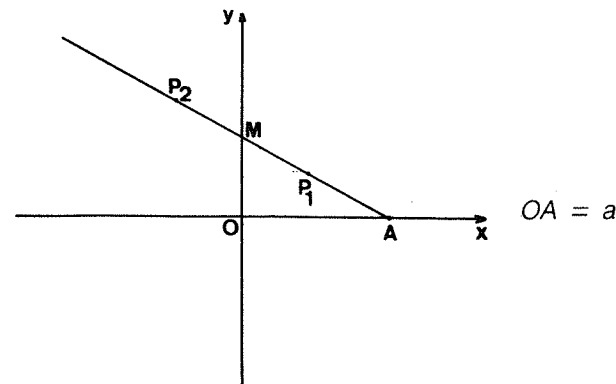
#### 3.1 A estrofóide recta

Estudada pela primeira vez por Roberval, esta curva tem a equação:

$$y = \pm x \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$$

com  $a > 0$  e  $|x| \leq a$ .

Figura 10



Coloquemos os pontos  $P_1$  e  $P_2$  sobre a recta  $AM$  de modo a que  $MP_1 = MP_2 = MO$ . Quando  $M$  descreve o eixo dos  $YY$ , estes dois pontos descrevem uma estrofóide recta.

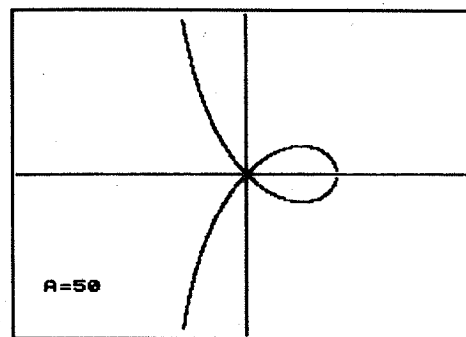


Figura 11

O programa é o seguinte:

```

10 INPUT "A? ";a
20 FOR x=-.95 TO .95 STEP .1
30 LET y=x*SQRT((a-x)/(a+x))
40 PLOT 100+x,88+y
50 PLOT 100+x,88-y
60 NEXT x
70 PRINT AT 21,0;"A=";a

```



### 3.2 A cissóide recta

Devida, segundo parece, ao matemático grego Diocles (século IV antes de Cristo), esta curva é definida para o intervalo  $0 \leq x < 2a$  e corresponde à equação:

$$y = \pm x \sqrt{\frac{x}{2a - x}}$$

Consideremos um círculo de raio  $a$ :

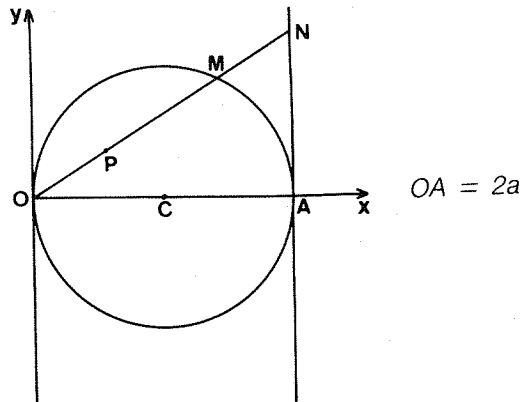


Figura 12

Façamos  $OP=MN$ ; o ponto  $P$  descreve uma cissóide:

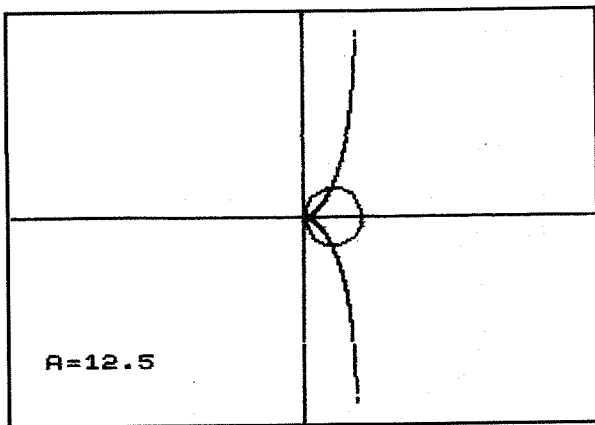


Figura 13

O programa é o seguinte:

```

10 INPUT "R? ";R
20 FOR X=0 TO 20 STEP .05
30 LET Y=2X*SQRT(X/(20-X))
40 PLOT 400+X,800+Y
50 PLOT 400+X,800-Y
60 NEXT X
70 PRINT "Final do tracado de curvas"
80 GOTO 10
90 PRINT "BT 21,0";"A=";R

```

### 3.3 A cúbica de Agnesi

Consideremos um círculo de raio  $a$ :

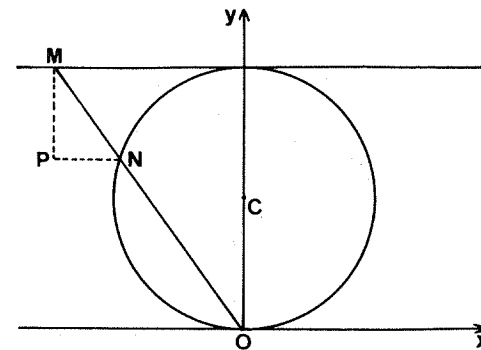


Figura 14

Associemos a qualquer ponto  $N$  do círculo um ponto  $P$  da forma indicada na figura; define-se assim uma curva de equação:

$$y = \frac{8a^3}{4a^2 + x^2}$$

Esta curva deve-se a Maria-Gaetana Agnesi (1718-1799):

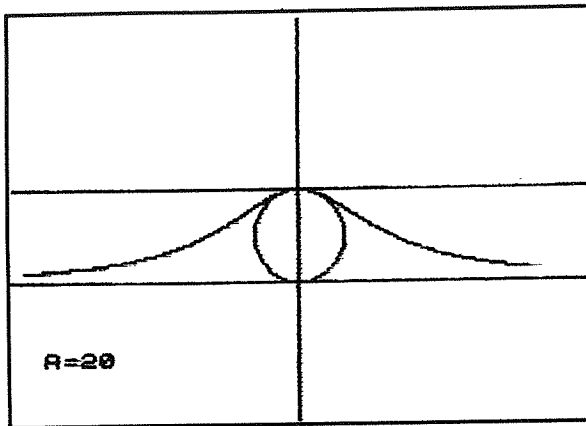


Figura 15

O programa é o seguinte:

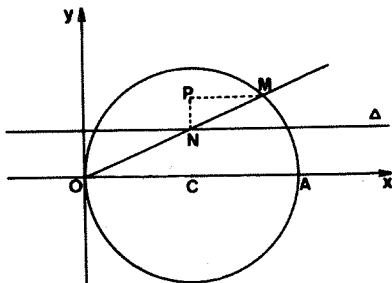
```

10 INPUT "A? ";a
20 FOR x=-120 TO 100
30 LET y=0.000000/(4.0000+x*x)
40 PLOT 120+x,00+y
50 NEXT x
60 REM Final do tracado da
   curva
70 CIRCLE 100,60+a,a: PLOT 0,6
80 DRAW 255,0: PLOT 0,60+a+a: DR
AW 255,0
90 PRINT AT 21,0;"A=";a

```

### 3.4 A cúbica «Serpentina»

Seja um círculo de raio  $a$ , de centro  $C$  situado no eixo  $Ox$ . Consideremos uma recta situada à distância  $h$  de  $Ox$ .



$$OA = 2a$$

Figura 16

O ponto  $P$  descreve como a figura indica, uma curva de equação:

$$y = \frac{2 ah x}{x^2 + h^2}$$

Esta curva foi estudada por De L'Hopital (1661-1704) e por Newton:

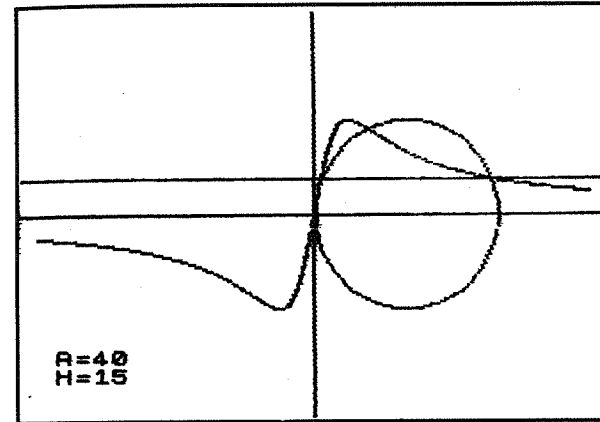


Figura 17

O programa é o seguinte:

```

10 INPUT "A? ";a
20 INPUT "H? ";h
30 LET z=.5*h#600:0
40 FOR x=z TO 120 STEP .05
50 LET y=0.000000/(x*x+h*h)
60 PLOT 120+x,00+y
70 PLOT 120-x,00-y
80 NEXT x
90 FOR x=0 TO z STEP .05
100 LET y=0.000000/(x*x+h*h)
110 PLOT 120+x,00+y
120 PLOT 120-x,00-y
130 NEXT x
140 REM Final do tracado da
   curva
150 PLOT 0,60: DRAW 255,0
200 PRINT AT 20,0;"A=";a: PRINT
   "H=";h

```



#### 4. Exercícios

4.1 Represente estas diversas curvas definidas pelas respectivas equações:

1) Parábola cúbica:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

2) Parábola divergente:

$$y = \pm \sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d}$$

3) Bivalve:

$$y = \frac{a^2 - x^2}{2a \pm \sqrt{a^2 - x^2}}$$

com  $-a \leq x \leq a$

4) Curva em sino:

$$y = e^{-x^2}$$

5) Curva do cão:

$$y = \frac{ax^2 - \text{Log } x}{4}$$

(a função Log é dada pela instrução LN).

4.2 Escolha um ponto  $P_1 = (x_1, y_1)$ . Definiremos um ponto  $P_2 (x_2, y_2)$  do seguinte modo:

- Fazemos  $x_2 = x_1 + 0,1$ ;
- Consideramos  $y_2 = y_1 + 0,1 f(x_1, y_1)$ , onde  $f$  é uma função qualquer das variáveis  $x_1$  e  $y_1$ .

Repetindo este procedimento, obteremos os pontos  $P_3, P_4, P_5, \dots, P_n$ , etc. (naturalmente, a função  $f$  será sempre a mesma).

Construa um programa que permita:

- 1) Escolher a função  $f$  a utilizar para a determinação dos pontos;
- 2) Construir a sequência dos pontos  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ .

#### RECTAS E SEGMENTOS

Neste capítulo estudaremos a maneira de traçar um segmento de recta ponto a ponto ou recorrendo à instrução basic DRAW.

##### 1. A instrução DRAW

1.1 Sejam  $P=(x,y)$  um ponto do espaço-visor e  $h$  e  $k$  dois números escolhidos de tal modo que se tenha  $0 \leq x + h \leq 255$  e  $0 \leq y + k \leq 175$ .

Nestas condições, o ponto  $M$  de coordenadas  $x+h$  e  $y+k$  pertence também ao espaço-visor:

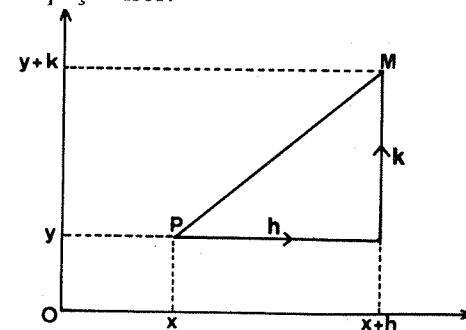


Figura 18

O traçado do segmento  $PM$  será então obtido recorrendo à linha seguinte:

PLOT X,Y: DRAW h,k

Se não se tem a certeza de que o segmento PM está inteiramente contido no visor, podem acrescentar-se as linhas seguintes:

PLOT X,Y

IF  $X+H \geq 0$  AND  $X+H \leq 255$  AND  $Y+K \geq 0$  AND  $Y+K \leq 175$  THEN DRAW H,K

1.2 Sejam agora  $A = (x_A, y_A)$  e  $B = (x_B, y_B)$  dois pontos do espaço-visor. Traçar-se-á o segmento AB graças à linha seguinte:

PLOT XA, YA: DRAW XB-XA, YB-YA

1.3 Podem suceder-se várias instruções DRAW: cada novo segmento terá então como origem a extremidade do precedente. Nestas condições:

PLOT 0,0: DRAW 50,50: DRAW 100,0:

DRAW 105,125

permitirá obter uma linha quebrada, como a da figura que se segue:

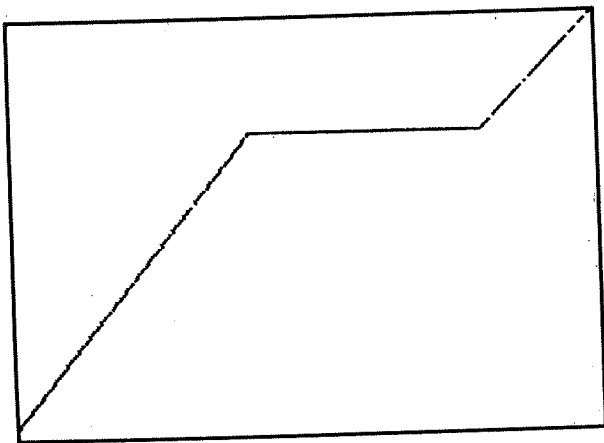


Figura 19

## 2. Quadrados e rectângulos

Necessitamos muitas vezes de traçar um quadrado ou rectângulo cujos lados sejam paralelos aos rebordos do visor. A instrução BOX não existe no Spectrum, pelo que apresentamos em seguida dois pequenos programas que permitem obter o resultado desejado.

2.1 Seja ABCD um rectângulo de dimensões  $I_1$  e  $I_2$ . A posição do rectângulo será determinada pela do canto inferior esquerdo:

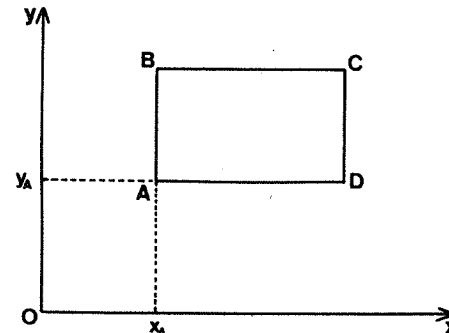


Figura 20

O programa a usar será o seguinte:

```
10 INPUT "Dimensões do rectangulo: " L1? " " L2? " "
20 INPUT "XA? " XA, "YA? " YA
30 PLOT XA,YA: DRAW L1,0: DRAW 0,L2: DRAW -(L1,0): DRAW 0,-L2
```

2.2 Tracemos agora um rectângulo de dimensões  $I_1$  e  $I_2$  cujo centro C tenha as coordenadas  $x_c$  e  $y_c$ :

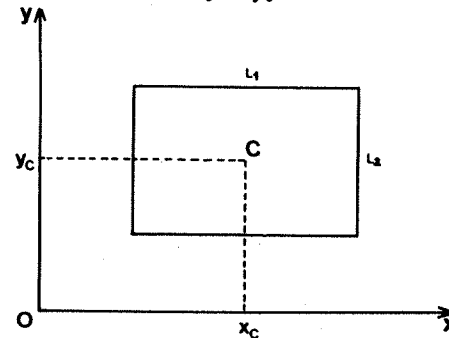


Figura III-3







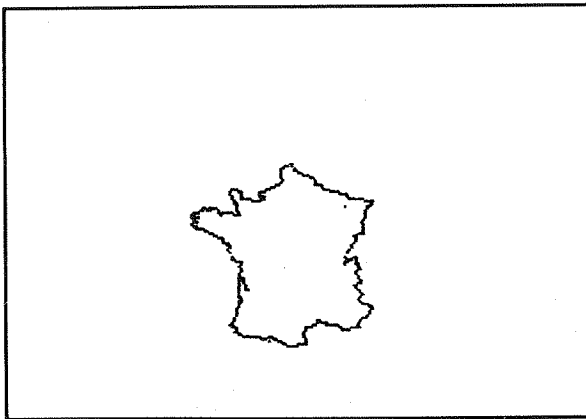


Figura 24

Convirá notar o uso de um factor de escala  $k$ , que permite obter dimensões diferentes para o mesmo mapa.

### 5. Equação cartesiana de uma recta

Seja  $\Delta$  uma recta. Se  $\Delta$  é paralela ao eixo  $Oy$ , a sua equação tem a forma

$$x = \text{constante.}$$

Se assim não for, a equação da recta  $\Delta$  terá a forma:

$$y = ax + b.$$

Se não for vertical, o programa que permite traçar a parte inscrita no visor será o seguinte:

```

10 INPUT "Indique a: " ; a
20 INPUT "Indique b: " ; b
30 FOR x=0 TO 255
40 LET y=a*x+b
50 IF y>=0 AND y<=175 THEN PLO
T x,y
60 NEXT x

```

Tomemos por exemplo  $a = 0,8$  e  $b = 20$ :

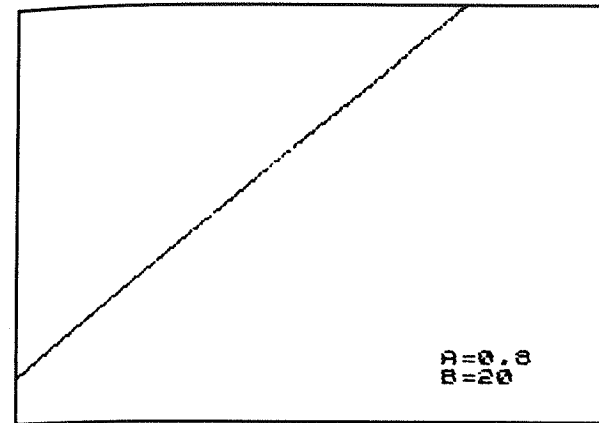


Figura 25

Recordemos que o número  $a$  é a tangente do ângulo  $\alpha$ , que mede a inclinação da recta  $\Delta$  relativamente ao eixo  $Ox$ .

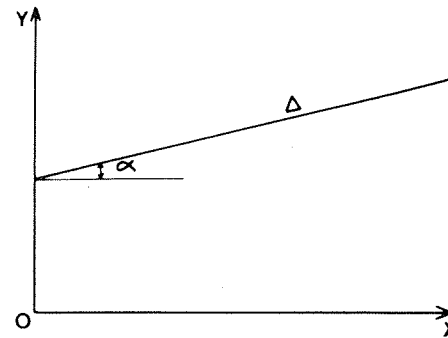


Figura 26

Pode portanto obter-se o traçado de uma recta não vertical escolhendo directamente o ângulo  $\alpha$ .

Por razões de comodidade,  $\alpha$  será expresso em graus, e convertido em seguida em radianos para uso do programa.

```

10 INPUT "Indique a inclinacao
da recta em graus: " ; i
15 LET a=TAN (i*PI/180)

```

```

20 INPUT "Indique B: " b
30 FOR x=0 TO 255
40 LET y=b*x+b
50 IF y>=0 AND y<=175 THEN PLO
T x,y
60 NEXT x

```

## 6. Representação paramétrica de um segmento

6.1 Seja AB o segmento a desenhar:

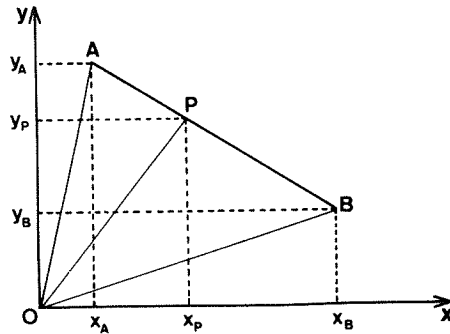


Figura 27

Para qualquer ponto P do segmento  $\overline{AB}$ , existe um número  $k$  compreendido entre 0 e 1 tal que  $\overrightarrow{AP} = k \overrightarrow{AB}$ .

Como  $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$ , obtém-se  $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + k \overrightarrow{AB}$ ,  
 donde, passando às coordenadas:

$$x_P = x_A + k (x_B - x_A)$$

e

$$y_P = y_A + k (y_B - y_A)$$

No programa que se segue, a linha 30 contém um passo  $S$  do qual depende a qualidade do traçado: em princípio,  $S = 0,005$  convém perfeitamente a um traçado contínuo.

```

10 INPUT "XA: ";x_A,"YA: ";y_A
20 INPUT "XB: ";x_B,"YB: ";y_B

```

```

30 INPUT "S: ";s
40 FOR k=0 TO 1 STEP s
50 LET x=x_A+k*(x_B-x_A)
60 LET y=y_A+k*(y_B-y_A)
70 PLOT x,y
80 NEXT k

```

6.2 Considerando um valor suficientemente grande para o passo  $S$ , pode obter-se um traçado a ponteados.

Utilizemos esta observação para obter curvas concêntricas, por exemplo elipses:

```

10 FOR t=0 TO 2*PI STEP .02
20 LET x=1000
30 LET y=0
40 LET x=1000+1000*COS t
50 LET y=1000+1000*SIN t
60 LET s=.1
70 FOR k=0 TO 1 STEP s
80 LET x=x_A+k*(x_B-x_A)
90 LET y=y_A+k*(y_B-y_A)
100 PLOT x,y
110 NEXT k
120 NEXT t

```

Este programa utiliza o do capítulo 9 para o traçado da elipse.

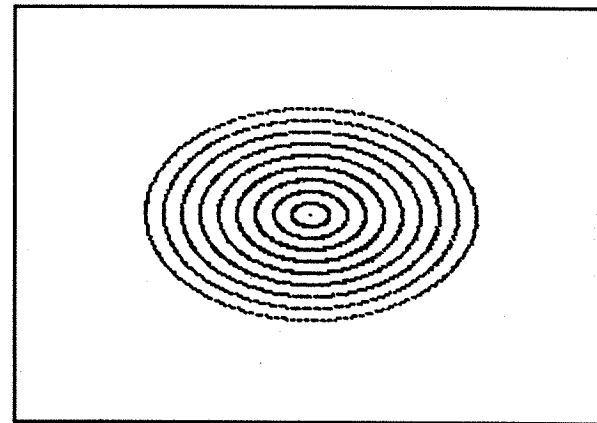


Figura 28

## 7. Exercícios

Construa os programas que permitem obter estes desenhos:

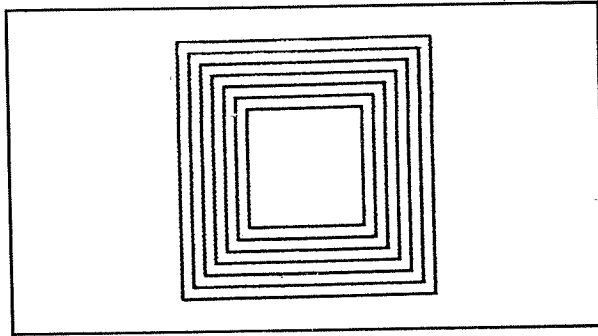


Figura 29

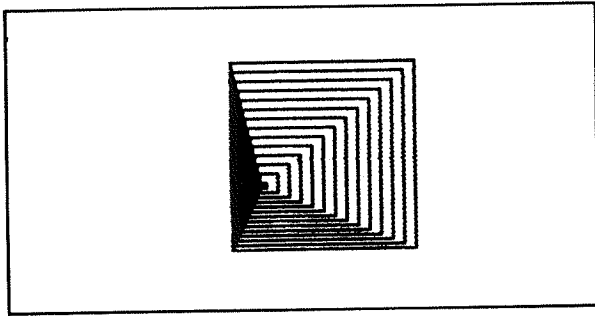


Figura 30

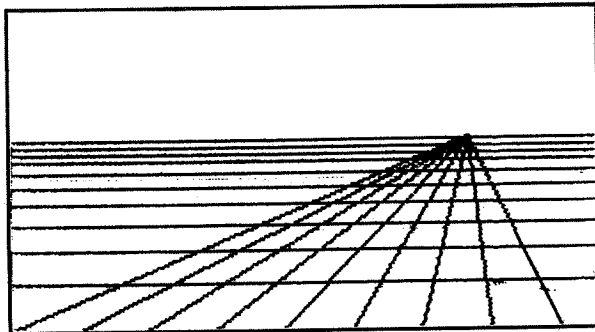


Figura 31

4

## PARALELAS E PERPENDICULARES

### 1. Divisão de um segmento

1.1 Sejam  $A = (x_A, y_A)$  e  $B = (x_B, y_B)$  dois pontos do espaço-visor. Dividamos o segmento  $AB$  em  $n$  partes iguais.

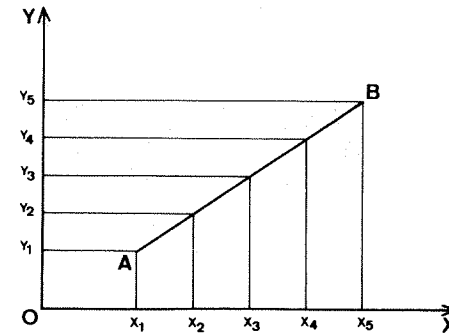


Figura 32

Para  $i$  compreendido entre 1 e  $n+1$ , definiremos as coordenadas  $x_i$  e  $y_i$  do ponto de subdivisão de ordem  $i$ , fazendo:

$$x_i = x_A + \frac{(i-1)}{n} (x_B - x_A)$$

e

$$y_i = y_A + \frac{(i-1)}{n} (y_B - y_A)$$

O programa correspondente é o seguinte:

```

10 INPUT "XA? "; xa, "YB? "; yb
20 INPUT "XB? "; xb, "YB? "; yb
30 INPUT "N? "; n
40 DIM x (n+1)
50 DIM y (n+1)
60 FOR i=1 TO n+1
70 LET x(i) = xa + (i-1) * (xb-xa) / n
80 LET y(i) = ya + (i-1) * (yb-ya) / n
90 NEXT i
100 FOR i=1 TO n+1
110 PLOT x(i), y(i)
120 NEXT i

```

Vejamos um exemplo gráfico:

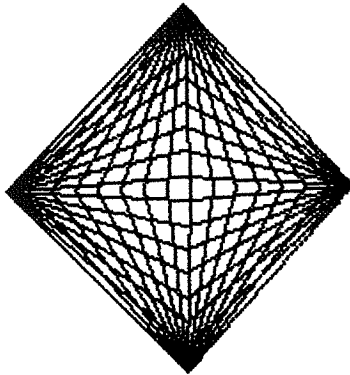


Figura 33

1.2 Para  $n=2$ , obtêm-se as coordenadas do ponto médio de AB:

$$x = \frac{x_A + x_B}{2}$$

e

$$y = \frac{y_A + y_B}{2}$$

## 2. Distância entre dois pontos

Seja  $d$  a distância entre os pontos  $P_1 = (x_1, y_1)$  e  $P_2 = (x_2, y_2)$ .

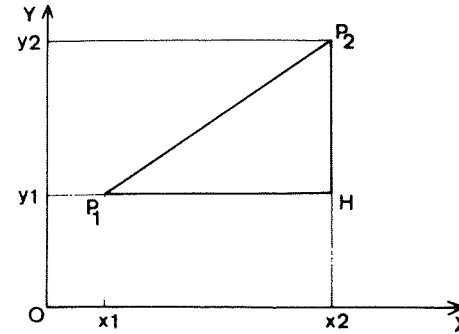


Figura 34

Como  $P_1P_2^2 = P_1H^2 + HP_2^2$ , obtém-se:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

## 3. Projectão ortogonal de um ponto sobre uma recta

3.1 Seja  $M$  um ponto do plano e  $D$  uma recta deste plano: a perpendicular a  $D$  passando por  $M$  encontra  $D$  em  $H$ . O ponto  $H$  é a projectão ortogonal de  $M$  sobre a recta  $D$ .

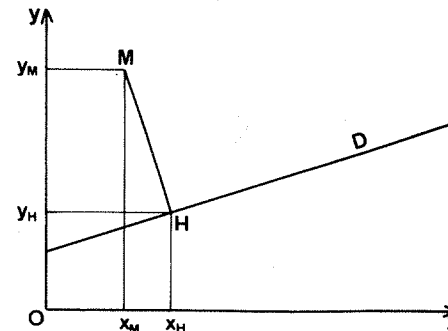


Figura 35



3.2 Se a recta D é vertical, a sua equação é da forma  $x = \text{constante} = c$ .

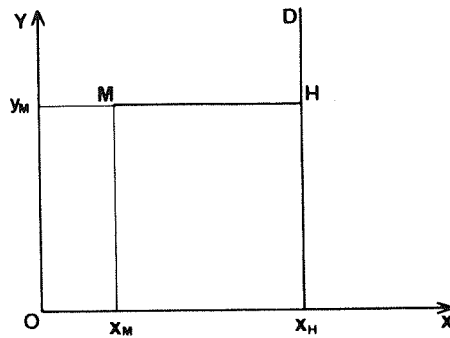


Figura 36

Teremos então:

$$x_H = c$$

e

$$y_H = y_M$$

3.3 Se D não é vertical, a sua equação é da forma  $y = ax + b$ . Teremos então:

$$x_H = \frac{ay_M + x_M - ab}{1 + a^2}$$

e

$$y_H = \frac{a^2 y_M + ax_M + b}{1 + a^2}$$

O programa correspondente é o seguinte:

```

10 INPUT "Coeficiente A? ";a
20 INPUT "B? ";b
30 FOR x=0 TO 255
40 LET y=a*x+b
50 IF 0<=y AND y<=175 THEN PLO
T X,y.

```

```

60 NEXT x
70 INPUT "Coordenadas de M: ";
x=" ";xM,"Y=" ";yM
80 LET xH=(a*yM+xM-a*b)/(1+a*a)
90 LET yH=(a*a*yM+a*xM+b)/(1+a
*a)
100 PLOT xM,yM: DRAW xH-xM,yH-y
M
110 PRINT AT 10,20;"A=";a;AT 10
,20;"B=";b;AT 20,10;"xM=";xM;AT
21,10;"yM=";yM

```

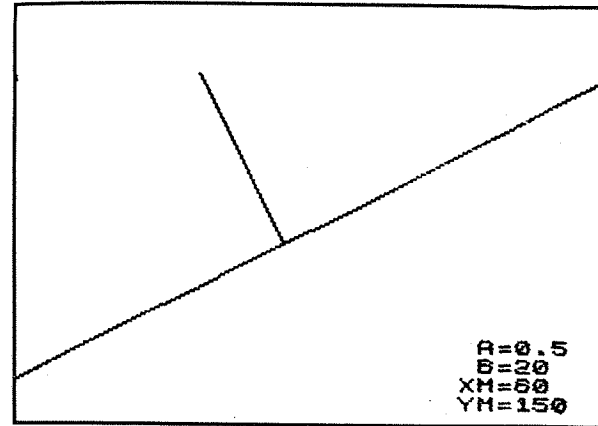


Figura 37

#### 4. Distância de um ponto a uma recta

4.1 Seja D uma recta vertical: a equação da recta tem a forma  $x = x_0$ , sendo  $x_0$  uma constante qualquer.

Seja  $M = (x_M, y_M)$  um ponto do plano e  $H = (x_H, y_H)$  a sua projecção ortogonal sobre a recta D.

Por definição, a distância  $d$  entre o ponto M e a recta D é igual à distância entre os pontos M e H.

É fácil ver que  $d = |x_0 - x_M|$ .

4.2 Suponhamos agora que a recta D é horizontal ou oblíqua.

A sua equação é da forma  $y = ax + b$ .

A distância  $d$  entre o ponto M e a recta D é dada por

$$d = \sqrt{(x_M - x_H)^2 + (y_M - y_H)^2}$$

De acordo com o que se disse no parágrafo 3.2, tiramos da expressão anterior o seguinte:

$$d = \frac{|y_M - (ax_M + b)|}{\sqrt{1 + a^2}}$$

```

10 INPUT "A? ";a
20 INPUT "B? ";b
30 FOR X=0 TO 255
40 LET Y=a*X+b
50 IF 0<=Y AND Y<=175 THEN PLO
T X,Y
60 NEXT X
70 INPUT "Coordenadas de M:","
X= ";xm,"Y= ";ym
80 LET xh=(a*ym+xm-a*b)/(1+a*a
)
90 LET yh=(a*a*ym+a*xm+b)/(1+a
*a)
100 PLOT xm,ym: DRAW xh-xm,yh-y
m
110 LET d=ABS (ym-(a*xm+b))/SQR
(1+a*a)
120 PRINT AT 10,20;"A=";a;AT 10
130;"B=";b;AT 20,10;"XM=";xm;AT
140,10;"YM=";ym
150 PRINT AT 1,20;"D=";d

```

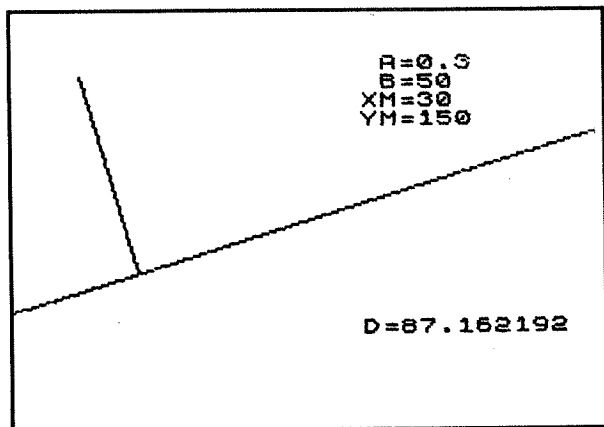


Figura 38

## 5. Paralelas e perpendiculares

5.1 Seja  $y = ax + b$  a equação de uma recta D oblíqua ou horizontal. Recordemos dois resultados:

- uma paralela a D tem a equação  $y = ax + b'$
- para a diferente de zero, uma perpendicular a D tem a equação:

$$y = -\frac{x}{a} + b'$$

5.2 Tracemos pelo ponto  $M = (x_M, y_M)$  uma paralela à recta D: esta paralela a D terá a equação:

$$y = a(x - x_M) + y_M$$

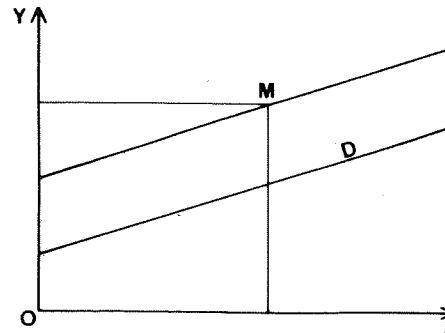


Figura 39

O programa correspondente é o seguinte:

```

10 INPUT "A? ";a
20 INPUT "B? ";b
30 FOR X=0 TO 255
40 LET Y=a*X+b
50 IF 0<=Y AND Y<=175 THEN PLO
T X,Y
60 NEXT X
70 INPUT "Coordenadas de M:","
X= ";xm,"Y= ";ym

```

```

100 FOR x=0 TO 255
110 LET y=a*(x-xm)+ym
120 IF 0<=y AND y<=175 THEN PLO
T x,y
130 NEXT x
140 PRINT AT 10,20;"a=";a;AT 10,
20;"b=";b;AT 20,10;"xm=";xm;AT
31,10;"ym=";ym

```

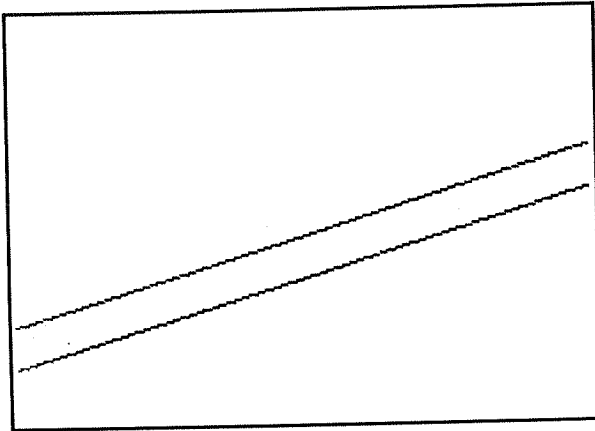


Figura 40

5.3 Tracemos em seguida, por um ponto  $M = (x_M, y_M)$  uma perpendicular à recta  $D$ . Para a diferente de zero, esta perpendicular terá por equação:

$$y = \frac{x_M - x}{a} + y_M$$

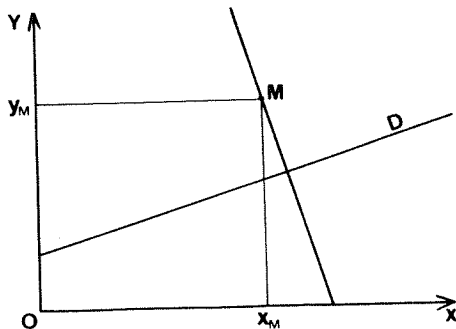


Figura 41

O programa é o seguinte:

```

10 INPUT "a? ";a
20 INPUT "b? ";b
30 FOR x=0 TO 255
40 LET y=a*x+b
50 IF 0<=y AND y<=175 THEN PLO
T x,y
60 NEXT x
70 INPUT "Coordenadas de M ";
x="";xm;"y=";ym
80 FOR x=0 TO 255
90 LET y=(xm-x)/a+ym
100 IF 0<=y AND y<=175 THEN PLO
T x,y
110 NEXT x
120 PRINT AT 10,20;"a=";a;AT 10,
20;"b=";b;AT 20,10;"xm=";xm;AT
31,10;"ym=";ym

```

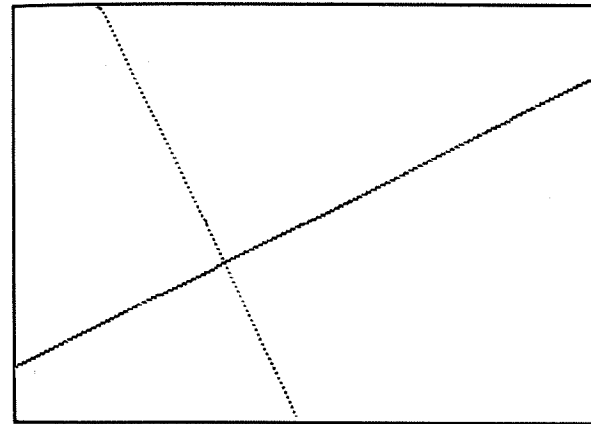


Figura 42

## 6. Linhas a ponteeado ou tracejado

6.1 Seja  $\Delta$  uma recta do plano cuja equação é  $y = ax + b$  ( $\Delta$  é portanto uma horizontal ou uma oblíqua).

Para desenhar  $\Delta$  em ponteeado ou tracejado, definiremos uma cadeia de caracteres composta unicamente por zeros e uns; esta cadeia constitui um «padrão». «Lendo» esta cadeia, marcaremos um ponto quando encontramos o caracter «1»; se encontramos um «0» não marcamos nada.

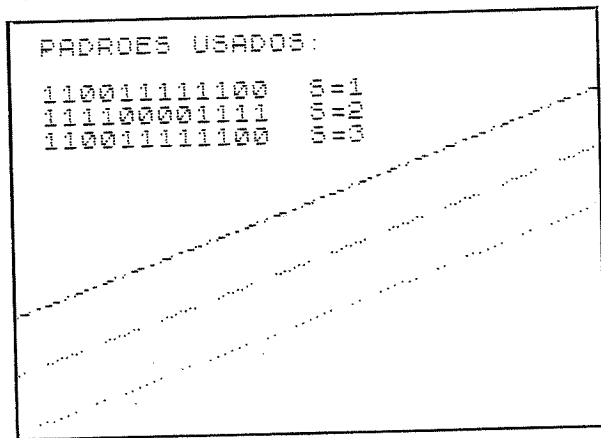
O programa é o seguinte:

```

5 PRINT AT 1,2)"PADRÕES USADO
S:"
10 INPUT "A? " )a
20 INPUT "B? " )b
30 LET c=0
40 INPUT "Indique pedreiro: ",##
50 INPUT "Indique pedreiro: " )s
60 LET L=LEN ##
70 FOR x=0 TO 255 STEP 5
80 LET y=a*x+b
90 IF y<0 AND y>175 THEN PLOT
x,y
100 LET r=c-1:INT (c/L)
110 IF ##(r+1)="1" THEN PLOT x,
y
120 LET c=c+1
130 NEXT x
140 PRINT AT 2+s,2)##;" S=")s
150 GO TO 10

```

6.2 A título de exemplo, eis as rectas obtidas para diferentes «padrões»:



## 7. Exercícios

7.1 Trace as três medianas e as três alturas de um triângulo.

7.2 Sejam  $P_1 = (x_1, y_1)$  e  $P_2 = (x_2, y_2)$  dois pontos do

espaço-visor. Verifique que a mediatriz do segmento  $P_1P_2$  tem a equação:

$$y = \frac{x_1 - x_2}{\alpha} + y_1;$$

com

$$x_i = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y_i = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

e

$$\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Trace a mediatriz de  $P_1P_2$ .

7.3 Seja ABC um triângulo. Verifique que a bissetriz do ângulo A passa pelo ponto cujas coordenadas são:

$$x = \frac{bx_B + cx_C}{b + c}$$

$$y = \frac{by_B + cy_C}{b + c}$$

com  $b = AC$  e  $c = AB$ .

Trace esta bissetriz.

7.4 Seja P um ponto do espaço-visor e H a sua projecção ortogonal sobre uma recta  $\Delta$ . Desenhe esta recta, e em seguida o segmento MH, a ponteadado.

7.5 Adapte o programa do parágrafo 6 para traçar verticais a ponteadado.



Qualquer que seja o valor deste ângulo  $\alpha$ , teremos  $\overline{AH} = L \cos \alpha$  e  $\overline{BH} = L \sin \alpha$ .

As coordenadas de B serão portanto:

$$x + L \cos \alpha$$

e

$$y + L \sin \alpha$$

Para traçar AB, poderemos portanto utilizar uma qualquer das seqüências das instruções apresentadas em seguida:

1) Com a instrução DRAW:

```

10 INPUT "X?" : X
20 INPUT "Y?" : Y
30 INPUT "L?" : L
40 INPUT "Inclinacao (em graus"
): a
50 LET a=a*PI/180
60 PLOT X,Y: DRAW L#COS a,L#SI
N a

```

2) Para um traçado ponto a ponto:

```

10 INPUT "X?" : X
20 INPUT "Y?" : Y
30 INPUT "L?" : L
40 INPUT "Inclinacao (em graus"
): a
50 LET a=a*PI/180
60 FOR J=0 TO L
70 LET U=X+J#COS a
80 LET V=Y+J#SIN a
90 PLOT U,V
100 NEXT J

```

2. Uma ardósia mágica

Tradicionalmente, chama-se ardósia mágica a um programa que permite desenhar e apagar traçados carregando simplesmente em algumas teclas.

Para «fabricar» a nossa ardósia mágica, utilizaremos o método descrito no parágrafo 1.

5

## POLÍGONOS REGULARES E SEMI-REGULARES

É possível traçar um segmento de recta tendo em conta a sua inclinação. Neste capítulo, desenvolveremos algumas aplicações deste método.

### 1. Princípio do traçado

Pretende traçar-se um segmento AB, de comprimento 1, a partir da origem A = (x,y) e fazendo um ângulo  $\alpha$  com a direcção horizontal tomada como referência.

O ângulo  $\alpha$  será medido, em graus, positiva ou negativamente conforme o seu sentido.

Calculemos as coordenadas de B em função de x, de y, de L e de  $\alpha$  :

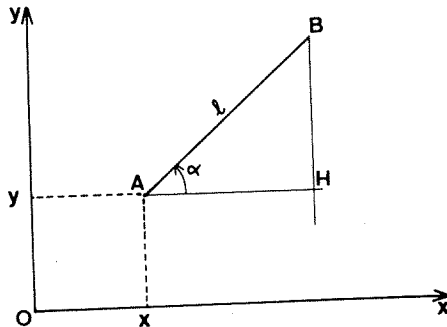


Figura 43

Depois de escolhida a origem, o comprimento e a inclinação de um primeiro segmento, traçaremos o segundo, o terceiro, etc.

Depois de traçar cada um dos segmentos, podemos escolher entre quatro opções:

- Opção 1: a origem do novo segmento é a extremidade do anterior;
- Opção 2: escolhe-se uma outra origem, diferente da extremidade do segmento anterior;
- Opção 3: apagar o último segmento traçado;
- Opção 4: limpar o visor.

Conforme a opção escolhida, carrega-se na tecla com o número correspondente.

```

10 INPUT "Coordenadas do ponto
inicial: ", "X? "; X, "Y? "; Y
20 INPUT "Inclinacao (em graus
): "; a
30 LET a = a * PI / 180
40 INPUT "Deslocamento: "; L
50 LET h = L * COS a
60 LET k = L * SIN a
70 IF X + h < 0 OR X + h > 255 OR k + y <
0 OR k + y > 175 THEN GO TO 40
80 PLOT X, Y: DRAW h, k
90 LET U = X
100 LET V = Y
110 LET X = X + h
120 LET Y = Y + k
130 IF INKEY# = "1" THEN GO TO 20
140 IF INKEY# = "2" THEN GO TO 10
150 IF INKEY# = "3" THEN GO SUB 1
60
160 IF INKEY# = "4" THEN CLS
170 GO TO 130
180 PLOT OVER 1; U, V: DRAW OVER
1; h, k
190 LET X = U
200 LET Y = V
210 RETURN

```

Um exemplo de execução:

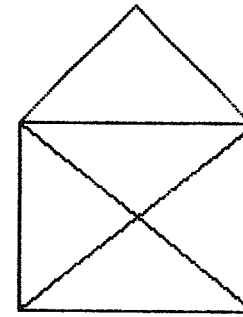


Figura 44

### 3. Traçado de uma linha contínua

3.1 Seja AB o último segmento traçado, e seja BC o seguinte.

Vamos tentar definir as características de BC a partir das de AB; estas últimas serão portanto modificadas graças a parâmetros cujo valor terá sido escolhido previamente.

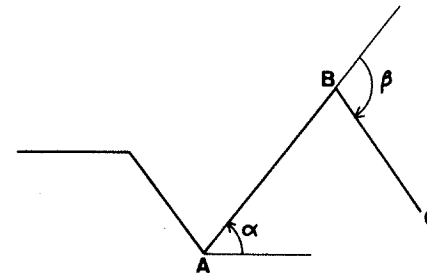


Figura 45

O ângulo  $\alpha$  é modificado de um valor  $\beta$  positivo ou negativo conforme se quiser rodar para a esquerda ou para a direita. A inclinação de BC será portanto  $\alpha + \beta$  ( $\alpha$  e  $\beta$  são dados em graus).

O comprimento L será modificado de um valor  $e$  positivo ou negativo: teremos portanto  $BC = L + e$ .

O número de segmentos a desenhar será igual a  $n$ .

### 3.2 O programa

Neste programa os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  serão designados respectivamente pelas letras A e B. Por razões de comodidade, estes ângulos serão dados em graus, e depois convertidos em radianos.

```
10 INPUT "Numero de segmentos: "; n
20 INPUT "Coordenadas do ponto inicial: "; "X? "; X, "Y? "; Y
30 INPUT "Comprimento do 1o segmento: "; L
40 INPUT "Alteracao do comprimento (0 ou outro numero): "; e
50 INPUT "Direccao do 1o deslocamento (em graus): "; a
60 LET a1=a*PI/180
70 INPUT "Alteracao deste angulo (em graus) ou outro numero: "; b
80 LET b1=b*PI/180
90 FOR i=1 TO n
100 PLOT X,Y: DRAW (X-COS a1,L*E
IN a1
110 LET X=X+L*COS a1
120 LET Y=Y+L*SIN a1
130 LET a1=a1+b1
140 LET L=L+e
150 NEXT i
160 PRINT AT 18,0;"N=";n;"L=";L;"A=";a;"B=";b
```

Vejamos alguns exemplos de desenhos obtidos usando este programa:

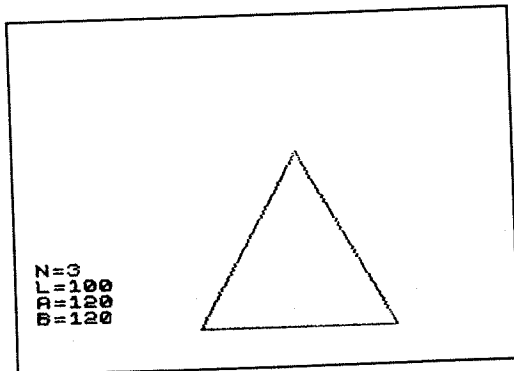


Figura 46

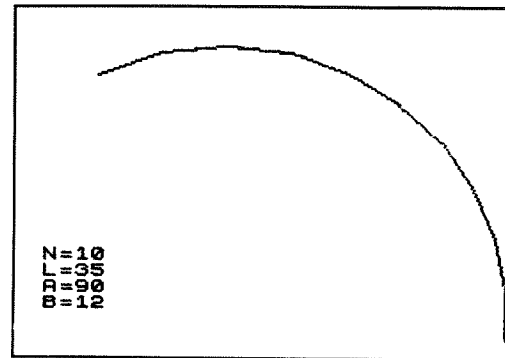


Figura 47

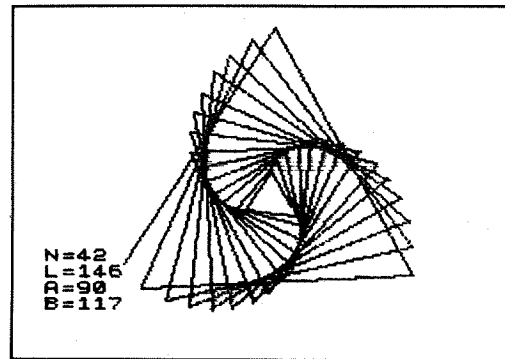


Figura 48

## 4. Traçado de um polígono

Interessam-nos particularmente aqui os polígonos regulares. Existem outros métodos, alguns dos quais serão evocados mais adiante, mas a vantagem do aqui é exposto consiste em permitir a escolha da inclinação do polígono relativamente ao rebordo do visor.

### 4.1 Polígonos regulares convexos

Seja  $n$  o número de lados do polígono; deveremos ter em  $n \geq 3$ . Todos os lados terão o mesmo comprimento  $L$ .

Para adaptar o programa do parágrafo anterior, basta calcular o ângulo  $\beta$  (o cálculo será feito em radianos).

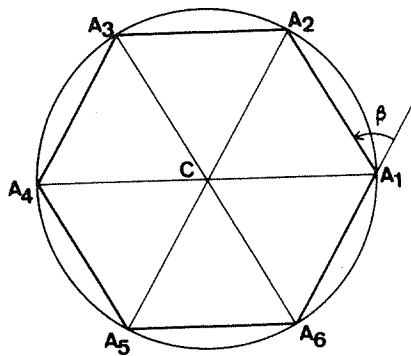


Figura 49

$$\widehat{A_1CA_2} = \widehat{A_1CA_3} = \frac{2\pi}{n}$$

$$\beta = \pi - \widehat{A_1A_2A_3} = \pi - \left( \pi - \frac{2\pi}{n} \right) = \frac{2\pi}{n}$$

O programa correspondente é o seguinte:

```

10 INPUT "Numero de lados:";N
20 INPUT "Coordenadas do prime
iro vertice: X? ";X;" Y? ";Y
30 INPUT "Comprimento do lado:
";L
40 INPUT "Inclinacao do primei
ro lado (em graus): ";a
50 LET b:=a*PI/180
60 LET b:=2*PI/N
70 FOR i=1 TO N
80 PLOT X,Y: DRAW L*COS b,L*SI
N a
90 LET X=X+L*COS b
100 LET Y=Y+L*SI
110 LET a=a+b
120 NEXT i
130 PRINT AT 20,0;"N=";N

```

A título de exemplo, apresentamos em seguida um pentágonos e um heptágonos regulares.

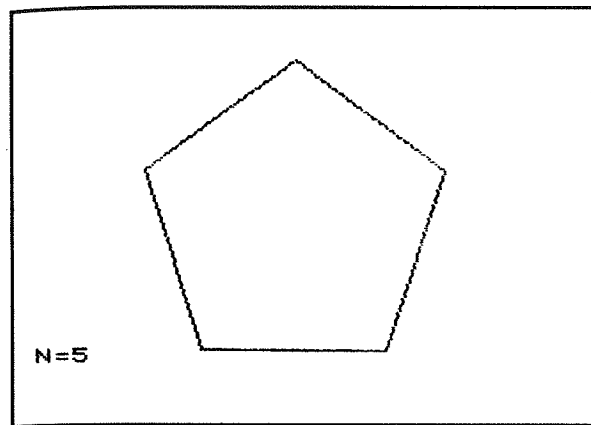


Figura 50

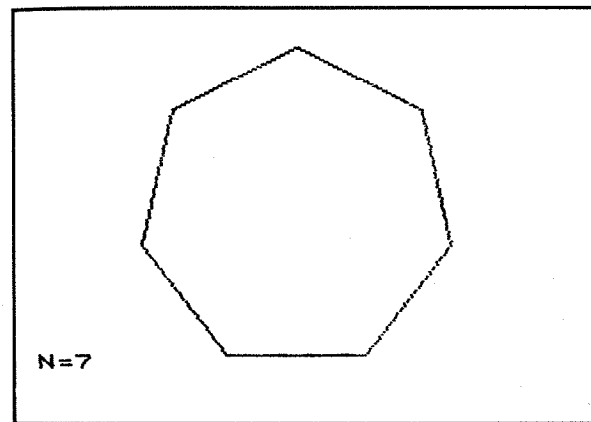


Figura 51

#### 4.2 Polígonos regulares em estrela

Consideremos  $n$  pontos equidistantes sobre um círculo: estes  $n$  pontos determinarão  $n$  arcos de círculo de medida igual a  $2\pi/n$  radianos cada.

Liguemos estes pontos de tal modo que  $A_1$  seja ligado ao ponto  $A_{1+p}$ , este ao ponto  $A_{1+2p}$ , etc.

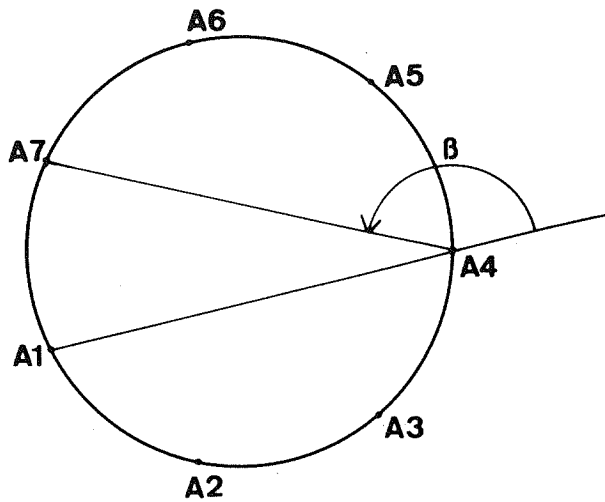


Figura 52 — Neste desenho  $n=8$ ,  $p=3$  e  $k=2$

Depois de traçado o segmento  $A_1A_{1+p}$ , será necessário modificar a sua inclinação de um ângulo  $\beta$  para obter a inclinação de  $A_{1+p}A_{1+2p}$ .

Calculemos este ângulo. O ângulo  $\widehat{A_1A_{1+p}A_{1+2p}}$  intercepta um arco cuja medida é  $k$  vezes  $2\pi/n$  (a relação entre  $k$  e  $p$  não nos interessa aqui).

$$\text{Obtemos portanto } \widehat{A_{1+2p}A_{1+p}A_1} = \frac{2k\pi}{n} \quad /a = \frac{k\pi}{n}.$$

Nestas condições,

$$\beta = \pi - \frac{k\pi}{n} = \pi \left(1 - \frac{k}{n}\right)$$

com  $k$  inteiro, compreendido entre 1 e  $n-1$ .

Conforme o valor escolhido para  $k$ , teremos resultados diferentes.

Figura 53

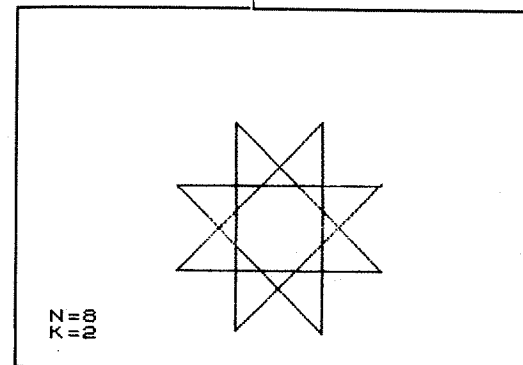
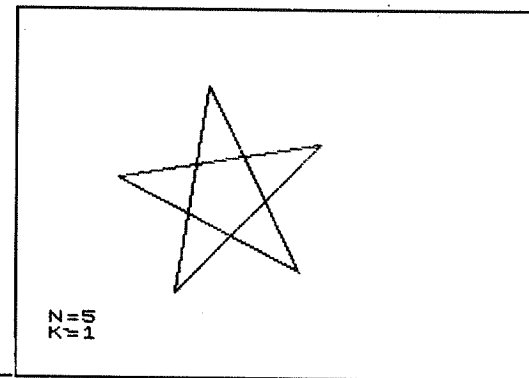
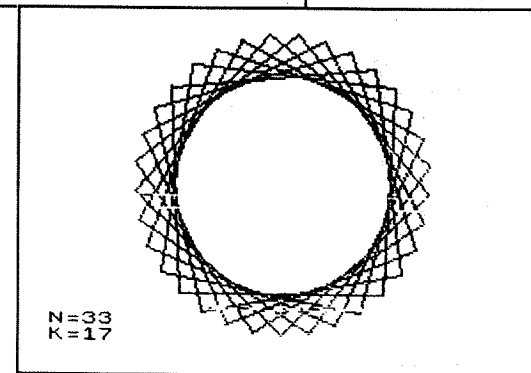


Figura 54

Figura 55





O programa é o seguinte:

```

10 INPUT "Numero de lados: " ; N
15 INPUT "Inteiro entre 1 e N-1: " ; K
20 INPUT "Coordenadas do primeiro vertice: X? " ; X ; "Y? " ; Y
30 INPUT "Comprimento do lado: " ; L
40 INPUT "Inclinacao do primeiro lado (em graus): " ; a
50 LET a=a*PI/180
60 LET b=PI*(1-K/N)
70 FOR i=1 TO N
80 PLOT X,Y: DRAW L*COS a,L*SIN a
90 LET X=X+L*COS a
100 LET Y=Y+L*SIN a
110 LET a=a+b
120 NEXT i
130 PRINT AT 10,0;"N=";N
170 PRINT AT 20,0;"K=";K

```

### 4.3 Polígonos pseudo-regulares

Num polígono deste tipo, todos os lados têm o mesmo comprimento mas os ângulos não são todos iguais.

Existem bastantes formas diferentes de obter este tipo de polígono.

Limitar-nos-emos ao caso seguinte: roda-se de um ângulo  $-\beta$ , com  $\beta = 2\pi/n$ , depois de ter desenhado um lado ímpar, e de um ângulo  $2\beta$  quando se acaba de desenharmos um lado par. O programa é o seguinte:

```

10 INPUT "Abcissa do primeiro vertice: " ; X
20 INPUT "Ordenada do primeiro vertice: " ; Y
30 INPUT "Indique um valor inteiro: " ; N
40 INPUT "Comprimento do lado: " ; L
50 INPUT "Direccao inicial (em graus): " ; a
60 LET a=a*PI/180
70 LET b=2*PI/N
80 FOR i=1 TO 2*N
90 PLOT X,Y

```

```

100 DRAW L*COS a,L*SIN a
110 LET X=X+L*COS a
120 LET Y=Y+L*SIN a
130 IF i/2<>INT (i/2) THEN LET a=a-b
140 IF i/2=INT (i/2) THEN LET a=a+b
150 NEXT i
160 PRINT AT 10,0;"N=";N

```

Vejamos alguns dos polígonos que poderemos obter:

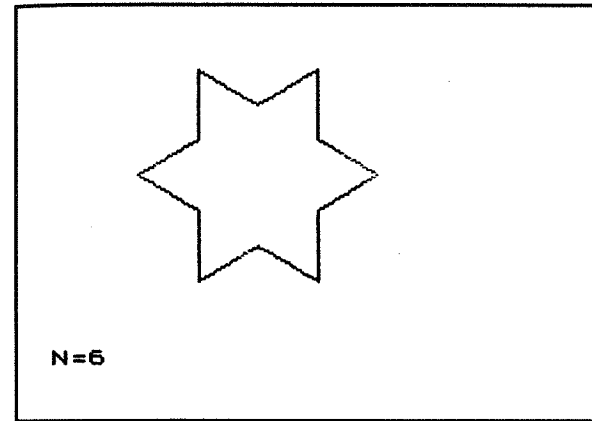


Figura 56

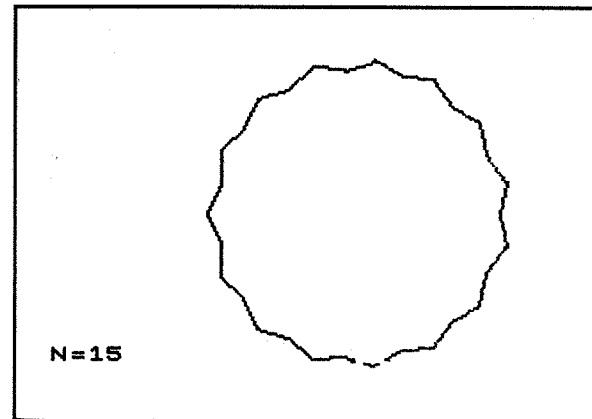


Figura 57

## 5. Arcos de círculo

5.1 Seja  $\widehat{AB}$  um arco de círculo de raio  $R$ , de medida  $\alpha$  (em radianos).

Substituamos este arco por  $n$  cordas com o mesmo comprimento  $L$ :

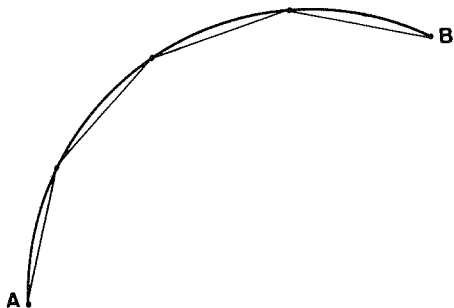


Figura 58

Teremos então  $nL = R \alpha$ , de onde:

$$n = \alpha \frac{R}{L}$$

Sejam agora duas cordas consecutivas: calculemos a mudança de direcção  $\beta$  que permite passar de uma à outra:

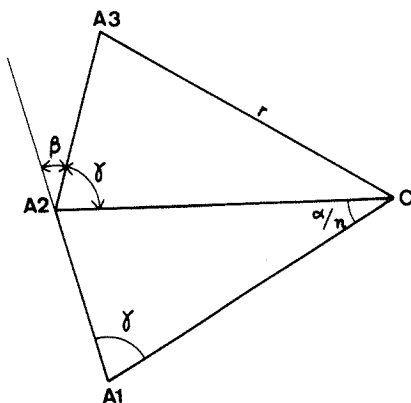


Figura 59

O ângulo  $\widehat{A_1CA_2}$  é igual a  $\alpha/n$ . Teremos:

$$\gamma = \left( \pi - \frac{\alpha}{n} \right) / 2$$

de onde

$$\beta = \frac{\alpha}{n}$$

De acordo com o que se disse

$$n = \alpha \frac{R}{L}$$

e portanto

$$\beta = \frac{L}{R}$$

5.2 Utilizemos estes resultados para traçar um arco de círculo ponto por ponto. Deveremos escolher previamente:

- A origem  $(x,y)$  do arco;
- O seu raio  $R$  e a sua medida  $m$  que será expressa em graus;
- A direcção inicial (que corresponde à escolha da tangente em  $A$  ao arco de círculo).

Será igualmente necessário definir se se deseja um traçado para a direita da tangente ou para a esquerda.

O programa é o seguinte:

```

10 INPUT "Arco para a direita
ou esquerda?" ; r#
20 IF r#="d" THEN LET s=-1
30 IF r#="e" THEN LET s=1
40 IF r#<>"d" AND r#<>"e" THEN
GO TO 10
50 INPUT "Raio: "; r
60 INPUT "Medida do arco (em g
raus): "; m
70 INPUT "Coordenadas de origem
m: "; x=" "; y=" "; g
80 INPUT "Direcção inicial (em
graus): "; a
90 LET a=a*PI/180

```

```

100 LET m=m*PI/180
110 LET l=1
120 LET n=INT (.5+r*m/l)
130 FOR i=1 TO n
140 PLOT X,Y
150 LET X=X+l*COS m
160 LET Y=Y+l*SIN m
170 LET m=m+l/l
180 NEXT i

```

A escolha de  $L = 1$  permite obter um traçado contínuo.

### PROGRAMAÇÃO DE UM TRAÇADO

Neste capítulo preocupar-nos-emos com as linhas compostas por segmentos de recta e, eventualmente, por arcos de círculo.

Antes de passar à execução do desenho, ser-nos-á necessário definir uma *descrição* da linha a traçar. As características reveladas por esta descrição serão memorizadas no computador de diferentes formas, graças a declarações DATA ou a cadeias de caracteres.

#### 1. Princípios

Comecemos por explicar o método usado no caso de uma linha poligonal contínua, fechada ou não.

Vamos supor que esta linha pode ser desenhada de uma só vez, sem necessidade de levantar o «lápiz» do papel e sem ter de redesenhar qualquer das suas partes (excepto certos pontos discretos).

Seja  $L$  uma linha nestas condições:

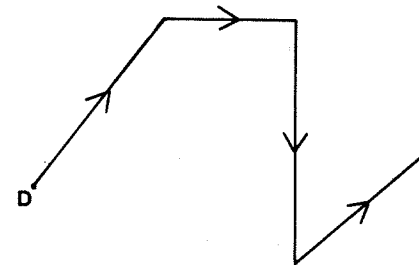


Figura 60

Escolheremos um ponto de partida D e um sentido de percurso dessa linha.

A linha L será então caracterizada essencialmente por três tipos de parâmetros:

- O comprimento dos diferentes segmentos que a compõem;
- As mudanças de direcção que intervêm nas extremidades desses segmentos;
- Finalmente, a direcção escolhida para traçar o primeiro segmento e as coordenadas do ponto de partida escolhido.

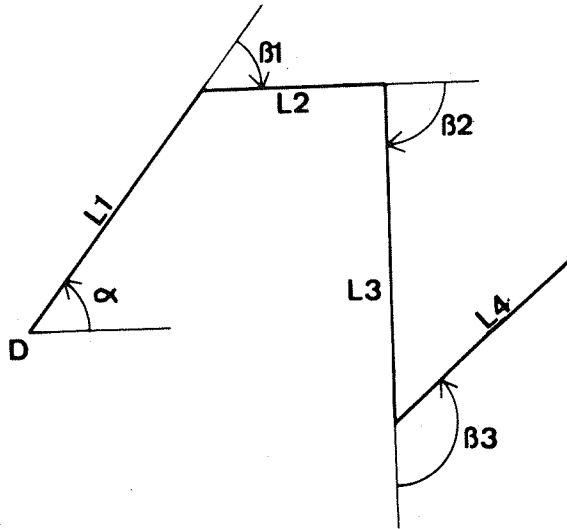


Figura 61

Por exemplo, a linha desenhada na figura VI-2 caracteriza-se pela direcção inicial  $\alpha$ , as mudanças de direcção  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  e  $\beta_3$ , e pelos comprimentos  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  e  $L_4$ .

Recordemos que as mudanças de direcção são contadas positiva ou negativamente conforme são executadas para a esquerda ou para a direita.

## 2. Exemplo 1

A descrição do desenho a traçar será estabelecida com o auxílio de uma declaração DATA.

## 2.1 Consideremos a figura seguinte:

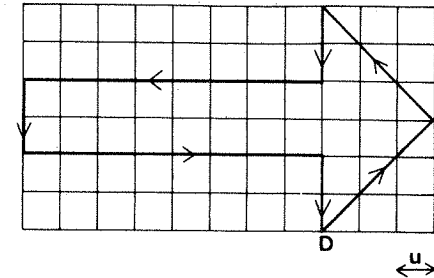


Figura 62

Escolhamos  $D$  como ponto de partida e, como sentido de percurso, o sentido contrário ao dos ponteiros de um relógio.

Os diferentes segmentos percorridos têm os comprimentos  $3u\sqrt{2}$ ,  $3u\sqrt{2}$ ,  $2u$ ,  $8u$ ,  $2u$ ,  $8u$ ,  $2u$ , ( $u$  designa a unidade de comprimento escolhida).

As mudanças de direcção têm respectivamente os valores  $90^\circ$ ,  $135^\circ$ ,  $-90^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $90^\circ$  e  $-90^\circ$ .

## 2.2 O programa é o seguinte:

```

10 INPUT "Abcisse do ponto inicial? " X
20 INPUT "Ordenada do ponto inicial? " Y
30 INPUT "Direcção inicial (em graus): " a
40 LET a = a * PI / 180
50 INPUT "Unidade de comprimento: " u
60 DATA 3 * SQR 2, 90, 3 * SQR 2, 135
70 FOR i = 1 TO 7
80 READ L: LET L = L * u
90 PLOT X, Y: DRAW L * COS a, L * SIN a
N = N + 1
100 LET X = X + L * COS a
110 LET Y = Y + L * SIN a
120 IF i < 7 THEN READ b: LET b = b * PI / 180
130 LET a = a + b
140 NEXT i

```

2.3 O desenho que se segue foi obtido utilizando este programa, mas acrescentando-lhe dois ciclos suplementares que incrementam a posição do ponto de partida.

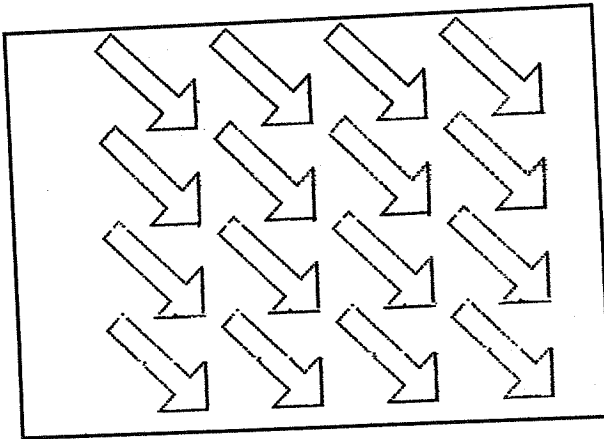


Figura 63

### 3. Exemplo 2

Neste exemplo, utilizaremos uma cadeia de caracteres para estabelecer a definição da linha a traçar.

Esta cadeia será em seguida interpretada e lida caracter a caracter.

3.1 Pretende-se desenhar a linha seguinte:

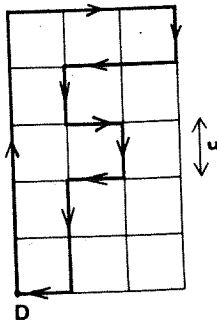


Figura 64

Designaremos por  $u$  a unidade de comprimento escolhida. Escolhamos um ponto de partida e um sentido de percurso, anotando em seguida, pela ordem em que se apresentam, as mudanças de direcção e os comprimentos dos diferentes segmentos. Obtemos  $5u, -90^\circ, 3u, -90^\circ, u, -90^\circ, 2u, 90^\circ, u, 90^\circ, u, -90^\circ, u, -90^\circ, u, 90^\circ, 2u, -90^\circ, u$ .

Estes dados podem ser codificados sob a forma de uma cadeia alfanumérica:

$A\$ = \text{"VDWDQDZGQGQDQDQGZDQ"}$

onde cada letra representa um comprimento ou uma mudança de direcção.

3.2 O programa é o seguinte:

```

10 INPUT "Abcissas do ponto ini
cisl? " : X
20 INPUT "Ordenada do ponto in
icisl? " : Y
30 INPUT "Unidade de comprimen
to? " : U
40 LET a = PI/2
50 LET a# = "VDWDQDZGQGQDQDQGZDQ"

70 FOR i = 1 TO LEN a#
80 LET k = 0
90 IF a##(i) = "U" THEN LET k = k + U
100 IF a##(i) = "W" THEN LET k = k + U
110 IF a##(i) = "Z" THEN LET k = k + U
120 IF a##(i) = "Q" THEN LET k = k + U
130 IF a##(i) = "D" THEN LET a = a - P
140 IF a##(i) = "G" THEN LET a = a + P
150 PLOT X,Y: DRAW k*U*COS a,k*U
160 LET X = X + k*U*COS a
170 LET Y = Y + k*U*SIN a
180 NEXT i

```

O desenho seguinte foi obtido para valores de  $u$  entre 5 e 20.

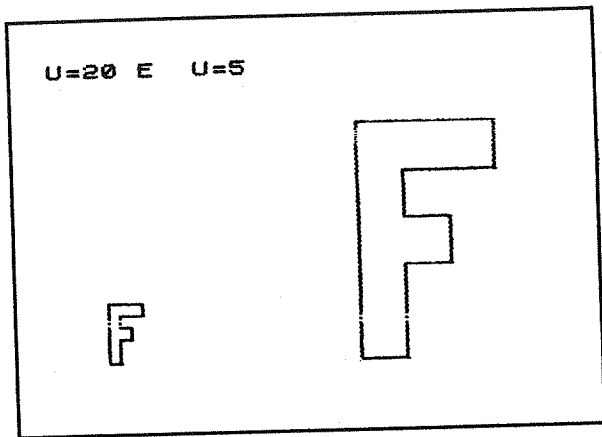


Figura 65

#### 4. Exemplo 3

Vamos agora utilizar duas cadeias de caracteres para estabelecer a descrição do desenho a executar.

4.1 Consideremos o desenho seguinte:

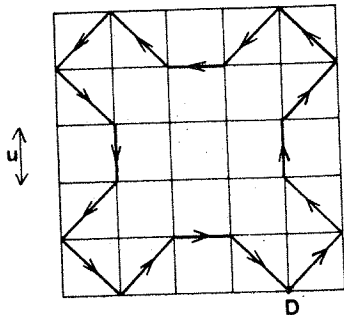


Figura 66

Escolheremos o ponto D como ponto de partida e o sentido trigonométrico como sentido de percurso. Se  $u$  designar a unidade de comprimento, cada um dos segmentos a desenhar terá como comprimento  $u$  ou  $u\sqrt{2}$ .

Fazendo  $H=u$  e  $K=u\sqrt{2}$ , poderemos construir a seguinte

cadeia de caracteres descrevendo o conjunto dos comprimentos a desenhar:

$L\$ = \text{"KKHKKKHKKKHKKKHK"}$

Ocorrem apenas duas mudanças de direcção: uma para a direita, de um ângulo igual a  $-\pi/4$ , e outra para a esquerda, de  $+\pi/2$ .

4.2 O programa é o seguinte:

```

10 INPUT "Abscissa do ponto ini
c1=el? " X1
20 INPUT "Ordenada do ponto in
ic1=el? " Y1
30 INPUT "Unidade de comprimen
to? " U
40 INPUT "Direcção inicial (em
graus)?" A
50 LET B=PI/180
60 LET C="GGGGGGGGGGGGGGGG"
70 LET L$="KKHKKKHKKKHKKKHK"
80 LET D=LEN L$
90 FOR I=1 TO D
100 IF L$(I)="H" THEN LET C=C+
"K" THEN LET U=U*2
110 IF L$(I)="K" THEN LET U=U
120 PRINT X1,U: DRAW I*COB B,I*3
IN
130 LET X=X1+U*COB B
140 LET Y=Y1+U*3IN B
150 IF I=D THEN GO TO 130
160 IF L$(I)="D" THEN LET B=-PI
/4
170 IF L$(I)="G" THEN LET B=PI/
4
180 LET A=A+B
190 NEXT I

```

O desenho que se segue foi obtido usando um programa ligeiramente diferente. Eis o programa:

```

10 LET B=0
20 LET A=PI/4
30 LET U=1
40 LET C="GGGGGGGGGGGGGGGG"
50 LET L$="KKHKKKHKKKHKKKHK"
60 LET D=LEN L$

```







## CÍRCULOS E ARCOS

As instruções CIRCLE e DRAW servem respectivamente para traçar círculos completos e arcos de círculo.

Constituem aquilo a que se chama, em Basic, macro-instruções, substituindo por si sós programas inteiros.

Escritos em linguagem-máquina, estes subprogramas permitem evidentemente uma execução muito rápida.

Existe no entanto um inconveniente: se se usam estas instruções para traçar pontos situados fora do espaço-visor, o programa é interrompido por um sinal de erro. Por esta simples razão já é útil saber traçar um círculo ou um arco de círculo ponto por ponto.

Existe de facto uma outra razão que respeita ao emprego de certas transformações geométricas (ver os capítulos 12 e 21).

### 1. A instrução CIRCLE

Seja um círculo de centro  $C = (X_c, Y_c)$  e raio  $R$ . Este círculo será traçado graças à instrução

CIRCLE  $X_c, Y_c, R$

#### 1.1 Exemplo 1

Pretende traçar-se o círculo de centro  $C=(X_c, Y_c)$  passando pelo ponto  $M=(X_M, Y_M)$ .

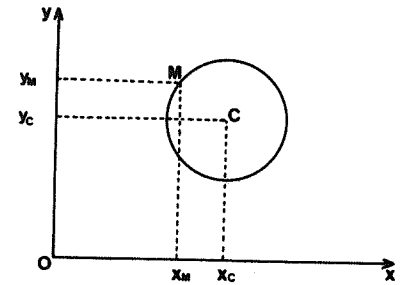


Figura 72

Obtemos facilmente  $R$ :

$$R = \sqrt{(X_c - X_M)^2 + (Y_c - Y_M)^2}$$

O programa correspondente é o seguinte:

```

10 INPUT "Coordenadas do centr
0: " "X=" ;Xc,"Y=" ;Yc
20 INPUT "Coordenadas do ponto
M: " "X=" ;Xm,"Y=" ;Ym
30 LET r=SGR ((Xc-Xm)*(Xc-Xm)+
(Yc-Ym)*(Yc-Ym))
40 CIRCLE Xc,Yc,r

```

#### 1.2 Exemplo 2

Pretende traçar-se um círculo de raio  $R$  conhecido, passando pelos pontos igualmente conhecidos  $P_1=(X_1, Y_1)$  e  $P_2=(X_2, Y_2)$ .

Seja  $M$  o meio do segmento  $P_1P_2$ , e  $L$  o comprimento deste segmento.

Excepto para  $R \leq L/2$ , existem duas soluções simétricas relativamente ao segmento  $P_1P_2$ :

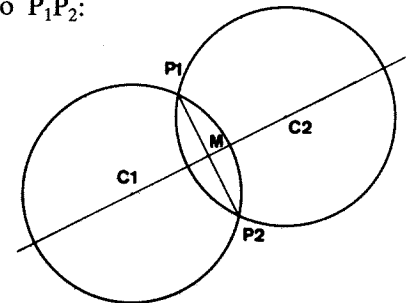


Figura 73

Se  $X_c$  e  $Y_c$  designam as coordenadas do centro pretendido, pode escrever-se, para  $Y_2 \neq Y_1$ ,

$$X_c = \frac{X_1 + X_2}{2} \pm d \cos \alpha$$

$$Y_c = \frac{Y_1 + Y_2}{2} \pm d \sin \alpha$$

com

$$\alpha = \text{Arc tg} \frac{X_1 - X_2}{Y_2 - Y_1} \quad \text{e} \quad d = \sqrt{R^2 - \frac{L^2}{4}}$$

```

10 INPUT "X1= ";X1,"Y1= ";Y1
20 PLOT X1,Y1
30 INPUT "X2= ";X2,"Y2= ";Y2
40 PLOT X2,Y2
50 INPUT "R= ";R
60 LET L=SQRT ((X2-X1)*(X2-X1) +
(Y2-Y1)*(Y2-Y1))
70 LET A=ATAN (X1-X2)/(Y1-Y2)
80 LET G=PI/4
90 LET XC=(X1+X2)/2+d*COS A
100 LET YC=(Y1+Y2)/2+d*SIN A
110 CIRCLE XC,YC,R
120 LET XC=(X1+X2)/2-d*COS A
130 LET YC=(Y1+Y2)/2-d*SIN A
140 CIRCLE XC,YC,R

```

### 1.3 Exemplo 3

Sejam  $P_1=(X_1, Y_1)$ ,  $P_2=(X_2, Y_2)$  e  $P_3=(X_3, Y_3)$  três pontos do espaço-visor. Se estes pontos não se encontram alinhados, existe um único círculo que passa pelos três pontos.

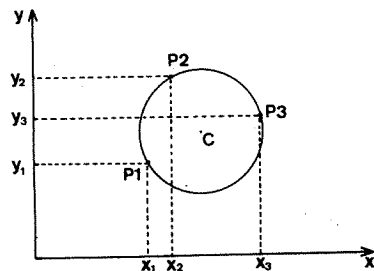


Figura 74

O centro C deste círculo terá então as seguintes coordenadas:

$$X_c = \frac{\beta - \delta}{\gamma - \alpha}$$

e

$$Y_c = \alpha X_c + \beta$$

com

$$\alpha = \frac{X_2 - X_1}{Y_1 - Y_2}$$

$$\beta = -\frac{\alpha}{2} (X_1 + X_2) + \frac{Y_1 + Y_2}{2}$$

$$\gamma = \frac{X_3 - X_1}{Y_1 - Y_3}$$

$$\delta = -\frac{\gamma}{2} (X_1 + X_3) + \frac{Y_1 + Y_3}{2}$$

O raio R deste círculo é igual a:

$$\sqrt{(X_c - X_1)^2 + (Y_c - Y_1)^2}$$

Este programa só está correcto para  $Y_2 \neq Y_1$  e  $Y_3 \neq Y_1$ . Para  $Y_2 = Y_1$  ou  $Y_3 = Y_1$ , será necessário recorrer a outras equações.

```

10 INPUT "X1= ";X1,"Y1= ";Y1
20 PLOT X1,Y1
30 INPUT "X2= ";X2,"Y2= ";Y2
40 PLOT X2,Y2
50 INPUT "X3= ";X3,"Y3= ";Y3
60 PLOT X3,Y3
70 LET a=(X2-X1)/(Y1-Y2)
80 LET b=-a/2*(X1+X2)+(Y1+Y2)/2
90 LET g=(X3-X1)/(Y1-Y3)
100 LET d=-g/2*(X1+X3)+(Y1+Y3)/2

```

```

110 LET xc=(b-d)/(g-a)
120 LET yc=a*xc+b
130 LET r=SOR((xc-x1)*(xc-x1)+(yc-y1)*(yc-y1))
140 FOR t=0 TO 2*PI STEP .02
150 LET x=xc+r*COS t
160 LET y=yc+r*SIN t
170 IF x>=0 AND x<=255 AND y>=0 AND y<=175 THEN PLOT x,y
180 NEXT t

```

## 2. A instrução DRAW

Seja  $P = (x,y)$  um ponto do espaço-visor e  $\alpha$  um ângulo medido em radianos (supomos  $\alpha \neq 2k\pi$ ).

Se  $a$  e  $b$  forem dois números convenientemente escolhidos, a sequência de instruções seguinte permite obter um arco de círculo de origem  $P$  e medida  $\alpha$ :

PLOT X,Y: DRAW a,b,  $\alpha$

O sentido do traçado depende do ângulo  $\alpha$ :

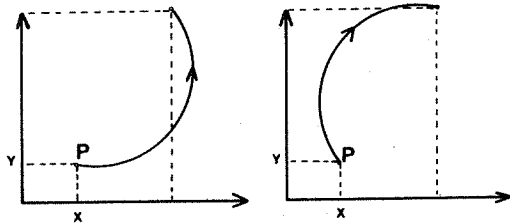


Figura 75 - À esquerda,  $\alpha$  positivo; à direita,  $\alpha$  negativo.

A instrução DRAW apresenta as mesmas vantagens e inconvenientes da instrução CIRCLE. Tal como para esta última, daremos em seguida vários exemplos de utilização.

### 2.1 Exemplo 1

Sejam  $P_1 = (X_1, Y_1)$  e  $P_2 = (X_2, Y_2)$  dois pontos do espaço-visor, e  $\alpha \neq 2k\pi$  um ângulo.

Traça-se um arco de círculo de medida  $\alpha$  do ponto  $P_1$  ao ponto  $P_2$  recorrendo ao programa seguinte:

```

10 INPUT "X1= ";x1,"Y1= ";y1
20 PLOT x1,y1
30 INPUT "X2= ";x2,"Y2= ";y2
40 PLOT x2,y2
50 INPUT "Valor do angulo A (e
# graus)?" ,a
60 LET a=a*PI/180
70 PLOT x1,y1: DRAW x2-x1,y2-y
1,a

```

### 2.2 Exemplo 2

Sejam  $P_1 = (X_1, Y_1)$  um ponto do espaço-visor.

Escolhamos um centro  $C=(X_c, Y_c)$  e um ângulo  $\alpha$ . Como traçar um arco de centro  $C$ , medida  $\alpha$  e origem  $P_1$ ?

A extremidade  $P_2$  deste arco é deduzida de  $P_1$  graças a uma rotação de centro  $C$  e ângulo  $\alpha$ .

Teremos:

$$X_2 = (X_1 - X_c) \cos \alpha - (Y_1 - Y_c) \sin \alpha + X_c$$

e

$$Y_2 = (X_1 - X_c) \sin \alpha + (Y_1 - Y_c) \cos \alpha + Y_c$$

(ver o capítulo 11, parágrafo 3).

```

10 INPUT "X1= ";x1,"Y1= ";y1
20 PLOT x1,y1
30 INPUT "Coordenadas do centr
o: ", "X= ";xc,"Y= ";yc
40 PLOT xc,yc
50 INPUT "Valor do angulo A (e
# graus)?" ,a
60 LET a=a*PI/180
70 LET x2=x1+(x1-xc)*COS a-(y1
-yc)*SIN a
80 LET y2=y1+(x1-xc)*SIN a+(y1
-yc)*COS a
90 PLOT x2,y2
100 PLOT x1,y1: DRAW x2-x1,y2-y
1,a

```

2.3 Se se utiliza a instrução DRAW, poderemos perguntar qual a relação existente entre o raio  $R$  do arco traçado, a medida  $\alpha$  desse arco e as coordenadas das extremidades  $P_1$  e  $P_2$  desse arco.

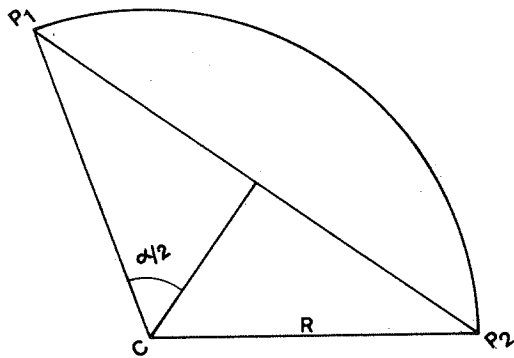


Figura 76

Se L designar o comprimento do segmento  $P_1P_2$ , obtém-se facilmente:

$$\frac{L}{2R} = \text{sen } \frac{\alpha}{2}$$

donde

$$R = \frac{L}{2 \text{ sen } \frac{\alpha}{2}}$$

com

$$L = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$$

Poderemos utilizar esta equação para traçar um arco de raio R e extremidades  $P_1$  e  $P_2$ ; o problema só é possível no caso de  $R \geq l/2$ .

```

10 INPUT "Coordenadas do ponto
11 P1:"; "X="; X1; "Y="; Y1
12 PLOT X1, Y1
13 INPUT "Coordenadas do ponto
14 P2:"; "X="; X2; "Y="; Y2
15 PLOT X2, Y2
16 INPUT "Raio R="; R
17 LET L = SQR ((X1-X2)*(X1-X2) +
18 (Y1-Y2)*(Y1-Y2))

```

```

70 IF r < L/2 THEN PRINT "Sem so
(LUCBO,)"
80 IF r > L/2 THEN PLOT X1, Y1: D
RAW X2-X1, Y2-Y1, 2*ASN (L/2/r)

```

Neste programa, escolheremos o sentido do traçado escrevendo + ou - conforme o sentido desejado.

### 3. Ligações entre arcos

Sejam dois arcos de círculo de centros respectivamente em  $C_1$  e  $C_2$ . Diz-se que estes arcos se ligam em P se os pontos  $C_1$ ,  $C_2$  e P estiverem alinhados.

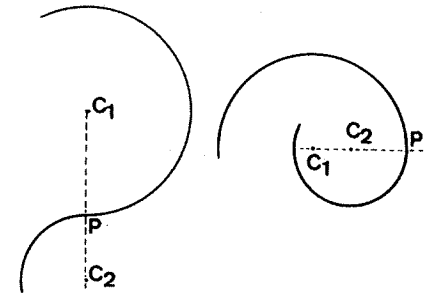


Figura 77

Numerosos motivos utilizam ligações entre arcos:

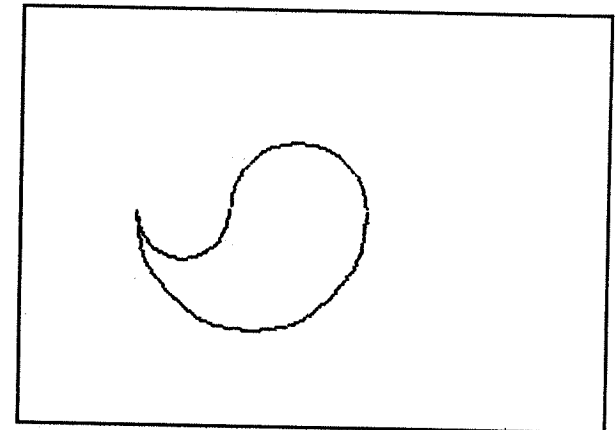


Figura 78

#### 4. Equação de um círculo

4.1 Seja um círculo de centro  $C = (X_c, Y_c)$  e raio  $R$ .

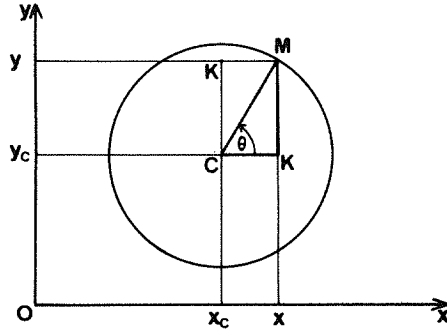


Figura 79

Para qualquer ponto  $M = (X, Y)$  pertencente ao círculo, teremos:

$$HC^2 + HM^2 = MC^2.$$

Resulta daqui:

$$(X - X_c)^2 + (Y - Y_c)^2 = R^2$$

Esta igualdade constitui a equação cartesiana do círculo. Deduzimos dela:

$$Y = Y_c \pm \sqrt{R^2 - (X - X_c)^2}$$

com  $X_c - R \leq X \leq X_c + R$ .

4.2 A representação de um círculo recorrendo a um parâmetro é em geral mais fácil de manejar.

Seja o ângulo  $(\overline{CH}, \overline{CM})$ ; teremos

$$\overline{CH} = R \cos \theta$$

e

$$\overline{CK} = R \sin \theta$$

Como  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM}$ , obteremos por projecção sobre os eixos:

$$X = X_c + R \cos \theta$$

e

$$Y = Y_c + R \sin \theta$$

O programa correspondente é o seguinte:

```

10 INPUT "Coordenadas do centr
o: "; "X=" ;xc, "Y=" ;yc
20 PLOT xc,yc
30 INPUT "Raio R=" ;r
40 FOR t=0 TO 2*PI STEP .02
50 LET x=xc+r*cos t
60 LET y=yc+r*sin t
70 IF x>0 AND x<255 AND y>0 AN
D y<175 THEN PLOT x,y
80 NEXT t
    
```

O traçado é menos rápido do que recorrendo à instrução CIRCLE, mas a linha 70 assegura um traçado sem problemas.

#### 5. Exercício

Construa um programa para cada um dos desenhos seguintes:

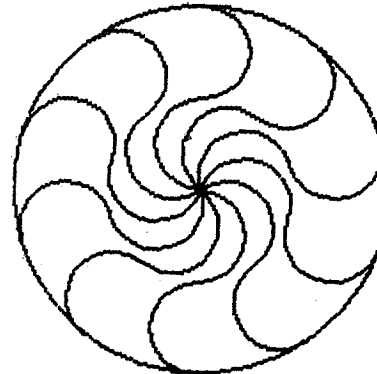


Figura 80

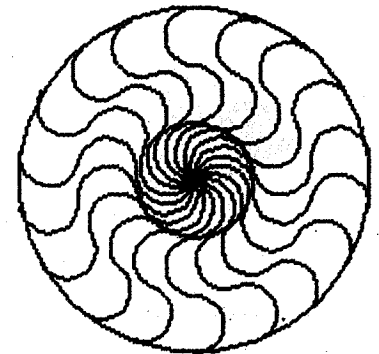


Figura 81

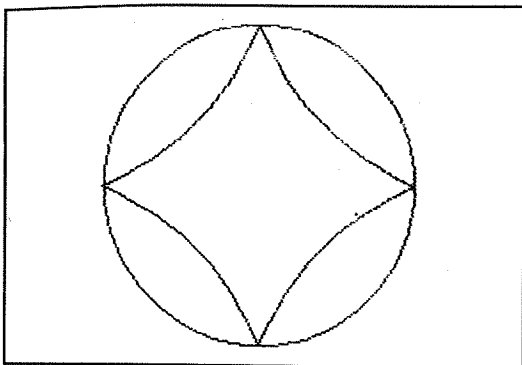


Figura 82

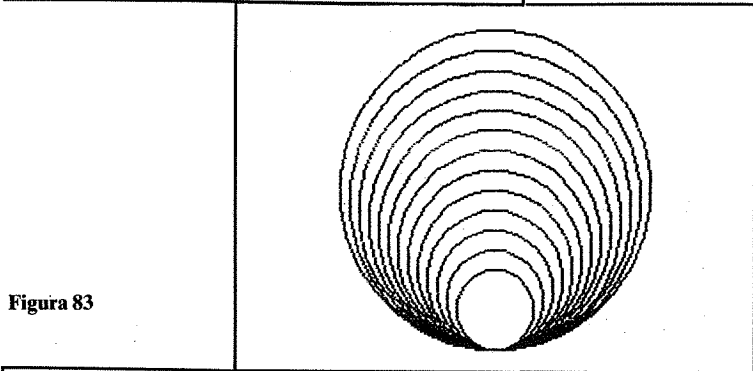


Figura 83

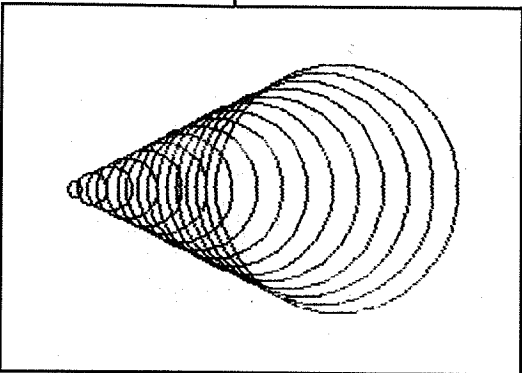


Figura 84

## LUGARES GEOMÉTRICOS

Seja  $C$  uma curva plana definida por uma propriedade de natureza geométrica. Depois do século XVII, estas curvas passaram a ser designadas pela expressão *lugar geométrico*.

Em certos casos, não é necessário conhecer a equação desta curva para a poder construir. Basta utilizar a propriedade geométrica que a define, o que não exclui, obviamente, certos cálculos.

### 1. A lemniscata

Esta curva, a lemniscata de Geronon, deve-se a Gabriel Cramer (1704-1752), um aluno de Jean Bernouilli.

Consideremos um círculo de raio  $R$ , passando pela origem  $O$  de um sistema de coordenadas cartesiano:

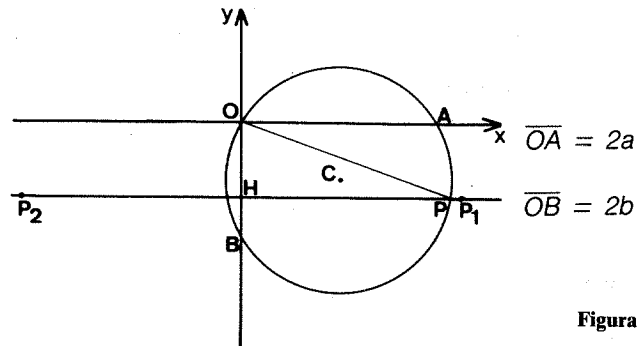


Figura 85

Associaremos, a qualquer ponto P do círculo, os pontos  $P_1$  e  $P_2$  definidos por  $HP_1 = HP_2 = OP$ .

Se fizermos  $OA = 2a$  e  $OB = 2b$ , o círculo a terá por raio:

$$R = \sqrt{a^2 + b^2}$$

O seu centro terá as coordenadas  $x_c = a$  e  $y_c = b$ .

O ponto P tem as coordenadas

$$x_p = x_c + R \cos t$$

e

$$y_p = y_c + R \sin t,$$

com  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

Considerando  $d = OP$ , poderemos então descrever:

$$d = \sqrt{x_p^2 + y_p^2}.$$

Resulta disto que os pontos  $P_1$  e  $P_2$  têm respectivamente as coordenadas  $d$  e  $y_p$ ,  $-d$  e  $y_p$ .

O programa correspondente é o seguinte:

```

10 INPUT "a = " ; a
20 INPUT "b = " ; b
30 LET r = SQR (a**2+b**2)
40 LET xc = a
50 LET yc = b
60 FOR t = 0 TO 2*PI STEP .02
70 LET xp = xc + r * COS t
80 LET yp = yc + r * SIN t
90 LET d = SQR (xp**2 + yp**2)
100 PLOT 1000 + xp + d, 000 + yp * 40
110 PLOT 1000 + xp - d, 000 + yp * 40
120 NEXT t

```

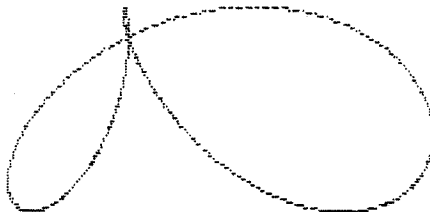


Figura 86

## 2. A trifólio

Esta curva foi estudada pela primeira vez no final do século XIX.

Consideremos um círculo de centro C e raio R, passando pela origem O de um sistema de coordenadas cartesianas:

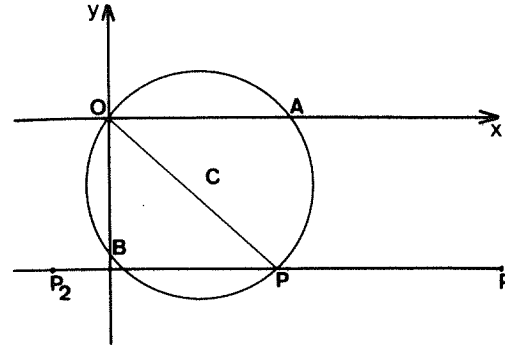


Figura 87

A qualquer ponto P do círculo associaremos os pontos  $P_1$  e  $P_2$  definidos por  $PP_1 = PP_2 = OP$ .

Façamos  $OA = 2a$  e  $OB = 2b$ : o centro do círculo terá as coordenadas  $x_c = a$  e  $y_c = b$ .

O raio do círculo é:

$$R = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Se as coordenadas de P são  $x_p$  e  $y_p$ , podemos escrever:

$$x_p = x_c + R \cos t$$

e

$$y_p = y_c + R \sin t$$

para  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

Façamos  $d = OP$ : teremos então:

$$d = \sqrt{x_p^2 + y_p^2}$$

Os pontos  $P_1$  e  $P_2$  terão respectivamente por coordenadas  $x_p+d$ ,  $y_p$  e  $x_p-d$ ,  $y_p$ .

O programa é o seguinte:

```

100 INPUT "a=" ; a
200 INPUT "b=" ; b
300 LET r = SQR (a*a+b*b)
400 LET x0 = a
500 LET y0 = b
600 FOR t = 0 TO 2*PI STEP .02
700 LET xp = x0+r*cos t
800 LET yp = y0+r*sin t
900 LET d = SQR (xp*xp+yp*yp)
1000 PLOT xp+d,yp+yp
1100 PLOT xp-d,yp+yp
1200 NEXT t

```

Com  $a=30$  e  $b=-12$  obtemos:

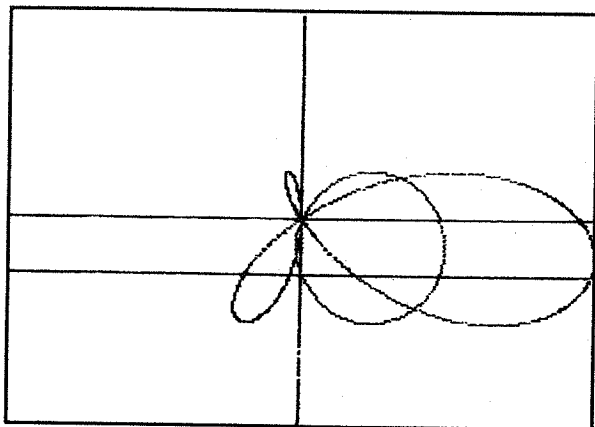


Figura 88

### 3. Rosa de quatro pétalas

Esta curva deve-se a Guido Grandi (1671-1742).

O ponto A desloca-se sobre o eixo dos  $x$ 's, e o ponto B sobre o eixo dos  $y$ 's de modo a que o segmento AB mantenha um comprimento constante L.

P é a projecção ortogonal de O sobre AB.

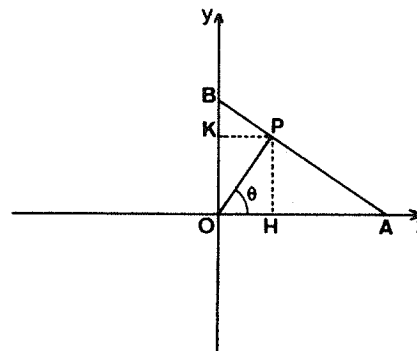


Figura 89

Designemos por  $x$  a abscissa de A e por  $x_p$  e  $y_p$  as coordenadas de P.

Como a área do triângulo rectângulo OAB é  $\frac{\overline{OA} \times \overline{OB}}{2}$  ou

ainda  $\frac{\overline{OA} \times \overline{OB}}{2}$ , obtemos:

$$\overline{OP} = \frac{\overline{OA} \times \overline{OB}}{\overline{AB}}$$

Tira-se daqui que:

$$\overline{HP} = \overline{OP} \sin \theta = \frac{\overline{OA} \times \overline{OB}}{\overline{AB}} \times \frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \overline{OB} \times \frac{\overline{OA}^2}{\overline{AB}^2}$$

Do mesmo modo:

$$\overline{KP} = \overline{OP} \cos \theta = \overline{OA} \times \frac{\overline{OB}^2}{\overline{AB}^2}$$

Finalmente,

$$x_p = x \times \frac{L^2 - x^2}{L^2}$$

$$y_p = \pm \left( \sqrt{L^2 - x^2} \right) \frac{x^2}{L^2}$$



Como X varia entre  $-L$  e  $+L$ , pode escrever-se o programa seguinte:

```

10 INPUT "L=" ; L
20 FOR X=-L TO L STEP .5
30 LET XP=X*((L+L-X**X)/L/L)
40 LET YP=X**X**SQR((L*(L-X**X))/L/L)
50 PLOT 128+XP,88+YP
60 PLOT 128+XP,88-YP
70 NEXT X

```

Utilizou-se uma simetria relativamente ao eixo dos yy.  
Para  $L=150$ , obtemos:

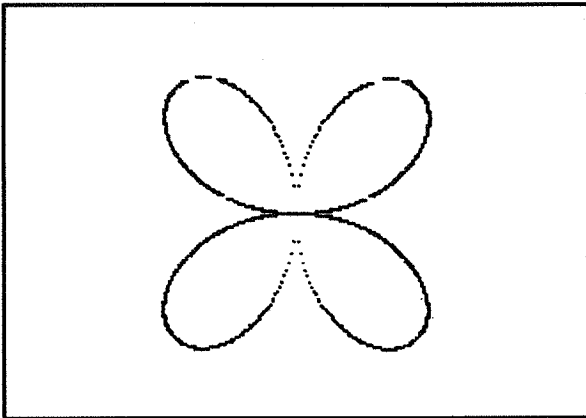


Figura 90

#### 4. A elipse

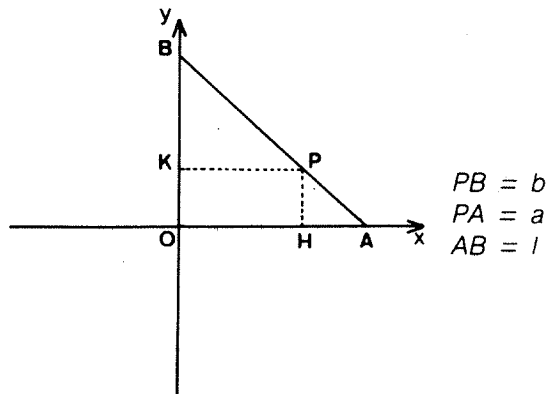


Figura 91

O ponto A desloca-se sobre o eixo dos  $x'x$ , o ponto B sobre o eixo dos  $y'y$  e o segmento AB mantém um comprimento constante e igual a  $L$ .

O ponto P pertence ao segmento AB: os comprimentos PA e PB são constantes e iguais respectivamente a  $a$  e  $b$ ; teremos  $a + b = L$ .

Por razões de simetria, estudemos o que se passa no primeiro quadrante.

Os triângulos HPA e OBA são semelhantes; deduz-se desse facto que:

$$HP = y_p = OB \times \frac{PA}{BA}$$

Os triângulos KBP e OBA são igualmente semelhantes, donde:

$$KP = x_p = OA \times \frac{PB}{AB}$$

Consideremos  $OA=x$ . Como  $OB = \sqrt{L^2 - x^2}$ , obteremos:

$$X_p = x \frac{b}{L}$$

$$Y_p = \frac{a}{L} \sqrt{L^2 - x^2}$$

No programa que se segue, faz-se variar  $x$  entre 0 e  $L$ , utilizando-se as simetrias relativamente aos eixos dos  $x'x$  e dos  $y'y$ :

```

10 INPUT "L=" ; L
20 INPUT "a=" ; a
30 LET b=L-a
40 FOR X=0 TO L
50 LET XP=X**b/L
60 LET YP=a**SQR((L*(L-X**X))/L/L)
70 PLOT 128+XP,88+YP
80 PLOT 128+XP,88-YP
90 PLOT 128-XP,88-YP
100 PLOT 128-XP,88+YP
110 NEXT X

```

Para  $L = 100$  e  $a = 40$ , obtemos:

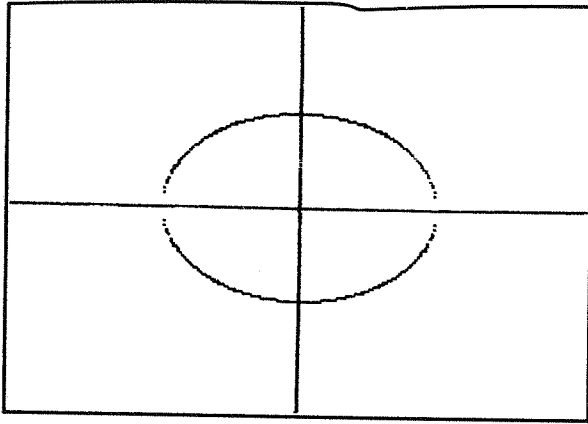


Figura 92

## 5. Exercícios

5.1 Generalizar a outras curvas o método utilizado para construir a lemniscata.

5.2 Do mesmo modo, generalizar o método de construção da trifólio a outras curvas.

9

## AS CÔNICAS

As cónicas foram, antes do mais, definidas pelos gregos como secções de um cone de revolução.

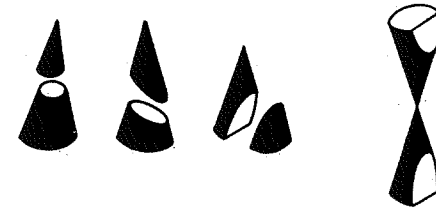


Figura 93 – Da esquerda para a direita, círculo, elipse, parábola, hipérbole.

A teoria das cónicas deve bastante a Apolónio de Perga (262-200 a.C.), matemático grego da escola de Alexandria, que descobriu um grande número de propriedades relativas a estas curvas.

No século XVII, os métodos da geometria analítica permitiram formular a equação geral de uma cónica. Esta equação tem, em coordenadas polares, a forma:

$$ax^2 + a'y^2 + bxy + cx + c'y + d = 0,$$

dependendo os diferentes casos do número  $b^2 - 4aa'$ .

## 1. Elipses

1.1 Sejam  $F_1$  e  $F_2$  dois pontos distintos do plano. Se  $k$  designa um número positivo, o conjunto dos pontos  $M$  do plano que verificam a relação  $MF_1 + MF_2 = k$  é uma elipse de focos  $F_1$  e  $F_2$ .

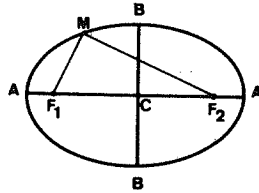


Figura 94

$AA'$  e  $BB'$  designam respectivamente o eixo maior e o eixo menor da elipse;  $C$  é o centro.

1.2 Para realizar o traçado de uma elipse, é preferível recorrer a uma representação paramétrica em vez de uma equação cartesiana.

Sejam  $a$  e  $b$  dois números positivos, com  $a \geq b$ .

As equações:

$$x = x_c + a \cos \theta$$

e

$$y = y_c + b \sin \theta$$

são as de uma elipse de centro  $C = (x_c, y_c)$ , de eixo maior  $2a$  e eixo menor  $2b$ .

Convirá notar que o número  $(a-b)/a$ , que varia entre 0 e 1, mede o achatamento da elipse.

```
10 INPUT "XC= ";xc
20 INPUT "YC= ";yc
30 INPUT "A= ";a
```

```
40 INPUT "B= ";b
50 FOR t=0 TO 2*PI STEP .02
60 LET x=xc+a*COS t
70 LET y=yc+b*SIN t
80 PLOT x,y
90 NEXT t
```

No exemplo que se segue,  $b = 40$  e  $a$  varia entre 20 e 120 (com um passo de 20).

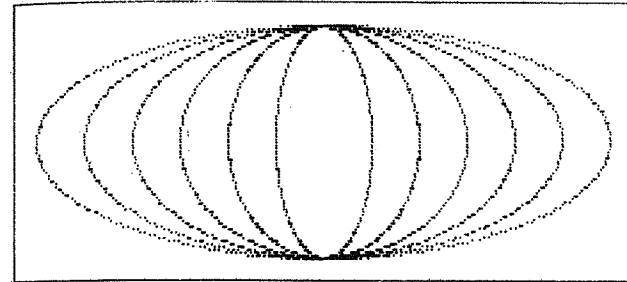


Figura 95

1.3 O programa anterior permite desenhar uma elipse cujos eixos são paralelos aos rebordos do visor.

Se se pretende colocar a elipse obliquamente no visor, basta utilizar uma rotação  $\varphi$  relativamente ao centro da elipse (ver o capítulo 11).

Modificando o programa do parágrafo 1.2, obtém-se o programa seguinte:

```
10 INPUT "XC= ";xc
20 INPUT "YC= ";yc
30 INPUT "A= ";a
40 INPUT "B= ";b
50 INPUT "Inclinacao do eixo c
  entral (em graus): "f
60 LET f=f*PI/180
70 FOR t=0 TO 2*PI STEP .02
80 LET x1=xc+a*COS t
90 LET y1=yc+b*SIN t
100 LET x2=xc+(xc-x1)*COS f-(yc
-y1)*SIN f
110 LET y2=yc+(xc-x1)*SIN f+(yc
-y1)*COS f
120 PLOT x2,y2
130 NEXT t
```

Para  $a = 80$ ,  $b = 50$  e  $\varphi$  variando entre  $0^\circ$  e  $360^\circ$  com um passo de  $45^\circ$ , obtemos:

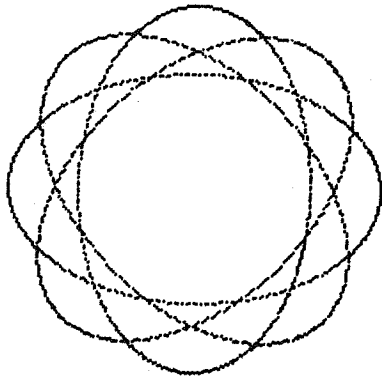


Figura 96

## 2. Parábolas

2.1 Seja  $\Delta$  uma recta e  $F$  um ponto não pertencendo a ela.

O conjunto dos pontos do plano situados à mesma distância de  $F$  e de  $\Delta$  é uma parábola de foco  $F$  e directriz  $\Delta$ .

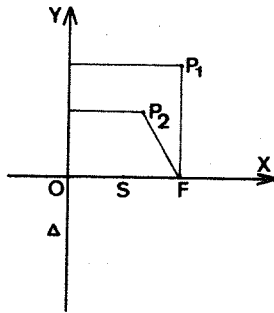


Figura 97

O ponto intermédio,  $S$ , de  $OF$  é o vértice da parábola.

2.2 Em coordenadas cartesianas, a equação mais simples de uma parábola é  $y = ax^2$ ; teremos então uma parábola

admitindo por vértice a origem do sistema e por eixo de simetria o eixo dos  $yy$ .

```

10 INPUT "a= ";a
20 FOR x=-127 TO 0 STEP .1
30 LET y=a*x*x
40 IF (y)=0 AND y<=175 THEN PLO
T x+128,y
50 IF (y)=0 AND y<=175 THEN PLO
T 128-x,y
60 NEXT x

```

Vejam agora diversas parábolas da equação  $y = ax^2$ .

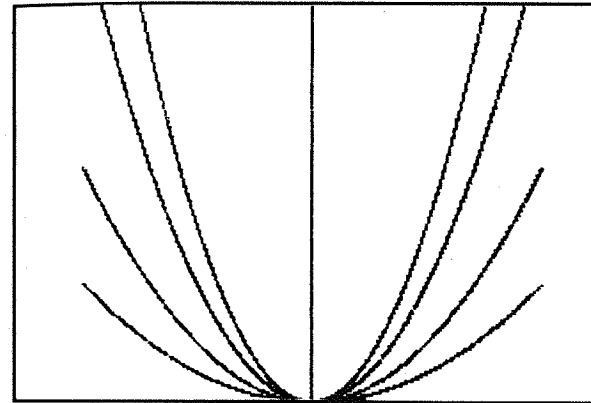


Figura 98

2.3 Para certas aplicações, particularmente jogos, é cómodo utilizar uma equação da forma:

$$y = a(x_2 - x)(x_1 - x)$$

com  $x_1 \leq x \leq x_2$ .

Para  $a < 0$ , obtém-se uma parábola cuja concavidade está virada para cima.

Esta parábola passa pelos pontos  $(x_1, 0)$  e  $(x_2, 0)$ ; tem por vértice o ponto de coordenadas.

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{e} \quad -a \frac{(x_2 - x_1)^2}{4}$$

```

1000 LET B=.01
1010 LET X1=0
1020 LET X2=80+INT (171#RND)
1030 LET U=B TO X2 STEP .1
1040 LET V=B*(X2-X)
1050 IF U<=175 THEN PLOT X1,Y
1060 NEXT X

```

A título de exemplo, vejamos algumas curvas obtidas considerando  $a=0,01$ ,  $x_1 = 0$  e um número escolhido ao acaso entre 80 e 250 para  $x_2$ .

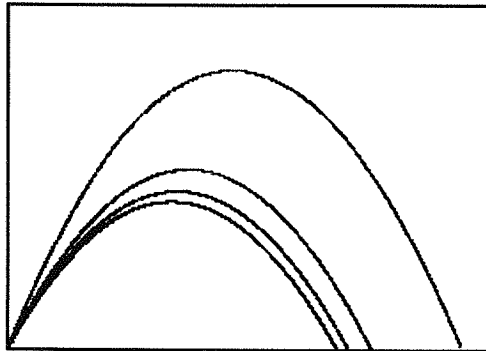


Figura 99

### 3. Hipérboles

3.1 Sejam  $F_1$  e  $F_2$  dois pontos distintos do plano. Designemos por  $2a$  o comprimento do segmento  $F_1F_2$ .

O conjunto dos pontos  $P$  do plano para os quais se tem  $|PF_1 - PF_2| = 2a$  ou  $PF_2 - PF_1 = 2a$  constitui um hipérbole de focos  $F_1$  e  $F_2$ .

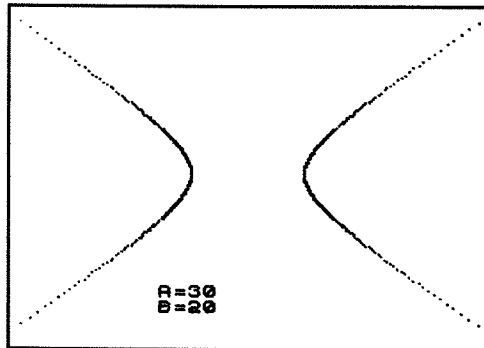


Figura 100

3.2 Uma hipérbole é formada por 2 arcos simétricos relativamente à mediatriz de  $F_1F_2$ .

Estes arcos cortam o segmento  $F_1F_2$  em  $S_1$  e em  $S_2$ , que são os vértices da hipérbole.

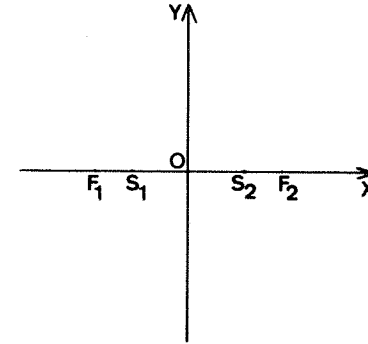


Figura 101

Consideremos como eixo dos  $xx$  a recta  $F_1F_2$ , e como eixo dos  $yy$  a mediatriz de  $F_1F_2$ .

Façamos:

$$e = \frac{OF_2}{OS_2}$$

e

$$b = a \sqrt{e^2 - 1}.$$

Demonstra-se que a equação cartesiana da hipérbole é então:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Pode deduzir daqui a representação paramétrica seguinte:

$$x = \frac{a}{\cos t} \quad \text{e} \quad y = b \operatorname{tg} t$$

para  $-\pi \leq t \leq \pi$  e  $t \neq \pm \pi/2$ .

3.3 No programa que se segue, utilizámos esta representação paramétrica para traçar uma hipérbole.

Se  $t$  é próximo de  $\pi/2$ ,  $a/\cos t$  torna-se muito grande, o que pode provocar a paragem do programa.

Para ter  $x \leq 125$ , teremos de fazer  $t \leq k$  com

$$k = \arccos a/125 \quad (\text{o que supõe } a \leq 125).$$

Utilizaremos a simetria relativamente a cada um dos dois eixos.

```

10 INPUT "a? "; a
20 INPUT "b? "; b
30 LET k=ACS (a/125)
40 FOR t=0 TO k STEP .01
50 LET x=a/COS t
60 LET y=b*TAN t
70 PLOT 100+x,00+y
80 PLOT 100+x,00-y
90 PLOT 100-x,00-y
100 PLOT 100-x,00+y
110 NEXT t

```

Note-se que na linha 30 ACS significa «arco cujo co-seno é...».

3.4 Uma hipérbole admite duas assíntotas, as rectas de equação

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

Quanto mais se prolongam os braços da hipérbole, mais cada um deles se aproxima destas rectas.

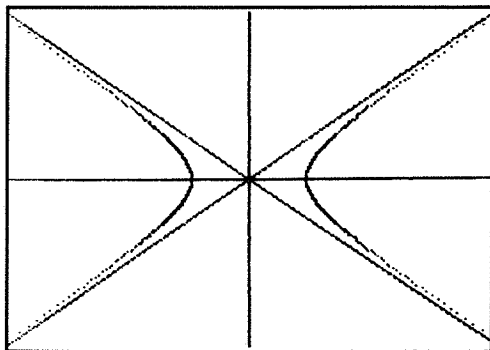


Figura 102

## 4. Exercícios

Faça um programa capaz de executar cada um dos desenhos que se seguem:

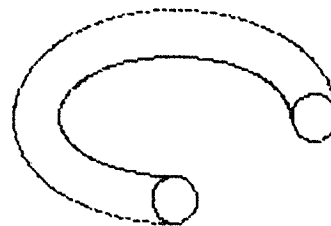


Figura 103

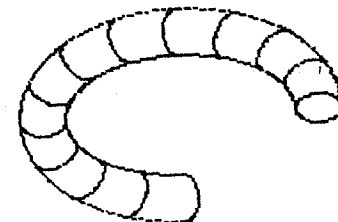


Figura 104

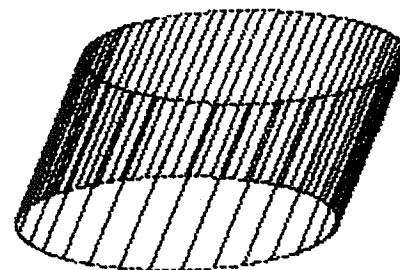


Figura 105

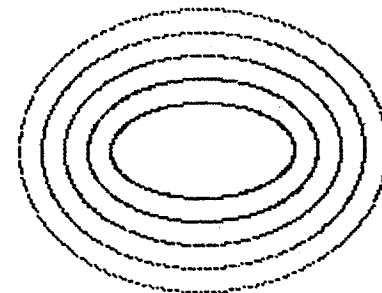


Figura 106

Os centros dos arcos serão respectivamente  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  e  $C_4$ . Seja  $R$  o raio de cada um dos círculos auxiliares, e  $x$  e  $y$  as coordenadas do centro da oval.

As coordenadas de  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  e  $P_4$  são respectivamente:

$$\begin{array}{ll} x - R, & y + R\sqrt{3}/2 \\ x - R, & y - R\sqrt{3}/2 \\ x + R, & y + R\sqrt{3}/2 \\ x + R, & y - R\sqrt{3}/2 \end{array}$$

10

## AS OVAIS

A palavra oval é aplicada a qualquer curva cuja forma recorde a de um ovo. Existem no entanto diversas famílias de ovais. Uma primeira engloba todas as ovais obtidas por ligação de quatro arcos de círculo. Distinguem-se então diversos tipos de ovais muito usadas em ornamentação e arquitectura. Numa segunda família incluem-se as ovais de Descartes, curvas obtidas por este ao investigar a propagação dos raios luminosos.

Uma terceira família é devida ao astrónomo Cassini (1747-1845).

### 1. As ovais obtidas por ligação

#### 1.1 Exemplo 1

O traçado desta oval utiliza dois arcos de  $60^\circ$  e dois outros de  $120^\circ$ ; estes arcos ligam-se entre si em  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  e  $P_4$ , como se mostra na figura seguinte:

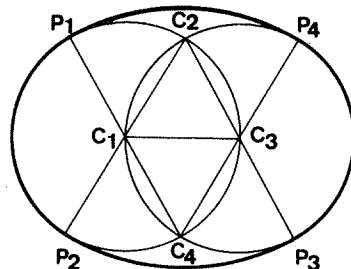


Figura 107

De onde decorre o seguinte programa:

```
10 INPUT "R? ";r
20 INPUT "Coordenadas do centr
o: "; "X? ";x,"Y? ";y
30 LET n=r*50R 3/2
40 PLOT x-r,y+n: DRAW 0,-2*n,2
*PI/3
50 PLOT x-r,y-n: DRAW 2*r,0,PI
/3
60 PLOT x+r,y-n: DRAW 0,2*n,2*
PI/3
70 PLOT x+r,y+n: DRAW -2*r,0,P
I/3
```

Para  $R=60$ ,  $x=128$  e  $y=88$  obtém-se:

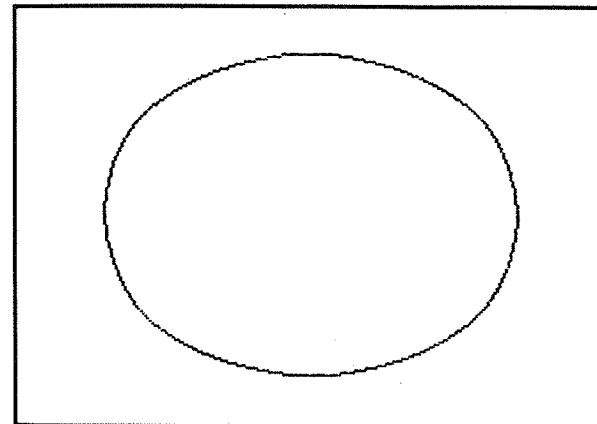


Figura 108

## 1.2 Exemplo 2

Esta curva obtém-se ligando um semicírculo, dois arcos de 45° e um quarto de círculo da maneira indicada na figura seguinte:

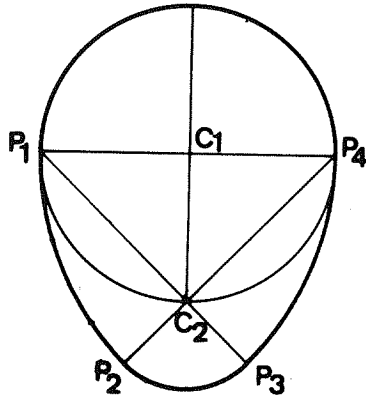


Figura 109

Estes arcos, ligados nos pontos  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  e  $P_4$  têm como respectivos centros  $C_1$ ,  $P_4$ ,  $C_2$  e  $P_1$ .

Façamos  $C_1C_2=R$  e designaremos por  $x$  e  $y$  as coordenadas de  $C_1$ .

Um cálculo simples dar-nos-á as coordenadas de  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  e  $P_4$  em função de  $x$ ,  $y$  e  $R$ ; obtém-se respectivamente:

$$\begin{array}{ll} x, & y+R \\ x-R\sqrt{2}, & y+R(\sqrt{2}-1) \\ x-R\sqrt{2}, & y-R(\sqrt{2}-1) \\ x, & y-R \end{array}$$

De onde o programa:

```
10 INPUT "R? "; r
20 INPUT "Coordenadas do centr
o: "; "X? "; x, "Y? "; y
30 LET l=r*SOR 2
```

```
40 LET h=l-r
50 PLOT x,y+r: DRAW -l,h-r,PI/4
60 PLOT x-l,y+h: DRAW 0,-2*h,P
I/2
70 PLOT x-l,y-h: DRAW l,h-r,PI
/4
80 PLOT x,y-r: DRAW 0,2*r,PI
```

Para  $R=30$ ,  $x=128$  e  $y=88$ , obtemos:

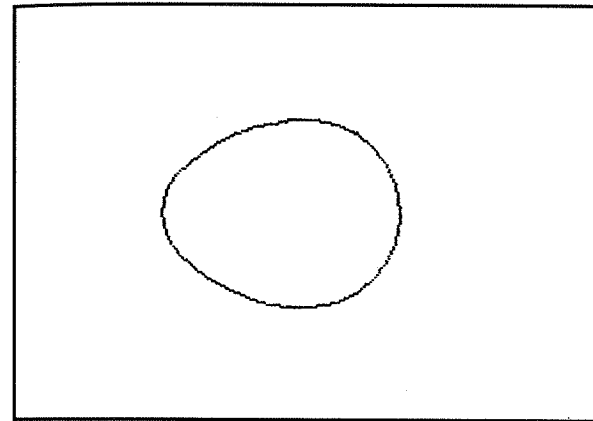


Figura 110

## 2. As ovais de Descartes

2.1 Sejam  $A$  e  $B$  dois pontos do plano tais que  $AB=2a$  e sejam  $k_1$ ,  $k_2$  e  $L$  três números positivos.

Uma oval de Descartes é constituída pelo conjunto de pontos  $P$  do plano que verificam a relação  $k_1PA + k_2PB = L$ .

2.2 Escolhamos um raio  $R$  inferior ou igual a  $L/K_1$ , e façamos  $R_2 = \frac{L - k_1R_1}{K_2}$

Teremos

$$k_1R_1 + k_2R_2 = k_1R_1 + k_2 \left( \frac{L - k_1R_1}{k_2} \right) = L$$

Os pontos de intersecção dos círculos  $(A,R_1)$  e  $(B,R_2)$  são, se existirem, pontos da curva procurada.



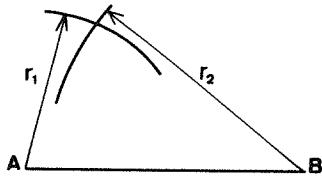


Figura 111

2.3 Calculemos, recorrendo à equação cartesiana de cada círculo, as coordenadas destes pontos de intersecção.

Tomemos como eixo dos xx a recta AB, e como eixo dos yy a mediatriz AB.

Os círculos  $(A, R_1)$  e  $(B, R_2)$  terão como respectivas equações:

$$(x + a)^2 + y^2 = R_1^2$$

e

$$(x - a)^2 + y^2 = R_2^2$$

Tiramos daqui:

$$R_1^2 - (x + a)^2 = R_2^2 - (x - a)^2,$$

donde

$$x = \frac{R_1^2 - R_2^2}{4a}$$

Resulta ainda que para

$$R_1^2 - (x + a)^2 \geq 0$$

teremos:

$$y = \pm \sqrt{R_1^2 - (x + a)^2}$$

2.4 O programa é o seguinte:

```

100 INPUT "K1?" : K1
200 INPUT "K2?" : K2
300 INPUT "L?" : L
400 LMT a = 0.5
500 FOR i = 0 TO L / K1 STEP .2
600 LMT r1 = i
700 LMT r2 = (1 - K1 * r1) / K2
800 LMT x = (r1 * r1 - r2 * r2) / 4 / a
900 LMT d = (r1 + x + a) * (r1 - x - a)
1000 IF d < 0 THEN GO TO 400
1100 PLOT 100 + x, 0.00 + 0.0000 d
1200 PLOT 100 + x, 0.00 - 0.0000 d
1300 NEXT i

```

Para  $a=30$ ,  $k_1=2$ ,  $k_2=3$  e  $L=300$ , obtém-se:

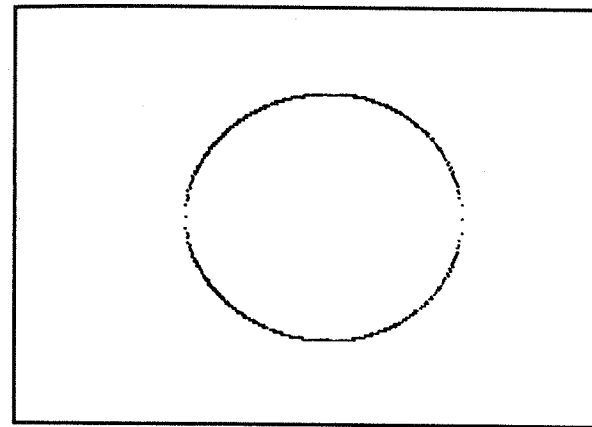


Figura 112

### 3. As ovas de Cassini

3.1 Seja AB um segmento de comprimento  $2L$  e seja  $k$  um número positivo.

Uma oval de Cassini é constituída pelo conjunto dos pontos  $P$  do plano que verificam a relação  $PA \times PB = k^2$ .

3.2 Em princípio, o método utilizado é idêntico ao escolhido para traçar as ovas de Descartes.

- Escolhe-se um raio  $R_1$ ;
- Calcula-se  $R_2 = k^2/R_1$ ;
- Determina-se por cálculo as coordenadas dos pontos de intersecção dos círculos  $(A, R_1)$  e  $(B, R_2)$ , na medida em que estes pontos existam. Quando é este o caso, tem-se:

$$x = \frac{R_1^2 - R_2^2}{4L}$$

$$y = \pm \sqrt{R_2^2 - (x - L)^2}$$

Os eixos escolhidos são a recta AB (eixo dos xx) e a mediatriz do segmento AB (eixo dos yy).

3.3 Coloca-se uma questão: entre que limites se pode escolher o raio  $R_1$ ?

Para responder a esta questão, devemos tentar descobrir quais os pontos de intersecção de uma oval com cada um dos seus eixos.

O cálculo mostra que existem sempre dois pontos de intersecção  $P_1$  e  $P_2$ , tendo respectivamente como abcissa

$$-\sqrt{L^2 + k^2}$$

e

$$\sqrt{L^2 + k^2}.$$

Para  $kL_1$ , existem outros dois pontos  $P_3$  e  $P_4$ , tendo respectivamente como abcissa.

$$-\sqrt{L^2 - k^2}$$

e

$$\sqrt{L^2 - k^2}.$$

Para  $k = L$ , o ponto médio 0 de AB pertence à oval. Quanto à intersecção com o eixo dos yy, só existe para

$k \geq L$ . Excepto para  $k=L$ , existem dois pontos distintos  $Q_1$  e  $Q_2$  de ordenadas respectivas

$$-\sqrt{k^2 - L^2}$$

e

$$\sqrt{k^2 - L^2}$$

Devido às simetrias evidentes da curva relativamente a cada um dos eixos, limitar-nos-emos ao primeiro quadrante. Finalmente, distinguiremos apenas dois casos:

Primeiro caso:  $k \leq L$ .

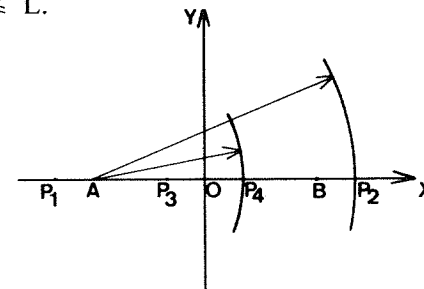


Figura 113

$$\text{Raio mínimo: } AP_4 = L + \sqrt{L^2 - k^2}$$

$$\text{Raio máximo: } AP_2 = L + \sqrt{L^2 + k^2}$$

Segundo caso:  $k > L$ .

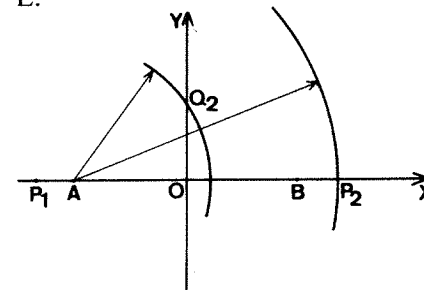


Figura 114

$$\text{Raio mínimo: } AQ_2 = k.$$

$$\text{Raio máximo: } AP_2 = L + \sqrt{L^2 + k^2}$$

3.4 O programa é o seguinte:

```

100 LET L=50
200 INPUT "R? ";K
300 LET e=L+50R*(L+K*K)
400 IF K=0 THEN LET f=L+50R*(L
*(L+K*K)
500 IF K>0 THEN LET f=L
600 FOR i=1 TO e
700 LET r=i
800 LET r1=K*K/r
900 LET x=(r1#r1-r2#r2)/L/4
1000 LET d=r2#r2-(x-L)*(x+L)
1100 IF d<0 THEN GO TO 170
1200 LET y=50R*d
1300 PLOT 1000+x,y+4
1400 PLOT 1000-x,y+4
1500 PLOT 1000-x,y-4
1600 PLOT 1000+x,y-4
170 NEXT i

```

Representámos algumas ovas para  $L = 50$ :

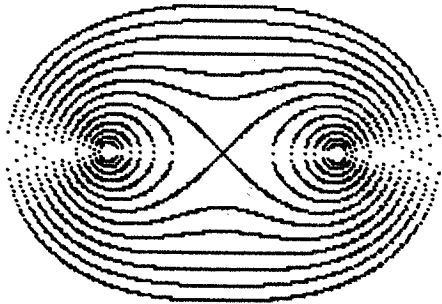


Figura 115

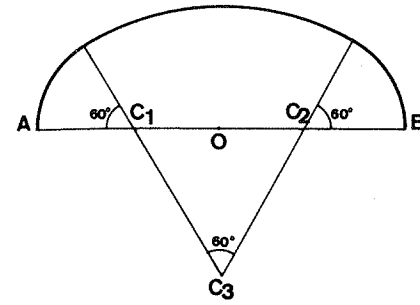


Figura 116

$$AC_1 = C_1O = OC_2 = C_2B$$

Note-se que existem três arcos de  $60^\circ$ , ligados entre si; os respectivos centros serão  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$ .

#### 4. Exercícios

4.1 Construir a curva designada por ovóide, com a equação  $r = a \cos^3 \theta$ . Far-se-á variar  $\theta$  entre  $0^\circ$  e  $90^\circ$ .

4.2 Construir a curva indicada pelo desenho seguinte:

## TRANSLAÇÕES E ROTAÇÕES

Seja F uma figura qualquer. Pode querer-se alterar a forma ou dimensões desta figura, ou substituí-la por uma figura idêntica colocada num outro local do espaço-visor.

Qualquer que seja o caso, será necessário transformar a figura F numa figura F', e para tal utilizaremos aquilo que se designa por uma transformação plana. Depois de ter definido uma transformação qualquer, estudaremos as translações e rotações.

As simetrias serão estudadas no capítulo seguinte.

### 1. Como definir uma transformação?

Seja P um ponto do espaço-visor definido pelas suas coordenadas x e y relativamente ao sistema de coordenadas cartesiano.

Escolhamos duas funções numéricas f e g das variáveis x e y e façamos  $x' = f(x,y)$ ,  $y' = g(x,y)$ .

Associado ao ponto  $P=(x,y)$  o ponto  $P'=(x',y')$ , definimos uma transformação plana da maneira mais geral possível.

As propriedades de uma tal transformação dependem evidentemente da escolha das funções f e g.

Vamos dar alguns exemplos construindo em todos os casos a imagem de um círculo.

### Exemplo 1

Escolhamos um círculo de centro  $C = (128, 88)$  e de raio  $R = 80$ .

Façamos

$$f(x,y) = x + \sqrt{y} \quad \text{e} \quad g(x,y) = \frac{10x}{y}$$

```
10 INPUT "R? "; r
20 CIRCLE 128,88,r
30 FOR t=0 TO 2*PI STEP .05
40 LET x=128+r#COS t
50 LET y=88+r#SIN t
60 PLOT x+SQR y,10*x/y
70 NEXT t
```

Vejam os o círculo e a sua transformada:

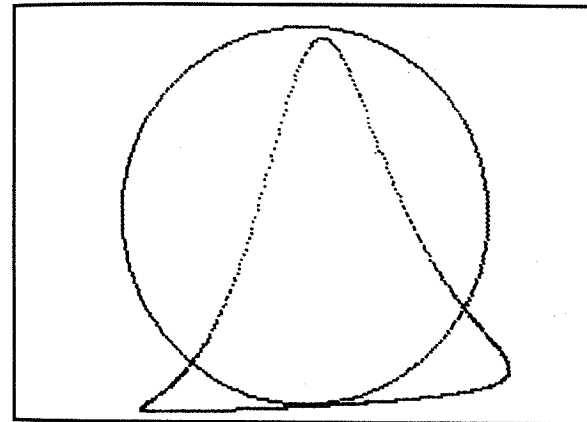


Figura 117

### Exemplo 2

Escolhamos um círculo de centro  $C = (128, 88)$ , de raio  $R=60$ .

Façamos

$$f(x,y) = \frac{x + y}{2} \quad \text{e} \quad g(x,y) = 50 \sqrt{\frac{x}{y}}$$

```

10 INPUT "R?" ;r
20 CIRCLE 128,88,r
30 FOR t=0 TO 2*PI STEP .01
40 LET x=128+r*cos t
50 LET y=88+r*sin t
60 PLOT (x+4)/2,88*50R (x/y)
70 NEXT t

```

Obtemos o desenho seguinte:

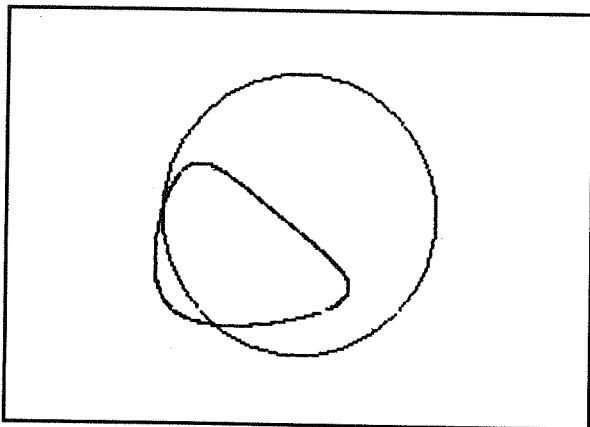


Figura 118

*Exemplo 3*

Escolhamos uma vez mais um círculo de centro (128, 88), de raio igual a 40, e façamos

$$f(x,y) = |x - y|$$

e

$$g(x,y) = \frac{xy}{200}$$

```

10 INPUT "R?" ;r
20 CIRCLE 128,88,r
30 FOR t=0 TO 2*PI STEP .01
40 LET x=128+r*cos t
50 LET y=88+r*sin t
60 PLOT (x+4)/2,88*50R (x/y)
70 NEXT t

```

Obteremos:

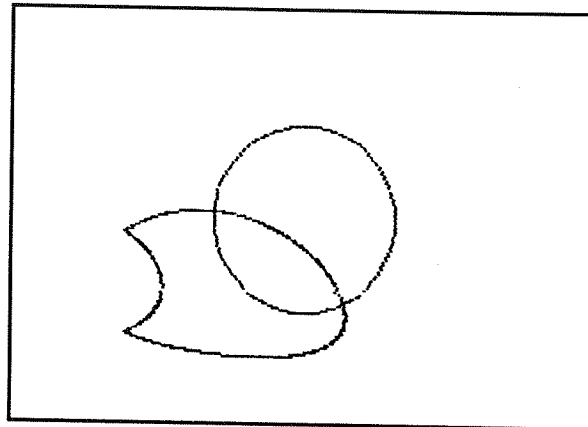


Figura 119

**2. As translações**

2.1 Uma translação permite deslocar a figura F sobre o visor.

Uma tal transformação conserva a forma e as dimensões de F; em particular, a imagem de uma recta continua a ser uma recta, e a de um círculo, um círculo.

Podemos portanto manter o uso das instruções DRAW e CIRCLE.

2.2 Definiremos uma translação da maneira seguinte: se  $\vec{v}$  é um vector escolhido previamente, associaremos o ponto P' ao ponto P considerando  $\vec{PP'} = \vec{v}$ .

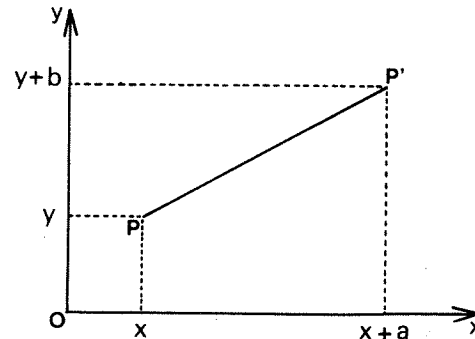


Figura 120

Pode então escrever-se  $x'=x+a$  e  $y'=y+b$ , representando os números  $a$  e  $b$  as coordenadas do vector  $\vec{v}$ .

### 2.3 Exemplos

Consideremos uma elipse de eixo maior igual a 100 e eixo menor igual a 60; o centro desta elipse terá as coordenadas 100 e 80.

O desenho seguinte mostra-nos esta elipse e a sua imagem obtida pela translação de vector  $\vec{v} = (20,10)$ .

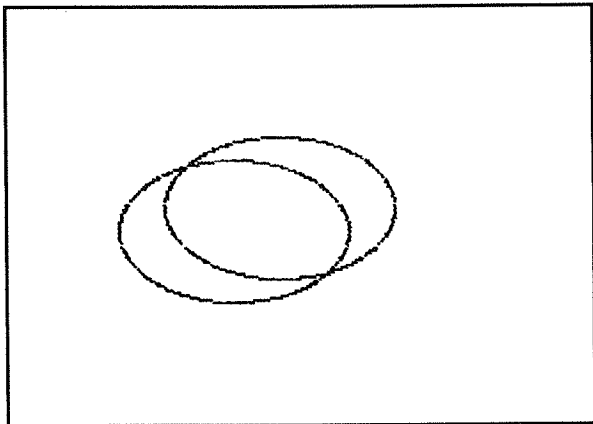


Figura 121

O programa é o seguinte:

```
10 FOR t=0 TO 2*PI STEP .1
20 LET X=100+50*COS t
30 LET Y=80+30*SIN t
40 PLOT X,Y
50 PLOT X+20,Y+10
60 NEXT t
```

Se se deseja traçar o segmento  $PP'$  que liga um ponto  $P$  da elipse à sua imagem  $P'$ , basta substituir a linha 50 do programa anterior pela seguinte:

```
50 PLOT X,Y: DRAW 20,10
```

Obteremos então o desenho:

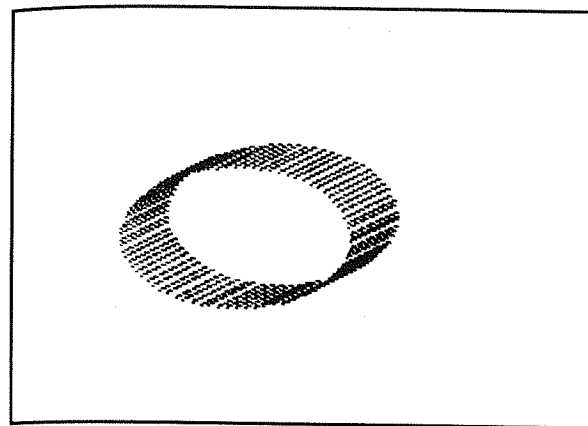


Figura 122

Consideremos agora a curva «trifólio» apresentada no Capítulo 14.

O desenho que se segue mostra-nos esta curva e a sua imagem na translação de vector  $\vec{v} = (8,10)$ :

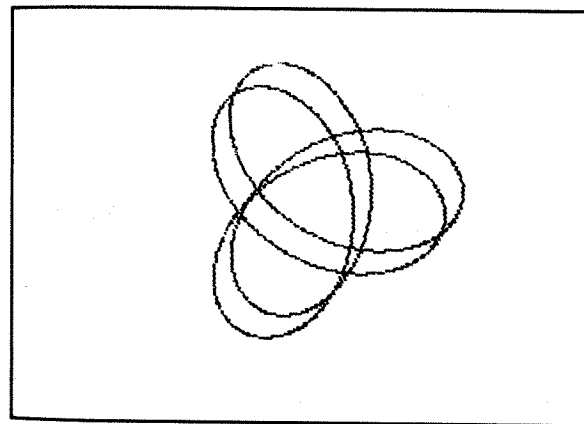


Figura 123

Obtém-se assim uma espécie de uma fita, em perspectiva.

O programa é o seguinte:

```
10 FOR t=0 TO 2*PI STEP .01
20 LET X=128+40*COS (2*t)-20*C
08 t
```

```

30 LET y=88+40*SIN (2*t)+20*SI
N 1
40 PLOT x,y
50 PLOT x+8,y+10
60 NEXT t

```

### 3. As rotações

Sendo escolhidos um ponto C e um ângulo  $\theta$ , uma rotação  $(C, \theta)$  permite rodar uma figura F de um ângulo  $\theta$  em torno do ponto C.

Uma tal transformação conserva também a forma e as dimensões da figura F.

3.2 Suponhamos que o centro C de rotação coincide com a origem O do sistema de coordenadas escolhido:

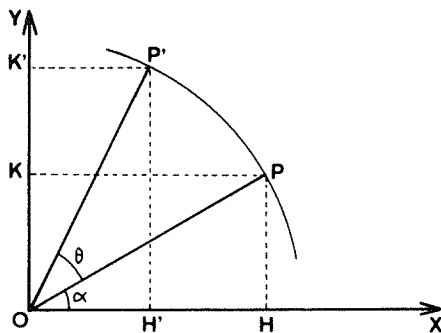


Figura 124

Teremos

$$\overline{OH'} = OP' \cos (\theta + \alpha) = OP \cos (\theta + \alpha)$$

dado que  $OP = OP'$ .

Resulta daqui que

$$\overline{OH'} = OP (\cos \theta \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha)$$

ou seja,

$$\overline{OH'} = OP \cos \theta \cos \alpha - OP \sin \theta \sin \alpha = x'$$

Como

$$OP \cos \alpha = \overline{OH} = x$$

e

$$OP \sin \alpha = \overline{OK} = y$$

obtém-se

$$x' = x \cos \theta - y \sin \theta$$

Do mesmo modo,

$$y' = x \sin \theta + y \cos \theta$$

3.3 No caso geral, C não coincide necessariamente com O. Se am  $x_c$  e  $y_c$  são as coordenadas de C.

Teremos então

$$x' = x_c + (x - x_c) \cos \theta - (y - y_c) \sin \theta$$

$$y' = y_c + (x - x_c) \sin \theta + (y - y_c) \cos \theta$$

3.4 *Exemplos: polígonos regulares*

Consideremos um polígono regular de centro  $C = (x_c, y_c)$  e de n lados.

Sejam  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$  os vértices deste polígono.

Cada vértice é deduzido do precedente por uma rotação de centro C, de um ângulo  $\theta = \frac{2\pi}{n}$

1) Inscrevemos um tal polígono num círculo de centro C e um raio R.

O programa é o seguinte:

```

10 INPUT "Raio do círculo circ
unscrito: "; "R="; r
20 INPUT "Coordenadas do centr
o: "; "X="; xc, "Y="; yc
30 INPUT "Número de lados? "; n
40 DIM x(n+1)
50 DIM y(n+1)
60 LET x(1)=xc+r
70 LET y(1)=yc
80 LET x(n+1)=x(1)
90 LET y(n+1)=y(1)
100 LET a=2*PI/n
110 FOR i=2 TO n
120 LET x(i)=xc+(x(i-1)-xc)*COS
a-(y(i-1)-yc)*SIN a
130 LET y(i)=yc+(x(i-1)-xc)*SIN
a+(y(i-1)-yc)*COS a
140 NEXT i
150 FOR i=1 TO n
160 PLOT x(i),y(i); DRAW x(i+1)
-x(i),y(i+1)-y(i)
170 NEXT i

```

Para n=7, obtemos:

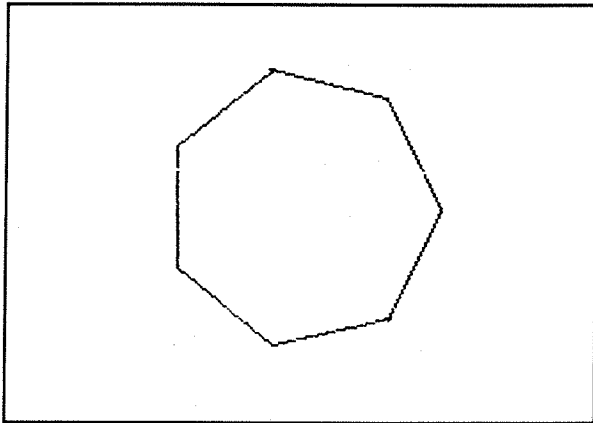


Figura 125

2) Juntamos os vértices de um polígono regular de dois em dois por um arco de círculo com a medida  $\pi \cdot 1 - \left(\frac{2}{n}\right)$ :

obteremos então uma rosácea.

Vejam os alguns exemplos de rosáceas:

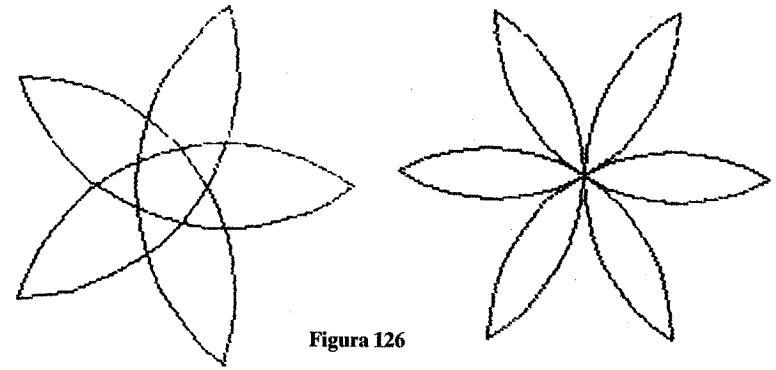


Figura 126

O programa é o seguinte:

```

10 INPUT "Raio do círculo circ
unscrito: "; "R="; r
20 INPUT "Coordenadas do centr
o: "; "X="; xc, "Y="; yc
30 INPUT "Número de lados? "; n
40 DIM x(n+1)
50 DIM y(n+1)
60 LET x(1)=xc+r
70 LET y(1)=yc
80 LET x(n+1)=x(1)
90 LET y(n+1)=y(1)
100 LET a=2*PI/n
110 FOR i=2 TO n
120 LET x(i)=xc+(x(i-1)-xc)*COS
a-(y(i-1)-yc)*SIN a
130 LET y(i)=yc+(x(i-1)-xc)*SIN
a+(y(i-1)-yc)*COS a
140 NEXT i
150 FOR i=1 TO n-1
160 PLOT x(i),y(i); DRAW x(i+2)
-x(i),y(i+2)-y(i),-PI*(1-2/n)
170 NEXT i
180 PLOT x(n),y(n); DRAW x(2)-x
(n),y(2)-y(n),-PI*(1-2/n)

```

3) Apresentamos agora um programa que permite traçar as diagonais de um polígono regular:

```

10 INPUT "Número de lados? "; n
20 INPUT "Raio do círculo? "; r
30 INPUT "Coordenadas do centr
o? "; "X="; xc, "Y="; yc

```



```

40 DIM X(N)
50 DIM Y(N)
60 LET C=COS (2*PI/N)
70 LET S=SIN (2*PI/N)
80 LET X(1)=X0+C*r
90 LET Y(1)=Y0+S*c
100 FOR I=2 TO N
110 LET X(I)=XC+(X(I-1)-XC)*C-(
Y(I-1)-YC)*S
120 LET Y(I)=YC+(X(I-1)-XC)*S+(
Y(I-1)-YC)*C
130 NEXT I
140 FOR I=1 TO N
150 FOR J=1 TO N
160 PLOT X(I),Y(I): DRAW X(J)-X
(I),Y(J)-Y(I)
170 NEXT J
180 NEXT I

```

Vejamos o resultado obtido para  $n=11$ :

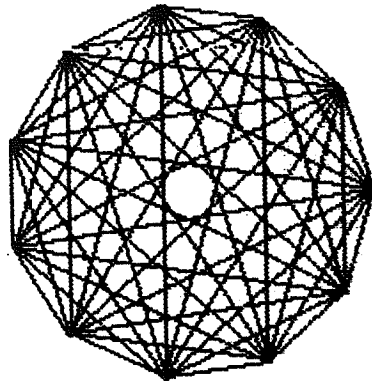


Figura 127

#### 4. Exercícios

Construa os programas que permitem obter os desenhos seguintes:

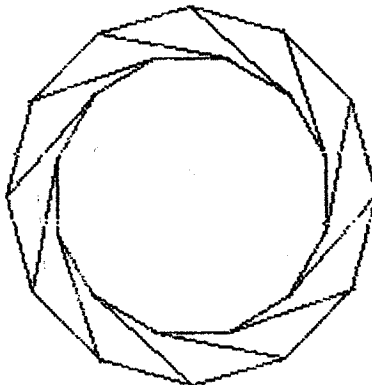


Figura 128

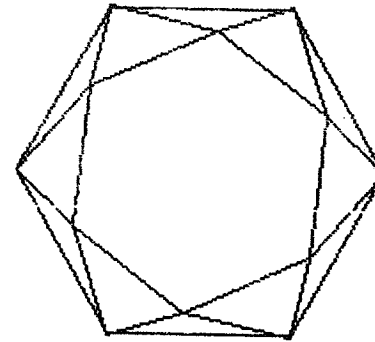


Figura 129

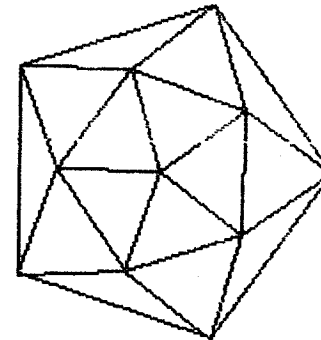


Figura 130

## SIMETRIAS E MUDANÇAS DE ESCALA

As simetrias e as homotetias constituem dois tipos particulares de transformações planas.

As simetrias, centrais ou axiais, são já bastante conhecidas; as segundas, talvez um pouco menos conhecidas, permitem obter ampliações ou reduções.

Evocaremos igualmente neste capítulo uma aplicação da homotetia.

### 1. As simetrias centrais

1.1 Seja  $C=(x_c, y_c)$  um ponto qualquer do espaço-visor. Associemos a cada ponto  $M=(x, y)$  do espaço-visor um ponto  $M'=(x', y')$  de tal modo que  $C$  seja o ponto intermédio do segmento  $MM'$ .

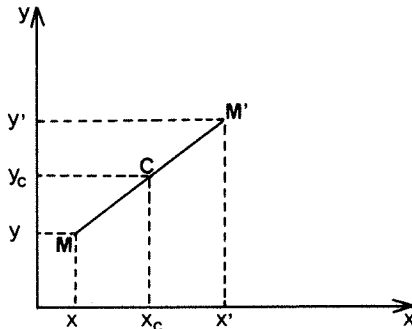


Figura 131

Define-se assim uma simetria de centro  $C$ : trata-se de uma transformação plana conservando a forma e as dimensões de uma figura.

$$1.2 \quad \vec{CM}' = \vec{MC}; \text{ tira-se daqui que}$$

$$\vec{CO} + \vec{OM}' = \vec{MO} + \vec{OC}$$

donde

$$\vec{OM}' = 2\vec{OC} - \vec{OM}.$$

Conclui-se então que

$$x' = 2x_c - x$$

e

$$y' = 2y_c - y$$

### 1.3 Exemplo

Seja  $A$  um arco de curva definido, para  $20 \leq x \leq 110$ , por  $y = 90 - 40 \sin\left(\frac{\pi x}{30}\right)$ . Traçaremos um certo número de pontos de  $A$  e seus simétricos relativamente ao ponto  $(128, 88)$ . O programa é o seguinte:

```
10 FOR x=20 TO 110
20 LET y=90-40*SIN (PI*x/30)
30 PLOT x,y: DRAW 128-x,88-y
40 PLOT 256-x,176-y: DRAW x-128,4-88
50 NEXT x
```

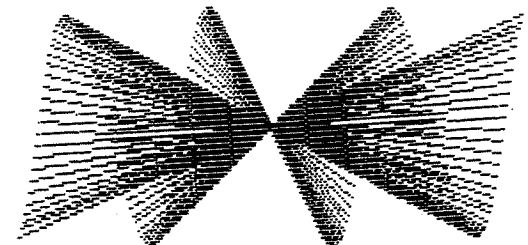


Figura 132

## 2. As simetrias axiais

2.1 Seja  $\Delta$  uma recta do plano, M um ponto do plano, e H a projecção ortogonal de M sobre  $\Delta$ .

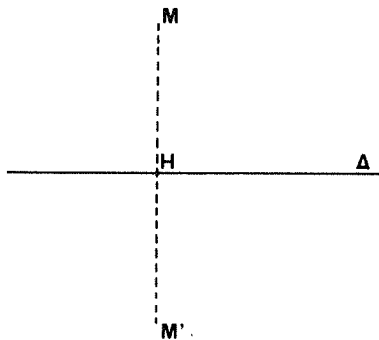


Figura 133

Associemos a M o ponto  $M'$ , tal que H seja o ponto intermédio de  $MM'$ : definiremos assim uma simetria ortogonal de eixo  $\Delta$ .

Trata-se de uma transformação plana que conserva a forma e as dimensões de uma figura, mas inverte o sentido do percurso de uma linha fechada:

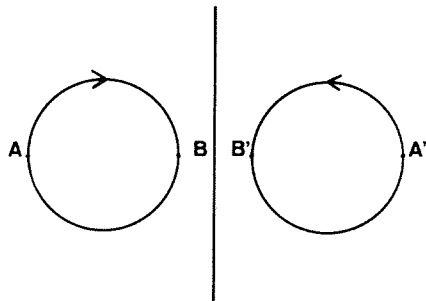


Figura 134

2.2 Designemos por  $x$  e  $y$  as coordenadas de M, por  $x'$  e  $y'$  as de  $M'$ , por  $x_H$  e  $y_H$  as de H, projecção ortogonal de M sobre  $\Delta$  e ponto intermédio de  $MM'$ .

De

$$x_H = \frac{x + x'}{2}$$

e

$$y_H = \frac{y + y'}{2}$$

tira-se

$$x' = 2x_H - x$$

e

$$y' = 2y_H - y$$

Convém distinguir dois casos conforme  $\Delta$  é ou não paralelo ao eixo dos  $yy$ :

Primeiro caso:  $\Delta$  é paralelo ao eixo dos  $yy$ .

Teremos  $y = y_H = y'$ ; a equação de  $\Delta$  é da forma  $x = \text{constante } x_0$ ; obtém-se  $x' = 2x_0 - x$  e  $y' = y$ .

Segundo caso:  $\Delta$  não é paralela ao eixo dos  $yy$ . A sua equação é então da forma  $y = ax + b$ .

Segundo as equações do capítulo 4, obtém-se:

$$x_H = \frac{ay + x - ab}{1 + a^2}$$

e

$$y_H = \frac{a^2y + ax + b}{1 + a^2}$$

É então fácil de calcular

$$x' = 2x_H - x$$

e

$$y' = 2y_H - y$$

## 2.3 Exemplos

1.º:

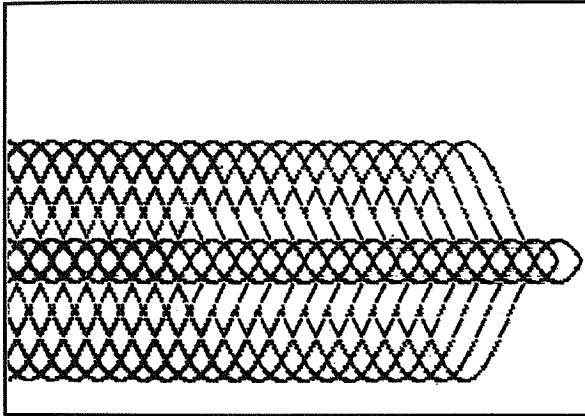


Figura 135

```
10 FOR c=0 TO 150 STEP 5
20 FOR x=00 TO 120
30 LET y=80+30*SIN (PI*x/40)
40 PLOT x,y
50 PLOT M*c+x,y
60 PLOT x,134-y
70 PLOT M*c+x,134-y
80 NEXT x
90 NEXT c
```

A figura seguinte foi obtida por simetrias axiais a partir deste arco:

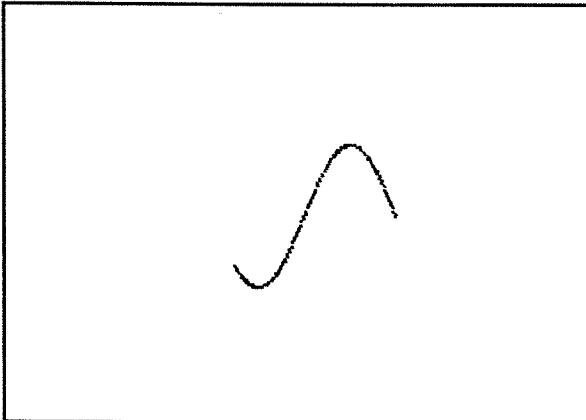


Figura 136

2.º: Seja C uma espiral de Arquimedes (ver o capítulo 17). O desenho seguinte mostra esta espiral assim como as suas simetrias relativamente a cada um dos eixos Ox e Oy:

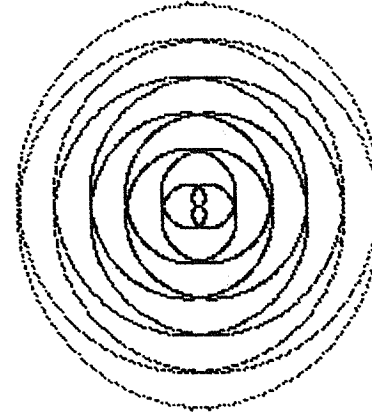


Figura 137

O programa retoma o do capítulo 17, parágrafo 2.1, com três linhas suplementares:

```
10 FOR t=0 TO 17.32 STEP .02
20 LET r=0*t
30 LET x=r#COS t
40 LET y=r#SIN t
50 PLOT 1000+x,000+y
60 PLOT 1000-x,000+y
70 PLOT 1000-x,000-y
80 PLOT 1000+x,000-y
90 NEXT t
```

### 3. As homotetias

3.1 Seja C um ponto do plano e seja k um número qualquer. A qualquer ponto  $M = (x,y)$  do plano associemos o ponto  $M' = (x',y')$  definido por  $\overline{CM'} = k\overline{CM}$ .

Definimos assim uma homotetia de centro C e razão k.

Esta transformação k plana conserva a forma de uma figura, mas permite modificar as suas dimensões: para  $|k| > 1$ , obtém-se uma ampliação enquanto que, para  $|k| < 1$  se obtém uma redução.

3.2 Calculemos  $x'$  e  $y'$ :

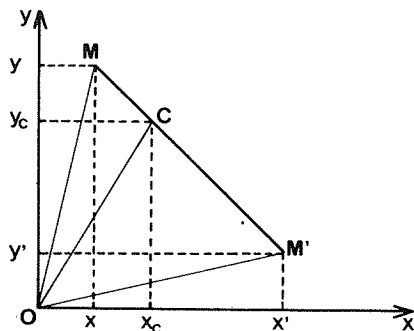


Figura 138

$$\vec{OM}' = \vec{OC} + \vec{CM}' = \vec{OC} + k\vec{CM} = \vec{OC} + k\vec{CO} + k\vec{OM}$$

Obtém-se assim

$$\vec{OM}' = (1 - k) \vec{OC} + k\vec{OM}$$

donde

$$x' = kx + (1 - k) x_c$$

e

$$y' = ky + (1 - k) y_c.$$

### 3.3 Exemplo

Seja EFG um triângulo equilátero de centro  $C = (128,88)$ , cujo lado mede 60 unidades de comprimento.

Se se considera  $x_E = 98$ , um cálculo elementar mostra que  $y_E = 71$ ,  $x_F = 158$ ,  $y_F = 71$ ,  $x_G = 128$  e  $y_G = 122$ . O programa que se segue permite obter uma série de triângulos, todos homotéticos relativamente a EFG e ao centro C, com razões k compreendidas entre -2 e +2 (com um passo de 0,25):

```

10 LET xa=98
20 LET ya=71
30 LET xb=158
40 LET yb=71
50 LET xc=128

```

```

60 LET k=1.25
70 FOR k=-2 TO 2
80 PLOT k*xb-(k-1)*xb, k*yb-(k-1)*yb, k*xg-(k-1)*xg, k*yg-(k-1)*yg
-1)*xb: DRAW k*(xg-xb), k*(yg-yb), k*(xc-xb), k*(yc-yb)
80 PLOT k*xb-(k-1)*xb, k*yb-(k-1)*yb, k*xg-(k-1)*xg, k*yg-(k-1)*yg
-1)*xb: DRAW k*(xg-xb), k*(yg-yb), k*(xc-xb), k*(yc-yb)
100 PLOT k*xb-(k-1)*xb, k*yb-(k-1)*yb, k*xg-(k-1)*xg, k*yg-(k-1)*yg
-1)*xb: DRAW k*(xg-xb), k*(yg-yb), k*(xc-xb), k*(yc-yb)
110 NEXT k

```

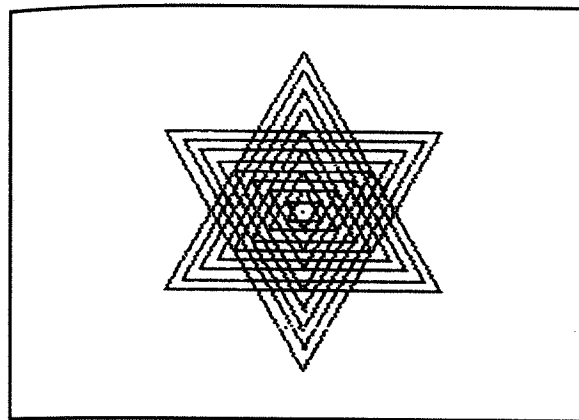


Figura 139

## 4. O método do quadrado

Trata-se de um método muito antigo utilizado para reproduzir um desenho a uma escala previamente definida.

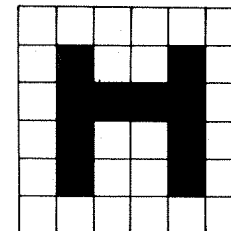
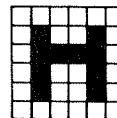


Figura 140

Como se vê nos desenhos da figura anterior, utiliza-se de facto uma homotetia seguida de uma translação (ou, eventualmente, de uma rotação).

Vejamos um exemplo de uso deste método.  
Consideremos o desenho seguinte:

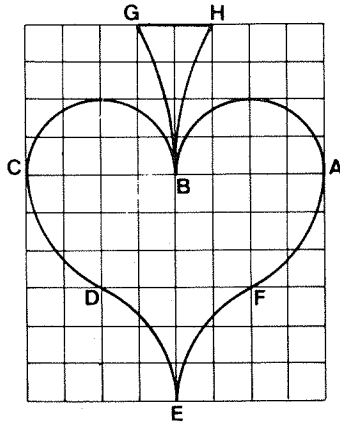


Figura 141

Este desenho compreende 8 arcos de círculo e um segmento:

- Os dois semicírculos  $\widehat{AB}$  e  $\widehat{BC}$ ;
- Os quatro arcos  $\widehat{CD}$ ,  $\widehat{DE}$ ,  $\widehat{EF}$  e  $\widehat{FA}$ . Cada um destes arcos tem como medida o ângulo  $\varphi$  definido por  $\text{tg } \varphi = 6/4$ ; ter-se-á portanto  $\varphi = \text{arc tg } 1,5$ ;
- os dois arcos  $\widehat{BH}$  e  $\widehat{BG}$  cuja medida foi fixada arbitrariamente em  $\pi/6$ ;
- o segmento GH.

Seja  $u$  o comprimento de um quadrado: se se designam as coordenadas de E por  $x$  e  $y$ , é fácil de ler no desenho as coordenadas dos pontos úteis ao traçado em função  $x$ ,  $y$  e  $u$ . O programa a usar é o seguinte:

```

10 LET x=128
20 LET y=20
30 INPUT "Unidade de comprimento?":u
40 LET f=ATN 1.5
50 PLOT x,y: DRAW 2*u,3*u,-f
60 PLOT x+2*u,y+3*u: DRAW 2*u,3*u,f
70 PLOT x+4*u,y+6*u: DRAW -4*u,0,P
80 PLOT x,y+6*u: DRAW -4*u,0,P

```

```

90 PLOT x-4*u,y+6*u: DRAW 2*u,
-3*u,f
100 PLOT x-2*u,y+3*u: DRAW 2*u,
-3*u,-f
110 PLOT x,y+6*u: DRAW -u,4*u,P
I/6
120 PLOT x,y+6*u: DRAW u,4*u,-P
I/6
130 PLOT x-u,y+10*u: DRAW 2*u,0

```

Para  $u=12$ ,  $x=128$  e  $y=20$ , obtém-se:

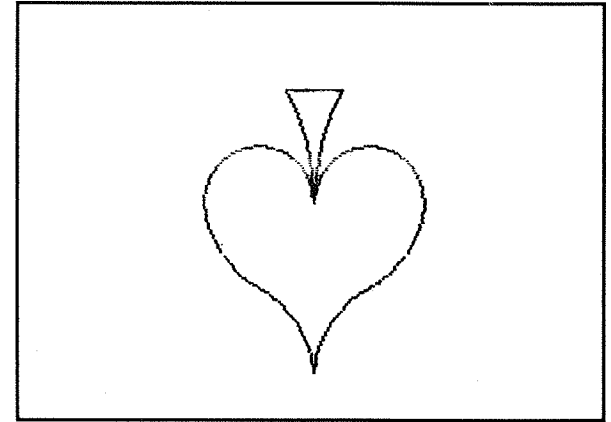


Figura 142

Se se incrementa  $x$  e  $y$  graças a dois ciclos, pode-se repetir o motivo:

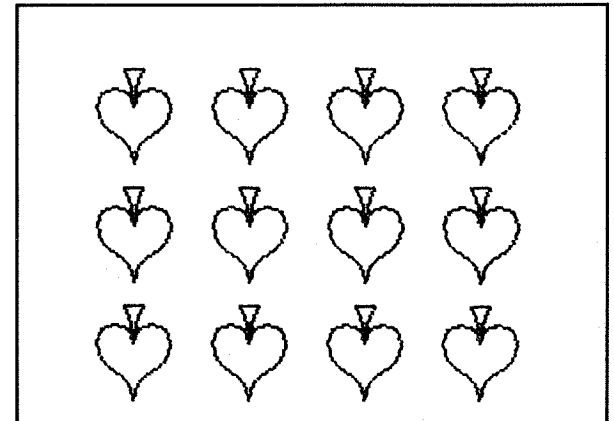


Figura 143

## REDES, TABULEIROS

Neste capítulo realizaremos grafismos juntando transformações planas.

Uma primeira transformação  $T_1$  faz corresponder o ponto  $P_1$  ao ponto  $P_0$ ; uma segunda transformação  $T_2$  fará corresponder o ponto  $P_2$  ao ponto  $P_1$ :

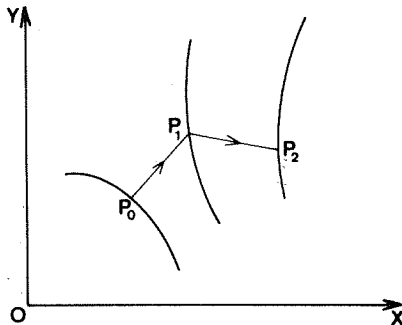


Figura 144

No parágrafo 1, juntaremos uma translação e uma simetria axial.

No parágrafo 3, juntaremos uma homotetia e uma rotação.

### 1. As redes

1.1 Consideremos uma rede de  $n \times n$  casas; cada uma destas é um quadrado cujo lado tem o comprimento  $L$ .

O princípio utilizado para desenhar uma rede deste tipo é o seguinte: coloca-se o canto inferior desta em  $(0,0)$ , traça-se a rede e em seguida desloca-se esta rede sobre o visor graças a uma translação.

A escolha inicial do ponto  $(0,0)$  permite-nos utilizar uma *simetria* relativamente à primeira bissectriz:

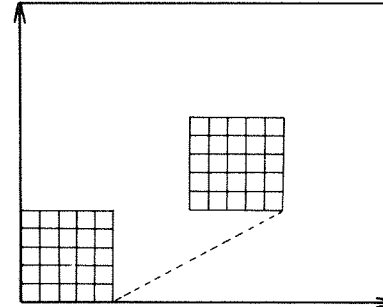


Figura 145

1.2 Pode construir-se a rede utilizando a instrução DRAW:

```

10 INPUT "Largura do quadrado?"
" "
20 INPUT "Numero de quadrados
por linha?" :n
30 INPUT "Coordenadas do canto
inferior esquerdo?": "X= ":xc)
" " : "Y= ":yc
40 FOR x=0 TO n-1 STEP 1
50 PLOT x+xc,yc: DRAW @,n-1
60 PLOT xc,yc+x: DRAW n-1,0
70 NEXT x

```

Notar que  $x_0$  e  $y_0$  designam as coordenadas do canto inferior esquerdo da rede.

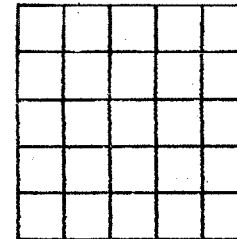


Figura 146

A título de exemplo, vimos uma rede de 25 casas com  $x_0 = 40$ ,  $y_0 = 30$  e  $L = 20$ .

### 1.3 Poderá ser útil desenhar a mesma rede ponto a ponto:

```

10 INPUT "Largura do quadrado?";l
" ";
20 INPUT "Numero de quadrados
por linhas? ";n
30 INPUT "Coordenadas do canto
inferior esquerdo?";"X= ";xc;
" ";;"Y= ";yc
40 FOR x=0 TO n-1 STEP 1
50 FOR y=0 TO n-1
60 PLOT x+xc,y+yc
70 PLOT y+xc,x+yc
80 NEXT y
90 NEXT x

```

## 2. Tabuleiros de dados

2.1 Para construir um tabuleiro com  $n \times n$  casas, será necessário usar uma rede e escurecer alternadamente as casas.

Numeremos as linhas e colunas do tabuleiro:

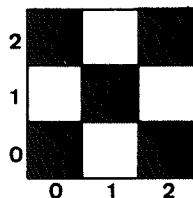


Figura 147

Escurecemos a casa  $(m,k)$  se  $m + k$  for par.

2.2 Para escurecer um quadrado de lado  $C$ , basta traçar verticais por exemplo da esquerda para a direita:

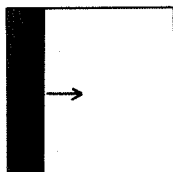


Figura 148

O programa é o seguinte:

```

10 INPUT "Coordenadas do canto
inferior esquerdo?";"X= ";x0;
" ";;"Y= ";y0
20 INPUT "Comprimento do lado?";c
" ";
30 FOR x=x0 TO x0+c
40 PLOT x,y0: DRAW 0,c
50 NEXT x

```

Notar que  $x_0$  e  $y_0$  são ainda as coordenadas do canto inferior esquerdo.

2.3 Vejamos agora o programa completo para a construção do tabuleiro:

```

10 INPUT "Quantas casas por li
nha? ";n
20 INPUT "Coordenadas do canto
inferior esquerdo?";"X= ";x0;
" ";;"Y= ";y0
30 INPUT "Comprimento do lado?";c
" ";
40 FOR m=0 TO n-1
50 FOR k=0 TO n-1
60 LET x=x0+m*c
70 LET y=y0+k*c
80 LET p=(m+k)/2
90 FOR i=x TO x+c
100 IF p=INT p THEN PLOT i,y: D
DRAW 0,c
110 NEXT i
120 NEXT k
130 NEXT m
140 PLOT x0,y0: DRAW 0,n*c: DRA
W n*c,0: DRAW 0,-n*c: DRAW -n*c,0

```

Neste programa,  $m$  e  $k$  designam respectivamente os números de coluna e de linha.

Para  $n = 8$ ,  $c = 15$ ,  $x_0 = 50$  e  $y_0 = 20$ , obteremos o tabuleiro que se segue:



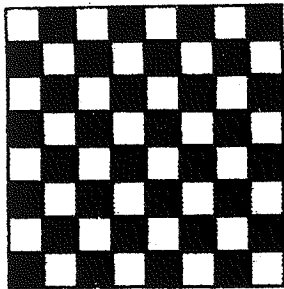


Figura 149

Para inverter a cor das casas, basta trocar, na linha 100, o sinal = por um sinal < > (diferente de):

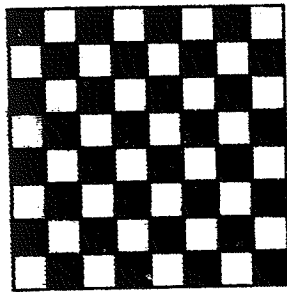


Figura 150

Se se deseja obter casas rectangulares e não quadradas, poderão efectuar-se algumas alterações no programa.

Introduziremos primeiramente uma linha nova (a linha 35, introduzindo modificações ainda nas linhas 30, 70, 100 e 140), que serão substituídas pelas seguintes:

```

10 INPUT "Quantas casas por li
nha? " ; n
20 INPUT "Coordenadas do canto
inferior esquerdo? ", "X= ", x0
" ", "Y= ", y0
30 INPUT "Comprimento da casa? " ; c
" ", "d
35 INPUT "Largura da casa? " ; d
40 FOR m=0 TO n-1
50 FOR k=0 TO n-1
60 LET x=x0+m*c
70 LET y=y0+k*d

```

```

80 LET p=(m+k)/2
90 FOR i=x TO x+c
100 IF p=INT p THEN PLOT i,y: D
DRAW 0,d
110 NEXT i
120 NEXT k
130 NEXT m
140 PLOT x0,y0: DRAW 0,n*d: DRA
W n*c,0: DRAW 0,-n*d: DRAW -n*c,
0

```

A título de exemplo, tomemos  $n = 8$ ,  $c = 15$  e  $d = 10$ :

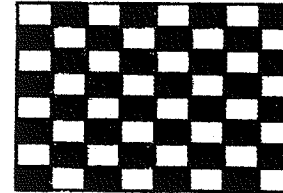


Figura 151

### 3. Redes especiais

3.1 Consideremos uma rede de pontos semelhante à seguinte:

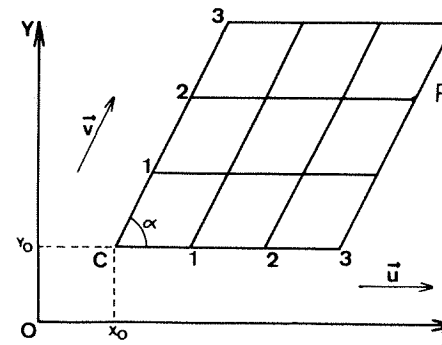


Figura 152

Vamos supor que uma das duas séries de linhas é composta por linhas paralelas ao eixo dos xx.

Uma tal rede pode ser caracterizada pelos dois vectores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  de comprimentos respectivos  $L_1$  e  $L_2$ , pelo ângulo  $\alpha$ , pelas coordenadas  $x_0$  e  $y_0$  do ponto C, e evidentemente pelo número dos seus pontos.

Determinemos as coordenadas de um ponto da rede, por exemplo o ponto P do desenho anterior.

Teremos  $\vec{CP} = 3\vec{u} + 2\vec{v}$  donde, por projecção sobre os eixos,

$$x = x_0 + 3L_1 + 2L_2 \cos \alpha$$

e

$$y = y_0 + 2L_2 \sin \alpha$$

De uma maneira mais geral, qualquer ponto da rede encontra-se na intersecção da linha de ordem  $i$  com a horizontal de ordem  $j$ .

Teremos então

$$x = x_0 + iL_1 + jL_2 \cos \alpha$$

e

$$y = y_0 + L_2 \sin \alpha$$

3.2 Consideremos agora cada um dos pontos da rede como o centro de um polígono regular de  $n$  lados, tendo cada um destes o comprimento  $C$ . O programa que permite traçar esta rede e os polígonos regulares é o seguinte:

```

10 INPUT "Quantos lados? ";n
20 INPUT "Comprimento do lado? ";c
30 INPUT "Coordenadas da origem da rede?";"X=";X0;" "; "Y=";Y0
40 INPUT "Comprimento L1? ";L1
50 INPUT "Comprimento L2? ";L2
60 INPUT "Angulo A (em graus)? ";a
70 LET a=a*PI/180
80 FOR I=0 TO 4
90 FOR J=0 TO 4

```

```

100 LET X=X0+I*L1+J*L2*COS a
110 LET Y=Y0+J*L2*SIN a
120 PLOT X,Y
130 GO SUB 180
140 NEXT J
150 NEXT I
170 GO TO 500
180 LET b=B*PI/n
190 LET V=X-c/2
200 LET W=Y-c/2/TAN (PI/n)
210 LET F=0
220 FOR K=1 TO n
230 PLOT V,W: DRAW c*COS f,c*SI
N F
240 LET V=V+c*COS f
250 LET W=W+c*SIN f
260 LET F=F+b
270 NEXT K
280 RETURN

```

Neste programa, a rotina da linha 180, que permite construir cada um dos polígonos regulares, é retirada do capítulo 5, tendo no entanto sido alterados os nomes das variáveis para evitar confusões.

A variável  $F$  define a inclinação do primeiro lado de cada polígono. Escolhido para ela o valor 0 na linha 210, esta variável pode tomar de facto qualquer valor pretendido.

O número de polígonos traçados foi escolhido arbitrariamente como igual a  $5 \times 4$ , como se vê nas linhas 80 e 90 (variando os índices de 0 a 4).

3.3 Se se escolhe  $L_1$ ,  $L_2$  e  $\alpha$  de uma maneira qualquer, os polígonos sobrepor-se-ão ou, pelo contrário, ficarão afastados uns dos outros:

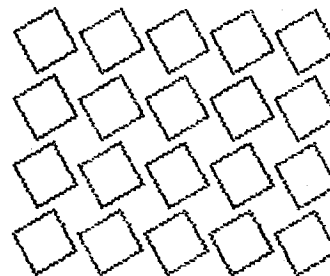


Figura 153

Pelo contrário, para  $L_1$ ,  $L_2$  e  $\alpha$  bem escolhidos, podem obter-se redes contíguas.

Vejamos alguns exemplos:

- 1)  $c=L_1 = L_2= 20$ ,  
 $\alpha = 60^\circ$   
 $n = 3$

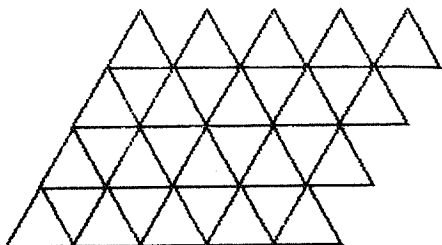


Figura 154

- 2)  $L_1 = L_2 = 2c$   
 $\alpha = 60^\circ$   
 $n = 6$

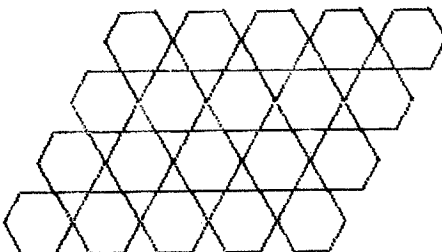


Figura 155

- 3)  $L_1 = L_2 = \frac{c}{t_g(\pi/8)}$   
 $\alpha = 90^\circ$   
 $n = 8$

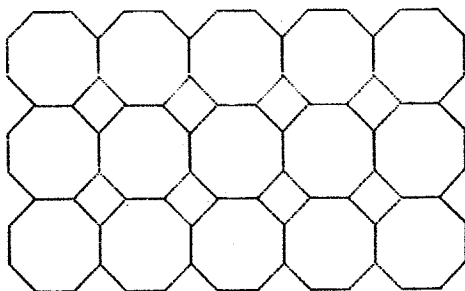


Figura 156

#### 4. Polígonos em espirais

4.1 Seja  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, \dots$  uma sequência de polígonos regulares convexos assim definida:

- Cada polígono tem como centro o ponto  $C = (128,88)$ , e encontra-se inscrito num círculo de raio  $R$ ;
- O polígono  $P_{n+1}$  é deduzido de  $P_n$  graças a uma rotação de ângulo  $\varphi$  e de centro  $C$ , seguida de uma homotetia de relação  $k$  e centro  $C$ , igualmente.

4.2 No programa que se segue, o traçado de cada polígono regular é obtido graças ao programa do capítulo 11, parágrafo 3.4.

A variável  $n$  designará o número de lados de cada polígono,  $f$  o ângulo  $\varphi$  e  $P$  permitirá contar o número de lados já construídos.

```

10 INPUT "Quantos lados? ";n
20 INPUT "Raio do círculo circ
unscrite?";r
30 INPUT "Quantos poligonos? "
;z
40 INPUT "Angulo de rotacao (e
n graus)";f
50 LET f=f*PI/180
60 INPUT "Relacao de homotetia
? ";k
70 LET a=2*PI/n
80 LET c=COS a
90 LET s=SIN a
100 LET p=0
110 DIM x(n+1)
120 DIM y(n+1)
130 LET x(1)=128+r
140 LET y(1)=88
150 LET x(n+1)=x(1)
160 LET y(n+1)=y(1)
170 REM traçado de cada poligon
0
170 FOR i=2 TO n
180 LET x(i)=128+(x(i-1)-128)*c
- (y(i-1)-88)*s
190 LET y(i)=88+(x(i-1)-128)*s+
(y(i-1)-88)*c
200 NEXT i

```

```

010 FOR i=1 TO n
020 PLOT X(i),Y(i): DRAW X(i+1)
-X(i), Y(i+1)-Y(i)
030 NEXT i
040 REM definicao do poligono s
050 CONTINUE
060 LET V=X(i)
070 LET W=Y(i)
080 LET X(i)=128+k*(V-128)*COS
F-k*(W-128)*SIN F
090 LET Y(i)=128+k*(V-128)*SIN F
+k*(W-128)*COS F
100 LET P=P+1
110 IF P<=N THEN GO TO 150

```

4.3 Vejamos alguns resultados obtidos para  $n = 3$ :

- 1)  $r = 25$   
 $\varphi = 8^\circ$   
 $k = 1.05$

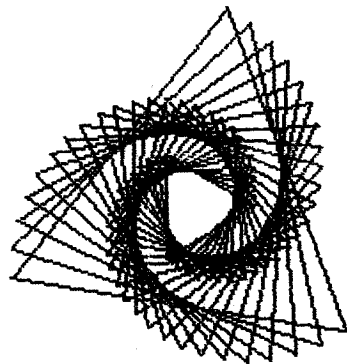


Figura 157

- 2)  $r = 25$   
 $\varphi = 60^\circ$   
 $k = 1,1$

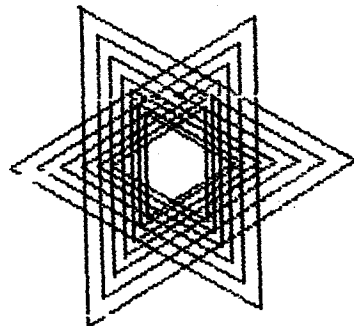


Figura 158

- 3)  $r = 65$   
 $\varphi = 45^\circ$   
 $k = 1$

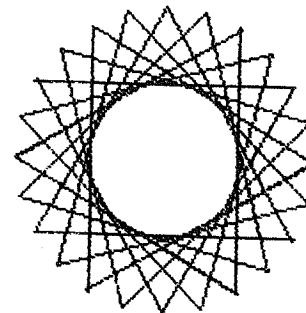


Figura 159

## 5. Exercícios

5.1 No programa do parágrafo 2.3 acrescentemos a seguinte linha:

```
35 INPUT "D: ";D
```

Suprimimos a linha 140 e substituímos, na linha 110, DRAW O,C por DRAW O,D.

Experimentemos em particular os valores  $n = 8$ ,  $x_0 = 50$ ,  $y_0 = 0$ ,  $d = 25$  e  $c = 15$ .

5.2 Execute o programa do parágrafo 4.2 para  $n = 4$ ,  $n = 5$ ,  $n = 6$ ,  $n = 8$ ,  $n = 12$ .

5.3 Obteremos uma rede hexagonal fazendo

$$\varphi = \frac{\pi}{6}$$

$$L_1 = L_2 = c \sqrt{3}$$

e

$$\alpha = 60^\circ$$

Notar que  $\varphi$  corresponde à variável F do programa do parágrafo 3.2

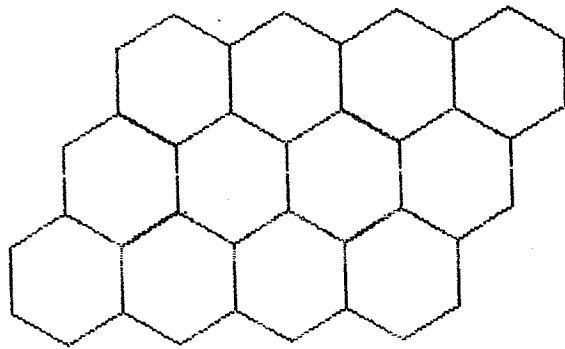


Figura 160

Experimente escurecer os hexágonos alternadamente.

5.4 Construindo uma rede dupla, pode obter-se uma divisão de plano composta por dois tipos de quadrados:

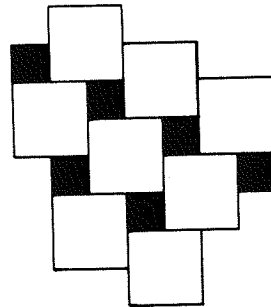


Figura 161

Será possível obter este resultado com uma única rede?

5.5 Considerando como centros os pontos de uma rede e escolhendo um raio igual a  $L_1/2$ , construa as figuras seguintes:

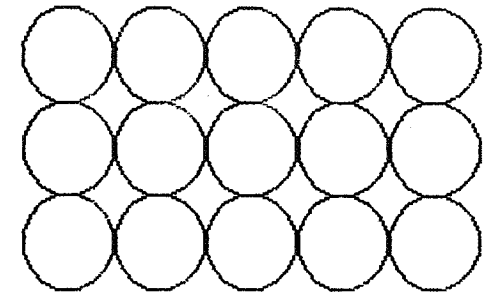


Figura 162

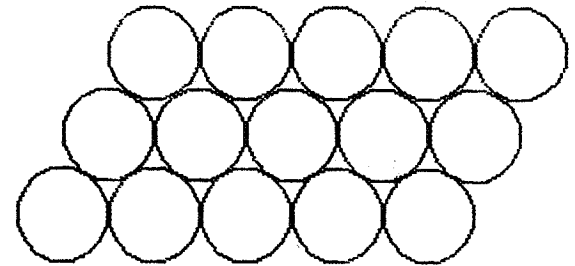


Figura 163

5.6 Desenhe a malha seguinte:

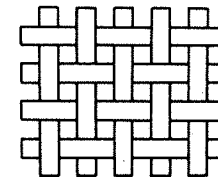


Figura 164

## REPRESENTAÇÃO PARAMÉTRICA DE UMA CURVA

### 1. Definição

Seja  $M$  um ponto qualquer de uma curva  $C$  e sejam  $x$  e  $y$  as coordenadas desse ponto  $M$  relativamente a um sistema de coordenadas cartesianas:

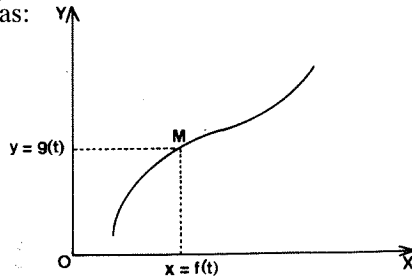


Figura 165

Suponhamos que  $x$  e  $y$  são funções de um mesmo número  $t$ :  $x = f(t)$  e  $y = g(t)$ .

Dispõe-se então de uma representação paramétrica da curva  $C$ .

O parâmetro da representação pode receber diversas interpretações: pode tratar-se de um tempo, de um ângulo ou de qualquer outra grandeza.

### 2. Rectas, círculos e elipses

As representações paramétricas destas curvas foram já indicadas no Capítulo 3 no caso das rectas, no capítulo 7 no dos círculos e no capítulo 9 no das elipses.

## 3. Algumas curvas clássicas

### 3.1. A Hipociclóide

A hipociclóide de quatro pontas foi particularmente estudada nos séculos XVII e XVIII.

Vejamus uma definição geométrica simples desta curva:

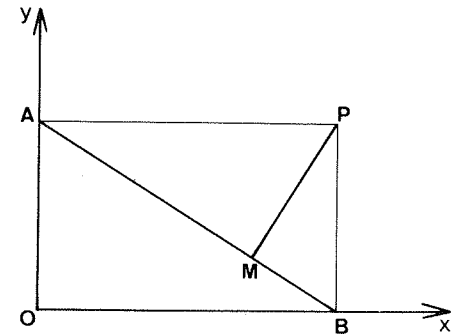


Figura 166

$AB$  é um segmento de comprimento constante  $R$ , construído de tal forma que  $A$  pertença ao eixo dos  $yy$  e  $B$  ao eixo dos  $xx$ .

O ponto  $M$ , projecção de  $P$  sobre  $AB$ , descreve uma hipociclóide de equações:

$$\begin{aligned}x &= R \cos^3 t \\y &= R \sin^3 t\end{aligned}$$

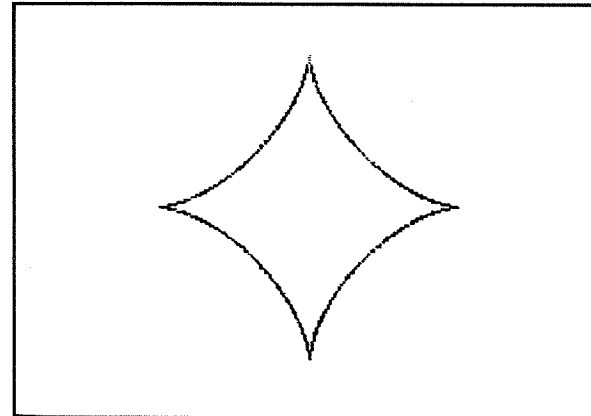


Figura 167

O programa é o seguinte:

```

10 INPUT "R= "; R
20 FOR t=0 TO PI STEP .01
30 LET c=COS t
40 LET s=SEN t
50 LET x=R*c*c*c
60 LET y=R*s*s*s
70 PLOT 100+x,100+y
80 PLOT 100+x,100-y
90 NEXT t

```

### 3.2. O trifólio regular

Consideremos um círculo de centro O e raio R. Marquemos neste círculo dois pontos M e N tais que o arco  $\widehat{AM}$  tenha um comprimento duplo do do arco  $\widehat{AN}$ .

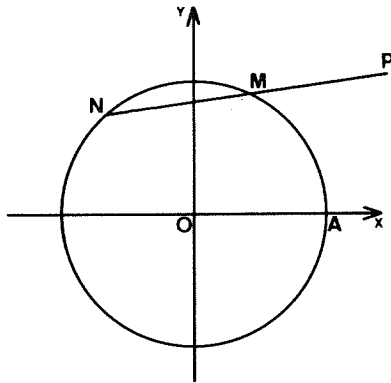


Figura 168

$$\widehat{AM} = 2 \times \widehat{AN}$$

O ponto P, simétrico de N relativamente a M, descreve uma curva designada trifólio regular:

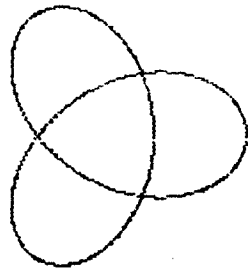


Figura 169

Esta curva, estudada nos finais do século XIX, inspirou muitos pintores e outros artistas, em particular Escher.

A representação do trifólio regular é:

$$x = 2R \cos 2t - R \cos t$$

e

$$y = 2R \sin 2t + R \sin t$$

```

10 INPUT "R= "; R
20 FOR t=0 TO PI STEP .01
30 LET x=2*R*COS (2*t)-R*COS t
40 LET y=2*R*SEN (2*t)+R*SEN t
50 PLOT 100+x,100+y
60 PLOT 100+x,100-y
70 NEXT t

```

### 3.3. A quártica piriforme

Tracemos um círculo de diâmetro OA = a e uma paralela ao eixo dos yy passando pelo ponto B. Seja b a abcissa deste ponto. Uma recta  $\Delta$  qualquer passando pela origem O corta esta paralela em M e o círculo em N:

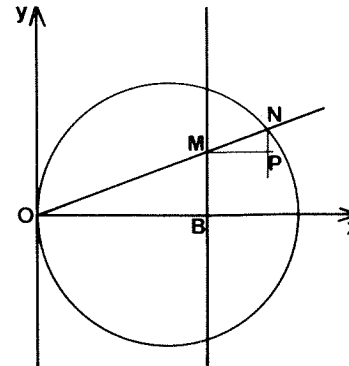


Figura 170

O ponto P descreve uma curva de equações:

$$x = a \cos^2 t \quad e \quad y = \cos^3 \sin t$$

Esta curva, a quártica piriforme, é devida ao matemático inglês Wallis (1616-1703).

```

10 INPUT "A=" ;A
20 INPUT "B=" ;B
30 FOR t=0 TO PI/2 STEP .01
40 LET c=#COS t
50 LET s=#SIN t
60 LET x=#A*c*c*c
70 LET y=#B*c*c*s
80 PLOT x,y
90 PLOT x,y,0.0001
100 NEXT t

```

Vejamos o traçado obtido para a = 100 e b = 150:

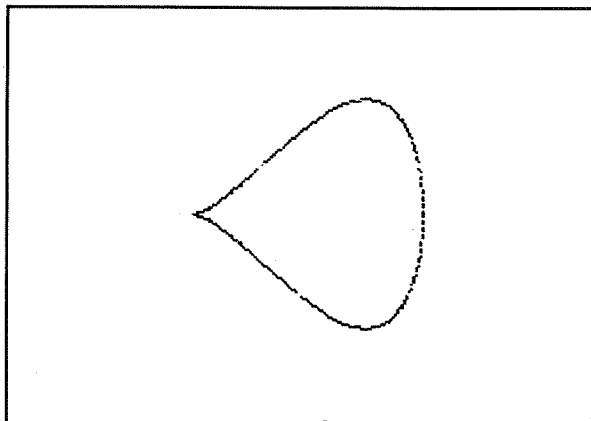


Figura 171

```

50 PLOT 14
60 PLOT 1400
70 PLOT 140000
80 PLOT 1400000
90 PLOT 14000000
NEXT t

```

Com R = 60, obteremos:

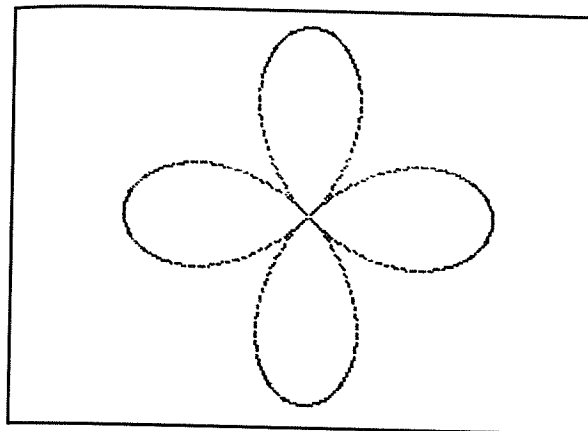


Figura 172

### 3.4. O trevo de quatro folhas

Esta curva admite como representação paramétrica:

$$\begin{aligned}
 x &= R \cos t \cos 2t \\
 y &= R \sin t \cos 2n t
 \end{aligned}$$

O programa correspondente é o seguinte:

```

10 INPUT "R=" ;R
20 FOR t=0 TO PI/2 STEP .01
30 LET x=#COS t*#COS (2*t)
40 LET y=#SIN t*#COS (2*n*t)

```

## 4. As famílias de curvas

Podemos definir todo um conjunto de curvas introduzindo um ou vários parâmetros suplementares nas equações.

### 4.1. As curvas de Lissajous

Sejam m e n dois inteiros que escolheremos não nulos.

Façamos  $x = a \sin mt$  e  $y = b \sin nt$ , sendo os números a e b escolhidos arbitrariamente.

Definiremos assim uma família de curvas, as curvas de Lissajous, bem conhecidas das pessoas ligadas à electrónica.

As formas destas curvas dependem evidentemente de m e de n.

Eis o programa que permite construir estas curvas:

```

10 INPUT "M=" ;M
20 INPUT "N=" ;N
30 INPUT "A=" ;A
40 INPUT "B=" ;B

```



```

60 FOR t=0 TO 2*PI STEP .01
70 LET x=0
80 LET y=0
90 PLOT 100+x,100+y
100 NEXT t

```

Em seguida, a título de exemplo, apresentamos duas curvas de Lissajous:

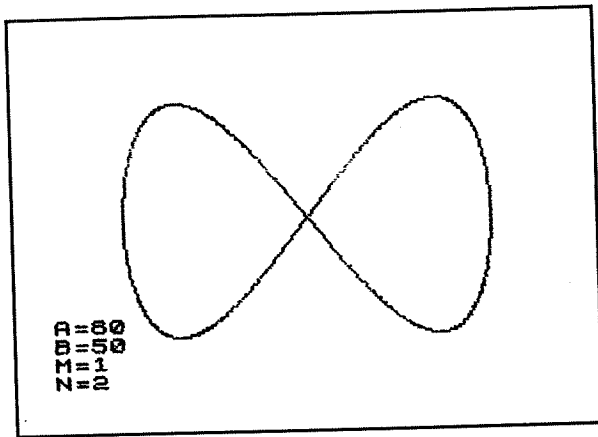


Figura 173

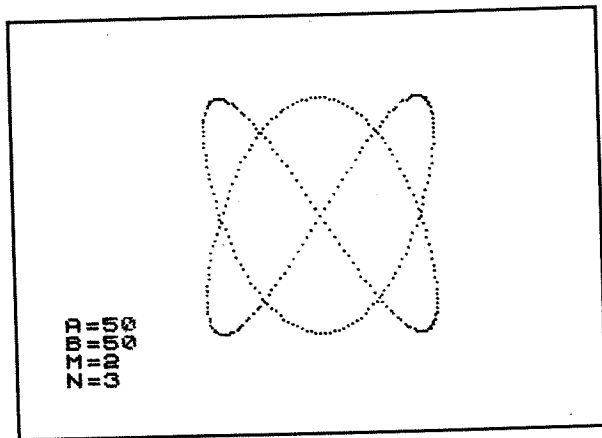


Figura 174

4.2. Vamos apresentar um outro exemplo de uma família de curvas. Para um inteiro k qualquer, façamos:

$$x = a (1 + \cos t) \cos kt$$

e

$$y = a (1 + \cos t) \sin t$$

com  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

O programa que se segue permite construir as curvas desta família escolhendo o número k ao acaso entre 1 e 20:

```

10 LET k=1+INT (20*RND)
20 LET a=40
30 FOR t=0 TO 2*PI STEP .01
40 LET u=a*(1+COS t)
50 LET x=u*COS (k*t)
60 LET y=u*SIN t
70 PLOT 100+x,100+y
80 NEXT t
90 PRINT AT 10,2;"K=";k

```

Vejamos as curvas obtidas para k = 3.

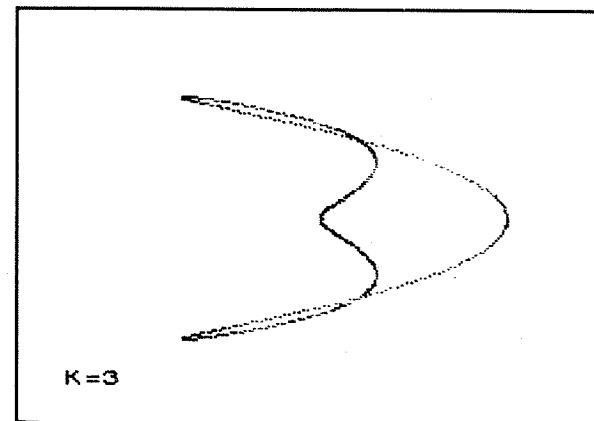


Figura 175

## 5. Exercícios

5.1. Construir para  $0 \leq t \leq 2\pi$  cada uma das seguintes curvas:

- 1)  $x = 128 + 50 \cos t \cos 2t$   
 $y = 88 + 40 \sin 2t$
- 2)  $x = 128 + 2 \cos t (10 + 5 \cos 5t)$   
 $y = 88 + 2 \sin t (10 + 5 \sin 5t)$

5.2. M, N, P e Q designam inteiros quaisquer.  
Construir cada uma das famílias de curvas seguintes:

- 1)  $x = 128 + 50 \cos mt$   
 $y = 88 + 50 \sin nt$
- 2)  $x = 128 + 50 \cos mt \cos nt$   
 $y = 88 + 50 \sin pt \sin qt$
- 3)  $x = 128 + 20 \cos mt + 10 \cos nt$   
 $y = 88 + 20 \sin pt + 10 \sin qt$

5.3. Desenhar a figura seguinte, que evoca uma ampulheta:

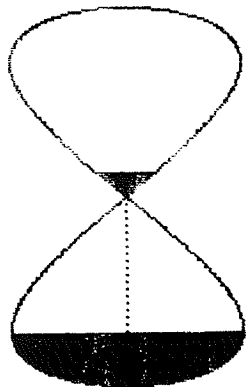


Figura 176

Consultar o Capítulo 25 para a coloração.

## AS CURVAS «MECÂNICAS»

O século XVII viu nascer quase simultaneamente a geometria analítica, o cálculo infinitesimal e a mecânica teórica (ou teoria do movimento).

O conceito-chave, o da composição dos movimentos, ia permitir a análise de movimentos complexos e a definição de novas curvas: a cicloide, a hipocicloide, etc.

Os matemáticos da época acolheram estas curvas «mecânicas» de diferentes maneiras: uns, como Roberval ou Pascal, estudaram-nas com interesse; outros, como Descartes, rejeitaram-nas como não pertencendo à geometria.

### 1. A cicloide

Esta curva foi estudada sucessivamente por Galileu (1564-1642), que propôs o seu uso nos arcos de pontes, Roberval, que calculou a área limitada por um arco desta curva, e finalmente Pascal (1623-1662), que terminou o seu estudo.

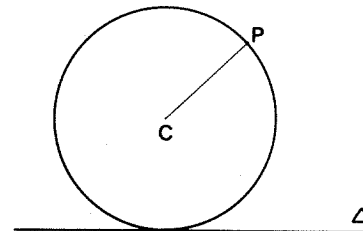


Figura 177

Seja um círculo de raio  $R$  que rola continuamente sobre uma recta  $\Delta$ : a trajectória de um ponto  $P$  da circunferência é uma curva designada por cicloide:



Figura 178

Esta curva admite por representação paramétrica:

$$\begin{aligned}x &= Rt - R \sin t \\y &= R(1 - \cos t)\end{aligned}$$

O programa é o seguinte:

```
10 INPUT "R= ";r
20 PLOT 0,00: DRAW 255,0
30 CIRCLE r,00+r/r
40 INPUT "Valor inteiro de N?"
"/0
90 FOR t=0 TO n*PI STEP .02
80 LET x=r*(t-SIN t)
70 LET y=r*(1-COS t)
80 PLOT x,00+y
90 NEXT t
```

## 2. A hipocicloide

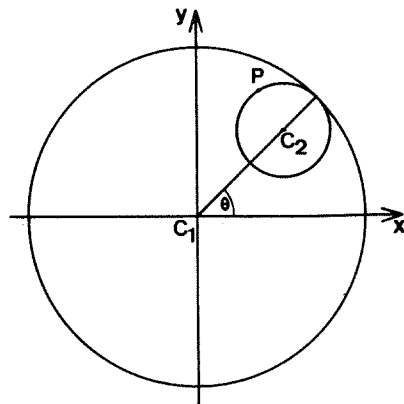


Figura 179

Um círculo de raio  $r_2$  desloca-se sem escorregar no interior de um círculo de raio  $r_1$ , sobre a circunferência deste. Qualquer ponto do círculo móvel descreve uma curva designada por hipocicloide.

A aparência da curva depende da relação  $r_1/r_2$ .

Se  $r_1/r_2 = n$ , com  $n$  inteiro, a curva possui  $n$  arcos que se deduzem uns dos outros por uma rotação de centro  $C_1$  e ângulo  $2\pi/n$ .

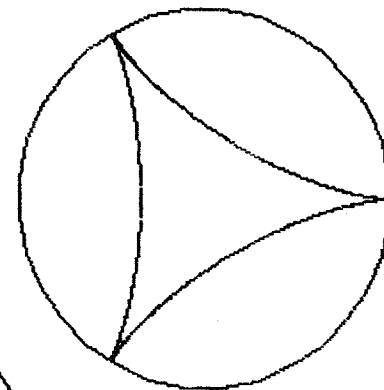
Se  $r_1/r_2$  não é inteiro mas igual a um número racional  $p/q$ , então a curva possui  $p$  arcos.

Finalmente, se  $r_1/r_2$  é irracional, igual por exemplo a  $\sqrt{2}$ , a curva possuirá uma infinidade de arcos diferentes.

Vejamos alguns exemplos:

1.º  $r_1/r_2 = 3$ : a hipocicloide tem três pontas.

Figura 180



2.º  $r_1/r_2 = 79/86$

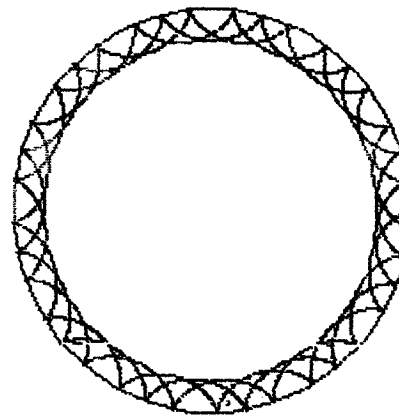


Figura 181

Note-se que no último dos dois desenhos a curva não foi terminada.

Convirá assinalar dois valores particulares da razão  $r_1/r_2$ :

- Para  $r_1/r_2 = 2$ , a hipociclóide reduz-se a um diâmetro do círculo fixo.

- Para  $r_1/r_2 = 4$ , obtém-se a hipociclóide de quatro pontas já descrita no capítulo 14, parágrafo 3.1.

As equações de uma hipociclóide são as seguintes:

$$x = (r_1 - r_2) \cos \theta + \cos \frac{r_1 - r_2}{r_2} \theta$$

$$y = (r_1 - r_2) \sin \theta - \sin \frac{r_1 - r_2}{r_2} \theta$$

No programa, o ângulo  $\theta$  varia entre 0 e  $n\pi$  radianos:

```

10 INPUT "Raio R1 = ";r1
20 INPUT "Raio R2 = ";r2
30 IF r2>=r1 THEN GO TO 10
40 CIRCLE 128,88,r1
50 LET k=r1/r2-1
60 INPUT "Quantos arcos? ";n
70 FOR t=0 TO n*PI STEP .01
80 LET x=r2*(k*COS t+COS (k*t)
)
90 LET y=r2*(k*SIN t-SIN (k*t)
)
100 PLOT 128+x,88+y
110 NEXT t

```

### 3. A epiciclóide

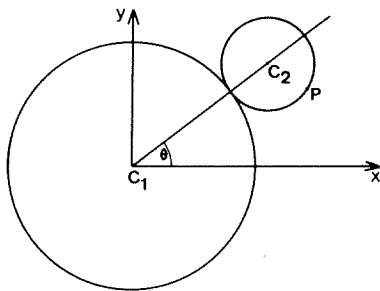


Figura 182

Um círculo de raio  $r_2$  desloca-se sem escorregar sobre o perímetro de um círculo de raio  $r_1$ , no exterior deste.

A trajetória de um ponto P do círculo móvel é uma epiciclóide, curva cuja representação paramétrica é:

$$x = (r_1 + r_2) \cos \theta - r_2 \cos \left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right) \theta$$

$$y = (r_1 + r_2) \sin \theta - r_2 \sin \left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right) \theta$$

No programa que se segue, o ângulo  $\theta$  varia entre 0 e  $n\pi$  radianos:

```

10 INPUT "Raio R1 = ";r1
20 INPUT "Raio R2 = ";r2
30 LET k=1+r1/r2
40 INPUT "Quantos arcos? ";n
50 CIRCLE 128,88,r1
60 FOR t=0 TO n*PI STEP .01
70 LET x=(r1+r2)*COS t-r2*COS
(k*t)
80 LET y=(r1+r2)*SIN t-r2*SIN
(k*t)
90 PLOT 128+y,88+x
100 NEXT t

```

Também neste caso, a aparência da curva depende da razão  $r_1/r_2$ .

Vejamos alguns exemplos:

1.º Para  $r_1/r_2 = 2$ , teremos uma nefróide:

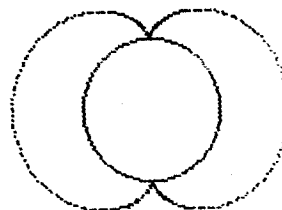


Figura 183

2.º Para  $r_1/r_2 = 30/8$ :

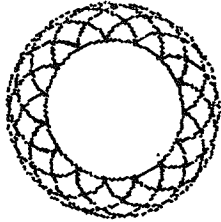


Figura 184

3.º Para  $r_1/r_2 = 1$ , teremos uma cardióide (ver o capítulo 16).

#### 4. O espirógrafo

Trata-se de um aparelho de desenho que possui um anel dentado e uma roda, igualmente dentada.

A roda pode rodar no interior do anel; contém uma série de orifícios que permite, se se inserir a ponta de uma esferográfica num deles, obter uma trajectória quando se faz mover a roda.

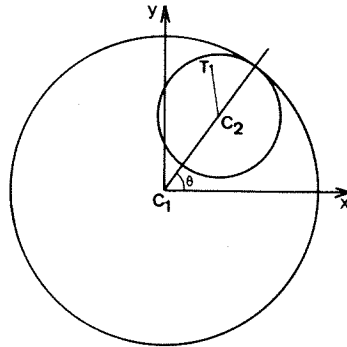


Figura 185

Seja  $d$  a distância do orifício  $T$  ao centro  $C_2$ : sejam  $r_1$  e  $r_2$  os raios respectivos do anel e da roda.

Demonstra-se que as coordenadas do ponto  $T$  são dadas pelas seguintes equações:

$$x = (r_1 - r_2) \cos \theta + d \cos \frac{r_2}{r_1} \theta$$

$$y = (r_1 - r_2) \sin \theta - d \sin \frac{r_2}{r_1} \theta$$

O programa é o seguinte:

```

10 INPUT "Raio R1 = "; r1
20 INPUT "Raio R2 = "; r2
30 IF r2 >= r1 THEN GO TO 10
40 INPUT "D = "; d
50 IF d >= r2 THEN GO TO 40
60 INPUT "Quantos arcos? "; n
70 FOR t=0 TO n*PI STEP .02
80 LET b=-t*r2/r1
90 LET x=(r1-r2)*COS t+d*COS b
100 LET y=(r1-r2)*SIN t+d*SIN b
110 PLOT 120+x,88+y
120 NEXT t
    
```

Neste programa, o ângulo  $\theta$  varia entre 0 e  $n\pi$ , mas é possível fazê-lo variar entre  $\theta_0$  e  $\theta_0 + n\pi$ ; basta modificar a linha correspondente.

Vejamos dois exemplos de curvas obtidas com o auxílio deste programa.

1.º)  $r_1 = 80$   
 $r_2 = 50$   
 $d = 40$

Figura 187

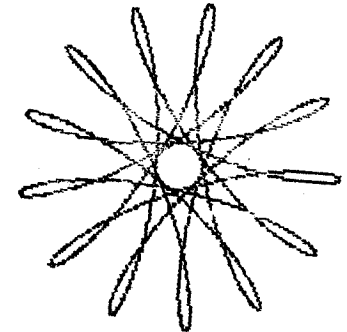
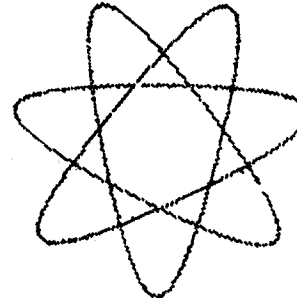


Figura 186

2.º)  $r_1 = 80$   
 $r_2 = 60$   
 $d = 45$

## 5. Exercícios

5.1. Para  $\theta$  variante entre 0 e  $n\pi$  radianos, construa a curva definida por:

$$1.^{\circ}) x = (r_1 + r_2) \cos \theta - d \cos \frac{r_1 + r_2}{r_2} \theta$$

$$y = (r_1 + r_2) \sin \theta - d \sin \frac{r_1 + r_2}{r_2} \theta$$

$$2.^{\circ}) x = (r_1 - r_2) \cos \theta + d \cos \frac{r_1 - r_2}{r_2} \theta$$

$$y = (r_1 - r_2) \sin \theta - d \sin \frac{r_1 - r_2}{r_2} \theta$$

5.2. No programa do parágrafo 4, suprima o sinal menos da linha 80 e compare o resultado obtido com a curva inicial.

16

## COORDENADAS POLARES

Newton (1642-1727) foi o primeiro a utilizar, segundo se pensa, este tipo de coordenadas. Mas o primeiro texto onde aparecem deve-se a Jacques Bernouilli (1654-1705).

Neste texto, os *Acta*, publicado em 1694, Jacques Bernouilli descreve uma curva que desde então traz o seu nome: a lemniscata de Bernouilli.

As coordenadas polares foram utilizadas sistematicamente por Euler (1707-1783), que elaborou as fórmulas que permitem a passagem das coordenadas polares às coordenadas cartesianas e reciprocamente.

### 1. Princípio

Escolhamos um ponto O do plano, o polo, e tracemos um eixo Ox, o eixo polar:

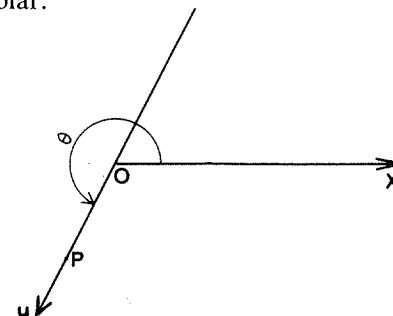


Figura 188

O ponto P é definido pelo seu ângulo polar  $\theta$  e o seu raio polar  $r = \overline{OP}$ .  $r$  é um número real positivo ou negativo; é a abscissa do ponto P sobre o eixo Ou.

$r$  e  $\theta$  constituem as coordenadas polares do ponto P.

## 2. Mudanças de sistema

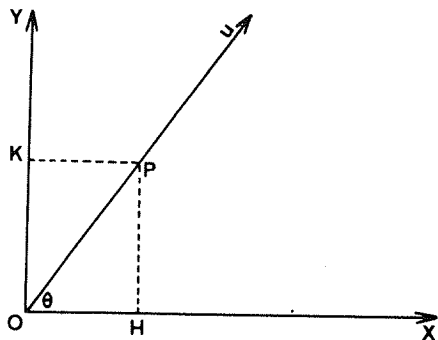


Figura 189

$$\overline{OH} = x$$

$$\overline{OK} = y$$

$$\overline{OP} = r$$

$$(\vec{Ox}, \vec{Ou}) = \theta$$

2.1. Pode passar-se facilmente das coordenadas polares às coordenadas cartesianas graças às fórmulas seguintes:

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

2.2. Inversamente, passa-se das coordenadas cartesianas às coordenadas polares graças às fórmulas:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

e para  $r \neq 0$ ,

$$\cos \theta = \frac{x}{r}$$

e

$$\sin \theta = \frac{y}{r}$$

2.3. No visor continuaremos a usar as coordenadas cartesianas para marcar os pontos. Interessar-nos-á portanto o primeiro grupo de equações.

## 3. Duas curvas clássicas

### 3.1. A Lemniscata de Bernouilli

Esta curva tem a equação

$$r = a \sqrt{\cos 2\theta}$$

É portanto definida para  $\cos 2\theta \geq 0$ , ou seja por exemplo para

$$-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

e

$$\frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}$$

A lemniscata ou curva em forma de fita é o conjunto dos pontos p do plano que verificam a relação  $PA \times PB = \text{constante}$ , sendo A e B dois pontos do plano tais que  $AB = a \sqrt{2}$ .

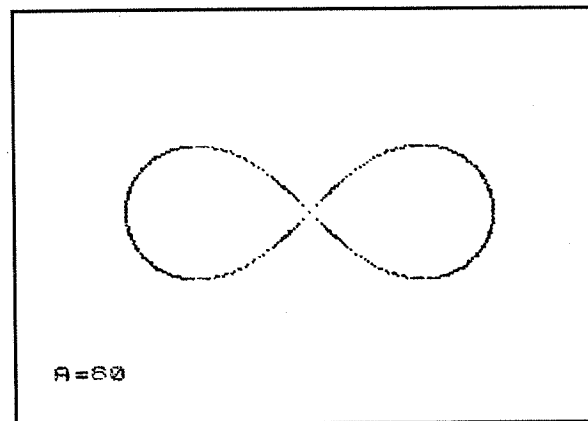


Figura 190

O programa utiliza as diversas simetrias da curva:

```

10 INPUT "R= "; R
20 FOR t=0 TO PI/4 STEP .01
30 LET d=200*(R*t)
40 PLOT 1000+d*000R d*000 t,00+d
50 PLOT 1000+d*000R d*000 t,00-d
60 PLOT 1000-d*000R d*000 t,00-d
70 PLOT 1000-d*000R d*000 t,00+d
80 NEXT t

```

### 3.2. A cardióide

Seja um círculo de raio R, e seja  $\Delta$  uma tangente qualquer a esse círculo:

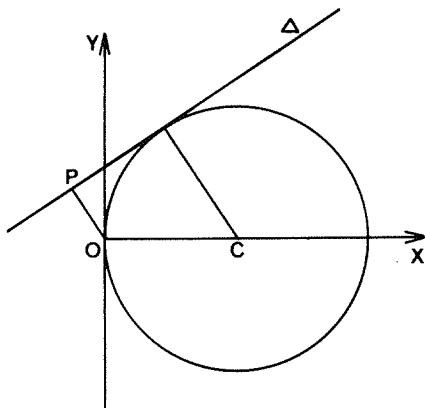


Figura 191

Quando  $\Delta$  varia, o ponto P, projecção de O sobre  $\Delta$ , descreve uma curva em forma de coração, designada por cardióide:

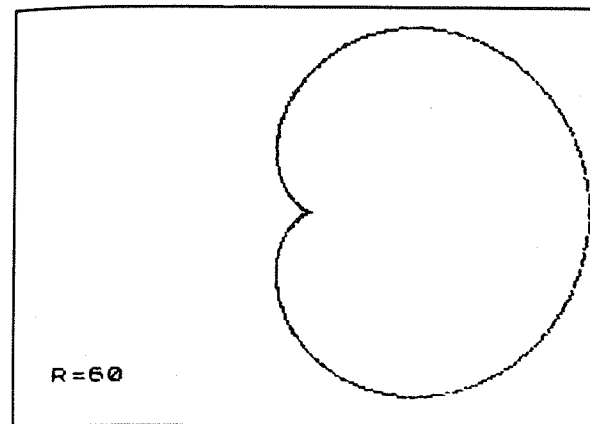


Figura 192

A equação desta curva é  $r = R(1 + \cos \theta)$ , donde o programa:

```

10 INPUT "R= "; R
20 FOR t=0 TO PI STEP .01
30 LET d=R*(1+000 t)
40 LET x=d*000 t
50 LET y=d*000 SIN t
60 PLOT 1000+x,00+y
70 PLOT 1000+x,00-y
80 NEXT t

```

## 4. Famílias de curvas

Para definir uma família de curvas, bastará utilizar um ou vários parâmetros numa equação.

4.1. A título de exemplo, definiremos as *rosas de Grandi* (1671-1742) pela equação:

$$r = a \operatorname{sen} k \theta$$

com k inteiro.

O ângulo  $\theta$ , expresso em radianos, varia entre 0 e  $n\pi$ .

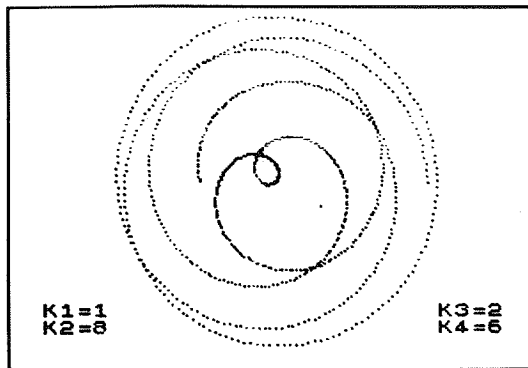
```

10 LET a=60
20 INPUT "k= "; k
30 INPUT "n= "; n
40 FOR t=0 TO n*PI STEP .008

```



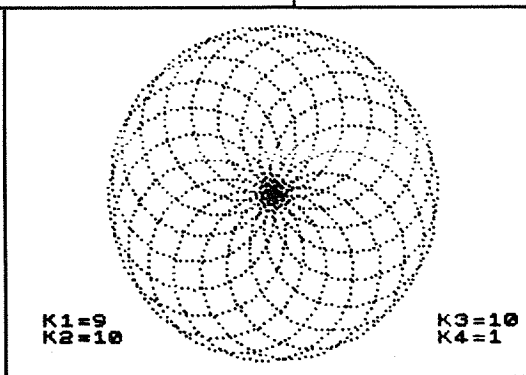




K1=1  
K2=6

K3=2  
K4=6

Figura 196



K1=9  
K2=10

K3=10  
K4=1

Figura 197

4.3. Consideremos agora, para  $0 \leq \theta \leq n\pi$ ,  

$$r = a \cos k\theta - b \cos \theta$$

Teremos o programa seguinte:

```

10000 INPUT t
10001 INPUT x
10002 INPUT y
10003 INPUT z
10004 t = 0
10005 FOR t = 0 TO 2 * PI STEP .01
10006   LET r = a * COS(t) - b * COS(t)
10007   LET x = r * COS(t)
10008   LET y = r * SIN(t)
10009   LET z = 0
10010   PLOT x, y, z
10011 NEXT t

```

Para  $k = 2$ , obtemos a curva do escaravelho:

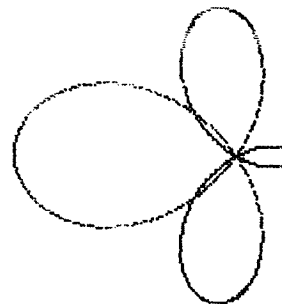


Figura 198

Escolhemos aqui  $a = 60$ ,  $b = 36$  e  $n = 2$ .

## 5. Exercícios

5.1. Construa as curvas definidas por cada uma das equações seguintes:

- 1)  $r = \cos^2 \theta (a \cos \theta + b \sin \theta)$
- 2)  $r = a \cos^3 \theta$

Estas curvas são designadas respectivamente por bifólio e fólio simples.

5.2. Construa as curvas definidas pelas equações seguintes:

- 1)  $r = 30 \sin \left( \frac{2\theta}{3} \right)$
- 2)  $r = 50 \sin \theta \cos 2\theta$
- 3)  $r = 40 \sin \left( \frac{\theta}{2} \right)$
- 4)  $r = 20 \sin \theta + 30 \cos 2\theta$

5.3. Para valores inteiros de  $m$  e  $n$ , estude as famílias de curvas definidas por:

- 1)  $r = a \cos n\theta + b \sin m\theta$
- 2)  $r = a \cos^n \theta$

Designemos por  $x$  e  $y$  as coordenadas do ponto  $P_1$ . As dos pontos  $P_2$ ,  $P_3$  e  $P_4$  são respectivamente:

- $x + L, y$
- $x + L, y + L + p$
- $x - 2p, y + L + p$

O ponto  $P_5$ , de coordenadas  $x - 2p$  e  $y - 2p$ , é o ponto de partida de uma nova volta, obtida substituindo  $L$  por  $L + 4p$ . O programa usado para construir  $n$  voltas é o seguinte:

```

10 INPUT "X=" ; X
20 INPUT "Y=" ; Y
30 INPUT "Quantos arcos? " ; n
40 INPUT "Que passo? " ; p
50 INPUT "Comprimento do 1o segmento? " ; L
60 FOR i=1 TO n
70 PLOT X,Y: DRAW L,0
80 PLOT X+L,Y: DRAW 0,L+p
90 PLOT X+L,Y+L+p: DRAW -L-2*p
100 PLOT X-2*p,Y+L+p: DRAW 0,-L-2*p
110 LET X=X-2*p
120 LET Y=Y-2*p
130 LET L=L+4*p
140 NEXT i

```

Vejamos o resultado obtido para  $n = 20$ ,  $L = 0$ ,  $x = 128$  e  $y = 88$ :

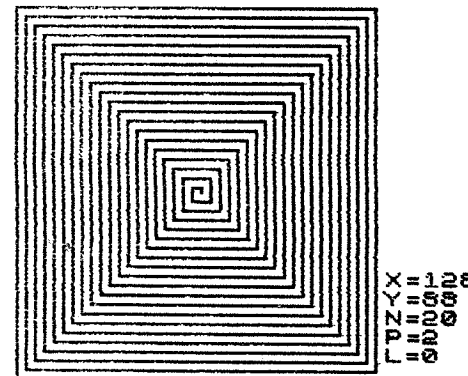


Figura 200

## AS ESPIRAIS

As espirais são curvas que se enrolam indefinidamente em torno de um ponto.

Os gregos já as utilizavam como motivos de ornamentação em cerâmica ou em certos capitéis.

A natureza oferece-nos igualmente numerosos exemplos de espirais: folhas de plantas, conchas, etc.

### 1. As espirais compostas

As espirais mais simples são formadas por segmentos de recta ou arcos de círculo ligados entre si.

Conforme o sentido de enrolamento, distinguiremos as espirais à esquerda e as espirais à direita.

#### 1.1. Exemplo I

Consideremos uma espiral à esquerda formada por segmentos de recta cujo comprimento aumenta de cada vez de um mesmo valor  $p$ , o passo da espiral.

Esta espiral pode ser facilmente construída graças ao exame do motivo seguinte, de quatro segmentos:

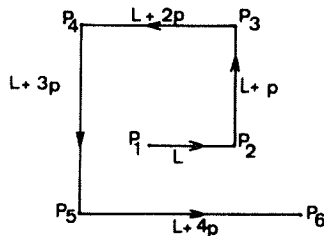


Figura 199

1.2. No exemplo que acaba de ser tratado, vira-se  $90^\circ$  de cada vez; podemos escolher um outro valor.

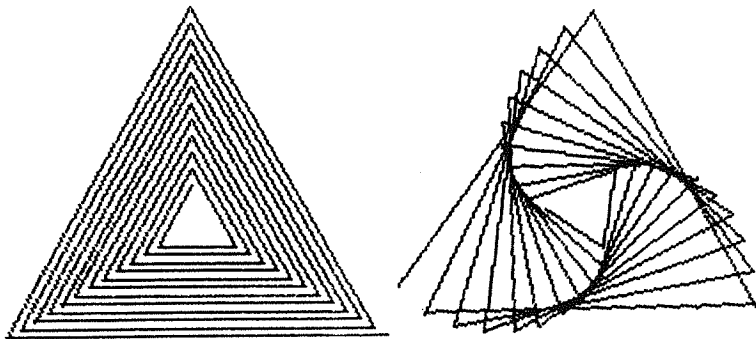


Figura 201

Para obter os traçados da figura XVII-2, é preferível utilizar o programa do capítulo 22.

1.3. Construamos agora uma espiral de 2 centros, ligando semicírculos.

Sejam  $C_1$  e  $C_2$  dois pontos diferentes: traçaremos alternadamente um semicírculo de centro  $C_1$  e depois um de centro  $C_2$  ligado ao precedente. O motivo é o seguinte:

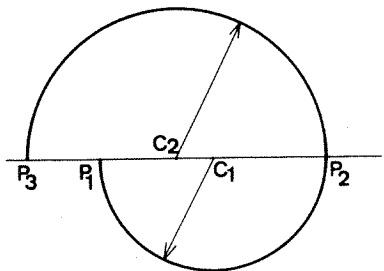


Figura 202

Consideremos  $C_1C_2 = p$  e  $C_1P_1 = R$ .

Se  $x$  e  $y$  são as coordenadas de  $P_1$ , as de  $P_2$  serão  $(x + 2R, y)$ , e as de  $P_3$   $(x - 2p, y)$ .

Substituindo  $R$  por  $R + 2p$ , obteremos uma nova volta, saindo agora de  $P_3$ .

O programa é o seguinte:

```

10 INPUT "X = "; X
20 INPUT "Y = "; Y
30 INPUT "Quantos arcos? "; n
40 INPUT "Que passo? "; p
50 INPUT "Raio de 1o círculo?"
FOR i=1 TO n
70 PLOT X,Y: DRAW D*R,0,PI
80 PLOT X+D*R,Y: DRAW -D*R-D*p
,D,PI
90 LET X=X-D*p
100 LET R=R+D*p
110 NEXT i

```

Para  $p = 3$ ,  $R = 5$ , obtemos a espiral seguinte:

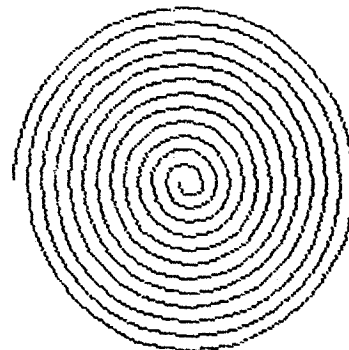


Figura 203

## 2. Outras espirais

Para construir espirais mais complexas, vamos utilizar agora coordenadas polares.

### 2.1. A espiral de Arquimedes

Atribuída ao matemático Arquimedes (287-212 a.C.), pode-se realizá-la facilmente enrolando uma corda sobre si mesma, em espirais apertadas.

A equação desta espiral é  $r = k \theta$ .

Vejamos um programa que permite construir n voltas de uma espiral de Arquimedes:

```

10 INPUT "K=" ;K
20 INPUT "Quantos arcos? " ;n
30 LET s=.02
40 FOR t=0 TO n*PI STEP s
50 LET r=k*t
60 LET x=r*COB t
70 LET y=r*OIN t
80 PLOT 128+x,88+y
90 NEXT t

```

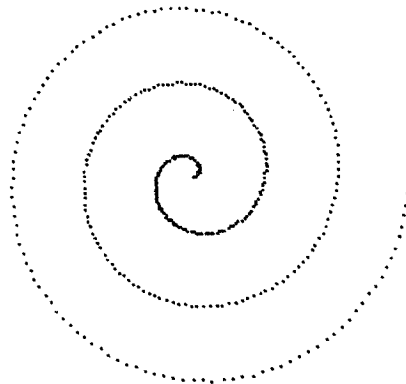


Figura 204

K=5

## 2.2. A espiral logarítmica

Estudada e descrita por Descartes em 1638, esta curva tem a equação:

$$r = k_1 \exp(k_2 \theta)$$

$k_1$  e  $k_2$  designam duas constantes não nulas.

Uma espiral logarítmica possui propriedades notáveis:

— Em cada ponto a curva corta o raio polar segundo um ângulo constante  $\alpha$ , dado por:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{k^2}$$

(para um ponto M da curva, o ângulo  $\alpha$  designa o ângulo entre a tangente em M à espiral e o raio OM);

— Se um arco de espiral é reduzido ou aumentado, coincide sempre com um outro arco da espiral.

Para n voltas, o programa é o seguinte:

```

10 INPUT "K1=" ;k1
20 INPUT "K2=" ;k2
30 INPUT "Quantos arcos? " ;n
40 FOR t=0 TO n*2*PI STEP .05
50 LET r=k1*EXP(k2*t)
60 LET x=r*COB t
70 LET y=r*OIN t
80 PLOT 128+x,88+y
90 NEXT t

```

O desenho seguinte foi obtido com  $n = 3$ ,  $k_1 = 1$  e  $k_2 = 0,2$ :

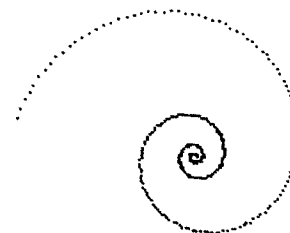


Figura 205

## 2.3. Desenvolvimento do círculo

Imaginemos uma cabra ligada por uma corda a um tronco de árvore circular, estando a corda enrolada várias vezes sobre o tronco.

A cabra puxa a corda e roda à volta do tronco movendo-se em espiral; descreve assim uma curva de equações

$$x = R (\cos \theta + \theta \operatorname{sen} \theta)$$

$$y = R (\operatorname{sen} \theta - \theta \cos \theta)$$

Esta curva foi estudada por C. Huygens em 1693.

```

10 INPUT "R=" ;r
20 INPUT "Quantos arcos? " ;n
30 FOR t=0 TO n*2*PI STEP .05
40 LET c=COB t
50 LET s=OIN t
60 LET x=r*(c+t*s)
70 LET y=r*(s-t*c)
80 PLOT 128+x,88+y
90 NEXT t

```

Vejamos o traçado obtido para  $R = 10$ :

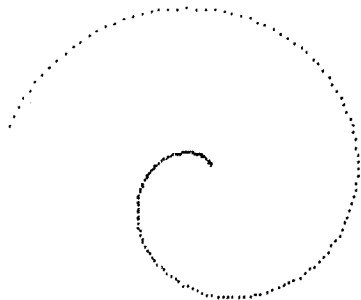


Figura 206

Notemos que é possível utilizar valores negativos de  $\theta$ .

### 3. Exercícios

3.1. Existem ainda muitas outras espirais. Citemos as seguintes:

- Lituus (ou trombeta romana),  $r = \frac{a}{\sqrt{\theta}}$  com  $\theta > 0$ ;
- Espiral de Fermat,  $r = \pm a \sqrt{\theta}$  com  $\theta \geq 0$ ;
- Espiral de Galileu,  $r = a(1 - b\theta^2)$ ;
- Espiral hiperbólica,  $r = \frac{1}{\theta}$  com  $\theta \neq 0$ .

3.2. Podemos desenhar uma espiral de quatro centros.

Esta espiral será formada por arcos de círculo ligados entre si. O motivo compreende quatro arcos, como se mostra no desenho seguinte:

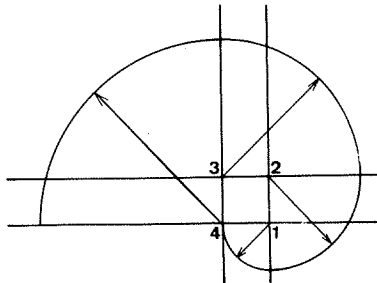


Figura 207

Os centros estão numerados em sequência: 1, 2, 3 e 4.

3.3. No programa do parágrafo 1.3, substitua a linha 100 por esta:

```
100 LET R = K* R
```

Naturalmente a variável K deverá ser escolhida antes. Isto será feito graças à seguinte linha suplementar:

```
55 INPUT «Valor de K?»; K
```

Utilize este novo programa para

- 1.º  $P = R = 5, N = 20, K = 1,2$
- 2.º  $P = 0, R = 3$
- 3.º  $P = 2, R = 0, K = 2$
- 4.º  $P = 3, R = 12, K = 1,2$

## ENVOLVENTE DE UMA FAMÍLIA DE CURVAS

### 1. Definições

1.1. Seja F uma família de curvas planas definidas por uma equação, por uma propriedade geométrica ou por qualquer outro método.

As curvas desta família F ocupam um certo domínio do plano, limitado normalmente por uma ou várias curvas que formam então a envolvente da família.

1.2. Considere-se, por exemplo, uma família de círculos de raio  $r_1$ , cujos centros pertencem a um círculo de raio  $r_2$ :

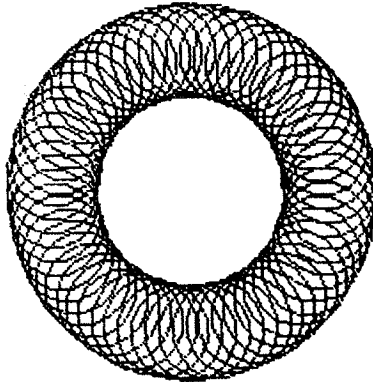


Figura 208

Esta família de círculos terá por envolvente dois círculos concêntricos.

O programa utilizado é o seguinte:

```
10 FOR t=0 TO 2*PI STEP .1
20 LEFT X=100+50*COB t
30 LEFT Y=50+50*SOB t
40 CHASE LE X,Y,B0
50 NEXT t
```

1.3. Definamos melhor as relações que existem entre as curvas da família F e a envolvente C desta família:

- Cada curva de F é tangente a C;
- A cada ponto de C corresponde uma curva de F tangente a C neste ponto.

### 2. Exemplos

2.1. Consideremos as elipses de centro  $C = (x_c, y_c)$ , de eixo maior  $2a$ , eixo menor  $2b$ , tais que:

$$a^2 + b^2 = L^2,$$

designando L um comprimento qualquer.

Cada uma das elipses da família assim definida admite a representação paramétrica:

$$\begin{aligned} x &= x_c + a \cos t \\ y &= y_c + b \sin t \end{aligned}$$

para  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

Esta família admite como envolvente um quadrado:

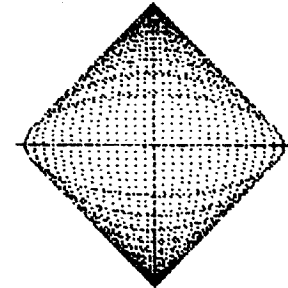


Figura 209

Escolhamos  $x_c = 128$ ,  $y_c = 88$  e  $L = 60$ .

O programa é o seguinte:

```

10 INPUT "L= ";L
20 FOR a=0 TO L STEP 4
30 LET b=80-(a/4)
40 FOR t=0 TO 2*PI STEP .1
50 PLOT 128+a*COS t,88+b*SIN t
60 NEXT t
70 NEXT a

```

2.2. Definamos a nossa família de elipses pela condição  $a + b = L$ .

O programa passa a ser, com  $L = 80$ :

```

10 FOR a=0 TO 80 STEP 8
20 LET b=80-a
40 FOR t=0 TO 2*PI STEP .1
50 PLOT 128+a*COS t,88+b*SIN t
60 NEXT t
70 NEXT a

```

A família de elipses tem como envolvente uma hipociclóide de quatro pontas:

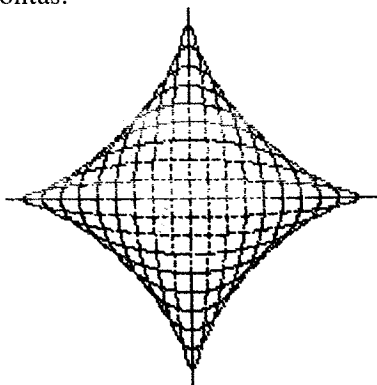


Figura 210

2.3. Consideremos agora uma curva de Lissajous de centro  $C = (128,88)$ , definida pelas equações paramétricas:

$$\begin{aligned}
 x &= 128 + a \sin 2t \\
 y &= 88 + b \cos t
 \end{aligned}$$

assim como pela condição  $a^2 + b^2 = L^2$ :

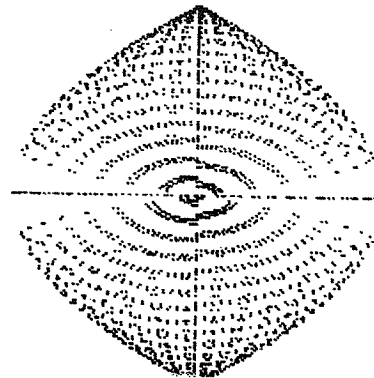


Figura 211

Este desenho foi obtido com  $L = 80$ .  
Vejam os programas utilizados:

```

10 INPUT "L= ";L
20 FOR a=0 TO L STEP 4
30 LET b=80-(a/4)
40 FOR t=0 TO 4*PI STEP .1
50 PLOT 128+a*SIN (2*t),88+b*C
60 NEXT t
70 NEXT a

```

### 3. Geração tangencial de uma curva

A família  $F$  pode ser constituída por rectas ou segmentos de recta. Vejamos alguns exemplos.

3.1.  $AB$  e  $AC$  são dois segmentos de comprimento  $L$ , perpendiculares entre si. Vamos dividir  $AB$  e  $AC$  em  $n$  partes iguais graças aos pontos

$$\begin{aligned}
 P_1 &= A, P_2, P_3, \dots, P_{n+1} = B \\
 M_1 &= A, M_2, M_3, \dots, M_{n+1} = C
 \end{aligned}$$



Traçaremos em seguida cada um dos segmentos de extremidades  $M_i$  e  $P_{n+2-i}$ , variando  $i$  entre 1 e  $n+1$ :

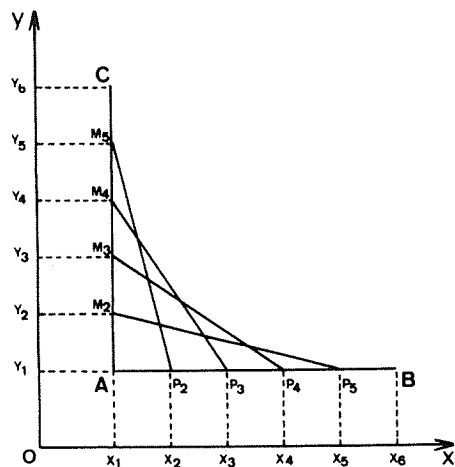


Figura 212

Teremos, para  $2 \leq i \leq n$ ,

$$x_i = x_1 + (i - 1) \frac{L}{n}$$

e

$$y_i = y_1 + (i - 1) \frac{L}{n}$$

O programa é o seguinte:

```

10 INPUT "XA= "; xa
20 INPUT "YA= "; ya
30 INPUT "L= "; l
40 LET xb=xa+l
50 LET yb=ya
60 LET xc=xa
70 LET yc=ya+l
80 INPUT "N= "; n
90 DIM x(n+1)
100 DIM y(n+1)
110 LET x(1)=xa

```

```

120 LET y(1)=ya
130 LET x(n+1)=xb
140 LET y(n+1)=yc
150 FOR i=2 TO n
160 LET x(i)=x(1)+(i-1)*l/n
170 LET y(i)=y(1)+(i-1)*l/n
180 NEXT i
190 FOR i=1 TO n+1
200 PLOT x(i),y(n+2-i): DRAW x(
i)-x(i),y(i)-y(n+2-i)
210 NEXT i

```

Tomemos  $X_A = 60$ ,  $Y_A = 10$ ,  $L = 150$ .

Os desenhos que se seguem foram obtidos com  $n = 10$ ,  $n = 20$  e  $n = 200$ :

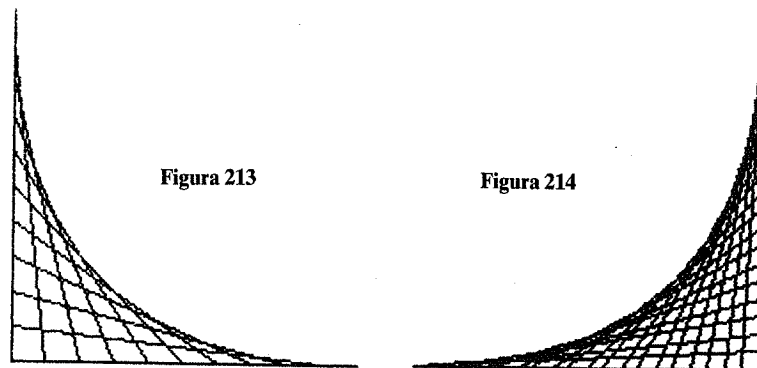


Figura 213

Figura 214

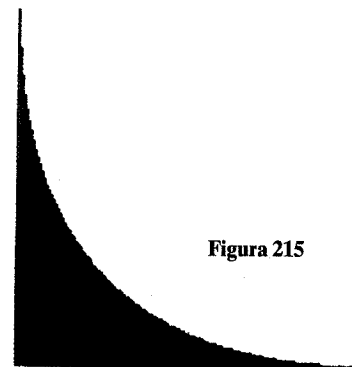


Figura 215

3.2. Seja A um ponto do eixo dos y e B um ponto do eixo dos x tais que o comprimento do segmento AB seja constante.

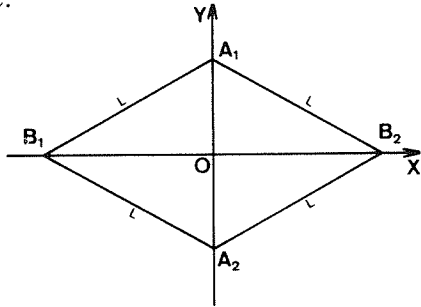


Figura 216

Se designarmos por L este comprimento e se x designar a abscissa de B, a ordenada y de A será então:  $\pm\sqrt{L^2 - x^2}$ .

```

10 INPUT "L = "; L
20 FOR UC = -L TO L STEP -4
30 PLOT UC, UC*(L*(L*UC))
40 PLOT UC, UC*(L*(L*UC))
50 NEXT UC
60 FOR UC = L TO -L STEP 4
70 PLOT UC, UC*(L*(L*UC))
80 PLOT UC, UC*(L*(L*UC))
90 NEXT UC

```

A envolvente desta família de segmentos é uma hipociclóide de quatro pontas (considerámos L = 80).

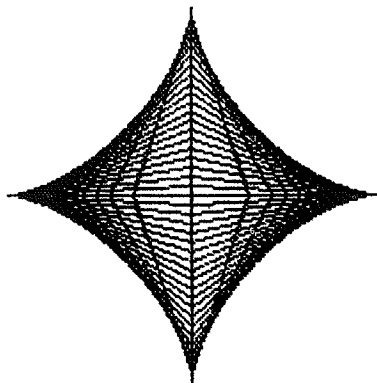


Figura 217

3.3. Consideremos um triângulo equilátero ABC tal que cada lado tenha o comprimento L, e dividamos cada lado em n partes iguais.

Numerando os pontos obtidos no sentido contrário ao dos ponteiros de um relógio, a partir do ponto A, temos 3n pontos  $P_1, P_2, \dots, P_{3n}$  com  $A = P_1, B = P_{n+1}$  e  $C = P_{2n+1}$ .

Para i compreendido entre 1 e 3n, traçaremos os segmentos de extremidades  $P_i$  e  $P_{i+n+1}$ ; isto pressupõe que se tenha considerado, para  $2_n \leq i \leq 3_n$ ,

$$P_{i+n+1} = P_{L-2n+1}$$

O programa é o seguinte:

```

10 INPUT "L = "; L
20 INPUT "XP = "; Xa
30 INPUT "YP = "; Ya
40 INPUT "N = "; n
50 DIM X(4*n+1)
60 DIM Y(4*n+1)
70 REM Calculo dos x(i) e y(i)
80 FOR i=1 TO n+1
90 LET X(i) = Xa + (i-1)*L/n
100 LET Y(i) = Ya
110 LET X(i+n) = X(i)
120 LET Y(i+n) = Y(i)
130 NEXT i
140 FOR i=n+2 TO 2*n+1
150 LET X(i) = X(n+1) - .5*(i-1-n)*L/n
160 LET Y(i) = Y(n+1) + .866*(i-1-n)*L/n
170 NEXT i
180 FOR i=2*n+2 TO 3*n+1
190 LET X(i) = X(2*n+1) - .5*(i-1-2*n)*L/n
200 LET Y(i) = Y(2*n+1) - .866*(i-1-2*n)*L/n
210 NEXT i
220 REM Traçado
230 FOR i=1 TO 3*n
240 PLOT X(i),Y(i): DRAW X(n+i+1)-X(i),Y(n+i+1)-Y(i)
250 NEXT i
260 REM Contorno do triangulo
270 LET h=L*.866
280 PLOT Xa,Ya: DRAW L,0: DRAW -L/2,h: DRAW -L/2,-h

```

Com  $n = 20$ , obtemos:

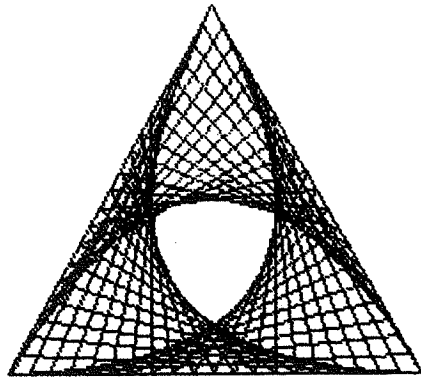


Figura 218

Consideremos  $OA$  como eixo dos  $x_0$ .  
A recta  $\Delta$  tem por equação:

$$y = - \left( \frac{a + x_p}{y_p} \right) x + \frac{R^2 - a^2}{2y_p}$$

onde  $x_p$  e  $y_p$  designam as coordenadas de  $P$ , e  $R$  o raio do círculo.  
Construa a envolvente destas rectas.

#### 4. Exercícios

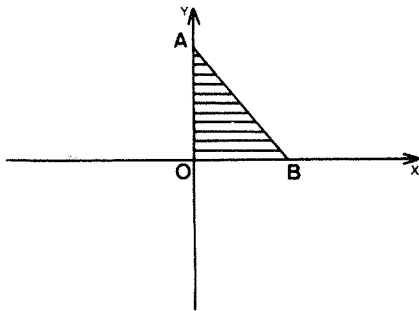


Figura 219

4.1. O ponto  $A$  descreve o eixo dos  $x$ , enquanto que  $B$  descreve o eixo dos  $y$ . A área do triângulo  $AOB$  é constante e igual a  $600$ . Construa a envolvente das rectas  $AB$ .

4.2. Seja um círculo de centro  $O$  e raio  $R$ . Seja  $A$  um ponto tal que  $\overline{OA} = -a$ . A qualquer ponto  $P$  do círculo associamos a recta  $\Delta$ , mediatriz de  $AP$ .

## AS CONCHÓIDES

Seja  $C$  uma curva plana. Escolhamos um ponto  $O$ , um comprimento  $L$ , e associemos a qualquer ponto  $M$  da curva  $C$  os pontos  $P_1$  e  $P_2$  da seguinte forma:

- $P_1$  e  $P_2$  pertencem à recta  $OM$  e encontram-se situados de um lado e de outro de  $M$ ;
- Temos  $MP_1 = MP_2 = L$ .

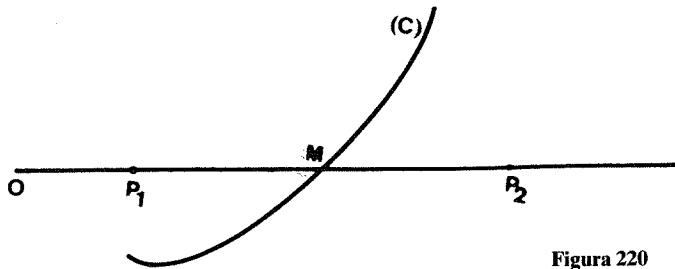


Figura 220

Definimos assim uma nova curva, chamada *conchóide*, a partir da curva  $C$ .

## 1. A conchóide de uma recta

1.1. Seja  $\Delta$  uma recta e  $O$  um ponto que não pertence a ela. Considerando que  $H$  designa a projecção ortogonal de  $O$  sobre  $\Delta$ , teremos  $OH = d$ .

Consideremos como eixo as rectas  $OH$  e  $Oy$ , paralela a  $\Delta$  passando por  $O$ .

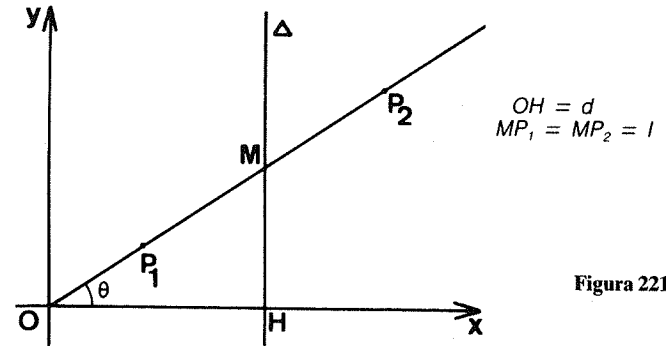


Figura 221

Designemos por  $y$  a ordenada de  $M$ . As coordenadas de  $P_1$  são:

$$\begin{aligned} d + L \cos \theta \\ d + L \sin \theta \end{aligned}$$

as de  $P_2$  são:

$$\begin{aligned} d - L \cos \theta \\ d - L \sin \theta \end{aligned}$$

O programa que permite traçar a conchóide da recta é o seguinte:

```

10 INPUT "D=" :d
20 INPUT "L=" :l
30 FOR u=0 TO 92 STEP .5
40 LET t=ATN(u/d)
50 LET c=COS t
60 LET s=SIN t
70 PLOT d+l*c,00+u+l*s
80 PLOT d+l*c,00-u+l*s
90 NEXT u
100 FOR u=0 TO 115
110 LET t=ATN(u/d)
120 LET c=COS t

```

```

130 LET S=90*PI/180
140 PLOT 1000+d,0: DRAW 0,175
150 PLOT 1000+d,0: DRAW 0,175
160 NEXT Y
170 PLOT 1000+d,0: DRAW 0,175

```

Neste programa, o ângulo  $\theta$  é representado pela variável T; os números 52 e 115 foram obtidos fazendo PRINT Y, e em seguida ENTER, quando ocorre uma mensagem de erro indicando que foram ultrapassadas as capacidades aritméticas do computador (inicialmente, tínhamos na linha 30: FOR Y = 0 TO 88, e na linha 100: FOR Y = 0 TO 200).

As linhas 80 e 150 mostram que a simetria relativamente ao eixo dos x foi utilizada.

Vejam os a curva obtida:

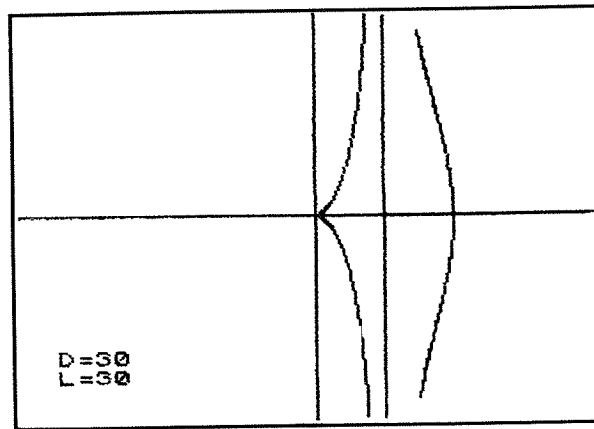


Figura 222

1.2. Historicamente, a conchóide de uma recta foi definida e utilizada pela primeira vez pelo geômetra grego Nicomedes no século III a.C.

Nicomedes serviu-se desta curva para tentar resolver o problema da divisão de um ângulo em três partes iguais recorrendo a instrumentos simples, a régua e o compasso.

1.3. Em coordenadas polares, a equação de Nicomedes é:

$$r = \frac{a}{\cos \theta} + b$$

## 2. A conchóide de um círculo

2.1. Seja um círculo de centro C, raio R, e seja L um comprimento qualquer:

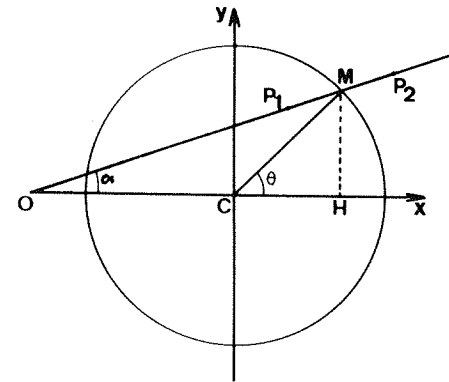


Figura 223

Façamos  $\overline{CO} = d$  e tomemos C como origem do sistema de coordenadas.

As coordenadas de M são:

$$x_M = R \cos \theta$$

$$y_M = R \sin \theta$$

Como

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{HM}}{\overline{OH}}$$

obtemos:

$$\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \frac{y_M}{x_M - d} \right)$$

As coordenadas de  $P_1$  são então:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_M + L \cos \alpha \\ y_1 &= y_M + L \sin \alpha \end{aligned}$$

as de  $P_2$  são:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_M - L \cos \alpha \\ y_2 &= y_M - L \sin \alpha \end{aligned}$$

No programa que se segue,  $\alpha$  é designado por A e  $\theta$  por t.

```

1000 INPUT "R = " ; R
1010 INPUT "d = " ; d
1020 INPUT "L = " ; L
1030 T = 0 TO 360 STEP .01
1040 LPRINT "T = " ; T
1050 X = R * COS T
1060 Y = R * SIN T
1070 X1 = X + L * COS T
1080 Y1 = Y + L * SIN T
1090 X2 = X - L * COS T
1100 Y2 = Y - L * SIN T
1110 PLOT X1, Y1, X2, Y2
1120 NEXT T
1130 END

```

2.2. Se se considera o ponto O sobre o círculo, obtemos o *caracol de Pascal*.

Para esta curva, considerámos  $R = 30$ ,  $d = -30$  e  $L = 40$ .

O caracol de Pascal foi assim chamado por Roberval, em honra do pai de Blaise Pascal. A equação desta curva é:

$$r = 2R \cos \theta \pm L$$

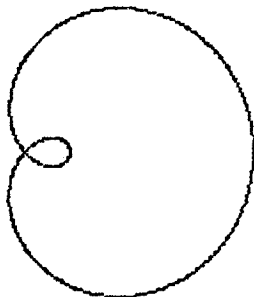


Figura 224

2.3. Considerando ainda O sobre o círculo mas com  $L = 2R$ , obteremos uma cardióide, curva já estudada no capítulo 16.

### 3. Caso geral

3.1. Seja C uma curva plana, e O um ponto qualquer de plano. Consideremos conhecida a equação de C relativamente a um sistema tendo como origem O.

Escolhamos um comprimento L qualquer.

É então fácil obter a conchóide da curva C:

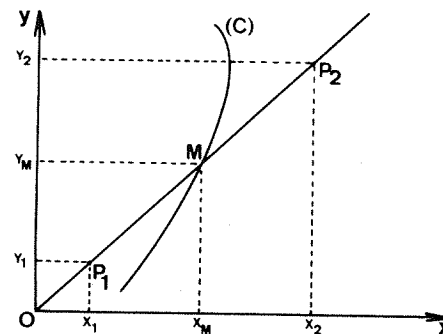


Figura 225

Em coordenadas cartesianas, as coordenadas de  $P_1$  e  $P_2$  são respectivamente:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_M + L \cos \theta & e & & x_2 &= x_M - L \cos \theta \\ y_1 &= y_M + L \sin \theta & & & y_2 &= y_M - L \sin \theta \end{aligned}$$

Em coordenadas polares, estas coordenadas transformam-se em:

$$\begin{aligned} x_1 &= (r+L) \cos \theta & e & & x_2 &= (r-L) \cos \theta \\ y_1 &= (r+L) \sin \theta & & & y_2 &= (r-L) \sin \theta \end{aligned}$$

### 3.2. Exemplo 1

Construamos, relativamente a O, a conchóide de uma hipociclóide de quatro pontas de equações:

$$x = 40 \cos^3 t$$

$$y = 40 \sin^3 t$$

com  $0 \leq t \leq 2\pi$

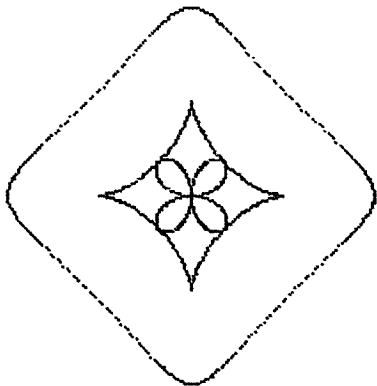


Figura 226

Esta curva foi obtida considerando  $L = 40$ .

O programa é o seguinte:

```

10 INPUT "L= ";L
20 FOR t=0 TO 2*PI STEP .02
30 LET c=COS t
40 LET s=SIN t
50 LET x=L*c*c*c
60 LET y=L*s*s*s
70 PLOT 100+x,.00+y
80 PLOT 100+x+L*c*c, .00+y+L*s
90 PLOT 100+x-L*c*c, .00+y-L*s
100 NEXT t
    
```

### 3.3. Exemplo 2

Construamos agora a conchóide de uma *nefróide* de equações:

$$x = 45 \sin t - 15 \sin 3t$$

$$y = 45 \cos t - 15 \cos 3t$$

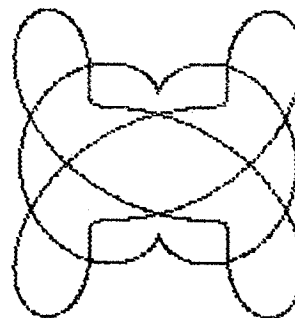


Figura 227

O programa utilizado é o seguinte:

```

10 INPUT "L= ";L
20 FOR t=0 TO 2*PI STEP .02
30 LET x=L* SIN t-15*SIN 3*t
40 LET y=L* COS t-15*COS 3*t
50 PLOT 100+x,.00+y
60 PLOT 100+x+L*cos t,.00+y+L*s
IN t
70 PLOT 100+x-L*cos t,.00+y-L*s
IN t
80 NEXT t
    
```

Fazendo algumas alterações nas linhas 19 e 20 e acrescentando a linha 100, obteremos o motivo seguinte:

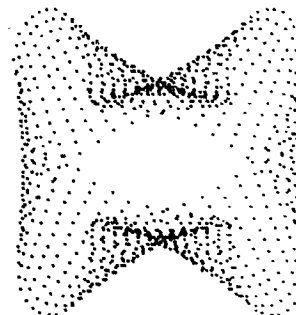


Figura 228

## 4. Exercícios

4.1. Represente uma conchóide de Nicomedes e um caracol de Pascal utilizando as respectivas equações em coordenadas polares.

4.2. Substitua, nas linhas 90 e 110 do programa do parágrafo 2.1, os senos por co-senos.

4.3. Tente construir um programa que desenhe a conchóide de um triângulo, e depois de um quadrado.

4.4. Utilize o programa do parágrafo 2 para obter a conchóide de um círculo no caso mais geral (por exemplo,  $R = 30$ ,  $d = -50$  e  $L = 40$ ). Que poderá constatar?

20

## CURVAS E MOTIVOS HÍBRIDOS

Neste capítulo indicaremos alguns procedimentos simples que nos permitem criar grafismos interessantes.

### 1. Os motivos em escada

Seja uma curva  $C$ , e sejam  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$   $n$  pontos desta curva.

Graças à instrução `DRAW`, podemos traçar facilmente segmentos paralelos e com o mesmo comprimento a partir dos pontos  $P_1, P_2, \dots, P_n$ .

#### 1.1. Exemplo 1

Consideremos a função:

$$y = 50 + 60 \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{45} \right)$$

Representemos esta função para  $20 \leq x \leq 200$ :

```
10 FOR x=20 TO 200
20 LET y=50+60*SIN (PI*x/45)
30 PLOT x,y
40 NEXT x
```

Substituamos a linha 30 pela seguinte:

```
30 PLOT x,y: DRAW 50,30
```



Obtemos o seguinte:

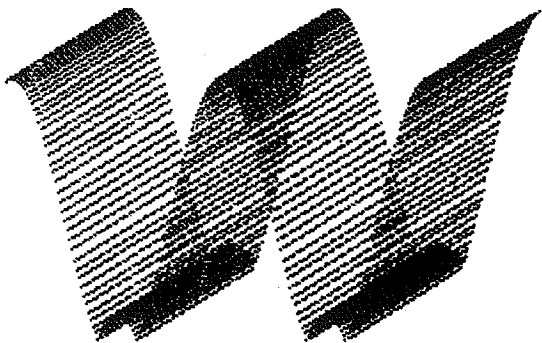


Figura 229

### 1.2. Exemplo 2

Seja  $y = 80 + 60 \sin\left(\frac{\pi x}{30}\right)$  para  $20 \leq x \leq 60$ .

Utilizando de duas maneiras diferentes a instrução DRAW, obtemos o desenho seguinte:

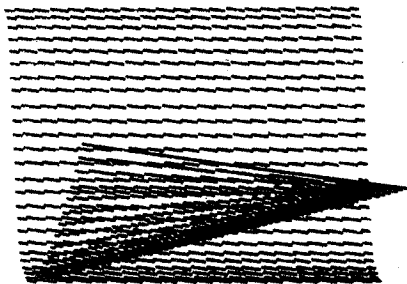


Figura 230

O programa é o seguinte:

```
10 FOR x=20 TO 60
20 LET y=80+60*SIN (PI*x/30)
30 IF x<45 THEN PLOT x,y: DRAW
100,20
```

```
40 IF x>=45 THEN PLOT x,y: DRAW
50 PLOT x,y: DRAW
50 NEXT x
```

### 1.3. Exemplo 3

Com uma elipse simples, o resultado obtido é bastante estético:

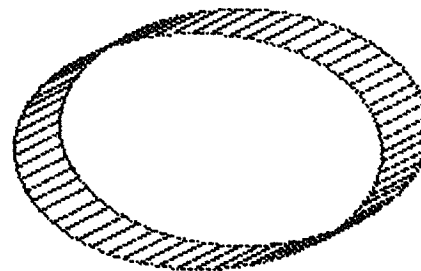


Figura 231

O programa utilizado é o seguinte:

```
10 FOR t=0 TO 2*PI STEP .1
20 LET x=128+80*COS t
30 LET y=88+50*SIN t
40 PLOT x,y: DRAW 20,10
50 NEXT t
60 FOR t=0 TO 2*PI STEP .02
70 LET x=128+80*COS t
80 LET y=88+50*SIN t
90 PLOT x,y: PLOT x+20,y+10
100 NEXT t
```

## 2. Molas

Seja  $C$  uma curva e  $P_1, P_2, \dots, P_n$   $n$  pontos desta curva. Cada um destes pontos será o centro de um círculo ou de um arco de círculo.

### 2.1. Exemplo 1

Seja um trifólio regular de centro  $C = (128,88)$  e de equações:

$$x = 128 + 40 \cos 2t - 20 \cos t$$

e

$$y = 88 + 40 \sin 2t + 20 \sin t$$

Faremos variar  $t$  entre 0 e  $2\pi$  com um passo de 0,1. Cada um dos pontos assim obtidos serão centro de um círculo de raio 16:

```
10 FOR t=0 TO 2*PI STEP .1
20 LET x=128+40*cos (2*t)-20*cos t
30 LET y=88+40*sin (2*t)+20*sin t
40 CIRCLE (x,y),16
50 NEXT t
```

Obteremos o desenho seguinte:

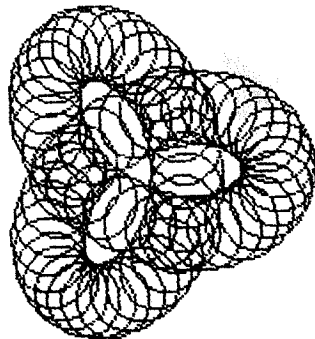


Figura 232

## 2.2. Exemplo 2

Seja  $y = 80 + 60 \sin \left( \frac{\pi x}{45} \right)$  com  $60 \leq x \leq 150$ .

Façamos variar  $x$  com um passo igual a 0,5.

Em cada um dos pontos obtidos vamos traçar um arco de círculo de medida  $\pi$ .

```
10 FOR x=60 TO 150
20 LET y=80+60*sin (PI*x/45)
30 PLOT x,y: DRAW y,0,PI
40 NEXT x
```

O resultado é o seguinte:

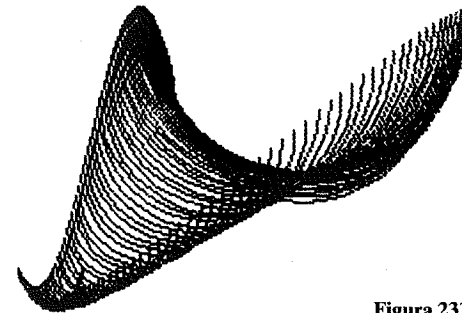


Figura 233

## 3. As curvas híbridas

No mundo animal, tal como no mundo vegetal, acontece que por cruzamento de duas espécies vizinhas é possível obter um indivíduo híbrido cujas características são uma mistura das dos pais.

Por analogia, vamos chamar curva híbrida a uma curva  $C$  obtida a partir de duas curvas  $C_1$  e  $C_2$ .

Para construir  $C$ , escolheremos um ponto  $M_1 = (x_1, y_1)$  sobre  $C_1$  e um ponto  $M_2 = (x_2, y_2)$  sobre  $C_2$ ; depois, recorrendo a um cálculo arbitrário, definiremos as coordenadas  $x$  e  $y$  de um ponto  $M$  de  $C$  a partir dos números  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $x_2$  e  $y_2$ .

### 3.1. Exemplo 1

Consideremos um trevo de quatro folhas de centro  $O$ , assim como um círculo também com esse centro, de raio 50.

Para  $t$  variando entre 0 e  $2\pi$  radianos, teremos:

$$\begin{aligned} x_1 &= 50 \cos t \cos 2t \\ y_1 &= 50 \sin t \cos 2t \\ x_2 &= 50 \cos t \\ y_2 &= 50 \sin t \end{aligned}$$

Definamos x e y da seguinte maneira:

$$x = \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{2} \quad \text{e} \quad y = \frac{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}{2}$$

```

10 FOR t=0 TO 2*PI STEP .1
20 LET c1=COS t
30 LET s1=SEN t
40 LET c2=COS t
50 LET s2=SEN t
60 LET x1=100*c1
70 LET y1=100*s1
80 LET x2=100*c2
90 LET y2=100*s2
100 LET x=.5*(x1+x2)
110 LET y=.5*(y1+y2)
120 PLOT 100+x,100+y
130 PLOT 100+x,100+y
140 PLOT 100+x,100+y
150 NEXT t

```

Obtemos a seguinte curva:

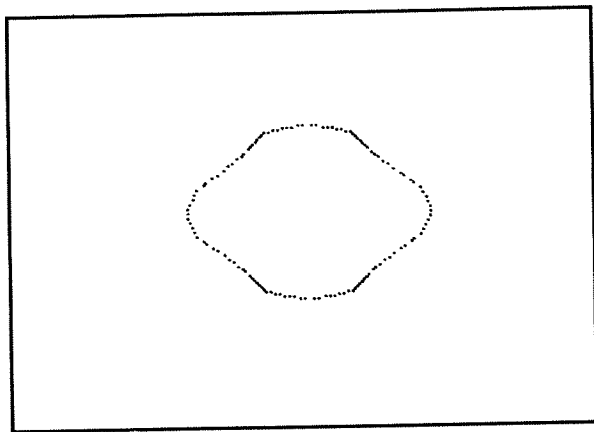


Figura 234

### 3.2. Exemplo 2

Consideremos uma hipociclóide de centro O definida por:

$$\begin{aligned} x_1 &= 50 \cos^3 t \\ y_1 &= 50 \sen^3 t \end{aligned} \quad \text{para } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Seja ainda um círculo de centro O, raio 50, definido por:

$$\begin{aligned} x_2 &= 50 \cos t \\ y_2 &= 50 \sen t \end{aligned}$$

Façamos:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

e

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

```

10 FOR t=0 TO 2*PI STEP .02
20 LET c=COS t
30 LET s=SEN t
40 LET x1=50*c*c*c
50 LET y1=50*s*s*s
60 LET x2=50*c
70 LET y2=50*s
80 LET x=.5*(x1+x2)
90 LET y=.5*(y1+y2)
100 PLOT 100+x,100+y
110 NEXT t

```

Obtemos a seguinte curva:

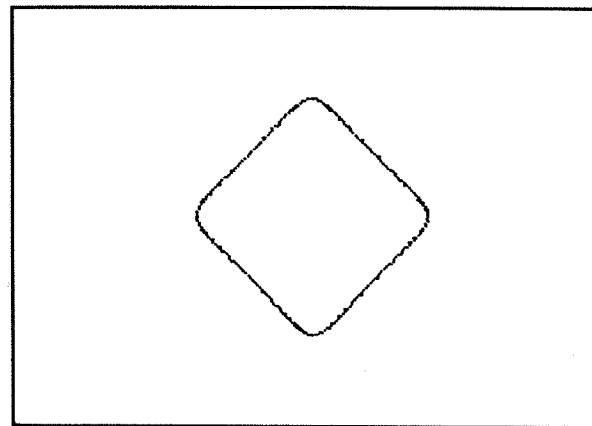


Figura 235

### 3.3. Exemplo 3

Consideremos agora uma cardióide definida por:

$$\begin{aligned} x_1 &= R \cos t \\ y_1 &= R \sin t \end{aligned}$$

com

$$R = 50 (\cos t - 1)$$

para  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

A segunda curva será um trevo de quatro folhas definido por:

$$\begin{aligned} x_2 &= 50 \cos t \cos 2t \\ y_2 &= 50 \sin t \cos 2t \end{aligned}$$

Façamos  $x = x_1$  e  $y = y_2$ :

```

10 FOR t=0 TO 2*PI STEP .01
20 LET r=50*(1-COS t)
30 LET x1=r*COS t
40 LET y1=r*SIN t
50 LET x2=50*COS t*COS (2*t)
60 LET y2=50*SIN t*COS (2*t)
70 PLOT 100-41,00+x1,00+y2
80 NEXT t
    
```

Obteremos:

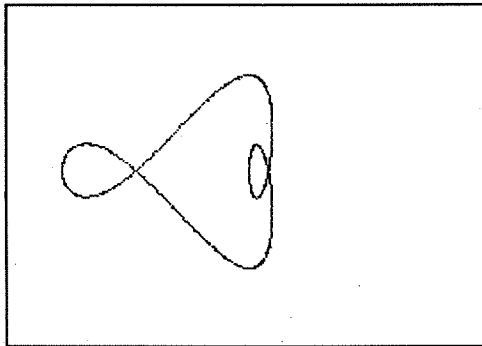


Figura 236

Substituíamos agora a linha 70 do programa pela seguinte:

$$70 \text{ PLOT } 128 + x_2, 88 + y_1$$

Obteremos a curva seguinte:

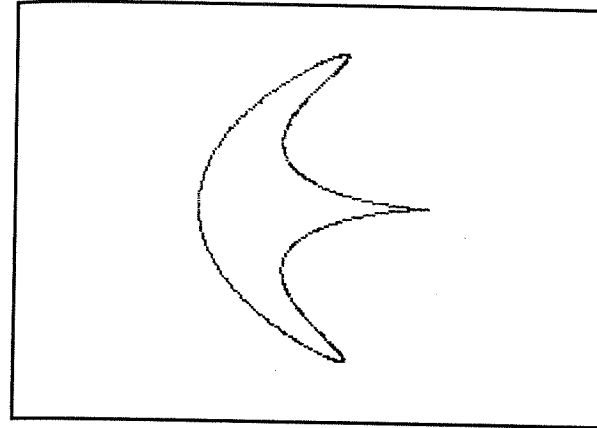


Figura 237

Isto sugere-nos completar esta curva por uma simetria relativamente à vertical passando pelo centro do visor. Podemos ainda rodar o conjunto de  $90^\circ$  relativamente a este centro.

```

10 FOR t=0 TO 2*PI STEP .01
20 LET r=50*(1-COS t)
30 LET x1=r*COS t
40 LET y1=r*SIN t
50 LET x2=50*COS t*COS (2*t)
60 LET y2=50*SIN t*COS (2*t)
70 PLOT 100-41,00-x2,88+y1
80 PLOT 100-41,00+x2,88+y1
90 NEXT t
    
```

Suprimimos no programa as linhas que se tornaram inúteis. Obtemos deste modo um retrato de «extraterrestre»:

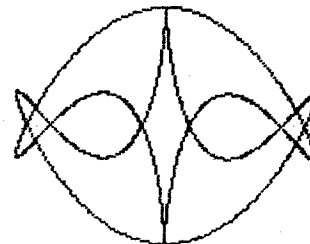


Figura 238

#### 4. Pseudo-cónicas

Sejam  $C_1$  e  $C_2$  duas curvas planas.

Escolheremos um ponto  $M_1$  de  $C_1$  e um ponto  $M_2$  de  $C_2$ , construindo em seguida o segmento de recta  $M_1M_2$ .

##### 4.1. Exemplo 1

$C_1$  é uma elipse e  $C_2$  reduz-se a um ponto.

```
10 FOR t=0 TO 2*PI STEP .1
20 LET x=128+50*COS t
30 LET y=30+20*SIN t
40 PLOT 128,150: DRAW x-128,y-150
50 NEXT t
```

Obteremos a imagem de um cone:

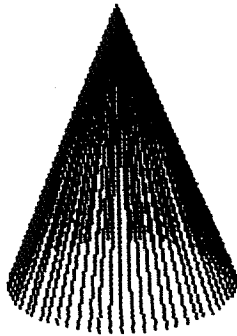


Figura 239

##### 4.2. Exemplo 2

Consideremos agora duas elipses  $C_1$  e  $C_2$  com as mesmas dimensões.

$M_2$  é simétrica de  $M_1$  relativamente ao centro do visor.

```
10 FOR t=0 TO 2*PI STEP .1
20 LET x1=128+30*COS t
30 LET y1=30+15*SIN t
40 LET x2=256-x1
```

```
50 LET y2=176-y1
60 PLOT x2,y2: DRAW x1-x2,y1-y2
70 NEXT t
```

Vejamos o desenho obtido:

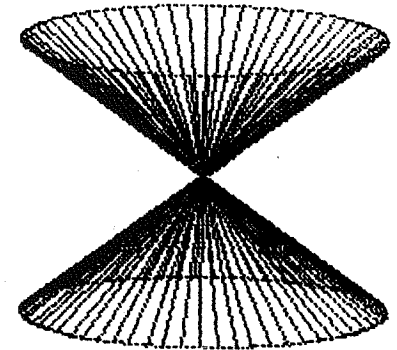


Figura 240

##### 4.3. Exemplo 3

$C_1$  é a curva de equação:

$$y = 50 + 30 \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{200} \right) + 50 \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{50} \right)$$

$C_2$  é a curva de equação:  $y = 80 + 30 \cos \left( \frac{\pi x}{100} \right)$

```
10 FOR x=30 TO 220 STEP 1.5
20 LET y1=50+30*SIN (PI*x/200)
+50*SIN (PI*x/50)
30 LET y2=80+30*COS (PI*x/100)
40 PLOT x,y2: DRAW 30,y1-y2
50 NEXT x
```

Para  $30 \leq x \leq 200$ , obteremos:

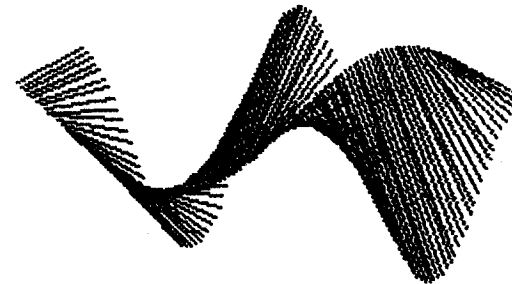


Figura 241

## UMA TRANSFORMAÇÃO INVARIANTE: A INVERSÃO

### 1. Um pouco de cartografia

Como representar num plano a superfície esférica da Terra?

Depois de Mercator (1512-1594) e da sua primeira carta do mundo em 1538, muitas foram as soluções encontradas.

A projecção estereográfica é uma delas: não deformando os ângulos, ela conserva a forma dos contornos na vizinhança de cada ponto. O princípio usado é o seguinte: escolhe-se um ponto  $P$  na superfície da Terra, o *ponto de vista* e associa-se graças a ele um ponto  $M'$  a qualquer ponto  $M$  da superfície terrestre.

$M'$  é o ponto de encontro da recta  $PM$  com o plano tangente em  $P'$  à esfera terrestre.

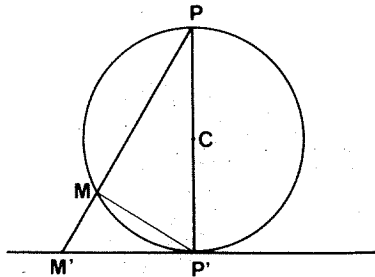


Figura 242

É fácil ver que no triângulo rectângulo  $PP'M'$  temos  $PM \times PM' = d^2$ , designando  $d$  o diâmetro da Terra.

A projecção estereográfica pertence a um tipo particular de transformações, as chamadas *invariantes*, que conservam o valor dos ângulos.

### 2. A inversão plana

2.1. Seja  $C$  uma curva plana. Escolhamos um ponto  $P$  e um número  $k$  não nulo.

Associemos a cada ponto  $M$  da curva  $C$ , distinto de  $P$ , um ponto  $M'$  do plano tendo em conta as duas condições seguintes:

- $M'$  está situado na recta  $PM$ ;
- Temos  $PM \times PM' = k$

Pode-se assim transformar a curva  $C$  numa curva  $C'$ :

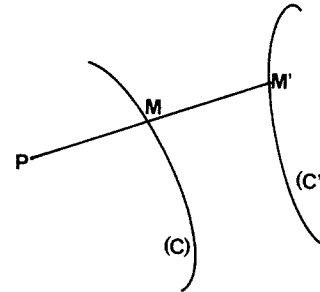


Figura 243

A transformação assim definida é chamada inversão de polo  $P$ , e razão  $k$ . Notemos que a projecção estereográfica é uma inversão, mas no espaço.

2.2. Refiramos o plano a uma origem  $O$  e designemos por  $x_p$  e  $y_p$  as coordenadas de  $P$ , por  $x_1$  e  $y_1$  as de  $M$  e finalmente por  $x_2$  e  $y_2$  as de  $M'$ .

O cálculo mostra que:

$$x_2 = x_1 + \frac{k(x_1 - x_p)}{(x_1 - x_p)^2 + (y_1 - y_p)^2}$$

$$y_2 = y_1 + \frac{k(y_1 - y_p)}{(x_1 - x_p)^2 + (y_1 - y_p)^2}$$

### 3. Inversão de um círculo

Determinemos o inverso de um círculo de centro  $C = (128,88)$ , de raio  $R = 40$ , em alguns casos diferentes.

O programa usado é o seguinte:

```

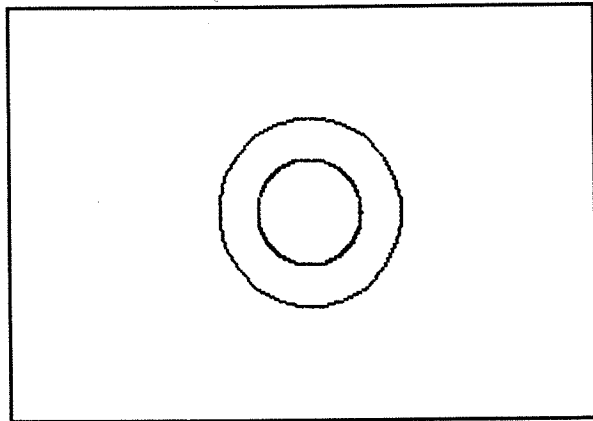
10 FOR X=30 TO 220 STEP 1.5
20 LET Y1=50+30*SIN (PI*X/200)
+50*SIN (PI*X/50)
30 LET Y2=80+30*COS (PI*X/100)
40 PLOT X,Y2: DRAW 30,Y1-Y2
50 NEXT X

```

#### 3.1. Primeiro caso

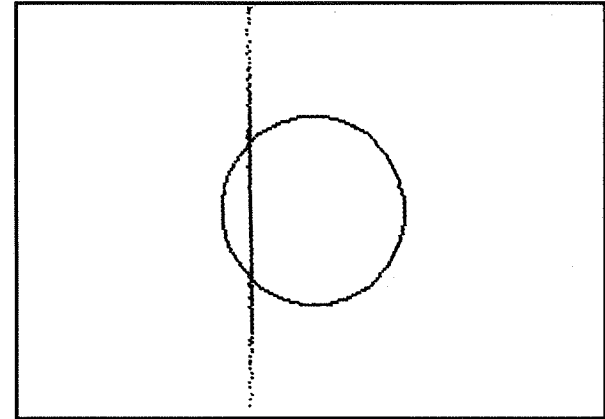
O polo  $P$  coincide com o centro do círculo.

Com  $K = 900$ , obtemos como imagem um segundo círculo concêntrico do primeiro:



#### 3.2. Segundo caso

O polo  $P$  encontra-se sobre o círculo. Obtemos uma recta:

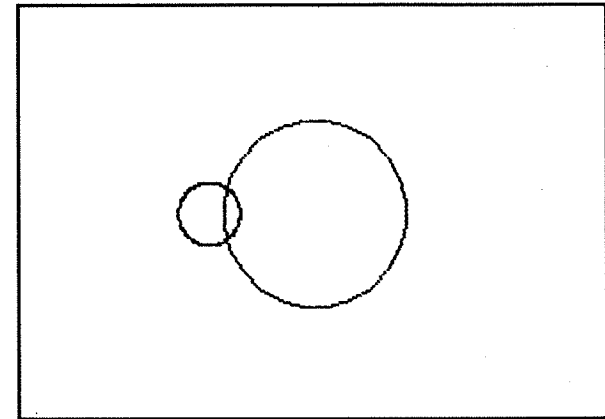


O desenho foi feito com  $k = 1000$ ,  $x_p = 88$ ,  $y_p = 88$ .

#### 3.3. Terceiro caso

O polo  $P$  não pertence ao círculo; é distinto do centro.

Para  $x_p = 60$ ,  $y_p = 88$  e  $K = 1000$ , obteremos novamente um círculo:



#### 4. Inverso de um quadrado

Consideremos um quadrado ABCD de lado 40 e centro (128,88).

O programa que se segue permite obter o inverso de um quadrado, executando uma inversão de polo ( $x_p, y_p$ ) e razão  $k$ .

Neste programa, as coordenadas de um ponto do quadrado são designadas por  $x$  e  $y$  e não por  $x_1$  e  $y_1$ . Isto deve-se ao facto de os ciclos FOR/NEXT não aceitarem nomes de variáveis com mais de uma letra.

```

10 INPUT "Coordenadas do polo: "
11 "X=";XP;"Y=";YP
30 INPUT "Coeficiente K=";K
40 INPUT "Raio do círculo? ";r
50 CIRCLE 128,88,r
60 FOR t=0 TO 2*PI STEP .01
70 LET x1=128+r*COS t
80 LET y1=88+r*SEN t
90 LET d=((x1-XP)*(x1-XP)+(y1-YP)*(y1-YP))
100 LET x2=XP+K*(x1-XP)/d
110 LET y2=YP+K*(y1-YP)/d
120 IF x2<0 OR x2>175 THEN GO TO 130
130 IF y2<0 OR y2>175 THEN GO TO 130
140 PLOT x2,y2
150 NEXT t

```

Vejamos alguns exemplos deste quadrado:

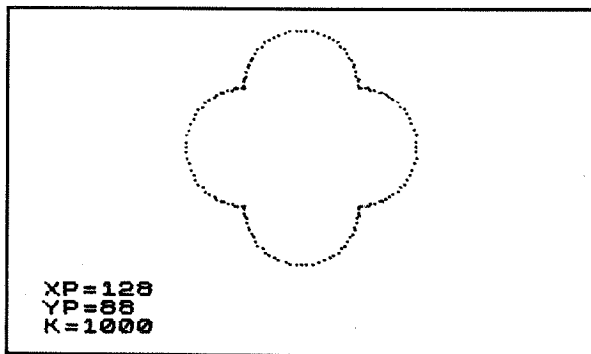


Figura 244

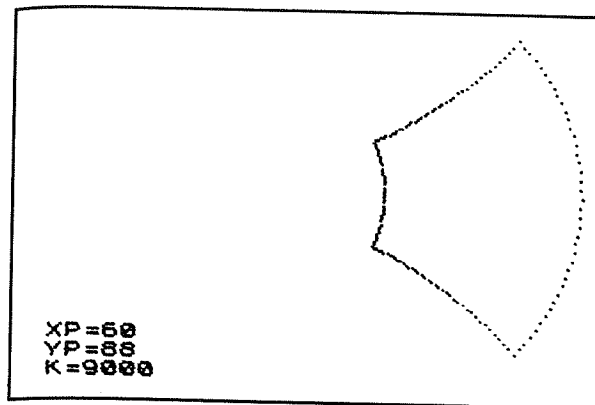


Figura 245

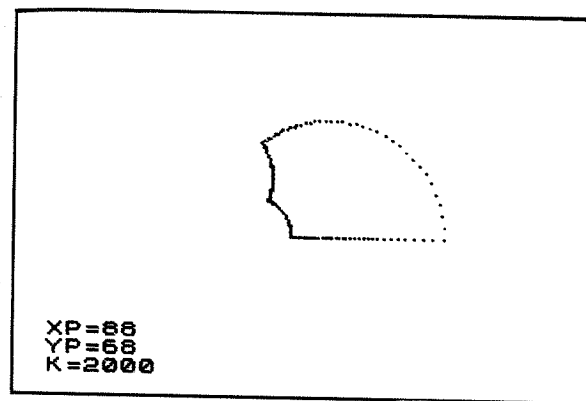


Figura 246

#### 5. Inversas de algumas curvas

5.1. Seja  $C$  uma hipociclóide de equações

$$\begin{aligned} x_1 &= 128 + 50 \cos^3 t \\ y_1 &= 88 + 50 \sin^3 t \end{aligned}$$

com  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

Conforme os valores de  $P$  e  $k$  escolhidos, poderemos obter formas bastante diferentes.



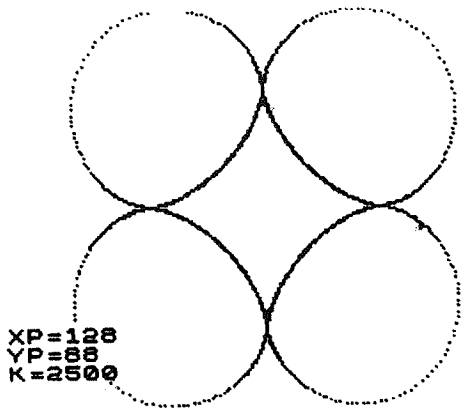


Figura 247

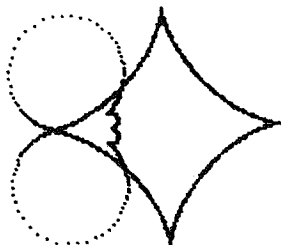


Figura 248



Figura 249

XP = 128  
YP = 88  
K = 5000

XP = 100  
YP = 88  
K = 400

XP = 128  
YP = 88  
K = 5000

O programa é o do parágrafo 3 ao qual acrescentámos, nas linhas 70 e 80, as alterações necessárias para redefinir  $x_1$  e  $y_1$ , retirando as linhas 40 e 50.

5.2 Consideremos agora um trifólio regular de centro (128,88), definido por:

$$e \quad \begin{aligned} x_1 &= 128 + 40 \cos 2t - 20 \cos t \\ y_1 &= 88 + 40 \sin 2t + 20 \sin t \end{aligned}$$

Modificaremos uma vez mais as linhas 70 e 80. Vejamos as curvas obtidas nos três casos:

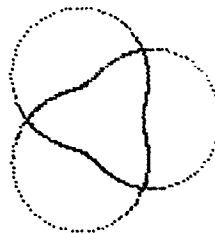


Figura 250

XP = 128  
YP = 88  
K = 1000

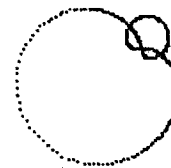


Figura 251

XP = 100  
YP = 50  
K = 600

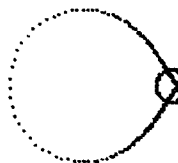


Figura 252

XP = 200  
YP = 88  
K = 1000

## 6. Exercícios

6.1. Construa a imagem de um segmento de recta paralelo ao eixo dos  $y$  e através de uma inversão de polo  $P$  e razão  $k$ .

6.2. Seja  $C_1$  o círculo de centro  $O_1 = (128,88)$  e raio  $R_1 = 40$ , e seja  $C_2$  o círculo de centro  $O_2 = (178,88)$ , de raio  $R_2 = 30$ .

Faremos  $d = O_1O_2 = 50$ .

1) Verifique que  $d^2 = R_1^2 + R_2^2$ ; os dois círculos são ditos ortogonais.

2) Um dos dois pontos de intersecção de  $C_1$  e  $C_2$  tem por coordenadas

$$e \quad x = \frac{R_1^2}{d} = 32$$

$$y = \frac{R_1 R_2}{d} = 24$$

relativamente a um sistema de coordenadas de origem  $O_1$ .

Calcule as coordenadas deste ponto P relativamente ao sistema do espaço-visor.

3) Trace as imagens dos círculos  $C_1$  e  $C_2$  na inversão de centro P e razão k.

6.3. Sejam A e B dois pontos distintos tendo como imagens os pontos A' e B' numa inversão de polo P, razão k.

Verifique que, em geral, A, B, A' e B' pertencem a um mesmo círculo.

6.4. No programa que permite traçar a inversa do trifólio, considera  $x_p = 100$ ,  $y_p = 70$  e  $k = 800$ .

6.5. A qualquer ponto (x,y) façamos corresponder um ponto P' definido por:

$$x' = \log (\sqrt{x^2 + y^2})$$

$$y' = \text{arc tg} \left( \frac{y}{x} \right)$$

Qual é a imagem de um círculo? De uma hipociclóide de quatro pontas? Note que deverá usar as funções LN e ATN da linguagem Basic.

22

## MINI-LOGO

### 1. O rato e a tartaruga

Inventada há alguns anos por Seymour Papert, a Logo é uma linguagem de programação original, muito diferente da Basic no seu espírito e funcionamento.

Na sua parte gráfica, a Logo permite comandar os deslocamentos no visor de um cursor chamado «tartaruga gráfica».

As instruções de comando são muito simples: avança, recua, vira à direita, etc.

Por definição, parece difícil obter os mesmos resultados em Basic. Por exemplo, e ao contrário da Logo, a Basic não é uma linguagem recorrente: não permite definir uma noção (ou melhor, um procedimento) recorrendo a ela própria.

É portanto por uma questão de modéstia que tentaremos aqui controlar os movimentos de um rato, e não de uma tartaruga, no pequeno programa que se segue.

Poderemos mesmo assim obter traçados muito diferentes.

### 2. O princípio de movimentação do rato

É o mesmo que se utilizou nos capítulos 5 e 6.

Suponhamos que o rato se encontra no visor no ponto  $S_1$ , cujas coordenadas são  $x_1$  e  $y_1$ : o rato olha então numa determinada direcção, caracterizada pelo ângulo  $\alpha$  que faz com a margem horizontal do visor.

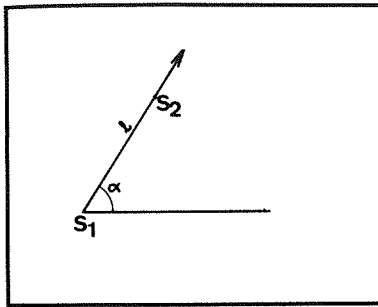


Figura 253

O rato pode então deslocar-se de um comprimento  $L$  na direcção em que olha: chegará assim a  $S_2$  e continuará a olhar na mesma direcção.

$S_2$  terá as coordenadas

$$x_2 = x_1 + L \cos \alpha$$

e

$$y_2 = y_1 + L \sin \alpha$$

O rato pode igualmente rodar no ponto onde se encontra: vira-se então para a esquerda ou para a direita de um ângulo  $\beta$ .

Depois de ter rodado, olhará numa direcção que faz um ângulo  $\alpha + \beta$  com a horizontal.

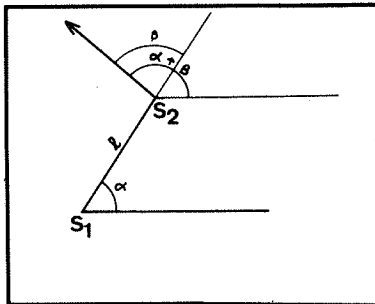


Figura 254

O rato pode igualmente efectuar quatro tipos de saltos: para cima, para baixo, para a direita e para a esquerda.

Depois de ter saltado, continuará a olhar na mesma direcção que anteriormente:

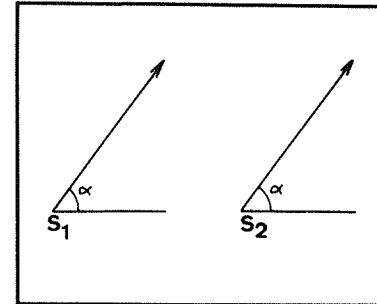


Figura 255

### 3. As primitivas do programa

Por primitiva, entenderemos uma instrução que permita deslocar o rato.

Estas primitivas são em número de dez. Cada uma será designada por duas letras seguidas de um número com o máximo de três algarismos.

AV  $n$ : o rato avança  $n$  unidades de comprimento na direcção em que olha.

RD  $\beta$ : o rato roda, no mesmo ponto, para a direita de um ângulo  $\beta$ .

RE  $\beta$ : o rato roda, no mesmo ponto, para a esquerda de um ângulo  $\beta$ .

AC  $n$ : esta instrução não provoca qualquer deslocamento, mas acrescenta  $n$  unidades ao comprimento do deslocamento seguinte.

DI  $n$ : do mesmo modo, esta instrução diminuirá  $n$  unidades ao comprimento do deslocamento seguinte.

SC  $n$ : faz passar o rato da posição  $x, y$  para a posição  $x, y+n$ , saltando, portanto, para cima.

SB  $n$ : salto para baixo de  $n$  unidades.

SD  $n$ : salto para a direita de  $n$  unidades.

SE n: salto para a esquerda de n unidades.

RP n: esta instrução provoca a repetição da sequência de instruções anterior. Deve ser colocada no final da lista de instruções.

#### 4. Estrutura do programa

##### 4.1. As variáveis

X, Y : coordenadas da posição do rato.

A : Designa o ângulo  $\alpha$ .

B : designa o ângulo  $\beta$ .

K : número de instruções da sequência.

F : número de repetições a efectuar.

A\$(i) : cadeia de 5 caracteres que contém a instrução número i.

R\$, B\$, C\$ : cadeias de caracteres auxiliares que permitem a subdivisão de A\$(i).

N(i): número correspondente aos caracteres números 3, 4 e 5 da cadeia A\$(i).

E : modificação do deslocamento de comprimento inicial L.

L : comprimento do deslocamento.

##### 4.2. O programa

O programa engloba cinco partes:

Linhas 10 a 40: caracterização da posição de partida.

Linhas 50 a 210: entrada de instruções.

Linhas 220 a 470: leitura das instruções e execução destas.

Linhas 480 a 520: impressão da última posição ocupada, assim como da direcção correspondente.

Linhas 530 e 540: se se desejar, encadeia-se um novo desenho a partir da última posição do precedente.

```
5 REM Posicao inicial
10 INPUT "Posicao inicial: X?"
20 INPUT "Posicao inicial: Y?"
30 INPUT "Direccao inicial (em
   graus)?"
```

```
40 LET A=0
40 LET B=0
50 INPUT "Quantas ordens?"
70 DIM A$(K)
80 LET N=0
100 FOR I=1 TO K
110 IF I=1 AND I<>K THEN INPUT
   "Primeira ordem?"
120 IF I>1 AND I<>K THEN INPUT
   "Ordem sequente?"
130 IF I=K THEN INPUT "Ultima o
   rdem?"
140 LET A$(I)=I#
150 LET B$(I)=VAL I#(3 TO 5)
160 IF A$(1 TO 2)="RP" THEN LET
   F=VAL I#(3 TO 5)
170 IF A$(1 TO 2)="RP" AND I<>K
   THEN LET N=N+1
180 IF N=1 THEN LET K=I
190 IF N=1 THEN GO TO 210
200 NEXT I
210 LET N=0
220 FROM EXERCICIO das ordens
230 FOR B=1 TO F
240 FOR K=1 TO K
240 IF B=1 THEN LET E=0
250 LET D=D(I)
260 LET L=L(I)
270 LET C=C(I)
280 LET C#=#(J)
290 LET C#=#(1 TO 2)
300 IF C#="RV" THEN LET L=L+E*(
   H-1)
310 IF C#="RD" THEN LET B=-N*PI
   /180
320 IF C#="RE" THEN LET B=N*PI/
   180
330 IF C#="AC" THEN LET E=N
340 IF C#="DI" THEN LET E=-N
350 IF C#="SC" AND Y<=175-N THE
   N LET Y=Y+N
360 IF C#="SB" AND Y>=N THEN LE
   T Y=Y-N
370 IF C#="SD" AND X<=255-N THE
   N LET X=X+N
380 IF C#="SE" AND X>=N THEN LE
   T X=X-N
390 IF C#<>"AV" THEN GO TO 450
400 LET V=X+L#COS B
```



## CURVAS FRACCIONÁRIAS

Muitas noções relativas às curvas eram consideradas como simples e evidentes até ao início do século XIX. Por exemplo, nenhum matemático dos séculos XVII e XVIII punha em dúvida o facto de uma curva contínua admitir uma tangente em cada um dos seus pontos, exceptuando talvez alguns pontos singulares.

Bolzano (1781-1848), Riemann (1826-1866) e sobretudo Weierstrass (1815-1897) foram os primeiros a demonstrar que existem efectivamente curvas contínuas sem tangentes. Von Koch (1870-1924) apresentou, em 1904, um processo explícito de construção destas curvas. Pelo seu lado, Peano (1858-1932) construiu uma curva contínua capaz de preencher todo um quadrado, pondo assim em causa a noção de dimensão.

As curvas de Von Koch e Peano são aqui designadas fraccionárias, por terem uma dimensão fraccionária.

### 1. Princípio da representação

Nenhuma das curvas de que trataremos neste capítulo pode ser construída com rigor, mas todas elas podem ser obtidas com alguma aproximação recorrendo a uma sequência de polígonos  $P_1, P_2, \dots, P_n$ .

Esta sequência é construída por recorrência, isto é, obtendo uma aproximação cada vez maior: definem-se as características de  $P_{n+1}$  a partir das de  $P_n$ .

Estas características são codificadas sob a forma de uma cadeia de caracteres de acordo com o método exposto no capítulo 6: utilizaremos a letras D e G para designar uma mudança de direcção para a direita ou para a esquerda.

### 2. A curva de Von Koch

Esta curva não pode ser definida simplesmente por uma equação ou uma propriedade geométrica.

Para construir a sequência de polígonos  $P_1, P_2, P_3, \dots$ , utilizaremos os factos seguintes:

1)  $P_1$  é um triângulo equilátero cujos lados têm um comprimento  $L$ .

2) Passa-se de  $P_n$  a  $P_{n+1}$  substituindo cada lado de  $P_n$  por quatro segmentos com o mesmo comprimento, como se indica no desenho seguinte:

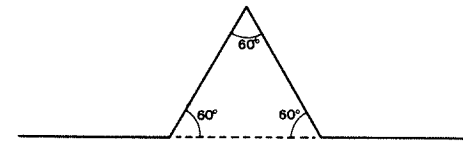


Figura 262

Isto equivale a começar e terminar a codificação de  $P_n$  pela sequência DGD, e intercalar esta mesma sequência entre duas letras consecutivas da codificação de  $P_n$ . Por exemplo, sendo  $P_1$  codificado GG,  $P_2$  será DGD G DGD G DGD.

A letra D corresponde a uma mudança de direcção de  $\pi/3$  para a direita, enquanto que a letra G corresponde a uma mudança de direcção de  $2\pi/3$  para a esquerda.

3) O polígono  $P_n$  tem um lado cujo comprimento é

$$L_n = \frac{L}{3^{n-1}}$$

Estes resultados são obtidos facilmente por recorrência. Por exemplo,

$$L_4 = \frac{L_3}{3} = \frac{L_2}{9} = \frac{L}{27} \quad \text{ou seja, } \frac{L}{3^3}$$

No programa que se segue, obteremos o traçado de  $P_n$  definindo  $n$  no início do programa.

```

10 INPUT "N= " ; N
20 LET a = # "GG"
30 IF n = 1 THEN GO TO 110
40 FOR j = 1 TO n-1
50 FOR i = 1 TO LEN a#
60 LET c = a#(i) + "DGD"
70 NEXT i
80 NEXT j
90 LET a = "DGD" + a#
100 NEXT j
110 PRINT "Traçado do a: curva"
110 LET a = a#*PI/3
120 LET d = 1/(3+(n-1))
130 LET x = 0
140 LET y = 0
150 FOR i = 1 TO LEN a#
160 PLOT x,y: DRAW d*COS a,d*SI
N a
180 LET x = x + d*COS a
190 LET y = y + d*SI
200 IF a#(i) = "D" THEN LET b = -PI
210 IF a#(i) = "G" THEN LET b = 2*PI
I/3
220 LET a = a + b
230 NEXT i
240 PLOT x,y: DRAW d*COS a,d*SI
N a
250 PRINT AT 2,2;"N= " ; N

```

Vejamos alguns aspectos desta curva:

$N=1$

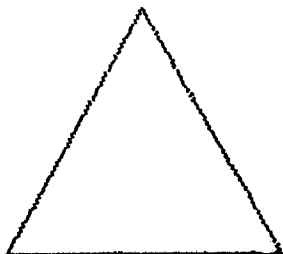
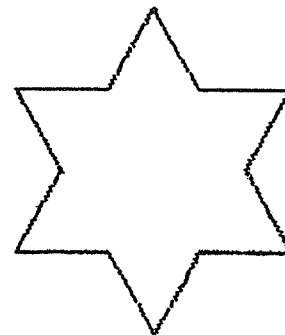


Figura 263

$N=2$



$N=5$

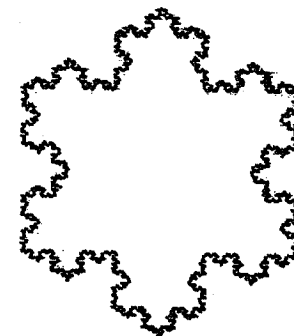


Figura 264

Figura 265

### 3. A primeira construção de Peano

O processo de construção desta curva é explicado pelos dois desenhos seguintes:

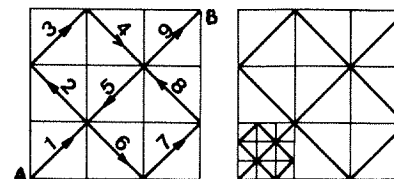


Figura 266 – Esquerda: um quadrado qualquer é dividido em 9 quadrados iguais. A é o vértice inicial, B o vértice final. Direita: Cada um dos nove quadrados é por sua vez dividido em nove quadrados, etc.

Para construir a sequência  $P_1, P_2, P_3, \dots$  utilizaremos as seguintes três conclusões:

1) Ao codificar  $P_1$  partindo de A para B, obtemos a sequência GDDD GGGD, onde G corresponde a uma mudança de direcção de  $\pi/2$  para a direita.

2) Passa-se da codificação de  $P_n$  para a de  $P_{n+1}$  intercalando a sequência GDDD GGGD entre duas letras consecutivas do código de  $P_n$ .

3) Se L designa o comprimento de um lado do quadrado inicial, o lado de  $P_n$  terá o comprimento  $L \sqrt{2}/3^n$ . Este resultado é obtido facilmente por recorrência. Por exemplo,

$$L_3 = \frac{L}{27} \times \sqrt{2} = \frac{L}{3^3} \sqrt{2}$$

Tendo isto em conta, podemos modificar o programa anterior e obter o seguinte:

```

100 INPUT "N=" ;N
200 LET a="GDDDGGGD"
300 LET L=100
400 FOR I=1 TO N-1
500 LET a=""
600 FOR J=1 TO LEN a
700 LET c=a#(J)+"GDDDGGGD"
800 LET a=a#c
900 NEXT J
1000 LET a="GDDDGGGD"+a
1100 NEXT I
1200 PLOT 0,0: DRAW 0,100: DRAW
1300,0: DRAW 0,-100: DRAW -100,
0
1400 LET b=PI/4
1500 LET c=(360/N)/(3+D)
1600 LET X=0:FOR D/(3+D)
1700 FOR I=1 TO LEN a
1800 PLOT X,Y: DRAW G*COS a,d*SI
N
1900 LET X=X+d*COS a
2000 LET Y=Y+d*SI a
2100 IF a#(1)="D" THEN LET b=-PI
2200 IF a#(1)="G" THEN LET b=PI/

```

```

2200 LET a=a+b
2300 NEXT I
2400 PLOT X,Y: DRAW d*COS a,d*SI
N
2500 PRINT AT 2,2;"N=" ;N

```

Vejamos alguns aspectos da primeira curva de Peano:

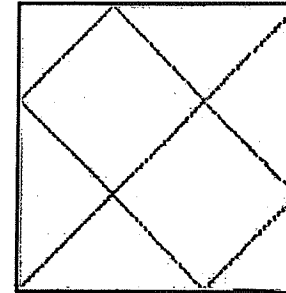


Figura 267

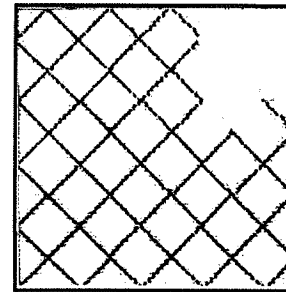


Figura 268

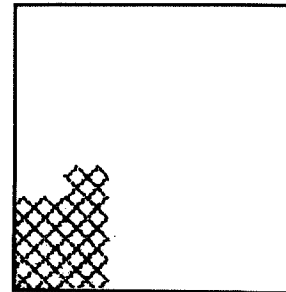


Figura 269



Mais do que estes desenhos, convirá visualizar o traçado enquanto é feito; obtém-se assim uma melhor compreensão da curva de Peano.

#### 4. A segunda curva de Peano

A sequência  $P_1, P_2, P_3, \dots$  é assim definida:

- 1)  $P_1$  é um quadrado de comprimento  $L$ .
- 2) Passa-se do polígono  $P_n$  ao polígono  $P_{n+1}$  substituindo cada lado de  $P_n$  por três novos segmentos, como se mostra no desenho seguinte:

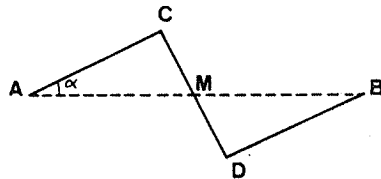


Figura 270

Os três novos segmentos AC, CD e BD têm o mesmo comprimento.

Como  $AC^2 + CM^2 = AM^2$ , obtém-se facilmente

$$AC = \frac{AB}{\sqrt{5}}$$

- 3) Resulta daqui que o comprimento de um lado de  $P_n$  é igual a

$$\frac{L}{(\sqrt{5})^{n-1}}$$

- 4) Passa-se da codificação de  $P_n$  para a de  $P_{n+1}$  intercalando GD entre cada letra do código de  $P_n$ , e acrescentando esta mesma sequência no início e no final da codificação.

- 5) Como  $\text{tg } \alpha = 1/2$ ,  $\alpha = \text{arc tg } 0,5$ .  
Resulta daqui que a direção inicial é igual a

$$\frac{\pi}{2} - (n-1) \text{ arc tg } 0,5$$

Modificando uma vez mais o primeiro programa, obtemos o seguinte:

```

10 INPUT "N=" ;N
20 LET a#="GG"
30 LET c#="GG"
40 LET x=0
50 LET y=0
60 FOR i=1 TO n-1
70 LET c#="TO n-1"
80 LET c#="TO LEN a#"
90 LET c#="c#+a#(1)+"GD"
100 NEXT i
110 LET a#="GD"+c#
120 NEXT i
130 LET a#="1/500"
140 LET a#="PI/2-(n-1)*PI/5"
145 LET a#="a*(k+(n-1))"
150 FOR i=1 TO LEN a#
160 PLOT X,Y: DRAW a#COS a,d#SI
N
170 LET x=x+d#COS a
180 LET y=y+d#SIN a
190 IF a#(1)="0" THEN LET b=-PI
200 IF a#(1)="G" THEN LET b=PI/
210 LET a=a+b
220 NEXT i
230 PLOT X,Y: DRAW d#COS a,d#SI
N

```

Vejamos alguns exemplos dos polígonos que é possível obter:

N=2

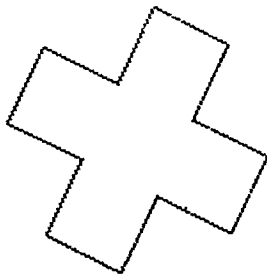


Figura 271

N=3

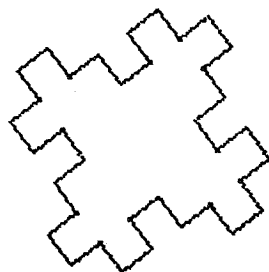


Figura 272

N=5

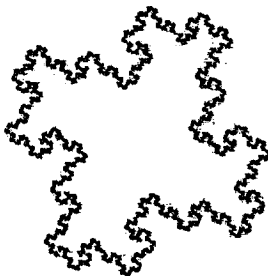


Figura 273

## 5. Exercícios

5.1. No programa do parágrafo 4, acrescente  $\pi/2$  após as instruções DRAW, nas linhas 160 e 230, de modo a traçar arcos de círculo em vez de segmentos de recta.

5.2. No programa do parágrafo 2, efectue as seguintes modificações:

Linha 20: GGG em vez de GG  
Linha 70: DGGD em vez de DGD  
Linha 90: DGGD em vez de DGD  
Linha 110:  $\pi/2$  em vez de  $2\pi/3$ .  
Linha 200:  $-\pi/2$  em vez de  $-\pi/3$ .  
Linha 210:  $\pi/2$  em vez de  $2\pi/3$ .  
Considere  $x = 150$ ,  $y = 50$  e  $L = 150$ .

5.3. Ainda no programa do parágrafo 2, substitua na linha 20 a cadeia GG pela cadeia GGGGG e, nas linhas 70 e 90, DGD por GDG.

Considere  $L = 120$ ,  $x = 200$ .

## ELIMINAÇÃO DE PARTES ESCONDIDAS

Consideremos o desenho seguinte:

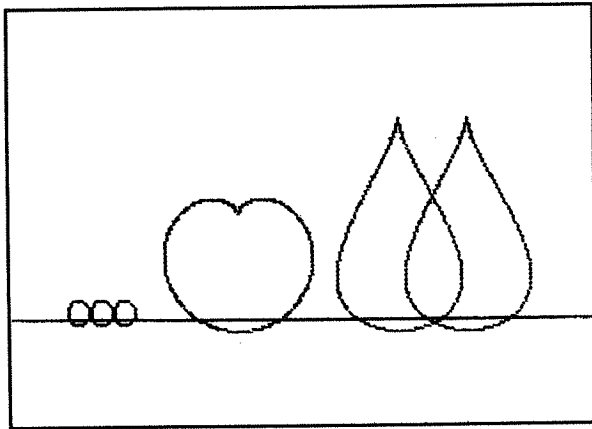


Figura 274

Para executar este desenho, utilizámos três círculos, uma cardióide e duas quádricas piriformes (ver os capítulos 14 e 16).

Estas curvas foram «rectificadas» graças ao programa de rotações do capítulo 11.

Eliminando as partes escondidas do desenho, obtemos uma «natureza morta com fruta»:

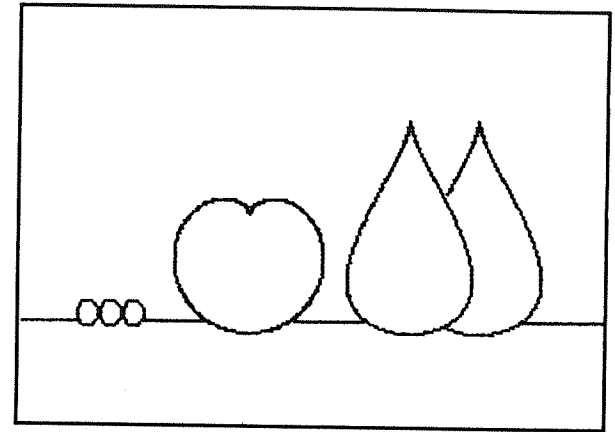


Figura 275

Não existe nenhum algoritmo geral para proceder à eliminação das partes escondidas. Contentar-nos-emos portanto com a indicação de alguns dos métodos possíveis.

### 1. Método n.º 1

1.1 Consideremos um motivo simples:

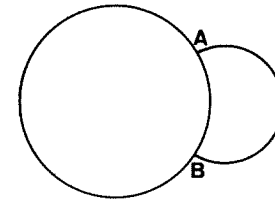


Figura 276

O motivo é composto por dois círculos, com supressão do arco  $\overline{AB}$ :

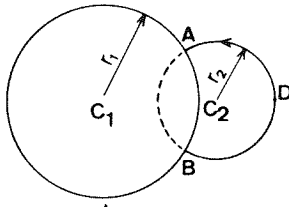


Figura 277

Escolhamos  $C_1 = (128,88)$ ,  $C_2 = (190,88)$ ,  $R_1 = 50$  e  $R_2 = 30$ .

1.2 Construamos primeiro um programa que permita traçar os dois círculos.

O primeiro círculo será obtido graças a uma instrução CIRCLE; o segundo sê-lo-á graças a uma representação paramétrica dependente de um ângulo  $t$  compreendido entre  $0$  e  $2\pi$  radianos.

```

10 CIRCLE 128,88,50
20 FOR t=0 TO 2*PI STEP .02
30 LET X=128+50*COS t
40 LET Y=88+50*SIN t
50 PLOT X,Y
60 NEXT t

```

1.3 Executemos agora o programa. Depois de traçado o círculo  $C_1$ , o círculo  $C_2$  é desenhado ponto por ponto a partir do ponto D.

Grças à ordem BREAK, podemos parar o programa no momento oportuno; é então possível, escrevendo PRINT T e depois ENTER, obter o valor do parâmetro  $t$  no momento da paragem.

Obtemos assim  $t_1 = 2,22$  e  $t_2 = 4,08$ .

Podemos agora rectificar o programa:

```

10 CIRCLE 128,88,50
20 FOR t=0 TO 2*PI STEP .02
30 LET X=128+50*COS t
40 LET Y=88+50*SIN t
50 IF t<=2.22 OR t>=4.08 THEN
PLOT X,Y
60 NEXT t

```

## 2. Método n.º 2

2.1 Seja  $C$  uma curva plana, fechada e simples de equação  $f(x,y) = 0$ .

Recordemos, usando dois esboços, o que entendemos por curva simples:

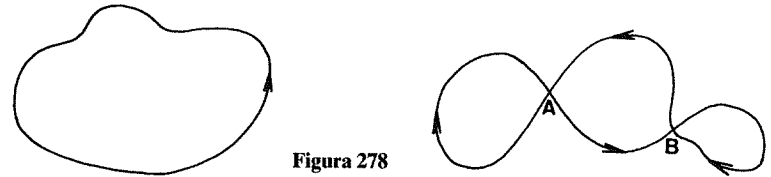


Figura 278

Esquerda: Curva simples. Direita: Curva não simples, com dois pontos de intersecção sobre si mesma.

A curva  $C$  divide então o plano em três regiões diferentes.

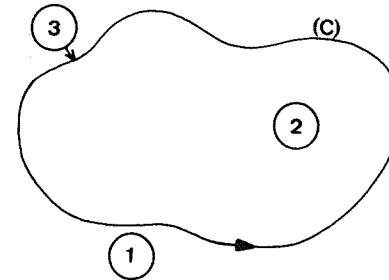


Figura 279

Seja  $P = (x,y)$  um ponto qualquer do plano: teremos  $f(x,y) = 0$  se  $P$  pertence à curva  $C$ ;  $f(x,y)$  será positiva ou negativa conforme  $P$  pertença a uma ou outra região.

Para identificar o sinal de  $f(x,y)$  em cada uma das duas regiões, basta um teste.

Consideramos, quando possível, o ponto  $(0,0)$ : se  $f(0,0)$  é por exemplo estritamente positiva, o mesmo acontecerá para todos os pontos da região.

2.2 Apliquemos esta conclusão ao desenho do parágrafo 1.1

A equação do primeiro círculo é

$$f(x,y) = (x-128)^2 + (y-88)^2 - 50^2 = 0$$

Temos

$$f(0,0) = 128^2 + 88^2 - 50^2$$

peço que  $f(0,0)$  é positiva e o exterior do primeiro círculo é caracterizado por  $f(x,y) > 0$ .

O programa é o seguinte:

```

10 CIRCLE 128,88,50
20 FOR t=0 TO 360 STEP .02
30 LET x=128+50*COS t
40 LET y=88+50*SIN t
50 LET d=((x-128)^2+(y-88)^2)
60 IF d>50 THEN PLOT x,y
70 NEXT t

```

### 3. Método n.º 3

3.1 A função POINT (X,Y) permite saber se o pixel de coordenadas X e Y se encontra ou não marcado a tinta no visor. Conforme o caso, POINT (X,Y) valerá 1 ou 0.

Podemos, em alguns casos, utilizar esta função para eliminar as partes escondidas do desenho.

3.2 Consideremos o caso de uma recta  $\Delta$  escondida parcialmente por um rectângulo ABCD.

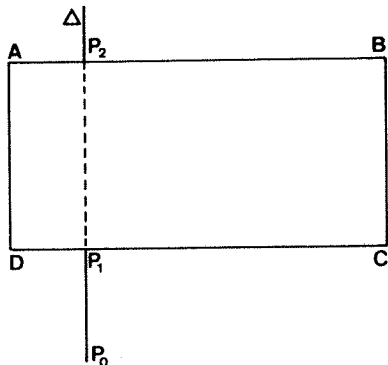


Figura 280

A recta é traçada graças a um ponto móvel M de coordenadas x e y.  $P_0$  é escolhido como ponto de partida do traçado.

Quando M se encontra em  $P_0$ , considera-se  $d = 0$ .

Quando M está em  $P_1$ , POINT (X,Y) = 1 e d vale então 1; o traçado é interrompido.

Quando M atinge  $P_2$ , POINT (X, Y) = 1 novamente, e d vale 2: o traçado recomeça.

### 3.3 Exemplo

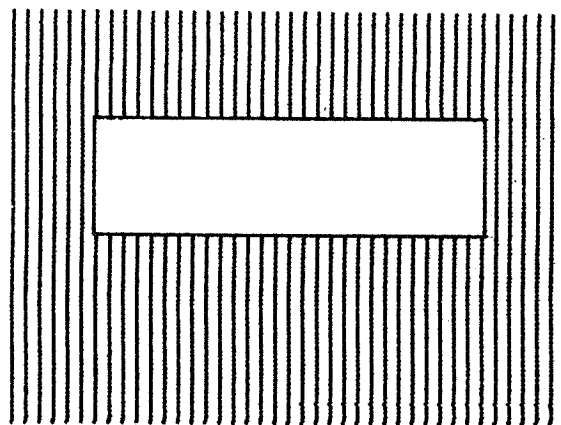


Figura 281

O programa é o seguinte:

```

10 PLOT 40,88: DRAW 0,50: DRAW
170,0: DRAW 0,-50: DRAW -170,0
200 FOR x=0 TO 280 STEP 6
30 LET d=0
40 FOR y=0 TO 170
50 LET p=POINT(x,y)
60 IF p=1 THEN LET d=d+1
70 IF d/2=INT(d/2) THEN PLOT
x,y
80 NEXT y
90 NEXT x

```

3.4 O método só dificilmente pode ser usado para linhas que não sejam rectas.

Isto deve-se essencialmente a duas razões:

- 1) No visor, a intersecção de duas curvas não é necessariamente reduzida a um só pixel;
- 2) Quando se calculam as coordenadas de um novo ponto da curva a traçar, pode encontrar-se um ponto já marcado, o que falseia a informação dada por POINT.

#### 4. Exercícios

Desenhe cada um dos motivos seguintes:

- 1) Verifique que os anéis não estão entrelaçados.

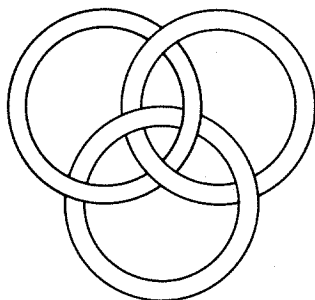


Figura 282

2)

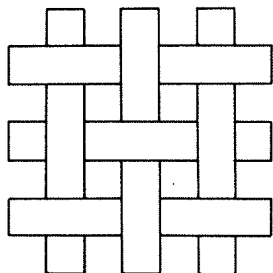


Figura 283

3)



Figura 284

25

### TRACEJADOS, COLORAÇÕES

Para colorir ou preencher a tracejado uma superfície limitada por uma curva  $C$  fechada e simples, existem diversos métodos.

Cada um deles apresenta vantagens e inconvenientes, o que significa que, quando é possível escolher, preferimos naturalmente o método mais rápido.

Estes diversos métodos serão explicados através de casos particulares.

#### 1. Uso de macro-instruções

Em certos casos (quadrados, rectângulos, etc.), as macro-instruções DRAW e CIRCLE permitem muito rapidamente obter boas colorações de maneira relativamente rápida.

##### 1.1 Coloração de um quadrado

Seja um quadrado de centro  $G = (x_g, y_g)$ , de lado  $c$ , sendo os lados paralelos aos eixos. Para obter um quadrado deste tipo, bastar-nos-á traçar, a partir do centro, quadrados concêntricos.

```

10 INPUT "C= ";c
20 INPUT "XC= ";xc
30 INPUT "YC= ";yc
40 FOR L=1 TO c
50 PLOT xc-1/2,yc-1/2: DRAW 0,
L: DRAW L,0: DRAW 0,L: DRAW -L,0
60 NEXT L

```

### 1.2 Coloração de um rectângulo

Seja um rectângulo de centro  $G = (x_g, y_g)$ , de comprimento  $L$  e largura  $k$ , cujos lados são paralelos aos eixos.

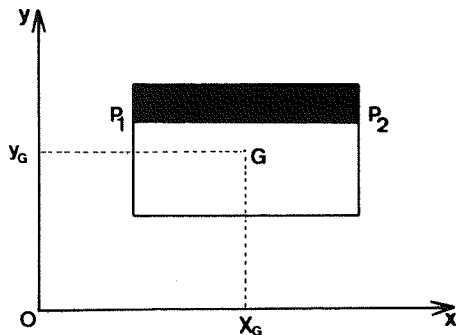


Figura 285

Para colorir este rectângulo traçaremos segmentos horizontais, por exemplo  $P_1P_2$ .

```

10 INPUT "XG= ";XG
20 INPUT "YG= ";YG
30 INPUT "Comprimento? ";L
40 INPUT "Largura? ";K
50 FOR Y=YG-K/2 TO YG+K/2
60 PLOT XG-L/2,Y: DRAW L,0
70 NEXT Y
    
```

### 1.3 Coloração de um anel

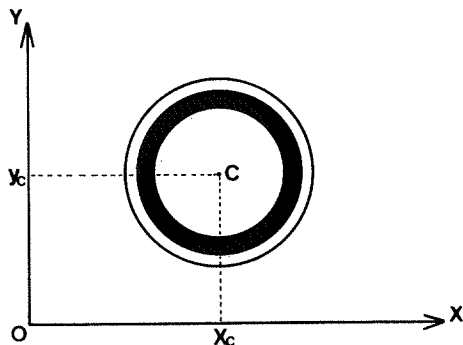


Figura 286

A partir do centro  $C = (x_c, y_c)$  traçaremos círculos concêntricos.

Escolhemos um passo suficientemente pequeno.

```

10 INPUT "XC= ";XC
20 INPUT "YC= ";YC
30 INPUT "R1= ";R1
40 INPUT "R2= ";R2
50 IF R1>R2 THEN LET d=R1: LE
T e=R2
60 IF R1<R2 THEN LET d=R2: LET
e=R1
70 INPUT "Passo? ";s
80 FOR r=e TO d STEP s
90 CIRCLE XC,YC,r
100 NEXT r
    
```

Com  $s = 0,1$ , obtemos o seguinte:

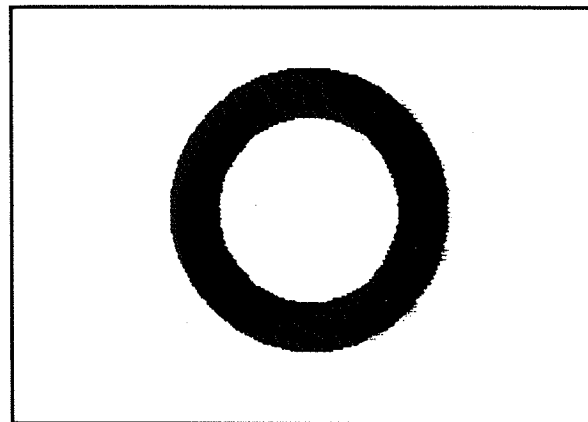


Figura 287

### 1.4 Coloração de um disco

Seja um disco de centro  $C = (x_c, y_c)$  e raio  $R$ . Escolhemos três pontos que saibamos pertencerem ao disco:  $A, B, C$ .

Para cada ponto  $P$  do círculo, faremos traçar os segmentos  $AP, BP$  e  $CP$  (o que obriga evidentemente a uma construção do círculo, ponto por ponto).

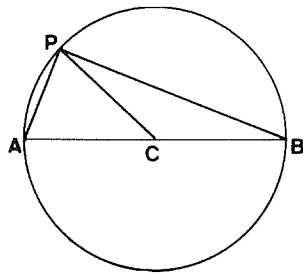


Figura 288

O resultado depende evidentemente do passo escolhido: obtém-se um resultado bastante bom com um passo de 0,05.

```

10 INPUT "XC= ";xc
20 INPUT "YC= ";yc
30 INPUT "R= ";r
40 LET xb=xc-r
50 LET xc=yc
60 LET xc=xc+r
70 LET yc=yc
80 FOR t=0 TO 2*PI STEP .05
90 LET x=xc+r*cos t
100 LET y=yc+r*sin t
110 PLOT x,y: DRAW X-XC,Y-YC
120 PLOT x,y: DRAW X-XB,Y-YB
130 PLOT x,y: DRAW X-XC,Y-YC
140 NEXT t

```

## 2. Definição de dois contornos opostos

2.1 Seja F uma figura limitada por um contorno C. Suponhamos que é possível diferenciar facilmente um rebordo superior e um rebordo inferior nesta curva C, graças a um corte AB.

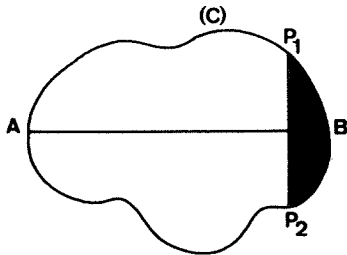


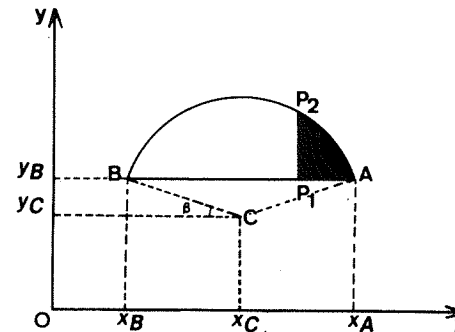
Figura 289

Bastará traçar o segmento variável  $P_1P_2$ , obtido considerando  $P_1$  no contorno superior e  $P_2$  no contorno inferior, para colorir a figura F.

Na prática, este método será usado sistematicamente quando um dos dois contornos é um segmento de recta. Naturalmente, em vez de um contorno superior e de um contorno inferior, poderemos utilizar em caso de necessidade um contorno direito e um contorno esquerdo.

### 2.2 Exemplos

Consideremos um arco  $\widehat{AB}$  de medida  $\alpha$ , centro  $C = (x_c, y_c)$  e raio R, disposto da forma indicada no desenho seguinte, com  $\alpha \leq 180^\circ$ :



$$\begin{aligned}
 B &= (180^\circ - \alpha)/2 \\
 x_A &= x_C + R \cos \beta \\
 y_A &= y_C + R \sin \beta
 \end{aligned}$$

Figura 290

O programa é o seguinte:

```

10 INPUT "Coordenadas do centr
0: X= ";xc
20 INPUT "Coordenadas do centr
0: Y= ";yc
30 INPUT "Raio? ";r
40 INPUT "Medida do arco (em g
raus) ? ";a
50 LET b=(180-a)/2
60 LET a=a*PI/180
70 LET b=b*PI/180
80 LET xc=xc+r*cos b

```



```

90 INPUT "Escolha um passo: ";
s
100 FOR t=b TO PI-b STEP s
110 LET x=xc+r*cos t
120 LET y=yc+r*sin t
130 PLOT x,y: DRAW 0,y-y0
140 NEXT t

```

Com um passo  $s = 0,01$ , obtemos o seguinte:

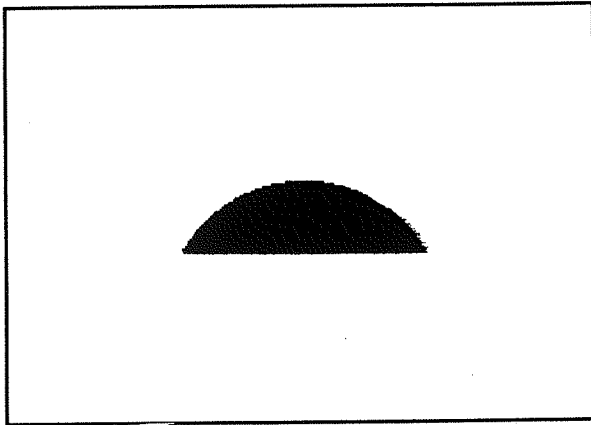


Figura 291

Mas com um passo  $s = 0,1$ , obteremos tracejados verticais:

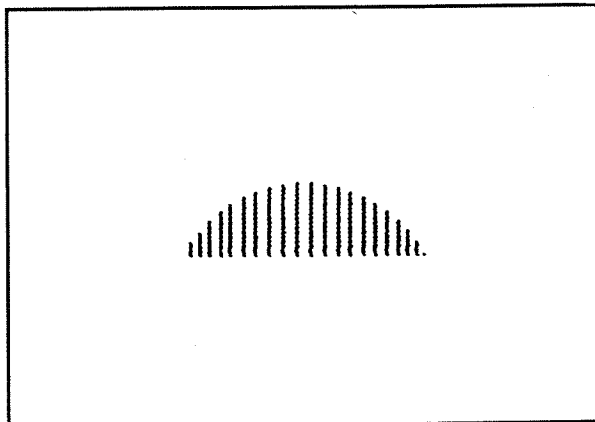


Figura 292

### 3. Uso de uma simetria

Se a curva  $C$  que limita a figura a colorir apresenta uma simetria, podemos facilmente adaptar o método precedente.

3.1 Consideremos por exemplo uma elipse de centro  $C = (x_c, y_c)$ , eixo maior  $2a$  e eixo menor  $2b$ .

Vamos supor estes arcos paralelos às margens do visor. A elipse apresenta uma simetria relativamente ao eixo maior  $AA'$ ; poderemos portanto definir, para um mesmo valor do parâmetro  $t$ , as equações:

$$\begin{aligned}
 x &= x_c + a \cos t \\
 y &= y_c + b \sin t
 \end{aligned}$$

e dois pontos  $P_1 = (x_1, y_1)$  e  $P_2 = (x_2, y_2)$ :

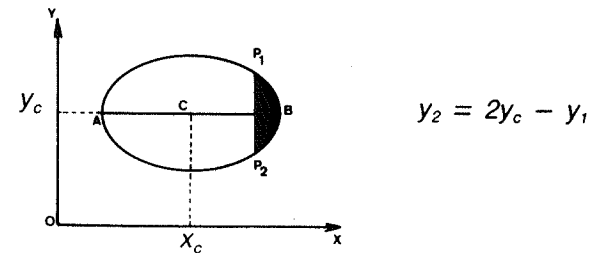


Figura 293

Quando  $P_1$  descreve a semi-elipse superior,  $P_2$  descreve a semi-elipse inferior.

O programa é o seguinte:

```

10 INPUT "A? ";a
20 INPUT "B? ";b
30 INPUT "XC? ";xc
40 INPUT "YC? ";yc
50 INPUT "Valor do passo? ";s
60 FOR t=0 TO PI STEP s
70 LET x=xc+a*cos t
80 LET y1=yc+b*sin t
90 LET y2=2*yc-y1
100 PLOT x,y1: DRAW 0,y2-y1
110 NEXT t

```

Para um passo igual a 0,01, obtemos uma boa coloração:

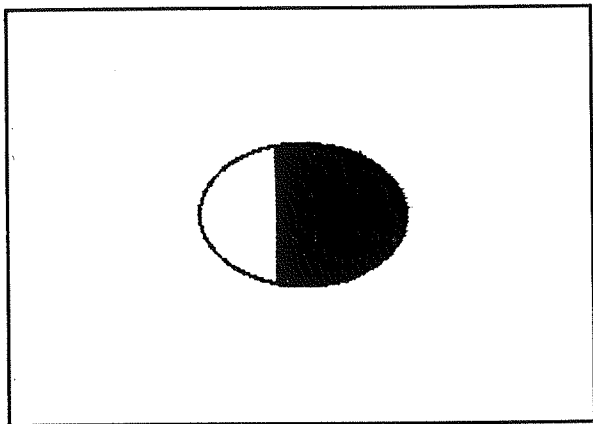


Figura 294

3.2 Para obter um tracejado vertical, basta modificar o passo  $s$ . Com  $s = 0,2$ , obtemos o desenho seguinte:

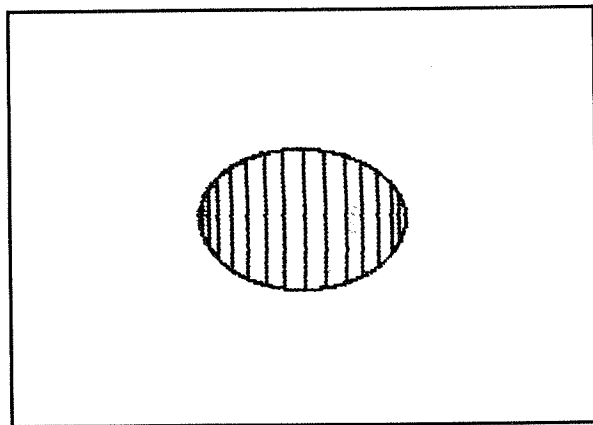


Figura 295

Os tracejados não são equidistantes.

#### 4. Uso da instrução POINT

4.1 Esta instrução já foi referida no capítulo precedente, parágrafo 4.

Só pode ser utilizada para colorir um domínio plano, tendo como fronteira uma curva fechada simples e, na condição de este domínio ser *convexo*. O desenho seguinte explica esta noção:

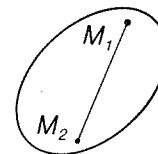


Figura 296 – Quaisquer que sejam os pontos  $M_1$  e  $M_2$ , o segmento  $M_1M_2$  encontra-se sempre no interior da curva  $C$ .

Se o domínio a colorir não corresponde a esta condição, será necessário decompô-lo em várias regiões convexas.

4.2 A curva  $C$  deve ser traçada de tal modo que seja contínua; isto supõe que o passo escolhido é suficientemente pequeno.

4.3 Seja  $C$  uma curva satisfazendo as condições citadas. Pode sempre encontrar-se um rectângulo que a contenha.

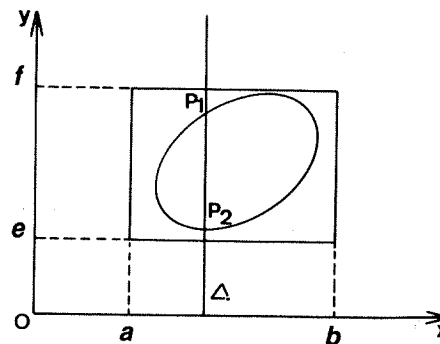


Figura 297

O método de coloração consiste em varrer este rectângulo da esquerda para a direita (ou de cima para baixo) usando uma recta  $\Delta$ .

Para cada posição de  $\Delta$ , determinamos as coordenadas dos pontos  $P_1$  e  $P_2$  e traçamos em seguida, quando possível, o segmento  $P_1P_2$ .

Para obter um bom resultado com estes tracejados, deve verificar-se se o rectângulo não é tangente à curva C.

4.4 O programa engloba duas partes: primeiramente a que permite traçar a curva C (linhas 10 a 200); depois a que efectua a coloração (linhas 210 a 310).

```

0000 LET d=0
0000 FOR x=0 TO 5
0000 FOR u=0 TO 7
0000 LET p=POINT (X,U)
0000 IF p=1 THEN LET d=d+1
0000 IF p=1 AND d=1 THEN LET y1=
0070 IF p=1 AND d>1 THEN LET y2=
0000 NEXT u
0000 IF d>1 THEN PLOT X,Y1: DRAW
0000 LET d=0
0100 NEXT x

```

O programa contém uma pequena complicação, concretamente a variável d, pois a intersecção da recta  $\Delta$  e da curva C não se reduz necessariamente a um único pixel.

#### 4.5 Exemplo

C é um hexágono regular de centro (128,88) cujo lado mede 40: utilizámos o programa do capítulo 5 para traçar este hexágono.



Figura 298

O programa é o seguinte:

```

0100 LET x=128
0200 LET y=88
0300 LET d=0
0400 LET z=40
0500 LET n=PI/3
0600 FOR i=1 TO 6
0700 PLOT X,Y: DRAW (*COS z, (*SI
N
0800 LET x=x+40*005 N
0900 LET y=y+40*005 SIN N
1000 LET n=n+PI/3
1100 NEXT i
1200 LET p=0
1300 LET q=128
1400 LET r=88
1500 LET s=40
1600 LET t=PI/3
1700 FOR u=0 TO 7
1800 FOR v=0 TO 5
1900 LET p=POINT (X,U)
2000 IF p=1 THEN LET d=d+1
2100 IF p=1 AND d=1 THEN LET y1=
2270 IF p=1 AND d>1 THEN LET y2=
2300 NEXT u
2400 IF d>1 THEN PLOT X,Y1: DRAW
2500 LET d=0
2600 NEXT v

```

4.6 Voltemos ao programa que preenche o hexágono e introduzamos, na linha 220, um passo (variável x); obteremos tracejados verticais:

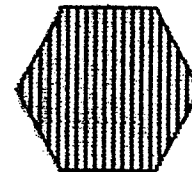


Figura 299

Para obter tracejados horizontais basta utilizar uma recta  $\Delta$  horizontal: alteramos assim o papel das variáveis x e y a partir da linha 210.

O programa é o seguinte:

```

10 LET X=40
20 LET Y=0
30 LET Z=0
40 LET H=0
50 LET N=1/3
60 FOR H=0 TO 1/3
70 PLOT X,Y: DRAW L*COB Z,L*SI
N Z
80 LET X=X+40*COB Z
90 LET Y=Y+40*SI N Z
100 LET Z=Z+40*SI N Z
110 NEXT H
120 LET Z=0
130 LET H=0
140 LET N=1/3
150 LET D=0
160 FOR Z=0 TO 1/3 STEP 4
170 FOR H=0 TO 1/3 STEP 4
180 LET P=1
190 POINT (X,Y)
200 IF P=1 THEN LET D=D+1
210 IF P=1 AND D=1 THEN LET X1=
X
220 IF P=1 AND D>1 THEN LET X2=
X
230 NEXT H
240 IF D>1 THEN PLOT X1,Y: DRAW
X2-X1,0
250 LET D=0
260 NEXT Z

```

## 5. Tracejados diversos

5.1 Seja L uma curva fechada convexa e  $\Delta$  uma recta vertical.

Em geral,  $\Delta$  corta L em dois pontos  $P_1$  e  $P_2$ :

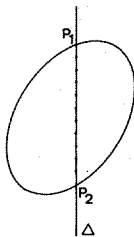


Figura 300

Dividamos o segmento  $P_1P_2$  em vários segmentos iguais de comprimento  $s$ , sendo  $s$  um comprimento fixo escolhido previamente.

A medida que  $\Delta$  varre o visor da esquerda para a direita, os pontos de subdivisão obtidos para cada posição de  $\Delta$  vão «desenhar» linhas.

5.2 Para desenhar a curva L, consideremos um círculo de centro  $C = (x_c, y_c)$  e raio  $R$ . Um tal círculo deduz-se por translação do círculo de centro  $O$  e raio  $R$ , círculo esse cuja equação é  $x^2 + y^2 = R^2$ .

O programa é então fácil de construir:

```

10 INPUT "R = " ; R
20 INPUT "XC = " ; XC
30 INPUT "YC = " ; YC
40 INPUT "Passo = " ; s
50 FOR X=-R TO R
60 LET Y=SOR (R-R*X*X)
70 FOR H=-Y TO Y STEP s
80 PLOT XC+X,YC+H
90 NEXT H
100 NEXT X

```

1) Com  $x_c = 128$ ,  $y_c = 88$ ,  $R = 60$  e  $s = 4$ :

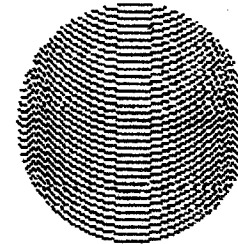


Figura 301

2) Acrescentemos a linha seguinte:

85 PLOT XC + H,YC + X

Sempre com  $s = 4$

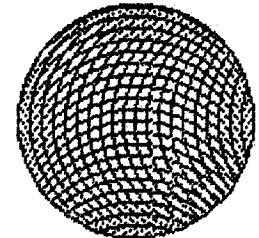


Figura 302

3) Substituamos finalmente a linha 70 pela seguinte:

```
70 FOR H = - S * INT (Y/S) TO S * INT (Y/S)
```

Sem a linha 85, obtemos um tracejado horizontal. Com essa linha, obtemos uma rede:

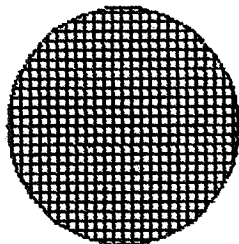


Figura 303

## 6. Exercícios

6.1 Colorir diversos polígonos regulares recorrendo à técnica do parágrafo 1.1.

6.2 Utilize a técnica do parágrafo 2.1 para tracejar verticalmente um disco.

6.3 Utilize a simetria do círculo relativamente ao seu centro para preenchê-lo com tracejados inclinados a  $45^\circ$ .

6.4 Substituindo o rectângulo da figura do parágrafo 4.2 por um paralelogramo bem escolhido, adapte o programa deste parágrafo a fim de obter tracejados inclinados de um ângulo  $\alpha$  à horizontal.

6.5 No programa do parágrafo 3, linha 100, substitua  $Y_1$  por  $Y_c$  e  $Y_c$  por  $Y_1$ .

26

## CONSTRUÇÃO DE PROGRAMAS

Poder-se-á querer agrupar certos programas desta obra de modo a dispor, num mesmo momento, de uma vasta gama de possibilidades gráficas. Para que este agrupamento tenha verdadeiramente interesse, é necessário que o programa obtido seja interactivo.

Isto pressupõe a capacidade de «interrogar» o visor a fim de conhecer, sem cálculos, as coordenadas de certos pontos do espaço-visor. Neste capítulo, apresentaremos um método que permite fazê-lo, além de um exemplo detalhado.

### 1. Obtenção de dados no visor

O método usado é o de um conjunto de programas a que chamaremos «ardósia mágica».

Carregando nas teclas correspondentes aos números 5, 6, 7 e 8, provocamos o deslocamento de um ponto sobre o visor respectivamente para a esquerda, para a direita, para cima e para baixo.

Este ponto ocupa uma posição que pode ser definida pelas suas coordenadas  $x$  e  $y$ .

Bastará carregar, quando se quiser, na tecla com a letra C para obter o valor destas coordenadas.

```
10 LET X=0
20 LET Y=0
30 IF INKEY#="5" AND X>=1 THEN
LET X=X-1
40 IF INKEY#="6" AND X<=254 TH
EN LET X=X+1
```

```

50 IF INKEY#="6" AND y>=1 THEN
LET y=y-1
60 IF INKEY#="7" AND y<=174 TH
EN LET y=y+1
70 PLOT OVER 1;x,y
80 PAUSE 10
90 PLOT OVER 1;x,y
100 IF INKEY#="C" THEN PRINT AT
20,2;"X=";x;" Y=";y
200 GO TO 30

```

As linhas 70 e 90 são idênticas. Permitem a cintilação do ponto (cursor), e sobretudo a sua mudança de posição sem afectar o desenho que possa já existir.

A instrução PLOT OVER 1 é típica do Spectrum.

Noutros computadores, obter-se-á um resultado semelhante marcando e apagando alternadamente o ponto móvel na cor de INK e na cor de PAPER.

## 2. Um exemplo detalhado

Juntemos dois subprogramas numerados 1 e 2:

- o subprograma n.º 1 é o do capítulo 3, parágrafo 6.1. Permite traçar um segmento conhecendo as coordenadas  $x_1, y_1$  e  $x_2, y_2$  das respectivas extremidades;
- o subprograma n.º 2 é o do capítulo 7, parágrafo 1.3. Permite traçar um círculo passando pelos três pontos  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ . Suponhamos que  $y_1 \neq y_2$  e  $y_1 \neq y_3$ .

As coordenadas necessárias podem ser fornecidas de duas maneiras diferentes:

- opção A: o utilizador conhece as coordenadas necessárias e indica-as ao programa;
- opção B: o utilizador não conhece as coordenadas e deve portanto interrogar o visor.

Conseguir-se-á isto graças a um terceiro subprograma, o do parágrafo 1, que permitirá obter as coordenadas de um ponto do espaço-visor depois de colocar o cursor no local apropriado.

Abandona-se este subprograma carregando em S.

- 1.ª parte: envio ao «menu».
- 2.ª parte: subprograma que permite determinar as coordenadas de um ponto do visor. Carrega-se então em C. Para voltar ao programa principal, carrega-se em S.

```

1000 LET x=0
1010 LET y=0
1020 IF INKEY#="6" AND x>=1 THEN
LET x=x-1
1030 IF INKEY#="8" AND x<=254 TH
EN LET x=x+1
1040 IF INKEY#="6" AND y>=1 THEN
LET y=y-1
1050 IF INKEY#="7" AND y<=174 TH
EN LET y=y+1
1060 PLOT OVER 1;x,y
1070 PAUSE 5
1080 PLOT OVER 1;x,y
1090 IF INKEY#="C" THEN PRINT AT
21,2;"X=";x;" Y=";y
1100 IF INKEY#="6" THEN PRINT AT
21,2;"
1110 IF INKEY#="6" THEN RETURN
1120 GO TO 1020

```

- 3.ª parte: subprograma n.º 1.

```

2000 >INPUT "Opção A ou B? ";r#
2010 IF r#="A" THEN GO TO 2050
2020 IF r#="B" THEN GO TO 2000
2030 GO SUB 1000
2040 GO SUB 1000
2050 INPUT "X1= ";x1
2060 INPUT "Y1= ";y1
2070 INPUT "X2= ";x2
2080 INPUT "Y2= ";y2
2090 PLOT x1,y1: DRAW x2-x1,y2-y1
2100 RETURN

```

- 4.ª parte: subprograma n.º 2.

```

3100 >INPUT "X3= ";x3
3110 INPUT "Y3= ";y3
3120 IF y1=y2 THEN GO TO 4000
3130 IF y1=y3 THEN GO TO 4000
3140 LET a=(x2-x1)/(y1-y2)
3150 LET b=-a/2*(x1+x2)+(y1+y2)/2

```

```

0160 LET g=(x3-x1)/(y1-y3)
0170 IF g=e THEN GO TO 4000
0180 LET d=-g/2*(x1+x3)+(y1+y3)/
AND
0190 LET xc=(b-d)/(g-a)
0200 LET yc=a*xc+b
0210 LET r=SQRT((xc-x1)*(xc-x1)+
(y1-y1)*(y1-y1))
0220 FOR t=0 TO 2*PI STEP .01
0230 LET x=xc+r*COS t
0240 LET y=yc+r*SIN t
0250 IF x>=0 AND x<=255 AND y>=0
AND y<=175 THEN PLOT x,y
0270 NEXT t
0300 RETURN

```

– 5.ª parte: o menu.

```

4000>INPUT "Programa 1 ou 2? "n
4010 IF n=1 THEN GO SUB 2000
4020 IF n=2 THEN GO SUB 3000
4030 INPUT "Novo tracado (s/n)?
":r#
4040 IF r#="s" THEN GO TO 4000

```

2.3 Consideremos a seguinte figura:

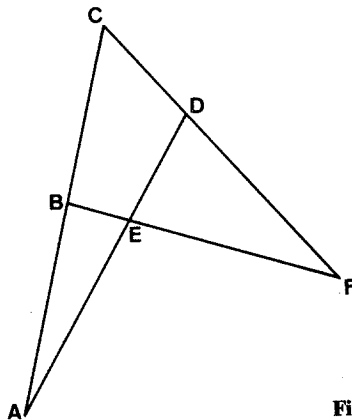


Figura 304

Escolhamos  $A = (40,40)$ ,  $C = (120,140)$  e  $F = (180,50)$ .  
Graças ao programa ligamos sucessivamente  $B = (76,85)$   
e  $D = (136,116)$ .

Depois de termos traçado os segmentos AD e FB, ligamos  
 $E = (91,80)$ .

Traçamos em seguida os círculos ABE, EFD, ACD e FBC.

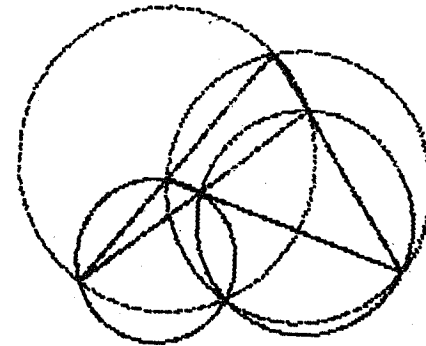


Figura 305

Obtemos assim círculos concorrentes.

2.4 É evidente que o método pode ser utilizado para  
mais de dois subprogramas. Juntando vinte subprogramas, ob-  
temos um programa gráfico bastante completo.

## ANEXOS

### 1. Algumas noções de Matemática

#### 1.1 Medição de ângulos

Os ângulos podem ser medidos em graus ou radianos.

Por definição, 1 radiano =  $360^\circ/2\pi$ .

Sejam  $\alpha_r$  e  $\alpha_d$  as medidas de um ângulo em radianos e em graus; teremos

$$\alpha_r = \alpha_d \times \frac{\pi}{180}$$

e

$$\alpha_d = \alpha_r \times \frac{180}{\pi}$$

O quadro que se segue indica alguns valores habituais.

|          |         |         |         |         |          |          |       |
|----------|---------|---------|---------|---------|----------|----------|-------|
| Graus    | 30      | 45      | 60      | 90      | 120      | 135      | 180   |
| Radianos | $\pi/6$ | $\pi/4$ | $\pi/3$ | $\pi/2$ | $2\pi/3$ | $3\pi/4$ | $\pi$ |

#### 1.2 As funções trigonométricas directas

Consideremos um círculo de raio R. Demonstra-se que o número  $\overline{OH} / R$  é independente do raio e apenas depende do ângulo  $\alpha$ ; este número, compreendido entre  $-1$  e  $+1$ , é o co-seno do ângulo  $\alpha$  (escreve-se  $\cos \alpha$ ).

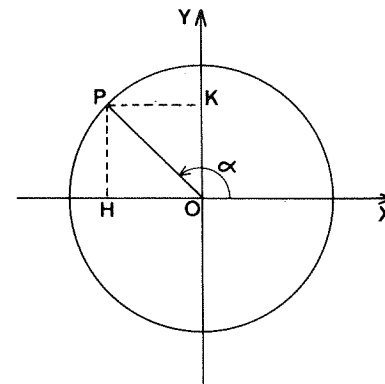


Figura 306

Do mesmo modo, o número  $\overline{OK} / R$  é o seno do ângulo  $\alpha$  (escreve-se  $\sin \alpha$ ).

Considerando  $\tan \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$ , definimos um terceiro número, a tangente do ângulo  $\alpha$ .

O cálculo de  $\cos \alpha$ ,  $\sin \alpha$  e  $\tan \alpha$  pressupõe  $\alpha$  medido em radianos.

#### 1.3 As funções trigonométricas inversas

No Spectrum encontram-se definidas três:

ASN x: indica a medida, em radianos, do ângulo compreendido entre  $-\pi/2$  e  $+\pi/2$ , cujo seno é x.

Isto pressupõe  $-1 \leq x \leq 1$

ASN x designa o arco cujo seno é x.

Exemplo:

ASN 0,5 = 0,52359878 radianos

ACN x: designa o arco cujo co-seno é x; esta instrução dá a medida, em radianos, do ângulo compreendido entre 0 e  $\pi$  cujo co-seno é x.

Isto supõe  $-1 \leq x \leq 1$

Assim ACN 0 = 1,5705963 radianos.

ATN x: designa o arco cuja tangente é x; esta instrução dá a medida, em radianos, do ângulo compreendido entre  $-\pi/2$  e  $+\pi/2$  cuja tangente é x.

Assim, ATN 1 = 0,78539816 radianos.



## 1.4 Relações métricas no triângulo rectângulo

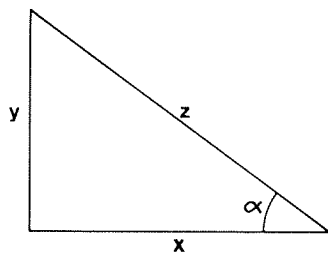


Figura 307

Segundo o teorema de Pitágoras

$$x^2 + y^2 = z^2$$

As funções trigonométricas permitem escrever

$$\frac{x}{z} = \cos \alpha$$

$$\frac{y}{z} = \text{sen } \alpha$$

$$\frac{y}{x} = \text{tg } \alpha$$

## 1.5 Outras funções numéricas disponíveis em Basic

ABS x: indica o valor do número x

$$\text{ABS} (-10) = \text{ABS } 10 = 10$$

INT x: dá a parte inteira do número x.

$$\text{INT} (4,25) = 4, \text{INT} (0,6) = 0$$

Arredonda-se x para o inteiro mais próximo fazendo

$$\text{INT} (x+0,5).$$

Um inteiro x é divisível, por exemplo por 2, se

$$\text{INT} (x/2) = x/2$$

SGN x: dá -1 ou +1 conforme o sinal de x.

$$\text{SGN} (-20,5) = -1$$

SQR x: dá, para  $x \geq 0$ , a raiz quadrada de x.

EXP x: dá o valor do número e = 2,7182818 elevado à potência x.

RND: dá um número ao acaso entre 0 (inclusive) e 1 (excluído).

## 2. Equivalência das instruções basic

A linguagem Basic de um computador raramente é idêntica à de outro, mesmo quando estes são comparáveis em funcionamento e preço.

Indicaremos as equivalências que permitirão transpor sem dificuldades os programas deste livro para um computador que não seja o Spectrum.

Estas equivalências serão dadas para o ORIC, TO 7-70 e MO 5, mas podem ser estendidas a outras máquinas.

### 2.1 As funções numéricas

– O argumento não utiliza parêntesis nos ZX;  $\cos x$ ,  $\text{sen } \pi$ , etc.

Utilizam-se parêntesis no ORIC, TO 7-70, MO 5, COM-MODORE 64; escreve-se portanto  $\cos (x)$ , etc.

### 2.2 As instruções gráficas.

a) Para marcar no visor um ponto de coordenadas x e y, faz-se:

- PLOT x, y nos ZX;
- P SET (x,y),n no TO 7-70 e MO 5;
- CURSET x,y,n no ORIC.

Nos dois últimos casos, o número n define a cor do ponto.

b) Para traçar o segmento que liga o ponto  $P_1 = (x_1, y_1)$  ao ponto  $P_2 = (x_2, y_2)$ , faz-se:

- PLOT  $x_1, y_1$ : DRAW  $x_2 - x_1, y_2 - y_1$  nos ZX;

CURSET  $x_1, y_1, n$ : DRAW  $x_2-x_1, y_2-y_1, n$  no ORIC;

- LINE  $(x_1, y_1)-(x_2, y_2), n$  nos TO 7-70 e MO 5.

c) Para traçar um círculo de centro  $(x_c, y_c)$  de raio R, far-se-á:

- CIRCLE  $x_c, y_c, R$  nos ZX;

- CURSET  $x_c, y_c, n$ : CIRCLE R, n no ORIC;

No TO 7-70 e no MO 5 é necessário escrever um programa de desenho ponto por ponto.

d) A instrução DRAW  $x, y, \alpha$  que permite traçar arcos de círculo só existe nos ZX. Nos outros aparelhos é necessário construir programas para desenho ponto por ponto.

e) Recordemos que a resolução destas máquinas não é a mesma: 256 x 176 no ZX, 200 x 240 no ORIC, 256 x 192 noutros aparelhos.

### 2.3 O tratamento das cadeias de caracteres

Existe aqui uma diferença importante entre os ZX e os outros aparelhos. Consideremos por exemplo

A\$ = «microcomputador»

Para obter os três primeiros caracteres da esquerda, faremos:

- A\$ (1 TO 3) ou A\$ (TO 3) nos ZX;

- LEFT\$ (A\$, 3) no ORIC, TO 7-70, MO 5, etc.

b) Do mesmo modo, para indicar os quatro últimos caracteres, faremos:

- A\$ (13 TO 15) ou A\$ (13 TO) nos ZX;

- RIGHT\$ (A\$, 3) no ORIC, TO 7-70, MO 5, etc.

c) Para indicar uma subcadeia, por exemplo os caracteres números 5, 6, 7 e 8, faremos:

- A\$ (5 TO 8) nos ZX;

- MID\$ (A\$, 5, 3) no ORIC, TO 7-70, MO 5, etc.

d) Para obter o carácter n.º 7, faremos:

- A\$ (7) nos ZX;

- MID\$ (A\$, 7, 1) nos outros aparelhos.

### 2.4 Outras diferenças

a) Para a leitura do teclado, utiliza-se INKEY\$ nos ZX e TO 7-70, e KEY\$ no ORIC.

b) A instrução PAUSE 10, por exemplo, transforma-se em WAIT 10 no ORIC e no TO 7-70.

c) A instrução POINT  $(x, y)$ , que permite saber se o pixel de coordenadas  $(x, y)$  está ou não marcado a tinta, dá resultados diferentes:

- 0 ou 1 no ZX;

- -1 ou 0 no ORIC;

- um número positivo não nulo se o pixel tem a cor de tinta, um número negativo se tem a cor de fundo, no TO 7-70.

d) Para terminar, assinalemos que os ZX distinguem as variáveis X e X\$, o que não acontece em todos os computadores.

## 3. O caso do ZX 81

Será necessário substituir certas instruções, CIRCLE e DRAW em particular, por programas de desenho ponto por ponto.

No caso dos círculos utilizar-se-á o programa do capítulo 7, parágrafo 4, enquanto para os segmentos de recta utilizar-se-á o do capítulo 3, parágrafo 6, e o do capítulo 5, parágrafo 1, sendo este último reservado aos casos em que se usa a inclinação do segmento.

Assinalemos ainda que será necessário espaçar os pontos de apoio de modo a obter um traçado legível.

## ÍNDICE

|    |   |    |
|----|---|----|
|    | PREFÁCIO .....  | 7  |
| 1. | COORDENADAS CARTESIANAS .....                               | 9  |
|    | Referências cartesianas .....                               | 9  |
|    | Os elementos da imagem .....                                | 11 |
|    | Os métodos de desenho .....                                 | 12 |
|    | Traçado aproximado e traçado real .....                     | 12 |
|    | Centragem e mudança de escala .....                         | 13 |
| 2. | CURVAS DEFINIDAS POR UMA<br>EQUAÇÃO DA FORMA $y=f(x)$ ..... | 14 |
|    | Equação cartesiana de uma curva .....                       | 14 |
|    | Traçado de uma curva .....                                  | 15 |
|    | Curvas clássicas .....                                      | 18 |
|    | Exercícios .....  | 24 |
| 3. | RECTAS E SEGMENTOS .....                                    | 25 |
|    | A instrução DRAW .....                                      | 25 |
|    | Quadrados e rectângulos .....                               | 27 |
|    | Triângulo equilátero .....                                  | 28 |
|    | Linhas poligonais .....                                     | 29 |
|    | Equação cartesiana de uma recta .....                       | 32 |
|    | Representação paramétrica de um segmento .....              | 34 |
|    | Exercícios .....  | 36 |
| 4. | PARALELAS E PERPENDICULARES .....                           | 37 |
|    | Divisão de um segmento .....                                | 37 |

|   |    |   |     |
|---|----|---|-----|
| Distância entre dois pontos .....                 | 39 | Parábolas .....                         | 96  |
| Projeção ortogonal de um ponto sobre uma recta .. | 39 | Hipérbolas .....                        | 98  |
| Distância de um ponto a uma recta .....           | 41 | Exercícios .....                        | 101 |
| Paralelas e perpendiculares .....                 | 43 |   |     |
| Linhas a ponteadas ou tracejadas .....            | 45 | 10. AS OVAIS .....                      | 102 |
| Exercícios .....                                  | 46 | As ovas obtidas por ligação .....       | 102 |
| 5. POLÍGONOS REGULARES                            |    | As ovas de Descartes .....              | 105 |
| E SEMI-REGULARES .....                            | 48 | As ovas de Cassini .....                | 107 |
| Princípio do traçado .....                        | 48 | Exercícios .....                        | 110 |
| Uma ardósia mágica .....                          | 49 |   |     |
| Traçado de uma linha contínua .....               | 51 | 11. TRANSLAÇÕES E ROTAÇÕES .....        | 112 |
| Traçado de um polígono .....                      | 53 | Como definir uma transformação? .....   | 112 |
| Arcos de círculo .....                            | 60 | As translações .....                    | 115 |
|   |    | As rotações .....                       | 118 |
| 6. PROGRAMAÇÃO DE UM TRAÇADO .....                | 63 | Exercícios .....                        | 122 |
| Princípios .....                                  | 63 |   |     |
| Exemplo 1 .....                                   | 64 | 12. SIMETRIAS E MUDANÇAS DE ESCALA .... | 124 |
| Exemplo 2 .....                                   | 66 | As simetrias centrais .....             | 124 |
| Exemplo 3 .....                                   | 68 | As simetrias axiais .....               | 126 |
| Exemplo 4 .....                                   | 70 | As homotetias .....                     | 129 |
| Observação .....                                  | 72 | O método do quadrado .....              | 131 |
|   |    |   |     |
| 7. CÍRCULOS E ARCOS .....                         | 74 | 13. REDES, TABULEIROS .....             | 134 |
| A instrução CIRCLE .....                          | 74 | As redes .....                          | 134 |
| A instrução DRAW .....                            | 78 | Tabuleiros de dados .....               | 136 |
| Ligação entre arcos .....                         | 81 | Redes especiais .....                   | 139 |
| Equação de um círculo .....                       | 82 | Polígonos em espirais .....             | 143 |
| Exercícios .....                                  | 83 | Exercícios .....                        | 145 |
|   |    |   |     |
| 8. LUGARES GEOMÉTRICOS .....                      | 85 | 14. REPRESENTAÇÃO PARAMÉTRICA           |     |
| A lemniscata .....                                | 85 | DE UMA CURVA .....                      | 148 |
| A trifólio .....                                  | 87 | Definição .....                         | 148 |
| Rosa de quatro pétalas .....                      | 88 | Rectas, círculos e elipses .....        | 148 |
| A elipse .....                                    | 90 | Algumas curvas clássicas .....          | 149 |
| Exercícios .....                                  | 92 | As famílias de curvas .....             | 153 |
|   |    | Exercícios .....                        | 156 |
|   |    |   |     |
| 9. AS CÓNICAS .....                               | 93 | 15. AS CURVAS «MECÂNICAS» .....         | 157 |
| Elipses .....                                     | 94 | A cicloide .....                        | 157 |

|   |     |   |     |
|---|-----|---|-----|
| A hipociclóide .....                                  | 158 | A inversão plana .....                    | 213 |
| A epiciclóide .....                                   | 160 | Inversão de um círculo .....              | 214 |
| O espirógrafo .....                                   | 162 | Inverso de um quadrado .....              | 216 |
| Exercícios .....                                      | 164 | Inversas de algumas curvas .....          | 217 |
|   |     | Exercícios .....                          | 219 |
| 16. COORDENADAS POLARES .....                         | 165 | 22. MINI-LOGO .....                       | 221 |
| Princípio .....                                       | 165 | O rato e a tartaruga .....                | 221 |
| Mudanças de sistema .....                             | 166 | O princípio de movimentação do rato ..... | 221 |
| Duas curvas clássicas .....                           | 167 | As primitivas do programa .....           | 223 |
| Famílias de curvas .....                              | 169 | Estrutura do programa .....               | 224 |
| Exercícios .....                                      | 173 | Alguns exemplos .....                     | 226 |
| 17. AS ESPIRAIS .....                                 | 174 | 23. CURVAS FRACCIONÁRIAS .....            | 228 |
| As espirais compostas .....                           | 174 | Princípio da representação .....          | 228 |
| Outras espirais .....                                 | 177 | A curva de Von Koch .....                 | 229 |
| Exercícios .....                                      | 180 | A primeira construção de Peano .....      | 231 |
| 18. ENVOLVENTE DE UMA FAMÍLIA<br>DE CURVAS .....      | 182 | A segunda curva de Peano .....            | 234 |
| Definições .....                                      | 182 | Exercícios .....                          | 236 |
| Exemplos .....  | 183 | 24. ELIMINAÇÃO DE PARTES ESCONDIDAS ..    | 238 |
| Geração tangencial de uma curva .....                 | 185 | Método n.º 1 .....                        | 239 |
| Exercícios .....                                      | 186 | Método n.º 2 .....                        | 241 |
| 19. AS CONCHÓIDES .....                               | 192 | Método n.º 3 .....                        | 242 |
| A conchóide de uma recta .....                        | 192 | Exercícios .....                          | 244 |
| A conchóide de um círculo .....                       | 195 | 25. TRACEJADOS, COLORAÇÕES .....          | 245 |
| Caso geral .....                                      | 197 | Uso de macro-instruções .....             | 245 |
| Exercícios .....                                      | 200 | Definição de dois contornos opostos ..... | 248 |
| 20. CURVAS E MOTIVOS HÍBRIDOS .....                   | 201 | Uso de uma simetria .....                 | 251 |
| Os motivos em escada .....                            | 201 | Uso da instrução POINT .....              | 252 |
| Molas .....   | 203 | Tracejados diversos .....                 | 256 |
| As curvas híbridas .....                              | 205 | Exercícios .....                          | 258 |
| Pseudo-cónicas .....                                  | 210 | 26. CONSTRUÇÃO DE PROGRAMAS .....         | 259 |
| 21. UMA TRANSFORMAÇÃO INVARIANTE:<br>A INVERSÃO ..... | 212 | Obtenção de dados no visor .....          | 259 |
| Um pouco de cartografia .....                         | 212 | Um exemplo detalhado .....                | 260 |

|   |     |
|---|-----|
| ANEXOS .....                            | 264 |
| Algumas noções de matemática .....      | 264 |
| Equivalência das instruções basic ..... | 267 |
| O caso do ZX 81 .....                   | 269 |

Fotocomposto por  
Nova Força – Lisboa  
e impresso na  
Empresa Gráfica Feirense, Lda.  
Vila da Feira  
em 1985  
para a Editorial Presença, Lda.