

### *o computador na Educação Matemática*

- Fitch, Pavelle e Rothstein
- Papert
- Fey
- Ball, Higgs, Oldknow, Straker e Wood

*Álgebra por computador*

*ensinar crianças a serem matemáticos  
vs ensinar Matemática*

*tecnologia e Educação Matemática - uma  
revisão de desenvolvimentos recentes  
e problemas importantes*

*a Matemática contará?*



organização de João Pedro Ponte

Junho de 1991

1.100

**Álgebra por Computador**

Título original: "Computer Algebra"

Autores: Richard Pavelle, Michael Rothstein e John Fitch

Publicado na revista Scientific American, vol. 245, nº 6, Dezembro de 1981

Tradução: Mário Maia

**Ensinar Crianças a Serem Matemáticos vs Ensinar Matemática**

Título original: "Teaching Children to be Mathematicians vs Teaching Mathematics"

Autor: Seymour Papert

Publicado na revista International Journal for Mathematical Education in Science and Technology

Tradução: Conceição Mesquita e Helena Paradinha

Revisão da tradução: João Filipe Matos

**Tecnologia e Educação Matemática – Uma Revisão de Desenvolvimentos Recentes e Problemas Importantes**

Título original: "Technology in Mathematics Education – A Survey of Recent Developments and Important Problems"

Autor: James T. Fey

Texto de uma conferência apresentada no ICME 6, Budapeste, 1988

Tradução: Lurdes Serrazina

**A Matemática Contará?**

Título original: "Will Mathematics Counts?"

Autores: Derek Ball, John Higgs, Adrian Oldknow, Anita Straker e John Wood

Publicado em livro com o mesmo título

Editor: AUCBE, Hatfield, England, 1987

Tradução: Maria José Delgado

Revisão da tradução: Paulo Abrantes

Os textos constantes deste volume são publicados com autorização dos respectivos editores.

## **O Computador na Educação Matemática**

Organização de João Pedro Ponte

Série Cadernos de Educação e Matemática, número 2.

Editor: Associação de Professores de Matemática

Composição: Gabinete Técnico da APM

Impressão: GRAFIS, Cooperativa de Artes Gráficas, CRL

Depósito legal: 49352/91

ISBN: 972-9053-17-0

1ª edição: Junho de 1991

Tiragem: 1000 exemplares

# Introdução

João Pedro Ponte

O surgimento e contínuo aperfeiçoamento dos computadores deve muito à ciência matemática, nomeadamente aos trabalhos desenvolvidos nos anos 30 por Turing e Church em torno da Teoria da Computabilidade. Por outro lado, cada vez se torna mais patente que o progresso de certos ramos da Matemática começa a beneficiar significativamente da existência do computador.

A relação entre a Matemática e o computador, e as suas possíveis consequências para o ensino desta disciplina, constituem um dos temas que mais interesse despertam na actualidade. Nesta colectânea reúnem-se textos que ilustram, cada um de sua maneira, aspectos essenciais destas questões.

O artigo de Pavelle, Rothstein e Fitch, publicado em 1981, mostra em pormenor como a utilização do computador pode ser determinante em certas formas de investigação matemática. Na base destas aplicações está o facto de que, para além de efectuar cálculos numéricos, o computador pode ser igualmente programado para realizar operações com símbolos de qualquer natureza.

Tal possibilidade é particularmente importante quando o peso das operações de rotina que se pretendem efectuar ou a complexidade das expressões com que se

está a lidar se tornam obstáculos ao prosseguimento do trabalho. Por isso, programas de cálculo simbólico podem ser úteis nos mais diversos domínios, favorecendo a testagem de conjecturas e, como dizem estes autores, dilatando as “fronteiras da intratabilidade”.

Existem muitas linguagens de cálculo simbólico. Algumas são apropriadas para resolver problemas de domínios específicos e outras são de natureza mais geral. Com base na linguagem MACSYMA foi construído o programa MuMath, possibilitando a execução de todas as tarefas de cálculo e de rotina vulgarmente exigidas no Ensino Secundário e nos primeiros anos da Universidade. No entanto, embora comercializado há mais de oito anos, este programa não conheceu ainda grande divulgação. Tal poderá ficar a dever-se ao seu custo relativamente elevado, à falta de aplicação no âmbito dos actuais currículos e metodologias de ensino, e ainda devido ao facto de possuir uma interface algo complicada com o utilizador. Mais recentemente têm sido divulgados outros programas deste género, como os programas Mathematica, Mapple e Derive, destinados a um leque alargado de utilizadores (investigadores, matemáticos aplicados, estudantes) e concebidos com interfaces de tipo muito mais avançado.

Na perspectiva de que muito do que constitui a prática de investigação dos matemáticos pode constituir igualmente a prática da aprendizagem pelos alunos, não podemos deixar de reflectir sobre as possíveis implicações destes programas de cálculo simbólico para o ensino da Matemática.

Eles representam um profundo desafio educativo. No entanto, a sua divulgação tem sido lenta. Torna-se necessário um amplo trabalho de desenvolvimento curricular (elaboração de propostas de trabalho, actividades, modelos e critérios de avaliação, etc), de experimentação e investigação no terreno da prática educativa (observação das reacções, as dificuldades e as aquisições dos alunos) e de ensaio no que respeita à formação de professores.

O texto de Pavelle, Rothstein e Fitch, para além de ilustrar a importância destes programas de manipulação simbólica, é ainda interessante por outras razões. Nele se mostra, por exemplo, como 20 anos de cálculo humano de um matemático do Século XIX se traduziam em 1960 em 20 horas de tempo de computador (hoje em dia esse tempo seria ainda bastante mais curto) e como por vezes certos erros podem ser tomados durante um período considerável como factos verdadeiros, especialmente em domínios relativamente marginais ao desenvolvimento da Matemática.

Mas se a utilização educativa de programas de cálculo simbólico ainda está muito pouco divulgada, o mesmo não se pode dizer de outros programas educacionais, especificamente concebidos para o ensino deste ou daquele assunto.

Na realidade, em diversos países economicamente mais desenvolvidos a utilização do computador na

Matemática tem sido essencialmente marcada por este tipo de programas. Estes, na sua maioria, são feitos tendo em conta os objectivos que correntemente mais estão no centro da prática educativa: a aquisição de técnicas de cálculo e a resolução de exercícios de rotina (simplificar expressões numéricas, resolver equações, decompor polinómios em factores, determinar domínios de expressões algébricas, etc.). Alguns têm um carácter essencialmente informativo (programas tutoriais), outros proporcionam sequências de exercícios (programas de prática), outros têm um carácter predominantemente lúdico (jogos educacionais), outros revestem a forma de situações problemáticas (simulações e programas orientados para a resolução de problemas), e, finalmente, outros são essencialmente instrumentos de demonstração para utilização do professor.

Normalmente, estes programas tendem a ser usados como complemento da aprendizagem, como reforço para os alunos mais fracos ou como enriquecimento para os que pretendem aprofundar melhor determinada matéria.

Uma outra categoria de *software* inclui as chamadas ferramentas informáticas ou programas utilitários. Trata-se de programas de natureza geral, feitos com propósitos comerciais, para serem utilizados no mundo dos negócios ou por profissionais das mais diversas áreas, mas que podem ser igualmente usados com fins educativos. Podem destacar-se, no que diz respeito à Matemática, a folha de cálculo, os programas de elaboração de gráficos e os programas de tratamento estatístico de dados.

São programas que podem ser utilizados, por exemplo, no quadro de actividades de natureza investigativa

ou em trabalhos de projecto. Na prática, tendem a ser usados por diversas disciplinas como a Geografia, a Economia e a Biologia, mas não é raro serem completamente ignorados pela disciplina de Matemática. E, no entanto, a sua utilização criteriosa pressupõe a compreensão de diversos conceitos matemáticos e uma noção exacta de como estes podem ou não ser aplicados às diversas situações concretas.

Com algum parentesco com os programas utilitários de natureza geral, podemos considerar o *software* de natureza aberta, criado para ser utilizado no Ensino da Matemática. Como exemplo temos os programas para fazer o estudo e representação gráfica de funções. Tal como acontece com os restantes utilitários, são programas que à partida ficam inertes perante o utilizador. Este é que tem de saber bem o que pretende e decidir como e quando é que os quer usar. Podem por isso ser igualmente encarados como ferramentas de trabalho, embora mais específicas, orientadas para a resolução de problemas num determinado domínio.

Finalmente, devemos considerar no Ensino da Matemática as linguagens de programação. Podemos encarar uma linguagem de programação como uma ferramenta geral, que serve para resolver todo o tipo de problemas. O BASIC conheceu uma certa divulgação junto de amplas camadas do público e o Pascal tem a preferência dos informáticos, sendo por vezes ensinado no Ensino Secundário. Mas a linguagem que mais se impôs no mundo da educação foi sem dúvida o LOGO, tendo conquistado um largo espaço de manobra nos níveis de ensino mais elementares.

O LOGO apresenta-se, além disso, associado a uma dada filosofia educacional, valorizando uma perspec-

tiva construtivista que sublinha essencialmente os aspectos afectivos da aprendizagem. Esta filosofia foi teorizada especialmente por Seymour Papert, ele próprio um matemático de formação, e está na base de um dos mais significativos fenómenos de interesse e de movimentação de professores dos nossos tempos. Procurou-se incluir nesta colectânea um texto que fosse representativo das suas ideias em relação ao ensino desta disciplina, escolhendo-se um artigo publicado em 1972, que ilustra as suas teses profundamente originais. Nele, Papert indica que novas matérias, como a Geometria da Tartaruga, podem constituir um terreno muito mais fértil para a investigação por parte dos alunos do que os assuntos tradicionalmente ensinados a um nível elementar, argumentando por isso a favor de uma verdadeira revolução curricular.

Se esta proposta de Papert não tem tido muita concretização prática, o mesmo não se pode dizer da sua visão sobre o papel da actividade investigativa do aluno como base para o desenvolvimento do seu saber matemático, que viria a tornar-se num dos eixos do pensamento actual da educação matemática.

A linguagem LOGO e os programas utilitários de natureza mais geral constituem justamente os programas que entre nós mais têm sido divulgados. De facto, circulam muito poucos programas específicos, sendo talvez de salientar entre estes o Trinca-Espinhas, um jogo educacional, e o Estimateg, um programa de prática/simulação. No Ensino Secundário, até agora, apenas uma ferramenta matemática conhece uma certa divulgação, o LOGO.GEOMETRIA.

Torna-se por isso interessante confrontar esta limitada experiência com o texto de James Fey, apresentado no

ICME VI, em 1988, na Hungria, que proporciona uma visão de conjunto a nível internacional. Trata-se de uma ampla revisão da literatura sobre a investigação e as experiências realizadas neste domínio, sendo provavelmente uma das mais completas no seu género. Fey defende que a tecnologia informática e os projectos educacionais nela inspirados constituem a força de mudança mais poderosa que presentemente actua na educação matemática.

Um dos aspectos fundamentais deste processo de mudança diz respeito aos objectivos que se situam ao nível da manipulação mecânica, que têm tendência para ficar cada vez mais desvalorizados. É uma tendência aparentemente irreversível. A principal razão reside na existência do próprio computador, que é, ele próprio, uma máquina extremamente bem adaptada à execução de tais tipos de manipulações: é rápido, é eficiente, nunca se engana.

Com o computador, tende a ser cada vez mais importante a capacidade de controlar e supervisionar o desenvolvimento desses processos, e não propriamente a de os executar. Mas a decisão e a supervisão não se podem conceber sem um mínimo de domínio concreto dos conceitos e dos procedimentos mecânicos. O que coloca como questão fundamental para investigação a procura de formas de equilíbrio e de articulação que possam servir da melhor maneira o processo de ensino/aprendizagem.

Será além disso tarefa da investigação considerar a variedade de objectivos educacionais, estilos do professor, situação do aluno, a própria diversidade de experiências de aprendizagem necessárias. Cada vez é menos aceite a perspectiva que um único estilo de ensino

poderá ser óptimo para todos os alunos em todas as situações. Procura-se antes estimular a sensibilidade dos professores para lidar de forma apropriada com cada situação concreta.

Este texto justifica talvez porque a prática da programação não conduziu ainda a alterações significativas nos currículos, e levanta a ponta do véu sobre coisas que estão para vir, como o *software* apropriado para representações múltiplas, indicado para as actividades de modelagem, e os sistemas tutores inteligentes, que poderão constituir um suporte de grande valor para os alunos com certas dificuldades de aprendizagem.

Finalmente, o texto editado por Derek Ball, John Higgo, Adrian Oldknow, Anita Straker e John Wood, é um relatório realizado a pedido do Ministério de Educação inglês, redigido em 1986, e representa um momento importante de reflexão pedagógica feita num país em que a utilização educativa de computadores no Ensino da Matemática está relativamente avançada (lembremos que, por exemplo, desde 1985 a Associação de Professores de Matemática, ATM, edita a revista *Micromath*, exclusivamente dedicada a este assunto). Trata-se de um documento de trabalho, redigido mais com a preocupação de suscitar a discussão, do que de enunciar posições definitivas.

Este texto passa em revista a situação nas escolas e o trabalho produzido por diversas comissões e organizações, apresenta os atributos de vários tipos de *software* e discute questões como os estilos de aprendizagem, a organização de recursos e a formação de professores. Trata-se por isso de um documento particularmente interessante para quem se quiser debruçar, numa perspectiva de actuação imediata e no quadro dos actuais

sua vida para ser efectuado e verificado.

Os resultados do trabalho de Delaunay foram publicados em 1867 em dois volumes, e permaneceram aceites por mais de 100 anos. Durante a segunda guerra mundial houve interesse em definir as coordenadas das estrelas fixas como uma função dependente do tempo, a fim de ajudar a determinar as posições dos submarinos alemães, mas não foi feito nenhum outro trabalho sobre a órbita da Lua ou quaisquer outros corpos do sistema Solar. Contudo, com o advento dos satélites artificiais da terra, o método de Delaunay para determinar as órbitas tornou-se economicamente atraente.

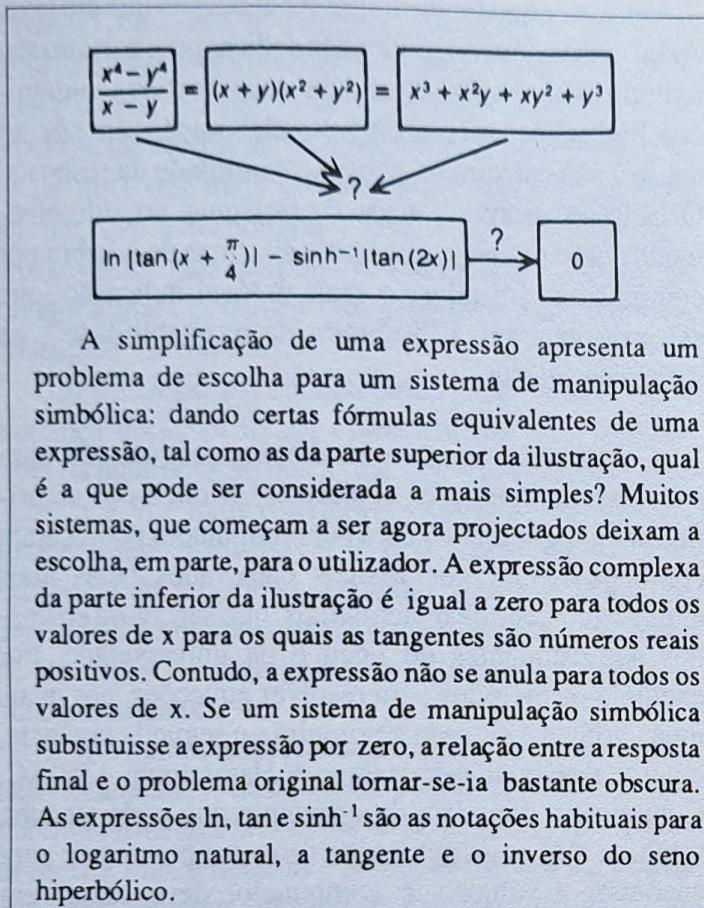
A fim de determinar expressões algébricas para as órbitas dos satélites, André Deprit, Jaques Henrard e Arnold Rom, que estavam então nos laboratórios de investigação científica da Boeing, em Seattle, começaram a investigar os algoritmos para experimentar o cálculo de Delaunay em computador. Em 1970 efectuaram os cálculos em 20 horas de tempo de computador. Notavelmente, apenas se encontraram três erros no trabalho de Delaunay, todos de pouca monta. Aliás dois deles eram simples consequência do terceiro. No prosseguimento do método de Delaunay, têm vindo a desenvolver-se os sistemas de álgebra por computador tendo em consideração os efeitos da pressão atmosférica e da forma não esférica da terra, sobre um satélite com a órbita a baixa altitude. Os algoritmos são agora utilizados no rastreio dos satélites.

Tendo em consideração a curta duração da vida humana uma redução de tempo numa operação que demorava 20 anos para 20 horas é um ganho qualitativo. Problemas tão complexos como o problema de Delaunay, podem tornar-se uma fonte de pesquisa para um

investigador que tenha menos paciência do que ele teve. Além disso o investigador pode dedicar uma parte do seu tempo a avaliar o significado dos seus resultados algébricos. Pode experimentar cálculos elaborados sem pôr em causa a sua carreira na precisão e utilidade da resposta. O facto do enorme cálculo de Delaunay ter sido efectuado como um teste nos novos sistemas de álgebra por computador foi talvez a mais notável indicação, que estes deslocaram a "fronteira da intratabilidade", na mecânica celeste.

Como pode um computador ser programado para executar manipulações algébricas? Muitos dos algoritmos empregues na álgebra por computador começaram como procedimentos básicos elaborados pelas mais antigas gerações de matemáticos, que são agora ensinados aos estudantes do liceu e da universidade. Por exemplo os métodos para resolver equações, nas quais uma variável é elevada à primeira ou segunda potência, eram conhecidos desde o tempo de Hammurabi, 1750AC. Contudo, ao contrário do estudante que pode ter uma intuitiva mas vaga percepção de como prosseguir para encontrar a solução, o computador deve seguir um rigoroso procedimento que especifique todos os passos a realizar.

Considere-se como um estudante, com uma moderada facilidade para a álgebra, pode resolver a equação  $3x-1=2(x+5)$ . Primeiro pode desembaraçar de parênteses, multiplicando ambos os termos dentro deles,  $x$  e  $5$  por  $2$ , obtendo  $3x-1=2x+10$ . Em seguida mudar o termo  $2x$  para o lado esquerdo da equação e o termo  $-1$  para o lado direito, trocando os sinais à medida que avança somando ou subtraindo. Assim num passo seguinte obterá a



resposta  $x=11$ .

Num programa de álgebra por computador, os passos a efectuar para encontrar a solução do problema têm de ser especificados com pormenor um tanto fastidioso e os atalhos que o estudante pode encontrar durante o trabalho sobre um determinado problema devem ser especificados. O primeiro passo para a resolução da equação do nosso exemplo, seria provavelmente, não variar no programa o método do estudante: o programa desembaraçava de parênteses e obteria a expressão

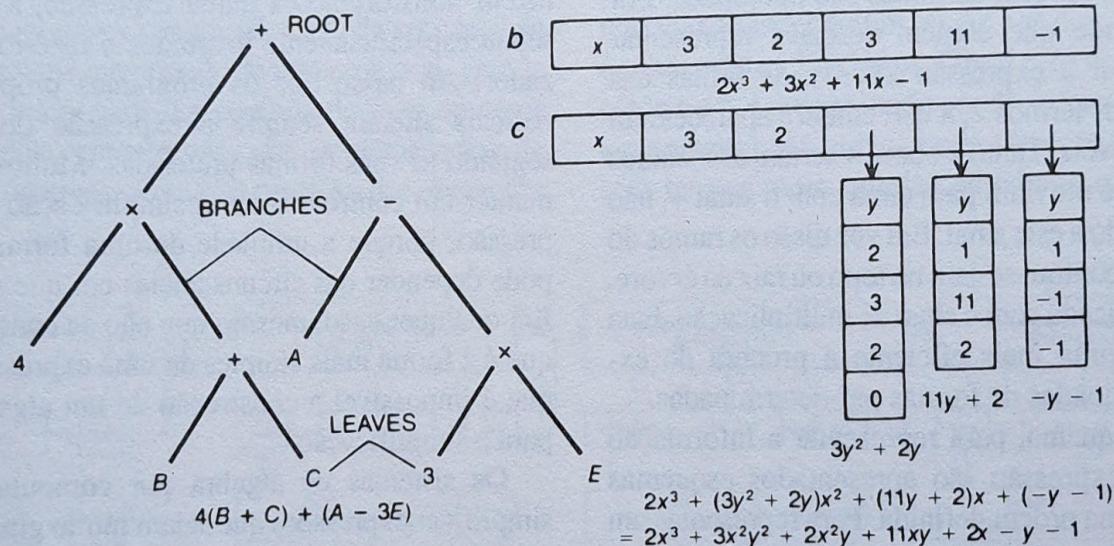
$3x-1=2x+10$ . Todavia para alcançar a última linha teria que mudar os termos da equação, um por um, para o lado conveniente. Uma maneira de fazer isto, seria programar o computador para somar uma expressão, conhecida por simétrico, a todas as constantes numéricas que aparecem do lado esquerdo do sinal de igual, e a todos os termos que incluem variáveis que aparecem do lado direito do sinal de igual. Desde que  $-1$  seja a única constante a aparecer do lado esquerdo do sinal de igual, o computador somará o seu simétrico  $+1$ , a ambos os lados da equação, obtendo  $3x-1+1=2x+10+1$ . O programa teria então de somar ou subtrair onde fosse possível, obtendo  $3x=2x+11$ .

A seguir o programa teria de procurar as expressões à direita do sinal igual para os termos que incluem variáveis e procurar o simétrico do primeiro termo encontrado. No exemplo, o computador determinava o simétrico de  $2x$  (isto é  $-2x$ ) e somava-o a ambos os membros da equação, obtendo desse modo  $3x-2x=2x+11-2x$ . Uma vez mais os termos seriam reagrupados de modo a que pudessem ser combinados:  $3x-2x=2x-2x+11$ . Finalmente o programa combinaria os termos semelhantes e pararia quando aparecesse uma única variável do lado esquerdo da equação e uma constante numérica do lado direito:  $x=11$ . Tal algoritmo não é nem o método mais simples nem o mais eficiente que se pode imaginar na programação de um computador para resolver equações. Há muitas possibilidades, tal como o aparecimento da expressão  $2x=22$ , num certo passo da resolução, que o algoritmo descrito não está preparado para tratar.

Para desenvolver um algoritmo para álgebra por

computador não é necessário seguir o método que é mais eficiente no cálculo manual. Delaunay demonstrou alguns teoremas que então empregou para simplificar cálculos intermédios. Embora os teoremas pudessem ser incorporados num programa, o esforço necessário para os exprimir na forma algorítmica, encorajou Deprit e os seus colegas a procurar um método mais compatível

com a resolução mecanizada. O que eles inventaram requer transformações, mas o algoritmo é fácil de programar e pode ser executado rapidamente por um computador. O desenvolvimento de novos algoritmos é uma das áreas mais activas da investigação em álgebra por computador. É em larga medida graças a este trabalho que os sistemas de álgebra por computador têm sido



A representação de uma função algébrica num computador pode requerer diversas estratégias. O diagrama de árvore invertida (a) é um meio simples e conveniente de representar a sequência de operações que se aplicam às variáveis e constantes numa expressão. A função polinomial de uma variável pode ser representada pela sequência (b) que consiste no nome da variável, no grau do polinómio (igual à potência mais elevada da variável que aparece no polinómio) e aos valores numéricos dos coeficientes das restantes potências por ordem decrescente. Para representar a função polinomial de duas variáveis (c) pode empregar-se uma generalização da representação polinomial para uma variável. Aqui o grupo de rectângulos horizontais representa uma função polinomial do terceiro grau da variável  $x$ , ao passo que os verticais representam as funções polinomiais da variável  $y$ . Os três polinómios em  $y$  aparecem como coeficientes dos termos do polinómio em  $x$  que correspondem aos três espaços deixados em branco. Donde o coeficiente do termo  $x^2$  é  $3y + 2y$ , o coeficiente do termo  $x$  é  $11y + 2$  e o coeficiente do termo constante do polinómio em  $x$  é  $-y - 1$ .

aperfeiçoados significativamente nestes últimos anos.

Para representar uma expressão algébrica num programa de computador, a maior parte dos sistemas procuram fornecer o mínimo de informação necessária para especificar a expressão de forma única. Os esquemas correntes de representação empregam um ou dois caminhos, ou a combinação dos dois. Num deles uma expressão é representada como uma estrutura em forma de árvore invertida, na qual as folhas são operandos. Por exemplo, supondo que alguém desejava representar num computador a expressão  $2(x+4)$ , as folhas das árvores seriam os termos 2,  $x$  e 4, embora aparecessem em diferentes níveis. Tanto  $x$  como 4 seriam associados aos ramos que se moviam para cima com o sinal +, não estando o 2 ligado a este sinal. Em vez disso os ramos do 2 e do sinal + encontrar-se-iam no topo ou raiz da árvore, que seria classificada com o sinal de multiplicação. Esta representação torna mais eficiente a procura de expressões subordinadas de formas pré-determinadas.

No outro esquema, para representar a informação contida numa expressão são apresentados esquemas com *slots* por uma ordem definida. Para representar um polinómio numa variável, por exemplo um *slot* designa o nome da variável, o próximo o grau do polinómio (a maior potência da variável que aparece no polinómio) e os *slots* seguintes os coeficientes das potências decrescentes da variável. Quando se trata de expressões mais complicadas o conjunto dos *slots* informativos pode fazer parte da representação da estrutura em árvore.

Embora as representações num computador não devam ser ambíguas, qualquer expressão algébrica pode ser representada numa variedade de vias equivalentes.

Podia desejar-se construir um algoritmo que representasse sempre a forma mais simples possível de uma expressão. Em tal algoritmo, por exemplo,  $x+x+x$  deveria ser sempre representado por  $3x$ . Contudo, há pessoas que discordam sobre o que constitui a forma mais simples de uma expressão. As preferências estilísticas diferem muito do mesmo modo que as ideologias políticas. Os programas propostos pelos conservadores não fazem transformações numa expressão, a menos que sejam especificamente instruídos a fazê-lo, pelo utilizador. Ao passo que os programas propostos pelos radicais alteram sempre a expressão do utilizador, segundo as suas formas preferidas. Muitos gostam de manter um controlo sobre a simplificação de uma expressão, porque a utilidade de uma forma específica pode depender das circunstâncias em que se encontra. Em qualquer caso, mesmo que não se concorde com o que é a forma mais simples de uma expressão, sabe-se que é impossível a construção de um algoritmo geral para a simplificação.

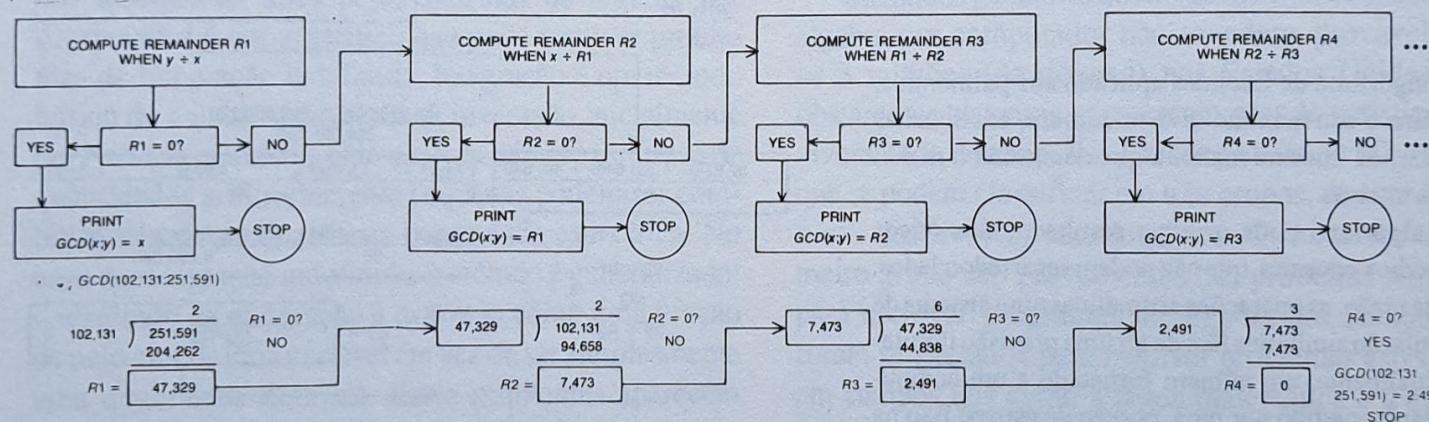
Os sistemas de álgebra por computador podem simplificar expressões que sejam muito grandes e complicadas. Tais expressões podem conter não só funções elementares polinomiais, trigonométricas e logarítmicas, mas também as funções mais complexas que possam surgir num trabalho científico. Quem usa o sistema de álgebra por computador pode, portanto, definir as suas próprias funções, especificar as suas propriedades e fornecer as regras de simplificação apropriada, podendo o computador ser empregue, algumas vezes, para achar tais regras. Na maior parte dos casos pouco se conhece, de antemão, como se simplificará uma expressão. O método mais prático é obter de novo do

computador todas as expressões algébricas que o programa já pode simplificar, fornecer tudo o que o programador pode pensar das igualdades algébricas adicionais e permitir que o computador proceda por sua própria conta. O método funciona surpreendentemente bem: pode, muitas vezes, simplificar tão eficazmente como um especialista matemático.

Devido à necessidade de cálculos algébricos para a exactidão mais do que para respostas aproximadas, um sistema de álgebra por computador tem de ser capaz de tratar uma enorme quantidade de números com grande precisão. Na maior parte dos computadores os números são vulgarmente representados por um número fixo de dígitos significativos, embora a precisão das operações

aritméticas possa algumas vezes duplicar ou mesmo aumentar várias vezes. No âmbito da álgebra por computador não se pode estabelecer antecipadamente qualquer limite na precisão.

Considere um algoritmo que possa ser empregue para simplificar um polinómio racional (uma expressão na qual um polinómio seja divisível por outro). O algoritmo é uma generalização e modificação do método chamado "algoritmo de Euclides", para determinar o máximo divisor comum (m.d.c.) de dois números, que já é conhecido há 2200 anos. O m.d.c. de dois números, tais como 6 e 8, é determinado por divisões sucessivas. Uma vez encontrado o m.d.c., pode a fracção ser reduzida aos seus termos mais simples, dividindo o numerador e o



O diagrama de operação do algoritmo de Euclides, um método rigoroso para determinar o máximo divisor comum (m.d.c.) de dois números inteiros. (O máximo divisor comum é o maior inteiro que divide ambos os inteiros dados, sem deixar restos). O algoritmo foi descoberto, há pelo menos, 2200 anos; à excepção das quatro operações elementares da aritmética, é o algoritmo mais antigo que se conhece. As setas no gráfico indicam os estados transitórios do algoritmo para o exemplo numérico na parte inferior do diagrama. O algoritmo de Euclides não tem o seu campo de aplicação limitado aos inteiros; um método ligeiramente modificado pode determinar o máximo divisor comum de dois polinómios.

$$P = x^5 + 15x^4 + 85x^3 + 225x^2 + 274x + 120$$

$$Q = 6x^4 + 77x^3 + 304x^2 + 363x + 90$$

GCD(P;Q)

$$\begin{array}{r}
 P + Q \quad \frac{6x + 13}{36} \\
 6x^4 + 77x^3 + 304x^2 + 363x + 90 \quad \left) \begin{array}{l} x^5 + 15x^4 + 85x^3 + 225x^2 + 274x + 120 \\ x^5 + 15x^4 + 2,825x^3 + 6,130x^2 + 5,259x + 1,170 \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

R1 = 0?

NO

Q ÷ R1

$$R1 = \frac{235x^3 + 1,970x^2 + 4,605x + 3,150}{36}$$

$$\begin{array}{r}
 \frac{235x^3 + 1,970x^2 + 4,605x + 3,150}{36} \quad \frac{10,152x + 45,180}{11,045} \\
 \left) \begin{array}{l} 6x^4 + 77x^3 + 304x^2 + 363x + 90 \\ 6x^4 + 77x^3 + 754,192x^2 + 1,333,515x + 790,650 \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

R2 = 0?

NO

R1 ÷ R2

$$R2 = \frac{-82,656x^2 + 531,648x + 591,840}{2,209}$$

$$\begin{array}{r}
 \frac{-82,656x^2 + 531,648x + 591,840}{2,209} \quad \frac{-148,986,005x + 290,660,220}{854,001,792} \\
 \left) \begin{array}{l} \frac{235x^3 + 1,970x^2 + 4,605x + 3,150}{36} \\ \frac{235x^3 + 1,970x^2 + 762,992,310x + 540,793,800}{36} + \frac{5,930,568}{5,930,568} \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

R3 = 0?

NO

R2 ÷ R3

$$R3 = \frac{-121,495}{164,738}(x + 5)$$

$$\begin{array}{r}
 \frac{-121,495}{164,738}(x + 5) \quad \frac{13,616,584,128x + 19,499,707,584}{268,382,455} \\
 \left) \begin{array}{l} \frac{-82,656x^2 + 531,648x + 591,840}{2,209} \\ \frac{-82,656x^2 + 531,648x + 591,840}{2,209} \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

R4 = 0?

YES

GCD(P;Q) = x + 5

$$R4 = 0$$

O algoritmo de Euclides aplicado aos polinômios, determina o seu máximo divisor comum, em divisões repetidas, da mesma maneira que determina o m.d.c. de dois inteiros.

O algoritmo pode originar resultados numéricos intermédios enormes, que não podem ser arredondados. Por esta razão, as operações aritméticas num sistema de manipulação simbólica têm de ter uma precisão ilimitada. Usualmente, um número fornecido a um computador está repartido por uma porção de espaço fixo na sua memória mas num sistema de manipulação simbólica tal espaço não pode ser atribuído.

Os matemáticos que estudam as propriedades dos números, têm sido atraídos por esta característica dos sistemas de manipulação simbólica. As setas correspondem aos passos do algoritmo, cujo diagrama está ilustrado na página 21.

denominador pelo m.d.c.. Para a fracção  $6/8$  o m.d.c. é 2 e a forma reduzida é  $3/4$ .

Todavia quando o algoritmo euclideano é aplicado a um polinómio, os quocientes e restos das sucessivas divisões originam termos em que os coeficientes fraccionários são números muito grandes. Para evitar calcular com números muito grandes, foram criadas técnicas para reduzir o tamanho dos números encontrados ao longo do cálculo. Por exemplo, um factor numérico constante pode ser eliminado dum polinómio num algoritmo euclideano. Contudo, arredondar qualquer dos coeficientes antes de finalizar o cálculo, tornaria absurda a resposta final.

Um dos algoritmos mais importantes desenvolvidos nos últimos 15 anos pelos sistemas de álgebra por computador é um algoritmo que pode resolver problemas de integração indefinida. Integração é um método básico do cálculo infinitesimal, inventado inicialmente por Newton e Leibniz, pelo qual um número ilimitado de quantidades arbitrariamente pequenas podem ser combinadas para produzir uma quantidade específica. No caso da integração indefinida, o método é generalizado: o resultado da integração é expresso como uma função de pelo menos uma variável em vez de ser simplesmente uma quantidade definida. Esses problemas aparecem muitas vezes nas ciências físicas e biológicas, mas a sua dificuldade tem atormentado os matemáticos durante centenas de anos. Pensava-se outrora que não se poderia construir um algoritmo geral para a solução de tais problemas. A tentativa de solução recorre tanto à formulação de conjecturas como a consultas de tabelas de integrais.

O algoritmo que foi construído para integração indefinida é semelhante a um algoritmo subsequente desenvolvido para determinar uma expressão algébrica para uma soma finita de expressões, que tenham todas a mesma forma (ver ilustração na pag. 16). Se um integral pode ser resolvido em todas as suas formas tal como uma soma de uma série infinita de termos é possível prever a fórmula algébrica geral da solução e trabalhar-se depois pela diferenciação (o inverso da integração) para determinar a fórmula exacta. O algoritmo foi introduzido em vários sistemas de álgebra por computador. Um estudo numérico computadorizado de oito tabelas, largamente empregues, de integrais indefinidos descobriu que 10% das fórmulas estão erradas, tendo sido encontrado numa das tabelas um erro na ordem dos 25%.

Os fundos gastos no desenvolvimento de sistemas de álgebra por computador não excedem, provavelmente os 3 milhões (de dólares) nos Estados Unidos. Não obstante os sistemas apresentam grande sofisticação e diversidade de modelos. Existem cerca de 60 sistemas que se podem classificar em três grupos, de acordo com o seu desenvolvimento histórico. Os sistemas do primeiro grupo são provenientes das primeiras tentativas para escrever programas de álgebra por computador; foram projectados para resolver problemas específicos em campos tais como a física matemática e a química teórica. Geralmente tais programas existem para resolver problemas em electrodinâmica quântica (ASHMEDAI), teoria lunar e relatividade geral (CAMAL), física das altas energias (SCHOONSCHIP), manipulação do tensor indicial (SHEEP) e mecânica celeste (TRIGMAN) e para resolver equações de polinómios e funções racionais (ALTRAN). Há mesmo um programa

especial, chamado ALDESSAC/2, que pode auxiliar o desenvolvimento de novos programas de álgebra por computador.

Os sistemas do segundo grupo são de uso geral, fornecendo ao investigador tantas capacidades matemáticas quanto possíveis. Tais sistemas podem apresentar as quatro operações aritméticas básicas, fórmulas de integração definidas e indefinidas e resolver equações diferenciais ordinárias. Os programas podem resolver também sistemas de equações algébricas lineares ou não lineares, diferenciar, simplificar, factorizar, calcular somas de expressões finitas ou infinitas (séries de Taylor) e desempenham todas as funções dos sistemas de resoluções especiais, embora não com tanta rapidez e potência. Os quatro sistemas de resolução gerais mais conhecidos são: MACSYMA; REDUCE um sistema desenvolvido na universidade de Stanford, na universidade de Utah e na Rand Corporation; SCRATCHPAD desenvolvido pela International Business Machines Corporation e o SMP desenvolvido no Instituto Tecnológico da Califórnia. Eles representam até agora as realizações mais avançadas em álgebra por computador.

Os sistemas de álgebra por computador projectados para operar com microcomputadores começam a aparecer agora. Eles são mais lentos do que os sistemas projectados para computadores de maiores capacidades mas podem efectuar cálculos bastante complexos, com maior correcção que os efectuados por muitos matemáticos. O mais sofisticado e mais difundido é o MuMath que foi desenvolvido pela Soft Warehouse em Honolulu. O MuMath tem algumas das capacidades dos sistemas gerais, embora a capacidade, a memória e a velocidade do micro-computador não permitam ao

MuMath resolver problemas muito complexos. Contudo, tais sistemas ou os seus sucessores mais poderosos podem vir a ser muito utilizados em microcomputadores pessoais e talvez mesmo antes do fim da década em calculadoras do tamanho de um bloco de notas.

Os sistemas de álgebra por computador tendem cada vez mais a serem escritos em linguagens de programação simples e de alto nível que se assemelham a expressões matemáticas vulgares. Os sistemas são geralmente projectados também para serem acessíveis e interactivos com o utilizador. Um iniciado pode aprender em poucos minutos a resolver muitas espécies de problemas não triviais, para além da sua capacidade para os resolver à mão. Com a maior parte dos sistemas gerais, o utilizador introduz comandos numa linguagem semelhante à linguagem de computadores ALGOL ou FORTRAN. Se o comando inclui fracções, expoentes ou outros símbolos que não apareçam normalmente impressos na mesma linha, o computador responde com uma versão reescrita da expressão onde a expõe numa fórmula mais natural. O utilizador pode então, especificar certas operações, para serem efectuadas na expressão, tais como adicioná-la a si própria ou elevar a uma potência, diferenciar ou integrar. O computador executa a operação, simplifica a expressão resultante e imprime-a ou apresenta-a num terminal vídeo. Se a operação depende da extracção positiva ou negativa da raiz quadrada de uma expressão, o computador pergunta ao utilizador, antes de terminar o cálculo.

A álgebra por computador tem sido aplicada a uma grande variedade de disciplinas, incluindo a acústica, a geometria algébrica, a economia, a mecânica de estrutu-

234

## THÉORIE DU MOUVEMENT DE LA LUNE.

la fonction R ne contient plus aucun terme périodique; elle se trouve donc réduite à son terme non périodique seul, terme qui, en tenant compte des parties fournies par les opérations 129, 260, 349 et 415, a pour valeur

$$\begin{aligned}
 R = & \frac{\mu}{2a} \\
 & + m' \frac{n^2}{a^2} \left\{ \frac{1}{4} - \frac{3}{2} \gamma^2 + \frac{3}{8} e^2 + \frac{3}{8} e^4 + \frac{3}{2} \gamma^4 - \frac{9}{4} \gamma^2 e^2 - \frac{9}{4} \gamma^2 e^4 + \frac{9}{16} e^2 e^4 + \frac{15}{32} e^4 - \frac{33}{2} \gamma^2 e^2 \right. \\
 & + \frac{9}{4} \gamma^4 e^2 + \frac{75}{16} \gamma^2 e^4 - \frac{27}{8} \gamma^2 e^2 e^4 - \frac{45}{16} \gamma^2 e^4 + \frac{45}{64} e^2 e^4 \\
 & + \left( \frac{9}{16} \gamma^2 + \frac{225}{64} e^2 - \frac{27}{16} \gamma^4 - \frac{387}{32} \gamma^2 e^2 + \frac{23}{16} \gamma^2 e^4 - \frac{225}{128} e^2 + \frac{825}{64} e^2 e^2 + \frac{9}{8} \gamma^2 \right. \\
 & \left. + \frac{3897}{64} \gamma^2 e^2 - \frac{99}{16} \gamma^2 e^4 - \frac{1431}{256} \gamma^2 e^2 - \frac{1419}{32} \gamma^2 e^2 e^2 - \frac{225}{512} e^2 - \frac{825}{128} e^2 e^2 \right) \frac{n'}{n} \\
 & - \left( \frac{31}{32} - \frac{33}{8} \gamma^2 - \frac{971}{32} e^2 + \frac{465}{64} e^4 + \frac{273}{64} \gamma^4 + \frac{5709}{64} \gamma^2 e^2 - \frac{117}{4} \gamma^2 e^4 + \frac{4989}{256} e^2 \right. \\
 & \left. - \frac{1905}{8} e^2 e^2 + \frac{3255}{128} e^2 e^2 \right) \frac{n''}{n^2} \\
 & - \left( \frac{255}{32} - \frac{31515}{1024} \gamma^2 - \frac{551115}{4096} e^2 + \frac{6085}{64} e^4 + \frac{20511}{512} \gamma^4 + \frac{927831}{2048} \gamma^2 e^2 \right. \\
 & \left. - \frac{218115}{512} \gamma^2 e^2 + \frac{1622985}{16384} e^2 - \frac{4069635}{2048} e^2 e^2 \right) \frac{n'''}{n^3} \\
 & - \left( \frac{5515}{192} - \frac{296779}{3072} \gamma^2 - \frac{6380965}{12288} e^2 + \frac{16285}{24} e^4 \right) \frac{n'''}{n^3} \\
 & - \left( \frac{28841}{288} - \frac{113818307}{294912} \gamma^2 - \frac{1681901051}{1179648} e^2 + \frac{1393609}{384} e^4 \right) \frac{n'''}{n^3} \\
 & - \frac{9814775}{36864} \frac{n'''}{n^3} - \frac{128268199}{663552} \frac{n'''}{n^3} \\
 & + \left[ \frac{9}{64} - \frac{45}{16} \gamma^2 + \frac{45}{64} e^2 + \frac{15}{128} e^4 \right. \\
 & \left. + \left( \frac{225}{512} - \frac{1935}{256} \gamma^2 + \frac{7425}{1024} e^2 + \frac{225}{64} e^4 \right) \frac{n'}{n} + \frac{869}{512} \frac{n''}{n^2} - \frac{10391}{8192} \frac{n'''}{n^3} \right] \frac{n'''}{n^3}
 \end{aligned}$$

Cálculos algébricos maciços, realizados à mão em 1857, foram efectuados em computador pela primeira vez em 1970, num sistema de manipulação simbólica. Os cálculos originais foram efectuados pelo astrónomo francês Charles Delaunay e foram publicados em dois volumes; está aqui reproduzida uma página do segundo volume. O cálculo de Delaunay, que levou 10 anos a ser concluído e outros 10 a ser comprovado, deu a posição da Lua como função do tempo com uma precisão nunca antes alcançada. Foram detectados 3 erros, quando o cálculo foi verificado por André Deprit, Jaques Henrard, e Arnold Rom do laboratório de investigação científica da Boeing, em Seattle. O erro principal, que originou os outros dois, está enquadrado num rectângulo; a expressão deveria ser  $33/16\gamma^2 e^{-2}$ . A verificação requereu cerca de 20 horas de processamento em computador. A notável precisão do cálculo, evidenciada pela descoberta destes erros, tem sido empregue para testar alguns novos sistemas de manipulação simbólica antes de serem colocados em serviço.

ras, a teoria de números e no projecto de hélices, casco de navios, pás de hélices para helicópteros, microscópios electrónicos e nos circuitos integrados. A seguir descrevemos mais três aplicações nas quais a álgebra por computador está a dar o seu contributo. Para as investigações do "plasma físico" e para o desenvolvimento das fontes de "fusão energética" alguns cálculos requerem a associação de técnicas numéricas e algébricas computadorizadas. As fórmulas algébricas que descrevem as propriedades do plasma num campo magnético podem tornar-se complexas e tendem a dificultar a compreensão física. O que é necessário é obter a aproximação mais do que as expressões analíticas exactas para tal fenómeno. Para resolver o problema o grupo da teoria do plasma do MIT projectou uma técnica de álgebra por computador, capaz de separar os termos num cálculo de acordo com os processos físicos que a geraram. Por cálculos numéricos pode-se então separar as séries de termos que descrevem cada processo daqueles que são relativamente pequenos. O resultado é uma expressão algébrica que descreve as propriedades dominantes e que se torna suficientemente simples para a compreensão do significado físico de cada termo.

A fim de deduzir hipóteses das teorias de interacção das partículas elementares, foi necessário calcular expressões que podem incluir milhares de integrais, muitos dos quais têm propriedades matemáticas pouco usais e enganadoras. O cálculo numérico é vulnerável a duas das críticas que já mencionámos: não é tão útil como o cálculo algébrico para mostrar como as contribuições de vários fenómenos físicos afectam a interacção e introduz erros de aproximação. À medida que as técnicas experimentais são aperfeiçoadas as incertezas introduzidas

pela aproximação podem tornar-se tão grandes, que as predições das teorias são impossíveis de verificar. É provável que a aplicação de métodos de álgebra por computador venha ajudar na formulação de predições teóricas da precisão requerida.

No estudo das alternativas teóricas para a relatividade geral, um teste conhecido como teorema de Birkhoff tornou-se recentemente muito popular. O matemático George David Birkhoff da Universidade de Harvard, mostrou em 1923, que a teoria geral da relatividade exclui a propagação no espaço de vibrações gravitacionais que poderiam ser geradas por vibrações radiais da matéria numa estrela. Porque tais vibrações não foram detectadas e porque não estão de acordo com a teoria da gravidade, quer de Einstein quer de Newton, espera-se a exclusão das vibrações de qualquer potencial teoria da gravidade. O cálculo requerido para determinar se uma teoria da gravidade satisfaz ou não o teorema de Birkhoff é extenso, mas tornou-se agora simples com os sistemas de álgebra por computador. foi recentemente demonstrado, através da utilização do sistema de álgebra computadorizada que a teoria da gravidade formulada por C. N. Yang, da State University de New York em Stony Brook, violava o teorema de Birkhoff. O cálculo corrigiu outro efectuado à mão que tinha sido dado como certo e citado durante muitos anos.

É importante reconhecer que os sistemas de álgebra por computador não são utilizados unicamente para grandes cálculos. Muitas vezes levantam-se problemas relativamente simples, para os quais a manipulação algébrica pode auxiliar na compreensão ou tornar o cálculo numérico mais eficiente. Por vezes, pode re-

duzir-se o tempo de processamento do computador por um factor de 100 ou mais pela aplicação criteriosa do processamento algébrico. Além disso, os programas de álgebra por computador podem substituir uma biblioteca inteira de livros de referência Matemática. Os programas baseados no conhecimento que incluem métodos de integração, métodos para resolver as equações diferenciais e semelhantes, podem tornar as tais obras de consulta tão obsoletas quanto a tábua de logaritmos. Com a melhoria dos computadores baratos, a álgebra por computador tornar-se-á acessível a todos os interessados nos seus locais de emprego ou em suas casas para ensinar, estudar, investigar, e mesmo para aplicações ainda impensadas.

# Ensinar crianças a serem matemáticos versus ensinar Matemática

Seymour Papert

A grande diferença entre o trabalho de uma criança numa aula de Matemática elementar e o de um matemático, não está no assunto (aritmética, já fora de moda, versus grupos ou categorias ou seja o que fôr) mas no facto de o matemático estar empenhado criativamente no desenvolvimento de um projecto pessoal significativo. Neste aspecto o trabalho de uma criança numa aula de arte é muitas vezes análogo ao de um artista adulto. Este artigo<sup>1</sup> apresenta os resultados de alguma investigação em Matemática, tendo por objectivo produzir conceitos e tópicos matemáticos que eliminem esta diferença. O exemplo mais importante aqui usado é a “Geometria da tartaruga”, que consiste em programar um ponto móvel para gerar formas geométricas. Ao representar um ponto móvel, a “tartaruga cibernética” controlada por um computador, torna os aspectos construtivos da teoria suficientes para atrair as mentes e imaginações de quase todas as crianças das escolas elementares<sup>2</sup> com quem nós trabalhámos — incluindo algumas cujos anteriores resultados de Matemática eram de níveis muito baixos.

## Introdução

Ser um matemático já não se define como “aquele

que conhece” um conjunto de factos matemáticos, da mesma forma que ser poeta não é definido como aquele que conhece um conjunto de factos linguísticos. Alguns dos actuais reformadores da Educação Matemática darão a esta frase uma concordância demasiado fácil comentando: “sim, é necessário compreender e não simplesmente conhecer”. Mas isto falha no ponto fundamental. É que ser um matemático, tal como ser um poeta, um compositor ou um engenheiro, significa fazer, mais do que conhecer ou compreender. Este artigo é uma tentativa de explorar algumas formas que nos habilitem a colocar as crianças em situação de fazer Matemática em vez de somente aprender algo sobre ela.

O plano deste ensaio é desenvolver alguns exemplos de novas actividades matemáticas para crianças e depois discutir as questões gerais subjacentes ao parágrafo anterior. Sem exemplos, expressões abstractas tal como “fazer”, “conhecer” e “compreender” Matemática não terão senão apenas um significado meramente sugestivo. Por outro lado a descrição de exemplos será mais fácil de seguir se o leitor tiver uma ideia prévia da sua intenção.

Assim, o autor abordará primeiro, duma forma muito impressionista, a sua posição sobre algumas das principais questões. Ao fazê-lo assim, ele explorará o esquema

1) Este artigo foi apresentado na Conferência CEMRL sobre Álgebra no Currículo pré Universitário, Carbondale, Illinois em Novembro de 1970.

2) A escola elementar nos Estados Unidos da América vai usualmente do 1º ao 6º ano de escolaridade.

dialéctico usado no parágrafo anterior para obter um pouco mais de precisão na exposição, excluindo explicitamente a interpretação errada mais provável.

Na nossa sociedade supõe-se geralmente que qualquer criança deveria, e pode, ter experiências de trabalho criativo em linguagem e artes plásticas. É igualmente suposto que apenas um número restrito de pessoas pode trabalhar criativamente em Matemática. O autor acredita que tem havido uma conspiração inconsciente de psicólogos e matemáticos para manter esta tese. Os psicólogos contribuem para ela dada a sua ignorância genuína sobre o que poderia ser um trabalho matemático criativo. Os matemáticos muitas vezes fazem isso por elitismo, dada a sua convicção profunda de que a criatividade Matemática é privilégio duma restrita minoria.

Aqui novamente, se quisermos alguma clareza, é necessário evitar uma concordância superficial e demasiado fácil dos reformadores da educação matemática que dizem, “sim, é por isso que devemos usar o método da descoberta”. Quando “descoberta” significa descoberta isto é maravilhoso, mas na realidade “descoberta” geralmente significa algo semelhante à seguinte fantasia acontecida numa aula de poesia: o método de descoberta do professor acabou por ser uma série de questões que conduziu a turma a descobrir o verso “Maria tinha um lindo cordeiro”. A questão do autor não é que isto seja bom ou mau, mas que ninguém o deveria confundir com trabalho criativo em poesia.

É possível que as crianças façam Matemática criativa (isto é: façam Matemática) em todas as fases da sua vida escolar (e mesmo na vida adulta!)? O autor argumentará que a resposta é: sim, mas é necessário que os matemáticos adultos o tornem possível através duma

boa quantidade de trabalho criativo em Matemática. A razão para a mudança é que os ramos tradicionais da Matemática não são o terreno mais fértil para o crescimento profícuo e fácil dos traços matemáticos da mente. Nós podemos ter de desenvolver novos ramos da Matemática que permitam aos principiantes mais espaço para brincar criativamente do que acontece com Teoria dos Números ou a Álgebra moderna. Nas páginas seguintes encontrar-se-ão alguns exemplos específicos aos quais seria pretencioso chamar “ramos da Matemática orientados para as novas pedagogias” mas que darão sugestões aos leitores interessados do que esta frase poderá significar.

Os leitores com espírito crítico não terão qualquer dificuldade em colocar objecções. Os matemáticos elitistas dirão: “Como se atreve a trazer estas trivalidades para perturbar a nossa contemplação das verdadeiras estruturas matemáticas?” As pessoas práticas dirão: “Brincar? Quem precisa disso? E a prática dos *skills* da aritmética?”

O snob e o anti-snob estão a expressar a mesma objecção por diferentes palavras. Permitam-me citá-la, “Escolas tradicionais têm considerado difícil ensinar Matemática às crianças ditas médias. Propõe-se um novo conjunto de actividades que parecem ser divertidas e fáceis de aprender, declarando-as como matemáticas! Bem, isto não as torna matemáticas, e não são soluções para quaisquer dos problemas difíceis com que se debate o mundo da educação matemática”.

Este argumento levanta questões sérias, das quais o autor escolhe uma, que colocará de formas diferentes:

Quando alguém se torna um matemático aprende alguma coisa diferente e mais geral, do que conteúdos

específicos de tópicos matemáticos particulares? Haverá um modo de pensar matemático? Poderá ser aprendido e ensinado? Uma vez adquirido, é muito fácil aprender tópicos particulares como os que obsessam os nossos elitistas e os críticos práticos?

Os psicólogos às vezes reagem dizendo “Oh, querem dizer o problema de transferência”. Mas o autor não pretende dizer nada análogo a experiências sobre alunos a quem foi ensinada Álgebra no ano anterior e que automaticamente aprendem geometria mais facilmente do que os que gastaram esse ano a fazer ginástica. Ele está a perguntar se se pode identificar e ensinar (ou promover o desenvolvimento de) alguma coisa além da álgebra ou geometria, que uma vez aprendido tornará fácil a aprendizagem da álgebra e da geometria. Sem dúvida, que esta outra coisa (vamos chamá-lo de MPM - Modo de Pensar Matemático) só pode ser ensinada quando se usar tópicos particulares como veículos. Mas a experiência de “transferência” é profundamente alterada se a questão fôr saber se se pode usar a álgebra como um veículo para deliberadamente ensinar conceitos gerais transferíveis e *skills*. A conjectura, subjacente a esta questão, é uma resposta afirmativa. Sim, pode-se usar Álgebra como um veículo para iniciar estudantes no pensamento matemático. Mas para se fazer isso eficazmente dever-se-ia primeiro identificar tanto quanto possível, as componentes dos *skills* intelectuais gerais que se estão a tentar ensinar; e quando isto é feito, concluir-se-á que a Álgebra (no sentido tradicional) não é um veículo particularmente bom.

As escolhas alternativas de veículo, abaixo descritas, envolvem todas o uso de computadores, mas de uma forma muito diferente daquelas em que é sugerido usá-

-los quer como “máquinas de ensino” quer como “poderosas réguas de cálculo”. No nosso ideal de laboratório escolar de Matemática, o computador é usado como um meio de controlar processos físicos com vista a atingir determinados objectivos — por exemplo como parte de um sistema auto-piloto para fazer voar aviões de aeromodelismo, ou como o “sistema nervoso” de um modelo de um animal com reflexos de movimento balanceado, possibilidade de andar, capacidade visual simples, etc. Para atingir estes objectivos, são necessários princípios matemáticos; reciprocamente, neste contexto, os princípios matemáticos tornam-se fontes de poder, adquirindo assim significado para uma grande parte dos alunos que não consegue ver qualquer prazer na Matemática livresca e que, em condições escolares usuais, desistem simplesmente, rotulando-se “não dotados para a Matemática”.

A aceitação demasiado fácil transforma-se em: “sim, as aplicações são motivadoras”. Mas “motivação” não é suficiente para distinguir entre trabalho alienante com vista a uma recompensa material ou social e um verdadeiro envolvimento pessoal. Para desenvolver este ponto o autor necessita de identificar alguns aspectos na forma como a criança se relaciona com o seu trabalho.

Um aspecto simples e importante, é o tempo. Uma criança interessada em fazer voar modelos de aeromodelismo sob o controlo do computador trabalhará neste projecto durante um longo período de tempo. Terá tempo para tentar diferentes abordagens e sub-problemas. Terá tempo para conversar sobre o projecto, estabelecer uma linguagem comum com um colaborador ou um instrutor, relacioná-lo com outros interesses e problemas. Esta abordagem de projecto-orientado contrasta

com a abordagem da maior parte dos problemas do ensino da Matemática: uma má característica do problema típico é que a criança não está com ele tempo suficiente para beneficiar muito do seu sucesso ou insucesso.

A par do tempo está a estrutura. Um projecto é suficientemente longo para ter fases identificadas — tais como planeamento, escolha de estratégias, experimentação prévia de casos muito simples, obtenção de uma solução simples, identificação e correcção de erros (*debugging*); etc. E se o tempo é suficientemente longo e a estrutura suficientemente clara, a criança pode desenvolver um vocabulário para a discussão articulada do processo de trabalhar em direcção aos seus objectivos.

O autor acredita numa discussão articulada (em monólogo ou diálogo) de como se resolvem problemas, das razões pelas quais alguém falha determinado problema, das falhas ou deformações que existem no conhecimento de alguém e do que poderia ser feito sobre isto. O autor defenderá isto de duas objecções perfeitamente distintas. Uma objecção diz: “é impossível verbalizar; os problemas são resolvidos por actos intuitivos de discernimento e estes não podem ser articulados”. A outra objecção diz: “é mau verbalizar; recordem a centopeia que ficou paralizada quando o sapo lhe perguntou que perna vinha a seguir”.

Deve-se ter cuidado com os erros de quantificação quando se discutem estas objecções. Por exemplo, Bruner diz-nos (no seu livro *Towards a Theory of Instruction*) que considera “impotentes” palavras e diagramas para ensinar uma criança a andar de bicicleta. Mas se esta evidência mostra (no máximo) que algumas palavras e diagramas são impotentes, ele conclui que todas as palavras e diagramas são impotentes. A hipótese interessante é esta: a impotência de palavras e diagramas

usadas por Bruner explica-se pelas suas origens culturais; o vocabulário e a estrutura conceptual da psicologia clássica é simplesmente inadequada para a descrição de processos dinâmicos tais como andar de bicicleta! Para prosseguir a discussão, o autor suspeita que se Bruner tentasse escrever um programa para que um IBM 360 conduzisse uma motocicleta controlada por rádio, ele teria de concluir (para ser coerente) que o código de ordem do 360 era impotente para esta tarefa. Agora no nosso laboratório temos estudado como as pessoas se equilibram em bicicletas e em engenhos mais complicados tais como uniciclos e bolas de circo. Não há nada complexo ou misterioso ou indiscreto nestes processos. Podemos descrevê-los de uma forma aceitável contanto que um sistema descritivo conveniente tenha sido previamente organizado. As componentes chave do sistema descritivo assentam em conceitos como: a ideia de uma teoria de “primeira ordem” ou linear na qual variáveis de controlo podem ser supostas actuar independentemente; ou a ideia de *feedback*.

Um problema fundamental para a teoria da Educação Matemática é identificar e nomear conceitos necessários para possibilitar que o principiante discuta o seu pensamento matemático numa forma clara e articulada. E quando conhecemos tais conceitos podemos querer procurar ou inventar áreas de trabalho matemático que exemplifiquem particularmente bem esses conceitos. A secção seguinte deste artigo descreverá um novo tema de Matemática com a particularidade de permitir a discussão clara de modelos heurísticos simples que são confusos para os principiantes quando apresentados no contexto das matemáticas elementares mais tradicionais.

## Geometria da tartaruga: um tema de Matemática atraente e acessível

O contexto físico para a discussão que se segue é um quintuplo formado por uma criança, um teclado, um computador, uma grande superfície plana e um aparelho chamado tartaruga. Uma tartaruga é um brinquedo cibernético capaz de se mover para a frente ou para trás numa dada direcção (relativamente a si próprio) e de rodar sobre o seu eixo central. Tem uma caneta, que pode

estar em duas posições chamadas PENUP e PENDOWN. A tartaruga é construída para actuar por comandos vindos dum teclado cujo efeito é ilustrado na figura 1.

Em qualquer altura a tartaruga está num lugar particular e orientada numa direcção particular. O lugar e a direcção juntos constituem o estado geométrico da tartaruga. A figura 1 mostra a tartaruga num campo, usado aqui só para dar ao leitor uma referência.

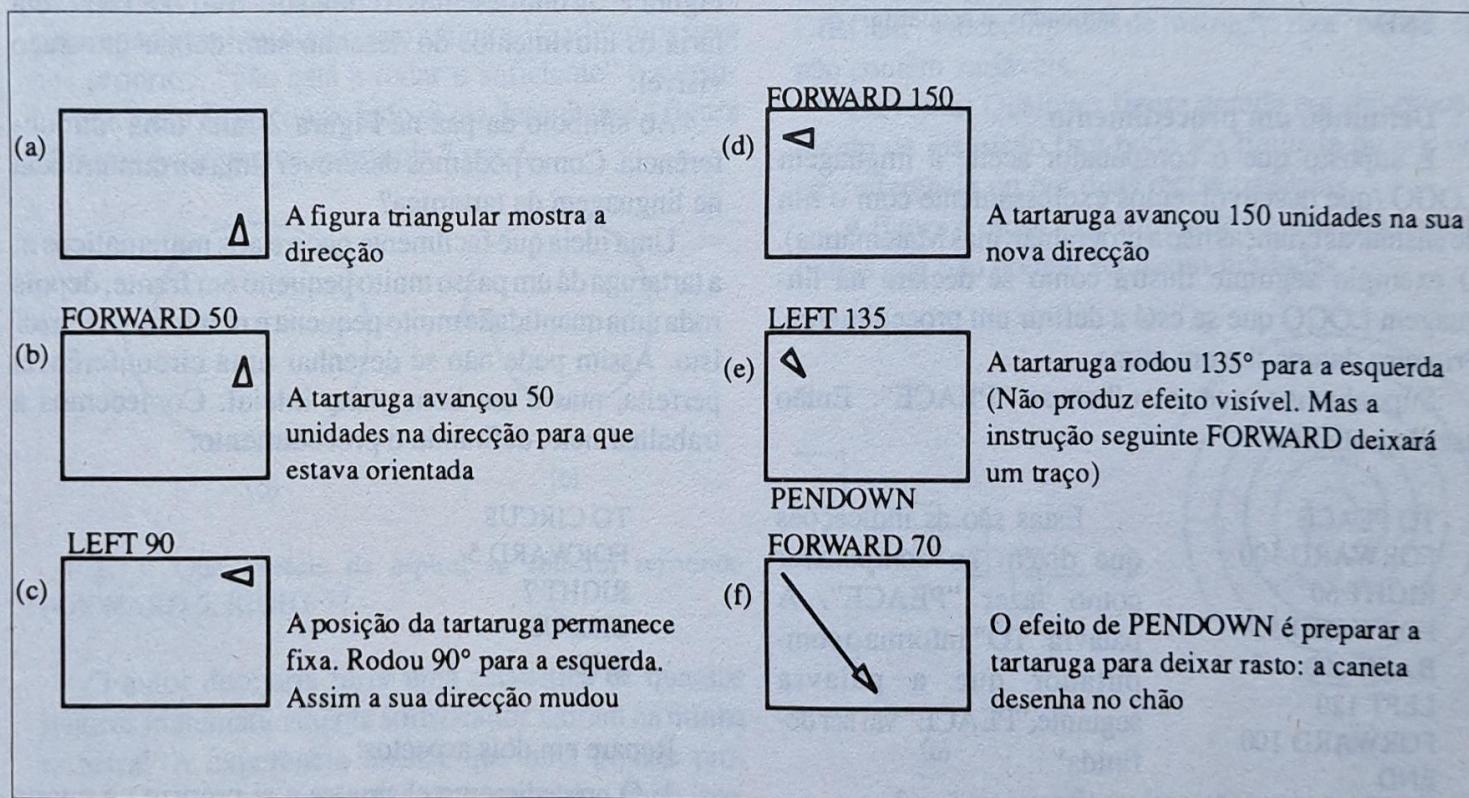


Fig. 1. Linguagem da tartaruga

### Comandos directos

Os comandos seguintes farão com que a tartaruga desenhe a figura 2.

```
TO PEACE
PENDOWN
FORWARD 100
RIGHT 60
FORWARD 100
BACK 100
LEFT 120
FORWARD 100
END
```

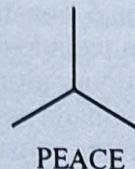


Fig. 2. O desenho resultante dos comandos indicados à esquerda.

### Definindo um procedimento

É suposto que o computador aceite a linguagem LOGO (que desenvolvemos expressamente com o fim de ensinar as crianças não a programar, mas Matemática). O exemplo seguinte ilustra como se declara na linguagem LOGO que se está a definir um procedimento. Primeiro damos-lhe um nome.

Suponhamos que escolhemos "PEACE". Então dactilografamos:

```
TO PEACE
FORWARD 100
RIGHT 60
FORWARD 100
BACK 100
LEFT 120
FORWARD 100
END
```

Estas são as indicações que dizem ao computador como fazer "PEACE". A palavra "TO" informa o computador que a palavra seguinte, "PEACE" vai ser definida<sup>3</sup>

A tartaruga não se move enquanto estamos a escrever isto no teclado. A palavra "TO" e os comandos das linhas

abaixo indicam que não estamos a dizer-lhe para ir em frente, etc; em vez disso estamos a dizer-lhe como executar o novo comando. Quando indicamos, através da palavra "END", que a nossa definição está completa a máquina ecoa:

```
PEACE DEFINED
e agora se teclarmos
PENDOWN
PEACE
```

a tartaruga leva a cabo os comandos e desenha a Figura 2. Se omitíssemos o comando "PENDOWN" ela faria os movimentos do desenho sem deixar um traço visível.

Ao símbolo da paz na Figura 2 falta uma circunferência. Como podemos descrever uma circunferência na linguagem da tartaruga?

Uma ideia que facilmente ocorre aos matemáticos é: a tartaruga dá um passo muito pequeno em frente, depois roda uma quantidade muito pequena e mantém-se a fazer isto. Assim pode não se desenhar uma circunferência perfeita, mas é um bom plano inicial. Começemos a trabalhar nele, definindo o procedimento:

```
TO CIRCUS
FORWARD 5
RIGHT 7
CIRCUS
END
```

Repare em dois aspectos:

1. O procedimento chama-se a si próprio na quarta linha. Isto parece circular, mas realmente não é. O efeito é meramente estabelecer um processo que nunca acaba,

3)Na versão do LOGO utilizada pelo autor aparecem números de linha que desapareceram nas versões actualmente usadas.

entrando o computador num ciclo fechado contínuo da mesma forma que alguém que ao ter que cumprir uma promessa, tivesse sido levado a dizer “eu prometo repetir a frase que já disse”.

2. Seleccionámos os números 5 e 7 porque nos pareceram pequenos, mas sem uma ideia segura do que aconteceria. Contudo, uma vantagem de ter o computador é que podemos experimentar o procedimento para ver o que ele faz. Se aparece um efeito indesejável podemos sempre eliminá-lo (*debugg*); neste caso talvez escolhendo números diferentes. Se, por exemplo, a tartaruga desenhou algo como a figura 3(a) diremos para nós próprios, “não está a rodar o suficiente” e substituímos 7 por 8; por outro lado se ela desenhasse a figura 3(b) nós poderíamos substituir 7 por 6.

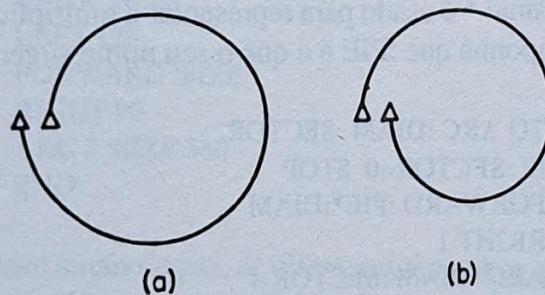


Fig. 3. Que espécie de espiral se constrói repetindo FORWARD 5, RIGHT 7?

O autor desejaria fazer uma estatística de quantos leitores matematicamente sofisticados caíram na minha ratoeira! A experiência mostra que uma grande proporção dos alunos graduados de Matemática farão isso. De facto, o procedimento não pode gerar nem a Figura 3(a) nem 3(b)! Se o fizesse, certamente continuaria a

produzir uma espiral infinita. E pode ver-se facilmente que isto é impossível uma vez que a mesma sequência de comandos teria de produzir partes da curva que são quase rectilíneas, e outras partes que são muito curvas. Mais tecnicamente, pode-se ver que o procedimento CIRCUS deve produzir uma aproximação semelhante a uma circunferência (o que é para todos os fins práticos, uma circunferência) porque deve produzir uma curva de curvatura constante.

Pode-se chegar à mesma conclusão a partir dum teorema mais geral. Chamamos aos procedimentos como CIRCUS “procedimentos de instrução fixa” porque eles não contêm variáveis.

**Teorema:** Qualquer figura gerada por um procedimento de instrução fixa pode ser limitada ou por uma circunferência ou por duas rectas paralelas.

A figura 4 mostra exemplos de figuras que podem e outras que não podem ser assim limitadas.

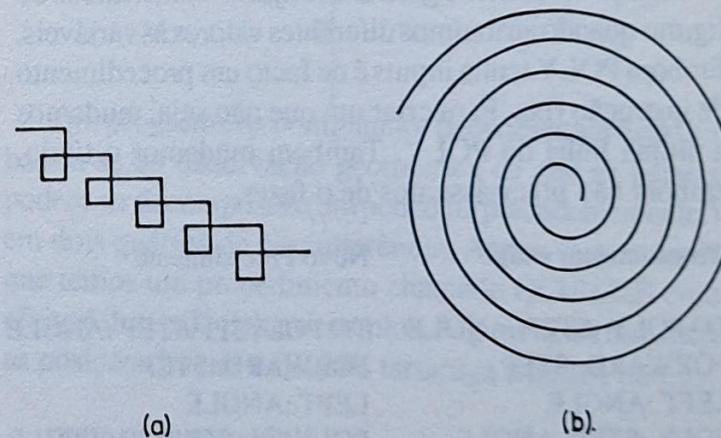


Fig. 4.(a) Uma figura limitada por linhas paralelas;(b) Uma figura não limitada nem por linhas paralelas nem por uma circunferência.

Mostraremos agora como construir procedimentos com variáveis, no mesmo sentido que o comando FORWARD tem um número associado com ele, chamado input. O exemplo seguinte mostra como fazê-lo. (As palavras na linha do título precedida por ":" são nomes das variáveis tais como x na álgebra da escola). Numa turma do quinto ano de escolaridade nós lemos :NUMERO como dois pontos NUMERO ou como o designado pelo "NUMERO", dando ênfase que o que vai ser discutido não é a palavra "NUMERO" mas aquilo que essa palavra representa.

```
TO POLY :STEP :ANGLE
FORWARD :STEP
LEFT :ANGLE
POLY :STEP :ANGLE
END
```

Este procedimento gera um conjunto maravilhoso de figuras quando atribuímos diferentes valores às variáveis. Embora POLY tenha inputs é de facto um procedimento de instrução fixa. Para criar um que não seja, mudamos a última linha do POLY. Também mudamos o título, embora não precisássemos de o fazer.

Procedimento antigo	Novo Procedimento
TO POLY :STEP :ANGLE	TO POLYSPI :STEP :ANGLE
FORWARD :STEP	FORWARD :STEP
LEFT :ANGLE	LEFT :ANGLE
POLY :STEP :ANGLE	POLYSPI :STEP+20 :ANGLE
END	END

O efeito de POLYSPI mostra-se na Figura 5.

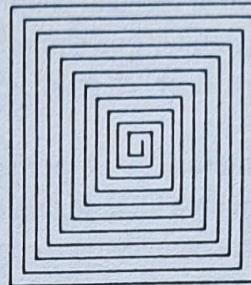


Fig. 5. POLYSPI 5 90  
ou esquadral

Vimos que podemos usar POLY para desenhar uma circunferência. Poderemos usá-lo agora para desenhar o nosso sinal de paz ? Podíamos, mas será melhor construir um procedimento, chamado ARC, cujo efeito será desenhar qualquer segmento circular dado o diâmetro e o ângulo, tal como o que está desenhado na Figura 6. Apresenta-se abaixo o procedimento no qual é usada, na segunda linha, uma constante especial chamada "PIE" e onde o sinal \* é usado para representar a multiplicação. (Não suponha que :PIE é o que o seu nome sugere)

```
TO ARC :DIAM :SECTOR
IF :SECTOR=0 STOP
FORWARD :PIE*:DIAM
RIGHT 1
ARC :DIAM :SECTOR-1
END
```

Podemos agora construir um procedimento usando o velho procedimento PEACE como um sub-procedimento:

```
TO SUPERPEACE
ARC 200 360
RIGHT 90
PEACE
END
```



Fig. 6. Um sinal de paz melhorado usando o velho PEACE como sub-procedimento.

Podemos ainda melhorar PEACE reescrevendo-o agora com variáveis. Por exemplo:

```
TO PEACE :SIZE
FORWARD :SIZE
RIGHT 60
FORWARD :SIZE
BACK :SIZE
LEFT 120
FORWARD :SIZE
RIGHT 90
ARC 2 :SIZE 360
END
```

Assim sinais de paz, de diferentes tamanhos, podem ser construídos usando os comandos:

```
PEACE 100
PEACE 20
```

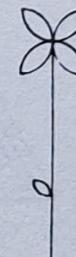
Podemos usar o comando ARC para desenhar um coração:



```
TO HEART :SIZE
ARC :SIZE/2 180
RIGHT 180
ARC :SIZE/2 180
ARC :SIZE 2 60
RIGHT 60
ARC :SIZE 2 60
END
```

**Miniteorema:** Um coração pode ser feito com quatro arcos circulares.

Poderemos também usá-lo para desenhar uma flor. Repare, no que se segue, na forma de definir novos procedimentos usando os antigos .



Um programa de computador para desenhar esta flor baseia-se na observação geométrica de que as pétalas podem ser decompostas (um pouco surpreendentemente!) em dois quartos de circunferência. Assim vamos supor que temos um procedimento chamado QCIRCLE cujo efeito é ilustrado pelos exemplos. Alguns deles mostram as posições inicial e final da tartaruga e outros não.

```
QCIRCLE 50
```



```
QCIRCLE 100
```



Agora vamos ver como construir uma pétala

```
TO PETAL :SIZE
QCIRCLE :SIZE
RIGHT 90
QCIRCLE :SIZE
END
```

PETAL 100

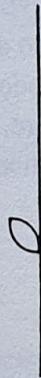


```
TO FLOWER :SIZE
PETAL :SIZE
PETAL :SIZE
PETAL :SIZE
PETAL :SIZE
END
```

FLOWER 100

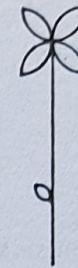


STEM100



```
TO STEM :SIZE
RIGHT 180
FORWARD 2 :SIZE
RIGHT 90
PETAL :SIZE/2
FORWARD :SIZE
END
```

```
TO PLANT :SIZE
PENDOWN
FLOWER :SIZE
STEM :SIZE
PENUP
END
```

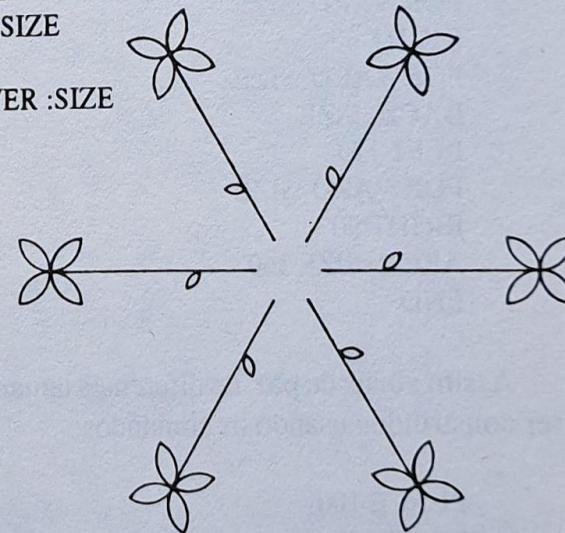


PLANT50

Vamos brincar um pouco:

HEXAFLOWER 50

```
TO HEXAFLOWER :SIZE
RIGHT 90
FORWARD 4 :SIZE
PLANT :SIZE
FORWARD :SIZE
RIGHT 30
HEXAFLOWER :SIZE
END
```



## Criatividade? Matemática?

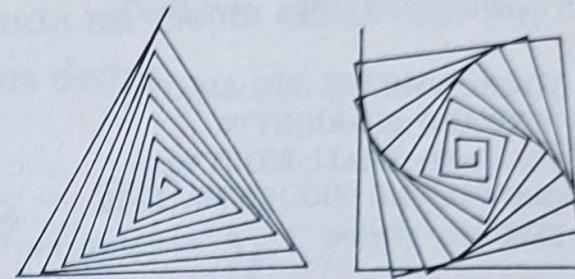
Em aulas dadas pelos membros do Artificial Intelligence Laboratory do MIT, ensinamos este tipo de geometria a alunos do 5º ano de escolaridade, alguns dos quais apresentavam grandes dificuldades em

“Matemática”. A sua atitude em relação à Matemática num ensino normal foi bem expressa por uma rapariga do 5º ano que afirmou, “Não há nada de divertido em Matemática!” Ela não classificava o trabalho com o

computador como Matemática, e nós não vimos nenhuma razão para desenganá-la. Haverá tempo para ela descobrir que o que está a aprender a fazer dum forma excitante e pessoal explicará os rituais estranhos que ela encontra na aula de Matemática.

Actividades típicas nas primeiras etapas do trabalho com crianças desta idade é explorar o comportamento do procedimento POLY dando-lhe diferentes inputs. Há um desafio inevitável - e competição - quando se produzem efeitos belos ou espectaculares, ou simplesmente diferentes. Avança-se no jogo quando se descobre um novo fenómeno, ou quando se adivinha que ângulos o produzem .

O entusiasmo real surge quando alguém é suficientemente corajoso para mudar o próprio procedimento. Por exemplo alterar o procedimento para POLYSPI ocorre a algumas crianças e, na nossa turma, conduziu a um grande entusiasmo à volta da descoberta verdadeiramente espontânea da figura agora chamada uma “esquadral” (Figura 5). (Nota: por espontâneo o autor entende, entre outras coisas, excluir a situação de descoberta em que o professor perante a turma solicita sugestões produzidas dum forma pseudo-aleatória. A espiral quadrada foi encontrada por uma criança sentada sozinha junto do seu computador!). Mas não significa que todas as crianças darão esse passo — de facto depois de algumas o terem dado torna-se um conhecimento em segunda mão para as outras. Contudo, podíamos encorajá-las a explorar os inputs de POLYSPI. Há espaço aqui para a descoberta de mais fenómenos. Por exemplo considerando :ANGLE como 120 obtém-se uma espiral triangular nítida. Mas com 123 obtém-se um fenómeno muito diferente (como mostra a Figura 7).

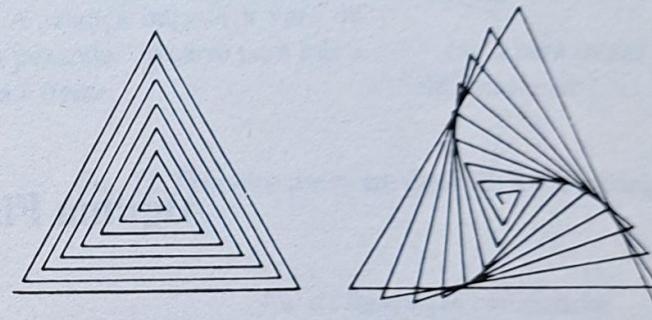


POLYSPI 5 121

POLYSPI 5 93

Fig. 7. Explorando alguns efeitos de espirais

Como se podem produzir efeitos semelhantes? (Ver Figura 8)



POLYSPI 5 120

POLYSPI 5 123

Fig. 8. Compreender melhor a figura 7 explorando os dois efeitos narrados.

Há grandes possibilidades de surgirem pequenas descobertas originais. Uma rapariga ficou pela primeira vez entusiasmada com a Matemática quando verificou como era fácil construir um programa para a Figura 9. Isto devido a:

1. Observar-se a desenhar uma figura semelhante.
2. Chamar aos elementos da sua figura — “BIG” e “SMALL” — e assim poder falar sobre eles e descrever o que estava a fazer.

3. Ir descrevendo a figura em LOGO.

```
TO GROWSHRINK :BIG :SMALL
FORWARD :BIG RIGHT 90
FORWARD :SMALL RIGHT 90
GROWSHRINK :BIG-10 :SMALL+10
END
```

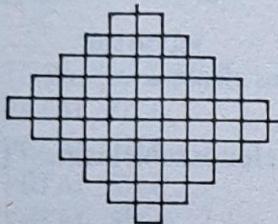


Fig.9. Outra generalização do POLY. Esta figura mostra a intenção da criança que escreveu o procedimento GROWSHRINK.

As possibilidades são intermináveis. Estas são pequenas descobertas. Mas provavelmente há pessoas que fazendo isto já estão mais ligadas à Matemática do que ao aprender novas manipulações formais, mudanças de base, intersecção de conjuntos e andando à deriva em lições nebulosas sobre diferença entre duas fracções, números racionais e classes de equivalência de pares de inteiros. Aprender a fazer pequenas descobertas talvez coloque os alunos no caminho doutras mais significativas, mais do que ao aprender rigorosamente um determinado número de conceitos algébricos profundos.

## Alguma Física Matemática

A linguagem da tartaruga é apropriada para muitos problemas físicos importantes. Considere, por exemplo, o problema de compreender órbitas planetárias como se fosse um estudante do ensino secundário. Encontraria barreiras conceptuais de vários graus de dificuldade. Certamente que a ideia da lei dos inversos dos quadrados é simples. É contudo um pouco mais difícil a representação vectorial de velocidades, acelerações e forças. O papel das equações diferenciais nesta matéria também se torna uma dificuldade insuperável na leitura de um texto

sobre o assunto. Estes conceitos físicos, realmente elegantes e perceptíveis levam à descrição diferencial de uma dada órbita; a generalização destas equações envolve a “resolução” de equações diferenciais.

A geometria da tartaruga ajuda-nos nestes pontos. O uso de vectores é extremamente natural. Também a descrição de uma dada órbita se transforma num procedimento que pode ser executado de forma a desenhar uma solução ou a investigar, usando teoremas e conceitos analíticos sobre procedimentos.

## Teoria de controlo como tema de estudo na escola elementar ou Física na ponta dos dedos

Começamos por convidar o leitor a fazer as experiências ilustradas na Figura 10 — ou a recordar algo semelhante que tenha feito anteriormente.

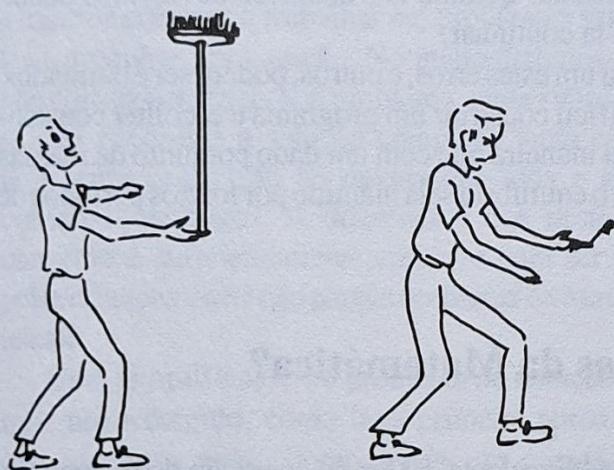


Fig. 10. Explicar este fenómeno conduz-nos à Física, Matemática, Biologia e à metodologia de construção de modelos formais.

Um dos objectivos desta unidade de estudo será compreender o modo como as pessoas fazem isto e particularmente compreender quais as faculdades humanas que determinam quais os objectos que ele pode ou não equilibrar.

Um modelo “físico formal” da situação de equilíbrio de uma vara é fornecido pelo material ilustrado na Figura 11.

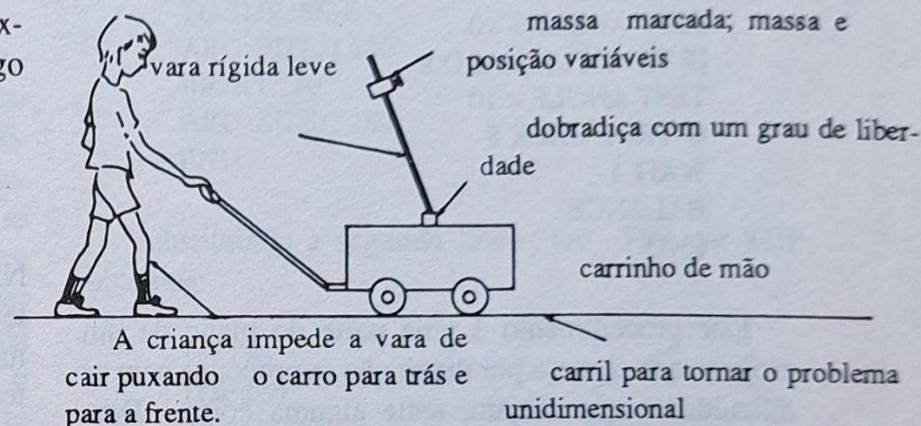


Fig. 11. Primeiro passo em direcção a um modelo.

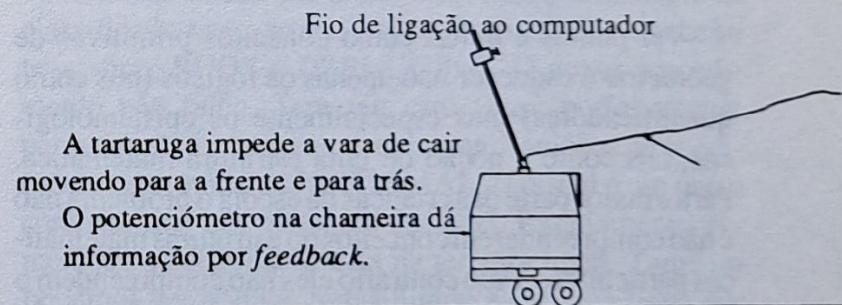


Fig. 12. Um modelo mais formal. O fio dá a informação do ângulo. A criança escreve o programa para equilibrar o pêndulo invertido.

Uma versão controlada por computador substitui o carril e a criança por uma tartaruga com um medidor de

ângulos ligado ao sensor correspondente (ver Figura 12). Um procedimento nada complicado permitirá uma boa dose de equilíbrio (desde que a tartaruga seja rápida!):

```
TO BALANCE
TEST ANGLE > 10
IF TRUE FORWARD 8
TEST ANGLE < 10
IF TRUE BACK 8
WAIT 1
BALANCE
END
```

Este procedimento é uma parte do plano de um projecto que começa por dizer: não se preocupe com as dificuldades que surjam, tente alguma coisa. Difi-

culdades detectadas incluem:

1. O erro do fim de linha (*line bug*).
2. O erro de estimativa (*overshoot bug*). (Talvez na terceira e quinta linhas o valor 8 seja demasiado grande ou demasiado pequeno).
3. O erro acidental (*wobbly bug*). O TEST no procedimento podia mandar a vara para a esquerda enquanto ela está em movimento rápido para a direita. Quando isto acontece deveremos deixá-la continuar.

Um a um estes erros, e outros, podem ser eliminados. Não é difícil construir um programa e escolher constantes de tal maneira que com um dado conjunto de massas móveis, o equilíbrio seja mantido por longos períodos de tempo.

## Quais são os Conceitos Primitivos da Matemática?

Ver pontos e linhas como conceitos primitivos de geometria é esquecer não apenas os lógicos (tais como quantificadores) mas especialmente os epistemológicos, tais como a noção de uma estrutura matemática. Para a maior parte das crianças da escola o problema não é não compreenderem conceitos ou estruturas matemáticas particulares. Pelo contrário eles não compreendem o que é uma estrutura matemática: eles não vêem onde se quer chegar no global. Pedir-lhes para aprender isso é como pedir-lhes para aprender poesia numa linguagem estrangeira completamente desconhecida.

Diz-se por vezes que no ensino da Matemática deveríamos dar ênfase ao processo de matematização. O

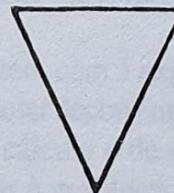
autor diz “Excelente”! Mas na condição da criança ter, ela própria, experiências de matematização. De outro modo a palavra “matematização” é apenas mais um termo escolástico. A força das explorações que têm sido descritas é permitir às crianças ter experiências vividas de matematização como introdução à Matemática. Vimos como elas matematizam um coração, uma esquadral, o seu próprio comportamento ao desenhar um GROW-SHRINK, o processo de equilibrar uma vara, etc. Quando matematizar processos familiares se torna uma actividade fluente, natural e agradável, então é altura de falar em matematizar estruturas matemáticas, como num bom curso de Álgebra Moderna.

Mas quais são os ingredientes do processo de matemática? É possível formular e ensinar como se “ataca”, por exemplo, o problema de estabelecer uma representação Matemática de objectos tais como os corações e as flores que discutimos anteriormente?

A nossa resposta é definitivamente afirmativa, especialmente no contexto do tipo de trabalho acima descrito. Considere, por exemplo, o modo como ensinaríamos crianças a trabalhar em problemas semelhantes a desenhar um coração. No início dizemos-lhes: se não consegues resolver o problema, tenta simplificá-lo; se não encontras a solução completa, tenta encontrar uma parte dela. Não há dúvida que toda a gente dá conselhos análogos. A diferença é que neste caso o conselho é suficientemente concreto para ser seguido pelas crianças o que não parece acontecer na Matemática usual.

Uma simplificação do problema do coração é construir um triângulo, como uma primeira aproximação; que tomamos então como sendo um coração muito primitivo.

```
TO TRI
FORWARD 100
RIGHT 120
FORWARD 100
RIGHT 120
FORWARD 100
END
```

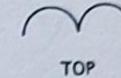


TRI

Agora que temos esta construção firmemente nas nossas mãos podemos modificá-la de forma a construir um coração melhor. O plano óbvio é substituir a linha

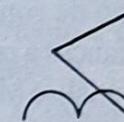
horizontal por uma linha diferente. Escrevemos então um procedimento para fazê-lo. Em primeiro lugar deve escolher-se um nome, seja TOP e em seguida escrever:

```
TO TOP :SIZE
ARC :SIZE/2 180
RIGHT 180
ARC :SIZE/2 180
END
```



substituindo a segunda linha em TRI por TOP obtemos:

```
TO TRI
TOP 100
RIGHT 120
etc.
```



CORAÇÃO COM ERRO

O efeito é este! Há uma falha? Nós podíamos tê-lo classificado assim se não tivéssemos um outro conceito heurístico: BUGS e DEBUGGING. O nosso procedimento não falha. Tem um erro (*bug*) perfeitamente perceptível. Para achar o erro analisamos o procedimento dum modo muito FORMAL. (Formal é um outro conceito que nós tentámos ensinar). Rapidamente vemos que a perturbação está na terceira linha. Também podemos ver porquê. Substituindo a segunda linha por TOP aconteceu o que queríamos, mas produziu também um EFEITO-LATERAL (um outro conceito importante). Deixou a tartaruga virada numa direcção diferente. Corrigir consiste simplesmente em mudar a terceira linha para RIGHT 30. E então podemos concluir a construção do coração inteiramente com linhas curvas.

A não ser que decidamos que um coração de lados lineares nos satisfaz (ver Figura 13).

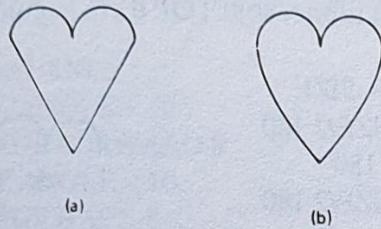


Fig. 13. (a) coração de lados lineares;  
(b) coração com linhas curvas.

A nossa concepção do ensino da Matemática baseia-se no ensino de conceitos e terminologias para possibilitar às crianças a compreensão do processo de desenvolver uma análise Matemática. Uma forma de fazer isto é estudar bons modelos (tal como o exemplo do coração) e ter muita prática em descrever as suas próprias tentativas, seguindo modelos aplicados noutros problemas. Parece quase paradoxal que ao desenvolver currículos de Matemática, conferências inteiras de excelentes matemáticos sejam dedicadas à discussão da linguagem apropriada para expressar a parte formal da Matemática, enquanto se deixa o professor individual ou o autor de livros de texto decidir como (e mesmo se) lidar com conceitos heurísticos.

Em resumo, adiantamos três teses centrais:

1. Os conceitos primitivos não formais da Matemática são desprezados na maior parte das discussões dos currículos da Matemática.

2. Que a escolha do conteúdo, especialmente para os primeiros anos, deveria ser feita essencialmente em função da sua conveniência para desenvolver conceitos

heurísticos.

3. A Matemática susceptível de ser tratada por computador, no sentido ilustrado pela Geometria da tartaruga, tem grandes vantagens em relação aos tópicos “clássicos”.

# Tecnologia e educação matemática

## Uma revisão de desenvolvimentos recentes e problemas importantes

James T. Fey

Uma das mais importantes tarefas em Educação Matemática hoje é a revisão dos currículos e dos métodos de ensino de modo a tirar proveito das novas tecnologias de informação. O *hardware* poderoso e barato e o *software* que foram desenvolvidos só nesta década desafiam todas as convicções tradicionais acerca do que devemos ensinar, como devemos ensinar e do que os alunos podem aprender. Este texto, preparado para uma conferência no ICME VI em Budapeste, dá uma visão global e faz uma análise do progresso recente na realização dessa espantosa promessa destes novos ambientes para o trabalho intelectual.

Não há falta de textos que especulem com a expectativa de revolução na Matemática escolar decorrente da aplicação de vários instrumentos de cálculo e de estimação ao ensino, à aprendizagem e à resolução de problemas. Desde o ICME V em Adelaide tem havido uma profusão de relatórios a conferências e de tomadas de posição sublinhando as inovações potenciais baseadas na tecnologia (por exemplo, *School Mathematics, New Ideas with Computers*, 1987). Um estimulante conjunto de projectos experimentais tem começado a mostrar as

perspectivas que se abrem às aulas de Matemática que utilizam calculadoras, computadores e videodiscos para modificação dos objectivos do currículo e dos velhos modelos de interacção professor/aluno.

Os próprios relatos do ICME V (Mohyla, 1985) incluem sugestões que viriam a ser retomadas em quase todas as propostas e projectos apresentados desde 1984. Contudo é muito difícil determinar o impacto real dessas ideias e projectos de desenvolvimento no dia a dia das aulas de Matemática, e há muito poucos testemunhos seguros de investigação que possam validar o optimismo quase ilimitado dos amantes da tecnologia no nosso campo. Ao preparar este texto, examinei uma grande quantidade de trabalhos publicados nesta área, consultei individualidades reconhecidas de todo o mundo, e examinei cuidadosamente as propostas e textos de oradores nas sessões deste tema no Congresso de Budapeste. É claro que em cada país e região há muitos educadores matemáticos a explorar activamente as perspectivas abertas pela tecnologia. Todavia, também é claro que uma descrição compreensiva e actualizada de um campo tão vasto e fluido é realmente impossível. Muito do

trabalho mais interessante está em curso, ainda não publicado em artigos de revistas ou livros, e os ambientes *hardware/software* disponíveis estão constantemente a ser melhorados. Em face destas condições optei por não almejar uma verdadeira perspectiva internacional, mas discutir as áreas principais de problemas/oportunidades e ilustrar alguns dos mais informativos ou estimulantes trabalhos em cada uma.

Há várias formas para estabelecer ordem no conjunto das ideias motivadas hoje pela tecnologia para a Educação Matemática. Uma é olhar para as principais tarefas envolvidas na Matemática escolar — selecção de objectivos, de conteúdos e de processos, organização de contextos de ensino/aprendizagem e avaliação dos resultados — e descrever o impacto da tecnologia em cada um. Há muitas sugestões e projectos de desenvolvimento activo a trabalhar em cada uma destas dimensões do problema.

**1. Objectivos de Conteúdos/Processos** — As sugestões mais salientes sugeridas pela tecnologia para mudar os objectivos nos conteúdos/processos centram-se na diminuição de atenção a dar aos aspectos do trabalho em Matemática que são rapidamente feitos pelas máquinas e no aumento da ênfase dada ao pensamento conceptual e ao planeamento requerido em qualquer ambiente (Bjork & Brolin [4]; Brolin e Greger, 1987; Corbitt, 1985; Cornu [8]; Fey, 1984).

Um outro grupo de recomendações para os conteúdos/processos incide em formas de ampliar e estender o currículo actual às ideias matemáticas e a aplicações de complexidade maior do que as acessíveis à maioria dos alunos pelos métodos tradicionais (Fey, em impressão; Roberts & Barclay, em impressão; Tinker [22]).

**2. Estilos de Ensino/Aprendizagem** — Muitos educadores matemáticos têm considerado que os novos instrumentos para processar informação operam uma mudança notável nos modelos de ensino/aprendizagem tradicionais nas aulas de Matemática. O professor, nesta perspectiva, muda o seu papel de expositor e fiscalizador de exercícios para o de organizador de tarefas, conselheiro, recurso de informação, gestor, explicador e colega mais velho, enquanto que os alunos se envolvem em actividades exploratórias de aprendizagem consideravelmente mais auto-dirigidas (Fraser, 1986; Fraser, et al. [13]; Klep [16]; Schoenfeld, 1988).

O fornecimento de certos tipos de micromundos tem sido a estratégia mais vulgarmente usada para criar estas novas formas de interacção no ensino/aprendizagem. Num tal micromundo, os objectos, relações, e operações matemáticas ou do mundo real são representados electronicamente em formas que permitem a manipulação exploratória controlada e a observação de propriedades pelos alunos de forma a abstrair os princípios matemáticos subjacentes.

Infelizmente, se há uma certa lógica ingénua para organizar as ideias pelo foco no conteúdo ou na pedagogia, muito poucas propostas ou projectos podem ser facilmente categorizados desta maneira. Quase todos os programas de desenvolvimento têm uma agenda de objectivos que implicam mudanças quer no conteúdo quer na pedagogia da Matemática na Escola e na Universidade. Incidindo a atenção nas perspectivas de desenvolvimento tecnológico e nas implicações dessas perspectivas para a Matemática escolar, resolvi abordar esta tarefa procurando perceber as diferentes coisas que as calculadoras e os computadores podem fazer e analisar

as implicações de cada uma quer no conteúdo quer na pedagogia em Matemática. Assim o texto divide-se em seis secções principais, considerando o impacto de:

1. Cálculo Numérico
2. Cálculo Gráfico
3. Cálculo Simbólico
4. Representações Múltiplas da Informação
5. Programação e Ligações entre a Ciência da

## Computação e os Currículos de Matemática

### 6. Inteligência Artificial e Máquinas Tutoras

Cada secção descreve alguns estudos típicos ou particularmente interessantes. Mas é importante ter presente que esses exemplos são na melhor das hipóteses apenas uma pequena amostra do que está acontecendo hoje neste excitante domínio.

## Cálculo Numérico e Educação Matemática

O desenvolvimento dos computadores digitais modernos foi estimulado por complicados problemas que apenas podiam ser resolvidos eficazmente por métodos que envolviam extensos cálculos numérico/lógicos. Estes métodos numéricos influenciaram primeiro a Educação Matemática produzindo alargamentos ou abordagens alternativas em cursos universitários como Análise Numérica ou Álgebra Linear. Mas o desenvolvimento dos microcomputadores e das calculadoras conduziu a uma variedade de instrumentos pessoais de cálculo numérico que estão agora correntemente disponíveis a um baixo preço. Esta disponibilidade de calculadoras científicas de bolso forçou à reconsideração dos objectivos curriculares para cada um dos tópicos que engloba o Cálculo Numérico.

### Calculadoras e Aritmética

A influência das calculadoras nos objectivos e no ensino da aritmética tem vindo a ser debatida desde há cerca de duas décadas. Segundo os proponentes da

utilização das calculadoras, estas permitem mudar a ênfase do currículo dos procedimentos de cálculo para a resolução de problemas e para o cálculo mental que é necessário para a estimação e a verificação dos resultados da calculadora. Contudo, os cépticos têm insistido em que as pessoas ficarão perigosamente dependentes da tecnologia e que perderão capacidades e conhecimentos que têm um papel importante na Matemática mais avançada. Enquanto questão de política do currículo escolar prático, este debate está longe de estar ultrapassado. Na maioria das escolas primárias pelo mundo fora o uso de calculadoras no ensino e nos testes não é por norma permitido. Contudo, um conjunto crescente de pesquisas sugere que, quando usadas com sensatez, as calculadoras podem alargar a compreensão conceptual do aluno, a capacidade de resolução de problemas, e melhorar as atitudes face à Matemática, sem prejuízo aparente para a aquisição das capacidades tradicionais. Estas são as conclusões obtidas na meta-análise de 79 estudos feita por Hembree e Dessart (1986), numa série de estudos relatados por Brolin (1987) e num estudo de

3 anos de vários milhares de alunos relatado por Wynands (1984). De facto, para muitos investigadores a questão de se dever permitir o uso das calculadoras parece estar resolvida pela afirmativa e o interesse nesses largos estudos sobre o uso das calculadoras tem diminuído. Entre os estudos em curso os mais típicos são os que procuram descobrir novas formas de usar as calculadoras no ensino, que sejam eficazes. Por exemplo, Meissner (1987) investigou os efeitos do uso das calculadoras no desenvolvimento espontâneo de estratégias de resolução de problemas pelos alunos.

Os muitos estudos sobre os efeitos do uso das calculadoras garantem-nos que a sua mera presença na Matemática escolar não conduzirá inevitavelmente a consequências graves. Embora na quase totalidade destes estudos a calculadora tenha sido usada para complementar o ensino das capacidades aritméticas tradicionais — incluindo a memorização de factos aritméticos básicos e a realização dos algoritmos de cálculo tradicionais com papel e lápis. Permanece como problema em aberto, e muito importante, o de determinar as consequências de experiências mais audaciosas, em que os alunos sejam ensinados a confiar mais profundamente na ajuda da calculadora para o cálculo aritmético ou mesmo para os factos básicos da adição, subtração, multiplicação e divisão. Alguns projectos mais ambiciosos começaram o desenvolvimento de currículos para o Ensino Primário cujos objectivos são adequados a alunos que viverão num mundo onde as calculadoras estarão quase sempre disponíveis a preços baixos. Mas é ainda muito cedo para dizer se esses projectos reduzirão o peso dos objectivos tradicionais de destreza no cálculo ou quais poderão ser os seus efeitos.

## Abordagens numéricas à Álgebra e à Análise

O apoio numérico fornecido pelas calculadoras oferece uma alternativa clara e atractiva para as actividades tradicionais feitas com papel e lápis, onde quer que seja que o cálculo aritmético seja requerido — na Aritmética elementar, na Álgebra, na Geometria, na Trigonometria, na Estatística ou no Cálculo. O que é menos visível é o papel que o domínio do cálculo numérico pode jogar no desenvolvimento da compreensão conceptual daqueles tópicos avançados. O poder das abordagens numéricas para o ensino das matemáticas avançadas constitui o tema de uma série de projectos de desenvolvimento orientados por Leitzel, Osborne, Demana, Damarin e Waits. Têm prestado atenção ao uso duma diversidade de instrumentos de cálculo numérico para ajudar os alunos a fazer a transição do raciocínio aritmético para o algébrico. Para adquirirem uma compreensão intuitiva e sólida de variável e função, os alunos trabalham com calculadoras e com um simples programa de folha de cálculo no computador onde observam relações entre variáveis. A estratégia básica é valorizar a procura de modelos em tabelas de valores, para variáveis numéricas relacionadas, como um primeiro passo para a expressão algébrica formal dessas relações. Os resultados da investigação sugerem que esta **transição** para as abstrações da álgebra enriquecida por elementos computacionais é nitidamente mais eficaz do que as abordagens tradicionais (Demana e Leitzel, 1988). Abordagens semelhantes, numericamente intensivas, ao cálculo infinitesimal, estão também a provar ser eficazes.

## Complexidade quantitativa

A aplicação dos instrumentos de cálculo a conceitos de Matemática mais avançados mostra claramente a sua vantagem em qualquer situação que envolva muitas variáveis interrelacionadas ou grandes conjuntos de dados. Por exemplo, uma variedade de abordagens tem sido desenvolvida para a aplicação do cálculo ao trabalho em **Álgebra Linear** (Orzech, 1988). Com a disponibilidade dos instrumentos para realizar as operações básicas das matrizes, é bem possível mudar a incidência do ensino do treino na execução dos vários algoritmos para o planeamento e interpretação dessas operações. A linguagem APL mereceu uma atenção especial nesta área, mas há agora vários utilitários de mais alto nível, como o Matlab ou o MuMath, disponíveis para micro-computadores. Algumas pessoas têm ainda explorado o uso das folhas de cálculo para organizar e executar métodos como a eliminação Gaussiana. As operações em linhas e colunas numa folha de cálculo correspondem facilmente aos procedimentos necessários nas matrizes. Mas o valor do uso desses instrumentos para matrizes quer usados como “caixa negra”, quer como “utilizador guiado”, é defendido sobretudo com base em exemplos específicos, pelo que parece claro que o problema de encontrar um equilíbrio adequado entre as capacidades que devem ser adquiridas por cada estudante e as capacidades para as quais eles podem confiar na máquina constitui uma questão crucial, paralela às questões acerca das calculadoras e da aritmética.

A segunda grande área na qual o uso de computador promete ajudar a lidar com situações de cálculo complexas é a **Análise de Dados** e a **Estatística**. O acesso

aos computadores permite aos alunos trabalharem com dados numéricos interessantes e reais. Os educadores ligados à Estatística têm estado muito activos na exploração desta oportunidade. Existem redes de computadores que dão acesso a conjuntos de dados interessantes para a educação, há disponíveis muitos programas de computador úteis para procedimentos de análise básica de dados, e projectos de desenvolvimento curricular estão a mostrar como combinar estes recursos para processamento da informação em todos os níveis do ensino (Friel & Russel [14]; Scheaffer, 1987; Swets, Rubin, & Feurzeig, 1987.). Talvez porque a Análise de Dados e a Estatística não constituam tópicos dos currículos tradicionais, o debate sobre os potenciais riscos do uso do computador não parece ter sido tão vivo como noutros tópicos. Os pedidos e a promessa de expansão nesta área geral parece imenso.

## Métodos numéricos discretos

Segundo um ponto de vista, o uso de métodos numéricos em áreas tradicionais da Matemática, como o Cálculo Infinitesimal, pode ser entendido como um processo de fazer estimativas a caminho de ou em lugar dos resultados exactos. Contudo, existe agora um interesse crescente na reformulação de problemas tratados tradicionalmente por variáveis contínuas e cálculo na linguagem dos processos discretos — principalmente nas equações às diferenças finitas. Essas abordagens dão esperança de aclarar ou evitar os conceitos difíceis relacionados com limites na Matemática contínua. Conduzem naturalmente aos métodos de solução por computador que são usados tantas vezes em trabalho prático e reforçam conceitos

importantes da Informática como o de recursão. Se parece improvável que as abordagens tradicionais da análise sejam rejeitadas em breve em favor dos métodos das diferenças finitas baseadas no computador, há um forte interesse na exploração de alternativas e há, segundo parece, interessantes projectos de desenvolvimento para os anos que se seguem (Sandefur & Vogt, 1988; Winkelmann, 1984).

## Sumário

Nos métodos numéricos o computador e a calculadora funcionam como instrumentos normais do trabalho matemático em todos os níveis. Contudo, quando se chega às decisões acerca do seu papel no currículo e no ensino ao nível da escola, aí há bastante controvérsia acerca do seu potencial impacto. Apesar duma diversidade de investigações e de projectos de desenvolvimento que mostram que o acesso aos instrumentos de cálculo numérico alarga a aprendizagem e aumenta a capacidade de resolução de problemas da maioria dos

alunos, sem efeitos nocivos evidentes, a tradição determina que o uso desses instrumentos só é permitido depois de os alunos adquirirem alguma capacidade própria nos procedimentos que foram automatizados nas máquinas.

Instrumentos numéricos de computador como as folhas de cálculo, os operadores de vectores e matrizes e os programas para a análise estatística de dados fornecem oportunidades atractivas para enriquecer o ensino dos conceitos e alargar o âmbito da resolução de problemas nos tópicos de Matemática do ensino secundário e da Universidade. Mas, à excepção da estatística, estes instrumentos parecem ter tido pouco impacto significativo nos currículos normais. De facto, o uso dos computadores para investigações numéricas de conceitos matemáticos parece ter sido recentemente ofuscado pela atracção por dinâmicos e coloridos ecrãs gráficos representando as mesmas ideias. Contudo, há cada vez mais investigação que mostra que descurar as investigações numéricas priva os alunos de uma perspectiva importante em muitas ideias matemáticas.

## Cálculo gráfico e Educação Matemática

As primeiras utilizações do computador baseavam-se no seu papel como auxiliar em cálculo numérico, mas o aspecto mais interessante do desenvolvimento na década passada foi a utilização do computador para criar e manipular imagens gráficas. Quando os microcomputadores tornaram possível o desenho de formas geométricas em duas ou três dimensões, traçar o gráfico de

funções definidas por expressões algébricas, e mostrar diagramas através da utilização de ícones, um novo conjunto de utilizadores foi atraído pela máquina. Os alunos ficaram fascinados pelas imagens gráficas e dinâmicas dos jogos de vídeo, e os professores viram as potencialidades da representação visual de ideias matemáticas abstractas. Essa promessa está agora a ser

trabalhada em diversos apaixonantes projectos de desenvolvimento, mas estamos também a descobrir limites importantes ao entusiasmo inicial.

### Instrumentos de desenho para a Geometria

Na altura do ICME V em Adelaide, houve um grande entusiasmo por gráficos de computador em Geometria, a maioria centrados na aplicação do modo gráfico da tartaruga em Logo. A Geometria da Tartaruga continua a ser um veículo atraente para o desenvolvimento informal de projectos na sala de aula com a intenção de alargar as capacidades de raciocínio geral dos alunos. Contudo, há também uma tendência emergente da investigação em Logo para os estudos se centrarem mais na aplicação das características do Logo no ensino de conceitos matemáticos específicos, princípios e capacidades de raciocínio.

Em estudos típicos desta nova tendência: (1) Campbell (1987) concluiu que mesmo em crianças muito jovens as explorações em Logo conduziram a significantes resultados no crescimento das suas capacidades para estimar comprimentos; (2) Noss (1987) concluiu que as experiências em Logo tinham efeitos significativos no desenvolvimento da compreensão intuitiva dos alunos acerca dos ângulos; e (3) Clements (1987) encontrou um certo número de efeitos positivos das experiências de programação em Logo. Nas sessões do ICME VI várias apresentações curtas mostraram outras formas como a geometria da tartaruga do Logo pode ser usada com bons efeitos para ajudar os alunos a descobrirem princípios importantes da geometria plana.

Extensões da Geometria da Tartaruga para três

dimensões foram desenvolvidas por vários investigadores, com a esperança de que essas explorações dinâmicas teriam bons efeitos na capacidade dos alunos para interpretar e construir representações planas de objectos e movimentos no espaço. Por exemplo, Cesar [7] está a utilizar uma tartaruga espacial chamada *SEA-TURTLE* para ajudar os alunos a desenvolver a sua percepção e o desenho de figuras tridimensionais. Os comandos da *SEA-TURTLE* permitem aos alunos desenhar peças de uma figura sólida no plano e de seguida juntá-los no espaço usando comandos como *PITCH*, *BEND*, *ROLL-RIGHT*, e *ROLLLEFT*. Este instrumento de geometria está a ser usado em experiências de ensino que são avaliadas com medidas de intuição espacial.

A característica da Geometria da tartaruga do LOGO tem sido recomendada para utilização numa diversidade de níveis de ensino. Tem sido usada principalmente na escola primária e nos primeiros anos da escola secundária como um micromundo. A Geometria da tartaruga parece ainda ter ganho grande aceitação como uma parte normal do currículo de Matemática das escolas elementares e secundárias. O ponto de vista dinâmico da geometria diferencial, que é o âmago da programação da tartaruga, tem muito pouco peso na definição de abordagens para a geometria escolar. De facto, os micromundos da geometria que têm obtido mais atenção no ensino secundário são essencialmente representações das construções geométricas e das medidas que os alunos têm feito com papel e lápis ao longo dos séculos.

Um dos mais conhecidos destes novos micromundos geométricos é a série Geometric Supposer (Yerushalmy e Houde, 1986; Schwartz, 1987). Os programas Supposer ajudam os alunos a estabelecer e a testar conjectu-

ras acerca das propriedades das figuras geométricas básicas simulando os diferentes desenhos e medições que um matemático faria ao longo de uma pesquisa de modelos. Por exemplo, numa sessão típica o aluno pode pedir ao computador que desenhe um triângulo, unir os pontos médios de dois lados, medir os lados do triângulo original e os segmentos de recta nos quais a linha que une os pontos médios divide dois desses lados, construir várias razões das medidas dos lados, e depois medir os vários ângulos na figura.

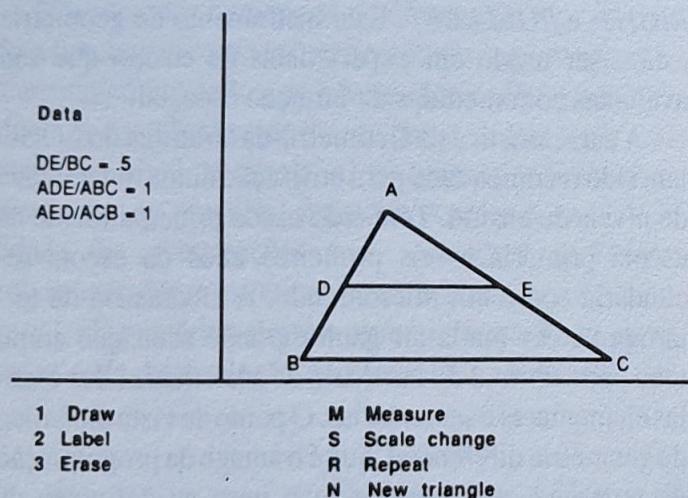


Fig. 1. Um ecrã típico do Geometric Supposer

Para testar a generalidade de quaisquer padrões, o utilizador pode pedir ao computador que repita a sequência de procedimentos em vários outros triângulos. Este instrumento e o ambiente que estabelece têm dois objectivos principais: restabelecer o acto de conjecturar e descobrir num curso de Geometria que se tornou numa

pobre rotina de provar coisas bem conhecidas desde há séculos, e facilitar o raciocínio indutivo ao fazer testes múltiplos de conjecturas fáceis de executar. Os relatos dos utilizadores do Supposer são entusiásticos acerca dos seus efeitos na actividade da sala de aula e nas convicções dos alunos acerca da natureza da matemática. Yerushalmy e Houde (1986, pp. 421-422) concluíram que:

A pedagogia que utilizámos assemelha-se extraordinariamente à do ensino das ciências, onde a incidência principal é no processo científico de recolher dados, conjecturar e encontrar contra-exemplos ou generalizações. Os alunos ocuparam a maior parte do tempo das aulas a discutir e a fazer geometria em vez de escutarem um professor a falar dela.

Pode-se sugerir que as operações descritas nas sessões com o programa Supposer não são na verdade mais do que o que um estudante cuidadoso podia fazer com papel e lápis e instrumentos de desenho. Mas a diferença fundamental está na rapidez e no conseqüente ganho no tempo do aluno. Com esta espécie de assistência do computador, o aluno gasta quase todos os minutos duma sessão planeando ou reflectindo nos resultados de alguma construção. Sem nenhuma ajuda no desenho e na medição quase todo o tempo seria gasto só com aquelas tarefas.

A família de programas Supposer foi escrita para os computadores Apple II, que, embora fossem poderosos na sua época, têm limitações gráficas que obrigam o instrumento a ficar bem aquém daquilo que os professores de Geometria poderiam facilmente antever e desejar. Em França, o projecto Cabri produziu um programa de exploração geométrica semelhante, mas apa-

rentemente mais flexível para usar nos computadores Macintosh. O Cabri-Geomètre permite a construção, transformação e manipulação exploratória da maioria das figuras encontradas na Geometria do ensino secundário. A ideia central do programa Cabri é a de que o utilizador deve, em qualquer altura, ser capaz de modificar as características de qualquer elemento duma figura e de ver a nova figura desenhada imediatamente. Tal como com o Supposer, isto encoraja o exame de muitas variantes dum tema particular com o objectivo de descobrir as propriedades invariantes de todas elas (Bellemain [3]).

CREATIONS

**CONSTRUCTIONS**

segment def. par 2 points  
 triangle def. par 3 points  
 droite def. par 2 points  
 cercle def. par 2 points  
 milieu d'un bipoint  
 mediatrice d'un bipoint  
 intersection droite-droite  
 droite parallele  
 \*droite orthogonal  
 centre d'un cercle  
 cercle circonscrit triangle  
 intersection droite-cercle  
 intersection cercle-cercle

TRANSFORMATIONS DIVERS

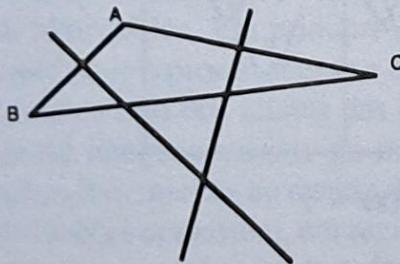


Fig. 2. Um ecrã típico do Cabri-Geomètre

Num outro micromundo semelhante da geometria chamado GeoDraw (Bell, 1987), o aluno tem um auxiliar semelhante nas construções tradicionais e medições, mas com a opção adicional de fazer desenho vectorial estilo-tartaruga, transformações planas (disponíveis, mas numa forma muito limitada no Supposer), e também estudos baseados nas coordenadas. Um quarto exemplo de *software* utilitário de geometria (Kramer, Hadas e Hershkowitz, 1986) oferece aos alunos um menu de opções de construções básicas das quais eles têm de juntar as soluções para problemas de construção dados.

Ao reflectir no impacto potencial dos utilitários geométricos como estes, Schwartz sugere que “a principal ideia que está subjacente a este programa é a de que os alunos podem fazer a sua própria Matemática e que os microcomputadores os podem ajudar nisso, podem mudar a forma como a Matemática é ensinada e aprendida em todos os níveis” (1987, p. 635). Muitos dos que têm usado e estudado estes utilitários concordam com ele, mas, à semelhança de muitas outras mudanças motivadas pelo computador, a sua implementação requererá mudanças nos hábitos há muito estabelecidos dos professores e nas expectativas que temos nos resultados dos cursos de estudo habituais.

Em todas as discussões sobre os computadores e a geometria, há tendência para uma aceitação tácita dos resultados tradicionais do ensino da geometria. O computador é visto como um auxiliar potencialmente poderoso para o ensino e a exploração pelo aluno, mas a questão raras vezes é colocada da maneira oposta. Poderá acontecer, que com vista a dar aos alunos os instrumentos conceptuais de que necessitam para interpretar e construir imagens gráficas no computador na resolução de

problemas, tenhamos de nos centrar em princípios e métodos diferentes nos nossos cursos de Matemática? O que dizer dos fractais ou da variedade de redes e de outros diagramas esquemáticos que são agora usados como modelos visuais de sistemas importantes, mas que são dificilmente decomponíveis em figuras e relações familiares da geometria euclideana (Gaulin & Puchalska, 1987)? Isto parece-me uma questão importante que ainda não foi tratada em detalhe.

### Imagens gráficas de relações quantitativas

Um dos métodos mais produtivos da Matemática é a representação, em gráficos de coordenadas, de relações entre variáveis quantitativas. Esta é, seguramente, uma das primeiras aplicações que os matemáticos tentam quando começam a trabalhar com computadores, e todos nós acreditamos que essas imagens da álgebra terão um efeito poderoso na compreensão do aluno. Sugestões sobre formas de usar esses gráficos têm aparecido em muitos lugares e o *software* disponível para o traçado desses gráficos é de facto muito versátil e fácil de usar.

O *software* típico para “gráficos de funções” permite ao utilizador introduzir expressões de uma ou mais funções ou relações, escolher o domínio e a amplitude do gráfico e depois observar o traçado dos gráficos no monitor colorido de alta resolução. Várias mudanças de escala são fáceis de fazer para focar a atenção numa janela maior ou mais pequena do gráfico. Nalgum *software* experimental o utilizador pode fazer variar os parâmetros na expressão que define a função e observar as transformações resultantes no gráfico ou, inversamente, transformar o gráfico arrastando-o com um rato

e observar em simultâneo as mudanças na expressão da função. Para além do gráfico da função de base, muitos programas dão um traçado simultâneo da derivada e do integral. *Software* para gráficos de funções a três dimensões não está ainda tão desenvolvido para micro-computadores, mas à medida que a memória e a velocidade de processamento de uma máquina corrente aumentarem, este utilitário tornar-se-á também corrente. De facto, o traçado convencional de gráficos a duas dimensões está já disponível em vários instrumentos de bolso (Casio fx-7000 e HP-28S), deixando-nos a esperança que essa capacidade da máquina possa estar acessível aos alunos sempre que façam trabalho matemático.

Para além dos gráficos convencionais de funções com expressões formais, professores de ciências desen-

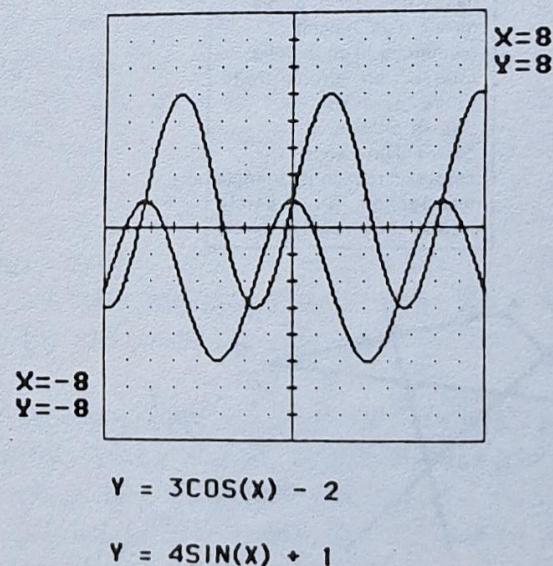


Fig. 3. Um ecrã típico dos programas de computador de gráficos de funções

volveram interfaces em *hardware* e *software* para utilização nos laboratórios que permitem traçar em tempo real os gráficos dos dados das experiências científicas. Leituras de experiências de temperaturas ou de transmissão de luz podem ser traduzidas directamente em gráficos de temperaturas, distância, velocidade, ou aceleração ao longo do tempo, enquanto os utilizadores observam simultaneamente a experiência e o traçado do gráfico (Tinker [22]). Mas se o aspecto “tempo real” deste *software* de gráficos é especialmente atractivo, é, evidentemente, possível simular esses acontecimentos com programas adequados. Os programas Eureka e Bottles do Shell Center estão entre os mais conhecidos deste tipo de *software* (Fraser, 1986).

Quanto a tópicos mais avançados, os gráficos têm constituído um realce particularmente popular no estudo das equações diferenciais. Várias equipas têm produzido *software* que mostra campos direccionais de certas equações diferenciais, traçando os gráficos de soluções particulares das condições iniciais dadas (Danby, 1988; Artigue, Gautheron e Sertenac [1]).

Apesar de todas as promessas destes novos e dinâmicos utilitários gráficos, é razoável perguntar como é que estão a ser usados para mudar o ensino e a aprendizagem da Matemática. Em primeiro lugar, quase toda a gente espera que o pronto acesso a esses gráficos enriqueça a compreensão dos alunos das expressões algébricas — dando imagens visuais da informação simbólica. As aplicações iniciais ao ensino dos programas de gráficos de funções consistem, em regra, na simples exibição de uma série de gráficos representando funções duma mesma família para revelar os modelos associados com os vários tipos de expressões e, em cada tipo, os efeitos dos

respectivos parâmetros. De seguida é pedido aos alunos que construam expressões para funções que correspondam a dadas características gráficas. O programa Green Globes está entre os mais conhecidos e altamente considerados exemplos deste *software* (Dugdale, 1984, 1987).

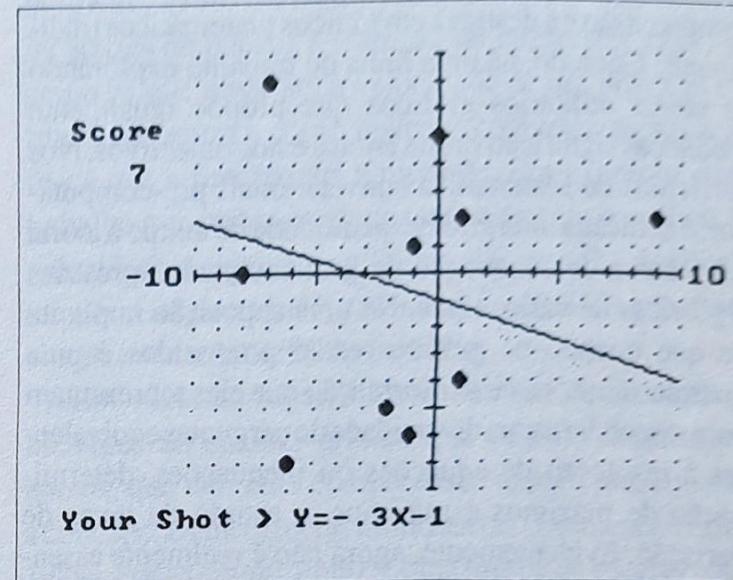


Fig. 4. Um ecrã típico do Green Globes

No jogo Globes, os alunos precisam de usar os seus conhecimentos de expressões algébricas para construir expressões para gráficos que acertem em “globs” no ecrã de coordenadas. As variações a este tema apresentam uma abordagem sistemática ao traçado de gráficos por via de transformações de expressões básicas, usando ecrãs de computador para demonstrar os efeitos das várias transformações (Bloom, Comber e Cross, 1986), e Tall (1985) desenvolveu uma abordagem ao cálculo infinitesimal orientado para os gráficos, que é altamente apreciada. Todas essas actividades de traçado de gráficos

são relatadas como sendo populares e com sucesso, mas dados seguros de investigação apoiando essas afirmações são muito escassos.

Muito do uso de gráficos em computador tem-se centrado na utilização do computador para alargar a compreensão e a destreza em tópicos matemáticos tradicionais. Contudo, há uma linha de trabalho explorando os novos utilitários gráficos que propõe igualmente mudanças significativas na ênfase e nos objectivos. Nos currículos de Matemática convencionais pré-computador, é dedicada uma grande quantidade de tempo à teoria e à técnica de construção de gráficos para expressões algébricas de vários tipos. Há uma suposição implícita de que quando os gráficos estão produzidos é uma questão simples usar a informação que eles representam para responder a uma diversidade de perguntas equivalentes à resolução de equações ou inequações, determinação de máximos e mínimos, e estudo de taxas de variação. Evidentemente, agora não é realmente essencial para os alunos ser tão perito na construção de gráficos à mão. Além disso, uma série de investigações têm revelado que muitos alunos têm bastantes problemas na interpretação de gráficos que os matemáticos usam eficazmente, quase sem pensar. Esta situação tem conduzido a que muitos educadores matemáticos insistam em que o foco da actividade com gráficos seja transferida da construção para a interpretação de gráficos. Experiências com este tema produziram um número de interessantes efeitos.

Em primeiro lugar, quando os gráficos gerados por computador se tornam o foco da discussão acerca da Matemática na aula há uma mudança notável nos papéis e interacções de professores e alunos. Para muitos alunos,

a Matemática tradicional é entendida como um jogo formal regido por regras arbitrárias — uma luta entre professor e aluno em que o desafio é imaginar os segredos que o professor mantém escondidos. Quando os alunos vêem uma experiência ao vivo produzir um gráfico em computador (e mesmo manipular as próprias condições experimentais) ou quando os alunos vêem uma expressão que define uma função ser teclada no computador e emergir imediatamente o gráfico correspondente, são confrontados com ilustrações poderosas da Matemática como uma fonte de modelos para os fenómenos do mundo real. Para além disso, a sala de aula torna-se um lugar de colaboração entre o professor e o aluno na tentativa de compreender a Matemática que é exibida perante eles.

O papel do professor muda da demonstração de “como” construir um gráfico para explicações e perguntas sobre “o que o gráfico está a dizer” acerca de uma expressão algébrica ou duma situação que ele representa. As tarefas dos alunos mudam de marcar pontos e traçar curvas para escrever explicações de pontos chave de gráficos ou de características globais. Da mesma forma que os instrumentos de cálculo numérico dão uma oportunidade de enfatizar o planeamento e a interpretação de operações aritméticas na resolução de problemas, a existência de programas gráficos pode ser usada para restabelecer o equilíbrio entre o conhecimento conceptual e processual em Matemática ou para criar novas apresentações orientadas de tópicos matemáticos tradicionais, graficamente enriquecidas. Exemplos do primeiro tipo de aplicação são dados por uma diversidade de projectos de desenvolvimento curricular orientados para o computador. O segundo tipo de mudança de

currículo orientado para os gráficos é ilustrado pelo trabalho que na Alemanha Ocidental conduziu a um curso chamado “Análise Elementar” no qual os conceitos básicos de limites, derivação, e integração são apresentados numa forma que torna todas as definições visualizáveis e a maioria dos resultados pode ser descoberta geometricamente (Moeller [18]).

Quase todos os professores de Matemática estão impressionados com as potencialidades para o ensino e para a resolução de problemas trazidos pelo uso dos gráficos do computador. Todavia, estamos agora a acumular experiência de tentativas de concretização desse potencial, e muita dessa experiência está a produzir advertências sobre as expectativas excessivas de progresso fácil ou espectacular na compreensão e destreza dos alunos.



SKETCH A (TIME, SPEED) GRAPH FOR THIS ROLLER COASTER

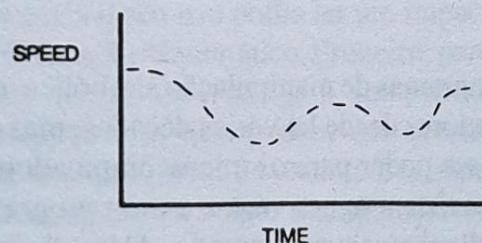
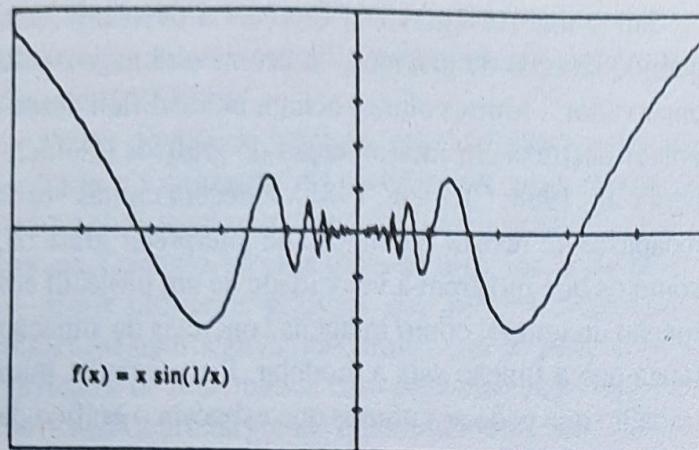


Fig. 5. Um problema típico relacionando os gráficos com os acontecimentos que eles modelam

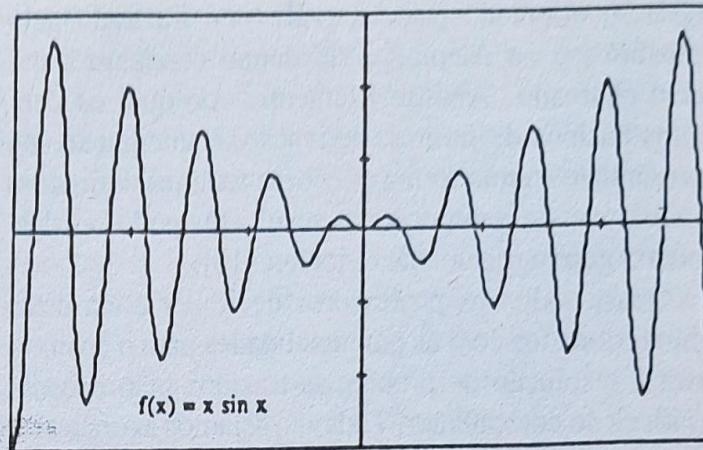
Em primeiro lugar, nós estamos a descobrir que, quando se trata de gráficos, “a beleza está na vista do observador”. Muitos alunos acham muito difícil desenvolver destreza em interpretação de gráficos (Goldenberg e al., 1988; Clement, 1985). Parecem muitas vezes incapazes de resistir à tentação de interpretar gráficos, como os que mostram a velocidade de um projectil em função do tempo, como imagens concretas da situação física que a função está a modelar. Por exemplo, num trabalho que pede aos alunos que esbocem o gráfico da velocidade do viajante na “montanha russa” ao longo do tempo, a resposta mais comum é um gráfico que copia simplesmente o perfil do percurso.

Em segundo lugar, há um número de armadilhas inerentes ao cálculo gráfico que podem conduzir os alunos, que têm uma compreensão teórica inadequada, a concepções incorrectas muito sérias (Demana e Waits, 1988). Por exemplo, uma escolha infeliz de escalas pode dar imagens muito semelhantes de duas funções com expressões muito diferentes (ver figura 6, na página seguinte).

Este exemplo levanta uma questão paralela à controvérsia conceitos/destrezas a propósito do uso de calculadoras — qual é o equilíbrio correcto entre o uso de instrumentos gráficos em computador e o ensino da Matemática formal que inclui a produção dos mesmos gráficos à mão? Um estudo recente de Dreyfus e Eisenberg [9] dá um primeiro passo na compreensão de aspectos desta situação, mas há ainda muitas questões importantes para investigar.



$[-0.5, 0.5]$  by  $[-0.5, 0.5]$ .



$[-30, 30]$  by  $[-30, 30]$ .

Fig. 6. Gráficos de  $x \sin(1/x)$  e  $x \sin(x)$  com aspecto semelhante devido a uma escolha de escalas infeliz (Demana e Waits, 1988).

### Sumário

Os gráficos em computador constituíram uma das contribuições mais estimulantes para a Educação Matemática nesta década. Oferecem-nos enormes esperanças para alargar a compreensão dos alunos de impor-

tantes ideias matemáticas e para proporcionar métodos visuais alternativos na resolução de problemas em Matemática. Contudo a concretização dessas expectativas requererá pesquisa muito cuidadosa e projectos de desenvolvimento para ultrapassar alguns difíceis problemas do ensino/aprendizagem.

### Cálculo Simbólico e Educação Matemática

Os educadores matemáticos estão há muito conscientes da grande utilidade dos computadores na manipulação e armazenamento de dados numéricos. Contudo, para muitos deles o desenvolvimento de programas de microcomputadores que manipulam expressões simbólicas de acordo com as regras da Álgebra e do Cálculo Infinitesimal foi uma grande surpresa. Os matemáticos

usam programas de manipulação simbólica nos grandes computadores desde há várias décadas, mas o MuMath trouxe esse poder para os microcomputadores 64K em 1980, e existem agora vários outros programas semelhantes disponíveis no mercado. Além disso a calculadora/computador HP-28S tornou um impressionante conjunto de programas de manipulação simbólica dis-

poníveis num instrumento de bolso.

As características gerais do *software* de manipulação simbólica em computador (ou álgebra em computador) incluem as transformações algébricas e soluções de equações envolvendo expressões polinomiais, racionais e algébricas — incluindo funções transcendentais elementares; operações com matrizes; cálculo de derivadas e integrais definidos e indefinidos; cálculo do desenvolvimento em série de potências de funções dadas; soma de séries; e soluções de equações diferenciais. Em cada caso, as expressões envolvidas podem incluir parâmetros numéricos e/ou literais. Os programas são geralmente muito rápidos e podem lidar com quase todas as situações que surgem na Matemática do ensino secundário e do início da Universidade. Enquanto que algumas versões iniciais usavam formatos de ecrã bastante toscos, os conjuntos de *software* actuais apresentam os resultados numa forma idêntica à da notação matemática usual.

Uma vez que só muito recentemente o *software* de manipulação simbólica passou a estar disponível para os microcomputadores, existem poucas experiências de investigação e desenvolvimento com ele. Os seus proponentes especularam que existem pelo menos três formas segundo as quais o seu uso podia ter um impacto significativo na Educação Matemática. Primeiro, parece claro que o poder do *software* alarga a complexidade das expressões algébricas que podem ser efectivamente tratadas em qualquer nível de ensino. Segundo, com o apoio do computador na vulgar manipulação simbólica parece bem possível reorientar o ensino e focalizá-lo na compreensão conceptual e no planeamento processual que se mantém essencial na resolução de problemas de

Matemática. Terceiro, consideravelmente da mesma forma em que os utilitários Geometric Supposer ou Cabri-Geomètre facilitam a aprendizagem exploratória, os programas utilitários de manipulação simbólica podem apoiar a exploração rápida de modelos de raciocínio algébrico — conduzindo à descoberta de princípios gerais importantes.

Neste momento existe pouco mais do que alguns exemplos específicos e limitados de investigação indicando que alguns dos efeitos aguardados poderão decorrer do uso em Matemática de *software* para manipulação simbólica. Estudos de Heid (1984, 1988), Palmiter (1986) e Judson (1988) mostraram que o uso de *software* para manipulação simbólica no ensino do Cálculo Infinitesimal permite de facto uma maior ênfase no desenvolvimento de conceitos e na resolução de problemas e que esta mudança de prioridades se traduz numa maior compreensão e destreza dos alunos naqueles aspectos do tema. No estudo de Heid os alunos foram muito pouco ensinados acerca das regras tradicionais de manipulação simbólica até às últimas semanas do curso semestral. Mesmo assim, um treino limitado subsequente dos procedimentos — baseado numa compreensão mais confiante e mais profunda das ideias fundamentais — foi suficiente para produzir níveis de destreza iguais aos dos alunos que gastaram o curso inteiro com o ensino que acentuava a aquisição daquelas destrezas.

Num estudo usando o MuMath como instrumento em Álgebra elementar, Heid e Kunkle (1988) concluíram que as capacidades dos alunos em resolução de problemas foram alargadas pelo novo equilíbrio no uso do tempo de ensino. Resultados semelhantes foram relatados por Lesh (1985). Hosack (1988) relatou diver-

tos estudos informais usando programas para manipulação simbólica nos cursos de Matemática da Universidade, concluindo que cada utilização mudou na verdade o foco da atenção do aluno e deu ênfase às ideias centrais de cada assunto em vez dos detalhes processuais.

Com os utilitários de manipulação simbólica agora disponíveis em *hardware* quase tão prático como as calculadoras de bolso, parece bem possível que possamos fazer melhoramentos significativos na compreensão dos alunos e na resolução de problemas diminuindo o conjunto de destrezas de manipulação algébrica requerido. Evidentemente, há a preocupação compreensível de que o diminuir a exigência de destrezas tradicionais possa ter outros efeitos nocivos em estudos avançados. Isto é claramente uma área de oportunidade apaixonante, mas muitas questões significativas de pesquisa não estão respondidas.

O uso de sistemas algébricos ou de manipulação

simbólica como instrumentos de aprendizagem acerca da própria manipulação simbólica é uma área quase totalmente por estudar. Mas imaginem as descobertas que os alunos podiam fazer se pudessem chamar um assistente algébrico para testar os efeitos de várias operações numa série planeada de expressões.

## Sumário

O *software* para raciocínio simbólico em várias situações do currículo de Matemática está agora disponível em formas sofisticadas e fáceis de usar numa diversidade de máquinas largamente usadas. O seu potencial para reformular o conteúdo e o ensino de vários tópicos tem sido sublinhado em documentos de natureza especulativa e em algumas experiências curriculares. Contudo os potenciais resultados e problemas que podem resultar desse uso são quase desconhecidos neste momento.

## Representações múltiplas baseadas no computador em Educação Matemática

Os instrumentos numéricos, gráficos e de manipulação simbólica fornecidos pelo computador oferecem cada um formas únicas de esclarecimento e poder no ensino e aprendizagem da Matemática e na resolução de problemas. Contudo, o aspecto dos computadores que recentemente tem gerado mais entusiasmo entre os educadores matemáticos é a facilidade de passagem de uma forma de representação da informação para outra à

medida que o utilizador procura a compreensão conceptual e as soluções dos problemas. Quando os projectos de desenvolvimento fazem uso de dados numéricos ou gráficos para ensinar e resolver problemas envolvendo variáveis e funções, eles estão realmente a testar a hipótese de que as representações múltiplas são úteis e que a capacidade de traduzir uma ideia de uma notação para outra é um indicador de conhecimento significativo.

Evidentemente, os benefícios prometidos pelo uso de representações múltiplas ou materiais diversificados não são novos em Educação Matemática. Manuais e aulas têm sempre confiado nos gráficos para ilustrar as propriedades das expressões algébricas e das funções no Cálculo Infinitesimal. Diversos programas de computador atractivos para o ensino da Matemática elementar são realmente apenas simulações das actividades originalmente projectadas para usar materiais físicos como os blocos de Dienes. Há, contudo, várias formas nas quais as representações de ideias matemáticas através do computador são singulares e especialmente prometedoras como instrumentos de ensino e de resolução de problemas.

Em primeiro lugar, as representações de ideias matemáticas e de procedimentos no computador podem tornar-se dinâmicas de um modo que nenhum texto ou diagrama no quadro consegue. Modelos em computador de transformações geométricas ou das mudanças num gráfico de função correspondentes a mudanças de parâmetros numa expressão que define uma função fazem algo que é muito difícil mostrar de outro modo. Segundo, o computador torna possível oferecer a cada aluno individualmente um ambiente de trabalho com representações flexíveis (como um conjunto de blocos de Dienes), mas ao mesmo tempo forçado a dar *feedback* correctivo a cada utilizador individual sempre que apropriado. Como Fischer (em publicação) notou: a diferença principal entre o modo de representação dado por símbolos escritos e pelo computador é a potencialidade deste último para realizar operações por si próprio, enquanto no velho sistema eram os seres humanos que tinham de actuar.

Terceiro, enquanto que algumas concretizações de programas de computador podem ser vistas como simulações pobres de actividades tácteis mais apropriadas, foi sugerido que esta representação electrónica tem um papel de ajudar os alunos a deslocarem-se do pensamento concreto acerca de uma ideia ou procedimento para uma forma simbólica abstracta mais poderosa. Neste sentido o computador desempenha o papel de uma espécie de intermediário para a abstracção. Quarto, a versatilidade dos gráficos de computador tornou possível dar espécies completamente novas de representações da Matemática — representações que podem ser criadas por cada utilizador do computador para se adequar a propósitos particulares. Finalmente, a precisão da máquina nas representações numéricas, gráficas e simbólicas geradas pelo computador torna essas representações em computador disponíveis como novos e poderosos instrumentos para realmente resolver problemas — não servindo simplesmente de esboços heurísticos ou cálculos de “conjectura e prova” como ponto de partida para soluções mais sérias ou em forma rigorosa. Trabalho recente tem mostrado as promessas e alguns dos problemas de cada uma destas características das representações múltiplas do computador.

Vários dos programas descritos nas secções anteriores desta revisão revelam as possibilidades de representações dinâmicas e múltiplas da Matemática em micromundos que dão aos utilizadores o tipo de flexibilidade controlada que oferece essa expectativa. Existem muitos outros a ser testados por todo o mundo. Por exemplo, Klep e Gilissen [17] conceberam um programa para ajudar os alunos a aprenderem os factos básicos da multiplicação com o apoio de quatro mode-

los: saltos numa recta numérica, grelhas rectangulares de  $m \times n$ , barras do tipo *Cuisenaire*, e um conjunto contendo múltiplas cópias de um conjunto dado. Os alunos podem movimentar-se para trás e para a frente pelos modelos com facilidade, e os modelos são criados por passos perante os olhos dos alunos. Lesh, Post e Behr (1987) descrevem um modelo semelhante para a repre-

sentação de conceitos e factos das fracções, e Thompson [21] criou um programa do Macintosh no qual os alunos são convidados a usar o rato para manipular electronicamente os blocos de Dienes como se fossem os materiais reais.

Estendendo esta espécie de apoio manipulativo de

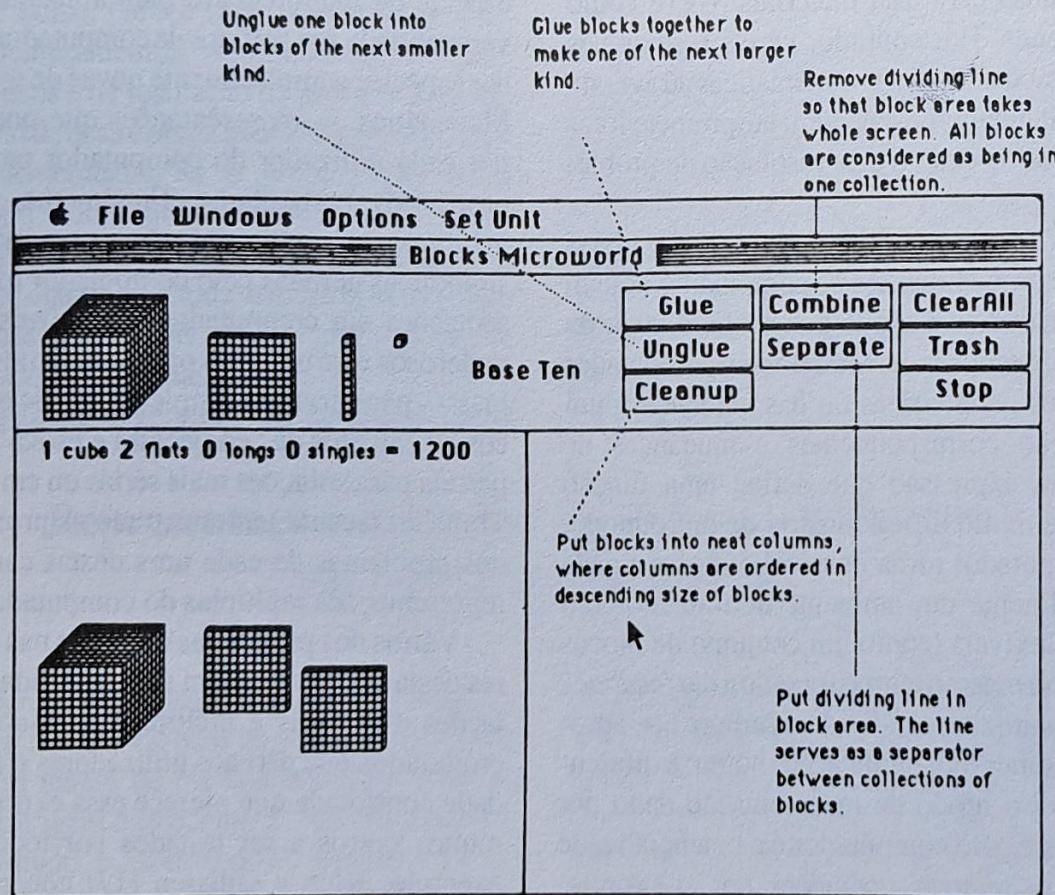


Fig. 7. Um ecrã típico do micromundo Blocks (Thompson [21])

representação múltipla ao ensino da Álgebra, Zehavi [24] idealizou um jogo chamado Maxmix. Baseado na tarefa simples de escolher uma operação que maximize o resultado de combinar dois números dados, o programa conduz o aluno por níveis desde dados numéricos simples, até pontos num plano de coordenadas, e tarefas que requerem a consideração simultânea de três inequações a duas variáveis. Taizi & Zehavi (1985) criaram um jogo relacionado chamado Conquer the Plane e usaram-no com o Maxmix em estudos planejados para ver que dificuldades os alunos podem ter ao trabalhar através de representações múltiplas. Tirza e Hershkowitz [23] têm ainda uma terceira variação neste tema da utilização do *software* de computador para evidenciar ligações entre representações diferentes da informação Matemática.

Cada um dos exemplos precedentes envolve o uso do computador para apresentar representações múltiplas de

conceitos e métodos matemáticos, em que as representações são versões electrónicas de materiais de ensino familiares. Existem contudo outros projectos de desenvolvimento, em que algo como “iconografia criativa” é usado para produzir novas espécies de representações. Por exemplo, Feurzeig e os seus colaboradores experimentaram o uso dum “micromundo do saco de berlindes” no qual expressões e operações algébricas simples são representadas simbolicamente, verbalmente e por ícones usando sacos de berlindes para variáveis (Feurzeig, 1986; Roberts, Carter, Davis e Feurzeig, 1987). Novamente, a ideia é ajudar os alunos a fazer a transição do raciocínio concreto para o abstracto através da experiência num mundo de ícones de abstracção intermédia.

Um outro exemplo muito aliciante de representação por ícones gráficos especialmente criados por computador é o trabalho de Tinker e Roberts (Tinker [22]; Roberts & Barclay, em publicação) ao produzirem um

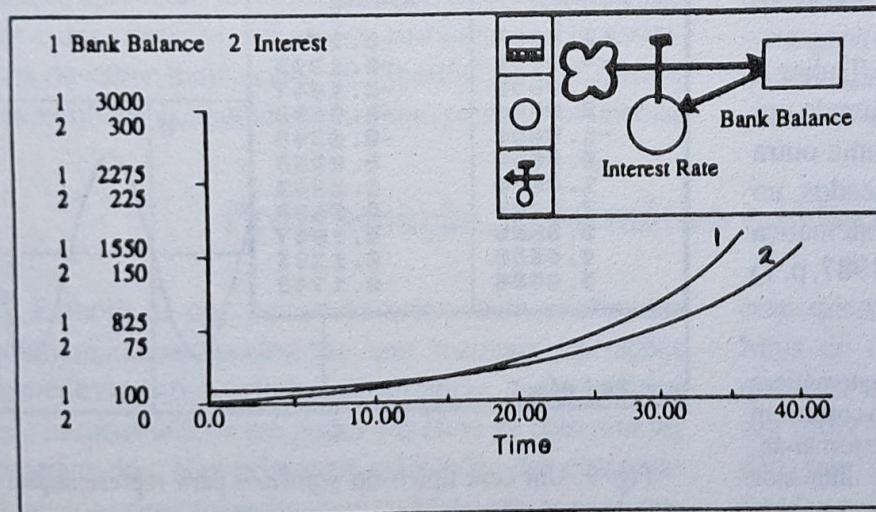


Fig. 8. Representações múltiplas de dados e um modelo usando o *software* Stella (Roberts & Barclay, em publicação)

conjunto integrado de instrumentos de computador para a modelação de sistemas dinâmicos. O sistema utiliza a interface de *software* do laboratório de ciências para recolher dados experimentais e um programa de folha de cálculo para mostrar os dados em forma numérica e gráfica. Mas o instrumento conceptual central no processo de modelação é um programa chamado Stella no qual o utilizador cria diagramas esquemáticos ao arranjar ícones de computador para tubos, válvulas, e reservatórios para indicar taxas de variação e acumulação em sistemas que variam ao longo do tempo. Uma vez que o esquema esteja estabelecido e os dados a modelar introduzidos, o computador resolve as equações diferenciais subjacentes e mostra o comportamento do sistema. O aspecto fascinante deste sistema é a forma como ele apoia o pensamento do utilizador com um esboço gráfico flexível. Mostra o computador a ser utilizado para que os estudantes sejam capazes de pensar e trabalhar efectivamente em situações de complexidade real que seriam normalmente consideradas inacessíveis no seu nível de destreza matemática.

O facto de o ambiente de modelação de Tinker e Roberts fazer muito do cálculo matemático, quando um modelo é trabalhado pelo utilizador, ilustra uma outra forma significativa como os sistemas baseados no computador para representações múltiplas Matemática estão a ser aplicados. Como Brolin e Greger (1987, p. 1) apontam,

Com poucas excepções, as actividades matemáticas no ensino até um nível universitário introdutório consistem em manipulação simbólica. (Mas) a longo prazo tornar-se-á impossível continuar a ensinar a seres humanos inteligentes a espécie de destrezas que qualquer estúpido

mas adequadamente programado computador pode realizar melhor e mais depressa.

Para criar um mundo da Matemática novo e mais realista, eles conceberam um '*Workshop Matemático*' que os alunos pudessem usar para as tarefas de rotina de resolução de problemas de forma que as suas mentes estivessem libertas para aqueles aspectos da resolução de problemas que requerem a inteligência humana. A *Workshop* de Brolin e Greger incluía programas para traçado de gráficos, tabelas numéricas e resolução de equações, inequações, e problemas de optimização. Desenvolveram depois materiais curriculares que focavam a atenção dos alunos no processo de matematisação, na escolha de instrumentos adequados e na interpretação dos resultados calculados. Aqui o ambiente de representações múltiplas é usado como um instrumento de resolução de problemas, e tem implicações profundas

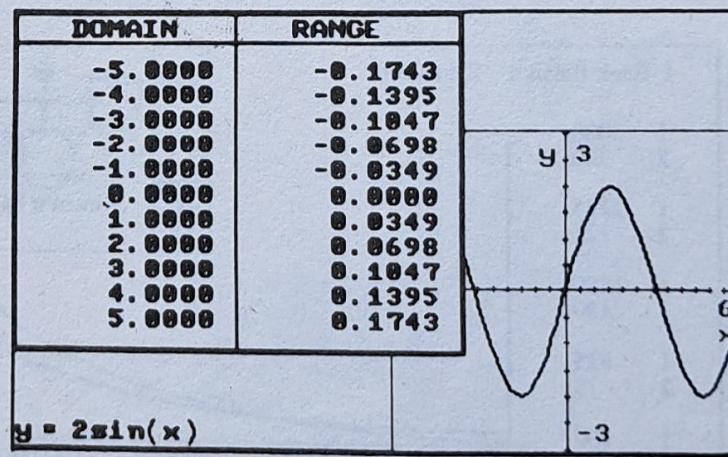


Fig. 9. Um ecrã típico do *software* para representações múltiplas de funções

na mudança do tipo de conhecimento que os alunos devem adquirir do ensino da Matemática.

Há a esperança de que, usando esta abordagem, os alunos sejam capazes, com instrumentos de modelação como o Stella, de ter acesso a material de resolução de problemas muito mais desafiante. Mas essas abordagens vão contra as fortes crenças de muitos professores de Matemática que os tipos de compreensão conceptual que são ainda importantes só podem desenvolver-se após prolongadas experiências preliminares com cálculos à mão e que os métodos matemáticos devem ser construídos sobre uma estreita base de dedução lógica.

As consequências de utilizar instrumentos de computador para mudar o equilíbrio das destrezas/conceitos/resolução de problemas nos currículos de Matemática são provavelmente a questão mais importante para a pesquisa na tecnologia aplicada ao nosso campo. Há alguns resultados que começam a aparecer que apoiam os propósitos de mudança. Contudo, é claro que temos muito a aprender acerca do uso mais eficaz do computador e das novas organizações curriculares. Precisamos de saber mais sobre as experiências que melhor desenvolvem a capacidade do aluno para se movimentar

## Programação, Informática e Educação Matemática

Embora os computadores sejam bem conhecidos como máquinas poderosas que realizam operações numéricas, gráficas, simbólicas e lógicas, a característica que os torna únicos em poder é o facto de poderem ser programados. Nas primeiras aplicações dos computadores ao ensino/aprendizagem da Matemática, os alunos

eram quase sempre envolvidos na escrita de programas. Mais do que pelo aspecto prático de que no início qualquer utilizador do computador tinha de escrever o seu próprio programa para que pudesse executar uma dada tarefa, as actividades de programação foram justificadas pela suposição de que as análises requeridas na

## Sumário

Uma das mais notáveis esperanças para o melhoramento da Educação Matemática por aplicação da tecnologia consiste presentemente nas várias aplicações de representações múltiplas e interligadas de ideias e métodos matemáticos, baseadas no computador. Projectos de investigação e desenvolvimento estão a começar a explorar novas abordagens curriculares e educacionais que utilizam esta capacidade da máquina de várias formas. É claro que são possíveis mudanças fundamentais nos métodos tradicionais do ensino e aprendizagem da Matemática. Mas é também claro que rentabilizar as vantagens e minimizar as dificuldades exigirá uma grande quantidade de cuidadoso trabalho de pesquisa e de desenvolvimento.

escrita de um programa aprofundariam a compreensão dos alunos da Matemática subjacente. Na década passada mudaram quer a realidade prática da utilização do computador quer as crenças acerca das virtudes da programação. É agora mais comum para os diferentes utilizadores de computador usar uma diversidade de programas utilitários para um determinado fim que requerem pouco mais do que a entrada dos dados específicos e a escolha de opções processuais a partir de menus escritos em linguagem natural. Além disso, a procura de evidência de que a experiência de programação influencia o comportamento em Matemática não produziu resultados consistentes ou notáveis. Em consequência, o estudo e o debate centrados em Educação Matemática e programação diminuíram substancialmente nos anos 80.

Algumas das notas críticas mais salientes acerca dos efeitos da programação têm sido dirigidas ao LOGO, para o qual algumas promessas iniciais deslumbrantes foram feitas (ver, por exemplo, Bender, 1987). Mas Papert (1987) replica que não devemos perguntar só o que o LOGO faz aos alunos, mas o que os alunos podem fazer com o LOGO. As sessões do grupo temático de tecnologia no ICME VI revelaram um interesse profundo pelo LOGO da parte de educadores matemáticos de muitos países diferentes. Muitos investigadores estão ainda empenhados em explorar o vasto potencial do LOGO na mudança do ambiente de aprendizagem e nos objectivos da Matemática (ver, por exemplo, Noss, 1988).

Numa recente comunicação Blume e Schoen (1988) sintetizam os argumentos que sugerem que as experiências de programação devem ter efeitos benéficos

nas capacidades de resolução de problemas de Matemática dos alunos. Eles notam que por causa da natureza da programação:

Podemos esperar dos programadores que (a) sejam mais activos e sistemáticos quer no planeamento quer nos estádios de solução, (b) façam mais uso das aproximações sucessivas às soluções façam mais uso das variáveis e das equações, e (d) seja mais provável que verifiquem e corrijam os erros nas soluções encontradas.

Contudo, concluíram que:

Apesar da ligação lógica, contudo, os estudos até agora não forneceram evidência forte de que programadores e não programadores se comportem diferentemente quando resolvem problemas de Matemática (p. 143).

Numa investigação feita pelos próprios Blume e Schoen, eles concluíram existir alguma evidência de que os programadores utilizam, mais provavelmente, abordagens de tentativa sistemática na resolução de problemas e de que, mais frequentemente, verificaram e corrigiram erros em potenciais soluções. Contudo, os outros comportamentos conjecturados não foram observados mais frequentemente entre os programadores do que entre os não programadores.

Embora os tipos de resultados relatados por Blume e Schoen tenham diminuído o entusiasmo em associar programação e ensino da Matemática, parece prematuro encerrar esta questão. O que muitos investigadores não encontraram foi um grande efeito de transferência das actividades gerais de programação para os comportamentos gerais de resolução de problemas. Efeitos de

transferência em alto grau são difíceis de encontrar em qualquer espécie de investigação educacional, e muito poucos estudos em Educação Matemática trazem mudanças significativas no comportamento dos alunos em resolução de problemas. Assim, parece muito possível que haja benefícios da programação que não detectámos na nossa busca de efeitos espectaculares em tarefas difíceis de ensino/aprendizagem como a resolução de problemas.

A capacidade de programar um computador é uma destreza que dá poder e ajuda os utilizadores de computadores a ultrapassar os constrangimentos dos conjuntos de *software*. Além disso, o próprio ensino da programação é uma tarefa recente na escola, por isso parece bastante plausível que não saibamos ainda as formas mais eficazes de ensinar essa destreza, e muito menos de ajudar os alunos a fazer as ligações entre programação e Matemática.

Investigação recente sobre os efeitos da programação parece indicar que as abordagens onde se desenvolvem actividades de programação numa diversidade de linguagens são mais úteis para a aprendizagem da Matemática. Kowszun e Higgs (1986), Thomas (1987), Ayers et. al. (1988), DeGraeve (1987), Capuzzo Dolcetta et al. [6] e muitos outros relataram recentemente trabalho que aponta esta direcção. É provável que a programação jogue um papel muito positivo em Educação Matemática, mas ainda não foi feito trabalho suficiente na concretização dessa expectativa.

Evidentemente, a programação é apenas um aspecto da disciplina de Informática. O debate sobre os efeitos da programação na aprendizagem da Matemática considera a inter-relação das duas disciplinas numa só direcção.

Engel (1983), Maurer (1983, 1984), Ralston (1985) e muitos outros apontaram que o passo crucial na aplicação do poder da computação a um problema é o esboço de um algoritmo conveniente para conduzir as operações de processamento de informação. Assim, é importante para os alunos de Matemática aprender algoritmos eficazes para problemas de Matemática importantes e desenvolver uma capacidade mais geral para criar soluções algorítmicas para novos problemas. Tal como um relato de uma conferência britânica lança o desafio, "O estudo dos algoritmos e procedimentos representa quer uma extensão da Matemática quer uma nova forma de ver o currículo da escola actual" (Kowszun e Higgs, 1986). Assim, debates como os do valor da programação para a aprendizagem da matemática ou das virtudes de várias linguagens de programação escondem um desafio mais fundamental — rever as nossas abordagens da Matemática de forma a prepararmos os nossos alunos para aplicar os métodos algorítmicos que são essenciais no uso de computadores.

As questões respeitantes à programação e aos métodos algorítmicos em Matemática são realmente apenas dimensões específicas de um problema mais vasto — coordenar os currículos escolares em Informática e em Matemática de forma a obter a maior vantagem para ambos. Embora tenha havido alguma discussão teórica sobre como isto poderia ser cumprido (Ralston, 1985; Bottino, Forcheri, Furinghetti & Molfino [5]), permanece ainda grandemente como um problema não resolvido. Do lado da Matemática precisamos de decidir quais os tópicos das matemáticas discretas (lógica, equações de diferenças, indução/recursão, probabilidades finitas, etc) que devem, por causa do seu valor para a educação informática e para a compreensão dos métodos podero-

dos do computador em Matemática, ser incluídos nos currículos escolares e universitários. A discussão do momento presente e a experimentação curricular parece centrada no estudo da parte final da Escola Secundária e no início da Universidade e na (muito provavelmente falsa) disputa pela prioridade curricular entre Matemática discreta e contínua.

### Sumário

É natural acreditar que a aquisição de destreza em programação desenvolverá hábitos mentais que serão

úteis em vários aspectos do aprender e fazer Matemática. Embora a investigação não tenha chegado ainda a provas convincentes sobre quaisquer efeitos significativos de transferência, há um interesse activo, mas mais centrado no encontrar formas de tornar esta inter-relação eficaz. O desenvolvimento de currículos de Matemática que dão ênfase aos métodos algorítmicos serviria bem os alunos quando se voltam para os computadores como auxiliares na resolução de problemas, mas até agora esta ênfase nos métodos algorítmicos parece não ter produzido grande impacto na Matemática escolar ou Universitária.

## Inteligência Artificial, sistemas peritos e tutores

Cada uma das secções precedentes desta revisão descreve formas como a tecnologia de informação electrónica influencia a Educação Matemática ao fornecer instrumentos de auxílio aos procedimentos matemáticos — cálculos aritméticos, gráficos, manipulação simbólica e execução de processos algorítmicos. A disponibilidade desses instrumentos matemáticos sugere mudanças nos objectivos dos currículos escolares e universitários e nos padrões tradicionais da actividade de ensino/aprendizagem. Mas uma das muitas dimensões activas da investigação informática é explorar formas segundo as quais os computadores possam ser programados para exhibir o 'comportamento' que simule o processamento da informação pelo homem. Há um número de projectos em Educação Matemática que estão a tentar rentabilizar esta capacidade do computador para esboçar programas que actuam, em várias formas, como professores.

Os esforços iniciais para ensinar os computadores como professores foram de dois tipos principais. O primeiro consistia em variações no tema dos cartões de exercícios electrónicos — programas de exercícios e prática em que o computador punha problemas e dava aos alunos *feedback* imediato à sua actuação. Estes programas são ainda muito populares nas escolas e, com o fim de aperfeiçoar destrezas necessárias, têm aparentemente sucesso. Estamos a começar a ver um conjunto de programas que proporcionam exercícios e prática em situações muito inteligentes e que promovem pensamentos estratégicos de mais alto nível assim como pensamento de rotina. Há exemplos impressionantes no trabalho do Shell Center, Dugdale e Kibbey, e Taizi e Zehavi — para mencionar só três fontes.

A segunda forma como os computadores têm sido usados para simular o ensino é como um meio elec-

trónico de ensino programado. Na procura dum curso baseado no computador que pudesse operar independente de qualquer professor ou manual, os programadores têm traduzido muitas vezes texto programado para o ecrã do computador, dedicando energia considerável ao problema de ensinar o computador a responder às entradas dos alunos de forma inteligente. Como com os programas de exercícios e prática, há exemplos desses cursos electrónicos programados ainda em uso e ainda a ser desenvolvidos. Mas parece justo dizer que o interesse tem mudado largamente dos sistemas de ensino 'por si' que explicam, avaliam e gerem todos os aspectos da educação para o desenvolvimento de usos mais focalizados de computadores — tutores como simples elemento do ambiente de ensino/aprendizagem.

O trabalho recente nesta linha mais interessante é a produção de **tutoriais inteligentes** para vários domínios da Matemática. Schoenfeld (1988, p. 7) descreve o objectivo deste trabalho:

O sistema apresentaria informação ao aluno; o aluno trabalharia em problemas práticos; o sistema podia espicaçar o aluno quando o seu trabalho estivesse a ir bem, mas podia também diagnosticar os erros do aluno e ajudar quando as coisas fossem erradas; e podia responder às perguntas dos alunos num vasto conjunto de matérias relacionadas.

E continua, apontando que

Para que qualquer tutor (máquina ou humano) tenha sucesso, tem de ser (a) perito no assunto, (b) muito bom a imaginar o que está a acontecer na cabeça dos alunos, e (c) muito bom a ensinar (i. e. ter acessível um vasto conjunto de estratégias de ensino).

Como mencionei anteriormente nesta revisão de literatura, tem havido progresso notável no desenvolvimento de instrumentos de computador que sejam 'peritos' em vários aspectos da Matemática — da aritmética e álgebra até à geometria e ao cálculo infinitesimal. Pesquisa na ciência cognitiva está a conduzir a uma descrição claramente compreensiva de erros conceptuais e processuais comuns naquelas áreas. Mas a combinação desses ingredientes num tutor flexível de ensino que interaja com os alunos, em profundidade, é claramente um problema muito difícil. O trabalho em tutores em Aritmética (Floyd, Hennessy & O'Shea [11]; Ohlsson & Resnick [19]), Álgebra (Anderson, Boyle & Reiser, 1985; McArthur, Stasz & Hotta, 1987), Geometria e demonstrações (Bell, 1987; Flake [10]; Barz & Holland [2]) e Cálculo (Suppes, Ager & Berg [20]) está ainda no início. Existem algumas indicações preliminares de que esses tutores proporcionam auxílios muito eficazes (e em alguns casos substitutos) para o ensino regular dirigido pelo professor.

Os protótipos de tutoriais proporcionam alguns ambientes de aprendizagem muito interessantes. Por exemplo, os tutoriais de álgebra mostram em regra o trabalho do aluno ou soluções modelares em diagramas esquemáticos que ilustram como os passos do raciocínio são organizados em argumentos.

Permitem assim a inspecção e modificação pelo aluno em qualquer estágio do processo, existindo explicações e orientações correctivas em graus variáveis em qualquer estágio.

Os tutoriais de geometria proporcionam ecrãs de diagramas semelhantes e *feedback* correctivo à medida que os alunos executam construções ou demonstrações.

Scroll Right  
 Scroll Left  
 Scroll Down  
 Scroll Up

QUIT  
 Erase Input  
 New Problem  
 Go Back

Answer OK?  
 Step OK?  
 Elaborate Step  
 Explain Step  
 Hint Next Step  
 Do Next Step  
 Do Some Step

$$3y + 9 = -2y + 7$$

$$3y + 9 + 2y = 7$$

$$5y + 9 = 7 \qquad 3y + 2y = 7 + -9$$

$$5y = -2$$

$$y = \frac{-2}{5}$$

$y = -2/5$

Fig. 10. Um ecrã típico de um tutorial de geometria (McArthur et. al., 1987)

$\triangle MVX \cong \triangle MVY$

You want to prove triangles  $\triangle MVX$  and  $\triangle MVY$  congruent. Do they have any parts that overlap? OK

$rt \angle VMX$ 
 $\uparrow$ 
 Def-perp-lines

$\overline{WV} \perp \overline{XY}$

$\overline{WV}$  bisects  $\overline{XY}$

Fig. 11. Um ecrã típico de um tutorial de geometria (Anderson et. al., 1985).

A atracção mais recente nesta linha de trabalho é a promessa de combinar tutoriais de computador com tecnologia de video-discos de modo a obter um ambiente educativo visualmente mais rico (Terada, 1987; Terada, Hirose & Handa, 1985). Existem alguns exemplos surpreendentes do que esta combinação podia produzir, e alguns outros que apresentam pouco mais do que aulas expositivas de professores gravadas em video-discos.

Enquanto estes esforços iniciais em tutoriais inteligentes têm sido muitas vezes criticados por se centrarem no ensino daquelas mesmas destrezas que os computadores tornaram obsoletas, o esforço de concepção tem algumas consequências muito produtivas para a educação matemática. Primeiro, para planear um bom tutorial deve fazer-se um estudo intensivo das formas como os alunos processam a informação educativa e dos pontos mais prováveis de dificuldade em aprendizagem e resolução de problemas. Segundo, o planeamento de métodos adequados de ensino baseados no computador é geralmente baseado na análise em profundidade das

estratégias de tutores-professores eficazes. O exame do ensino tradicional a partir desta nova perspectiva conduz muitas vezes a avanços produtivos na investigação em ensino.

## Sumário

Existe agora um pequeno mas crescente corpo de investigação em educação matemática procurando combinar os avanços da ciência cognitiva e da inteligência artificial para produzir sistemas tutoriais de computador "peritos" para vários assuntos. Os exemplos actuais mais impressionantes correm em máquinas bastante dispendiosas e lidam eficazmente apenas com aspectos limitados da Matemática. As capacidades de diálogo dos sistemas são muito limitadas. Contudo, existe uma esperança muito razoável de que progresso seguro pode ser feito nesta frente, proporcionando ainda uma outra maneira em que o computador pode influenciar a forma da Educação Matemática.

## Conclusões e perspectivas

O conjunto das aplicações do computador descritas nesta revisão de literatura e os projectos sem conta que não puderam ser mencionados devido aos limites de espaço e de tempo constituem a força mais poderosa para a mudança da Educação Matemática nas escolas e Universidades hoje e no futuro próximo. O potencial do uso da tecnologia para alargar o domínio da aprendizagem humana da Matemática e da resolução de proble-

mas está apenas a começar a surgir nos projectos de investigação e de desenvolvimento, sendo ainda pouco visível no dia a dia das aulas de Matemática. Enquanto que alguns poderão pensar que a melhor atitude é esperar até que surja um quadro mais claro sobre qual a "melhor" resposta, a verdade é que a situação actual oferece impressionantes oportunidades de progresso.

O uso eficaz de computadores para o ensino pode

permitir a qualidade de ambiente de ensino/aprendizagem por que suspira a maioria dos professores, enquanto lutam com as restrições das condições da sala de aula e dos currículos tradicionais. A revisão dos objectivos curriculares reconhecendo que os computadores e outras tecnologias de informação electrónica são agora instrumentos normais para a resolução de problemas e a tomada de decisões em ciência, negócios, governo e

indústria conduzirá a mudanças significativas no que nós queremos e permitimos que os alunos aprendam. Existem muitas questões importantes para ser respondidas, mas realmente não temos nenhuma escolha a não ser agarrar essas questões e trazer a Matemática escolar e universitária para a era da informação electrónica para a qual estamos ostensivamente a preparar os nossos alunos.

### Notas de Referências

Muita da informação utilizada ao preparar esta revisão foi fornecida pelos participantes do ICME VI em documentos escritos para esse encontro mas ainda não publicados em artigos de revistas ou livros. As notas de referência seguintes indicam os autores e os títulos desses documentos, com uma indicação da instituição que pode ajudar os leitores que queiram obter mais informação acerca de um projecto particular. É provável que muitas das ideias e projectos citados aqui sejam relatados em breve nos canais de publicação periódicos.

1. Artigue, M., Gautheron, V., & Sertenac, P., 'A qualitative study of differential equations: results from some experiments with microcomputers' (IREM Paris 7, 2 Pl. Tussieu, 75005 Paris, France).

2. Barz, W. & Holland, G., 'Intelligent tutorial systems for geometric construction and proof problems' (Institut für Didaktik der Mathematik, Universität Giessen, Karl-Gloekner-Strasse 21 C, D-6300

3. Bellemain, F., "le Project cabri-geometre: Elaboration d'un logiciel d'aide a la construction et la transformation de figures pour la resolution de problem de geometrie Euclidienne" [Laboratoire de Structures Discretes et Didactique, IMAG, BP 68, 38402 Saint Martin D'Heres Cedex, France].

4. Bjork, L. & Brolin, H., "The role of a mathematical workshop in the teaching of mathematics" [Sunnarboskolan, Axel Roothsgatan 13, S-34100 Ljungby, Sweden & Department of Teacher Training, University of Uppsala, Box 2136, S-75002 Uppsala, Sweden].

5. Bottino, R. M., Forcheri, P., Furinghetti, F., & Molino, M. T., "Integration between mathematics and computer science: Reflections and realizations" [Istituto di Matematica, Applicata del C.N.R., Via L. B. Alberti 4-16132 Genova, Italy].

6. Capuzzo Dolcetta, I., Emmer, M., Falcone, M., & Finzi Vita, S., "The impact of new technologies in

teaching calculus: A report of an experience" [Dipartimento di Matematica, Universita di Roma "La Sapienza", P. Aldo Moro, 2-00185 Roma, Italy].

7. Cesar, J., "3D-extended logo: The sea-turtle and perspective" [2 rue sur la cote, Arbouans, 25400 Audincourt, France].

8. Cornu, B., "The computer and didactics: Two tools for the teaching of mathematics" [Institut Fourier-Equipe de Recherche en Didactique des Mathematiques et de l'Informatique, Université Grenoble 1 - France].

9. Dreyfus, T. & Eisenberg, T., "On visualizing function transformations" [The Weizmann Institute of Science, Rehovot 76100, Israel].

10. Flake, J. L., "Using computers for developing proof skills" [Department of Curriculum and Instruction, Florida State University, Tallahassee, FL, USA].

11. Floyd, A., Hennessy, S., & O'Shea, T., "An intelligent computer tutor for arithmetic" [School of Education, Open University, Milton Keynes, United Kingdom].

12. Fraser, R., "Role of computers for application and modelling: The ITMA approach" [Shell Centre for Mathematical Education, University of Nottingham, United Kingdom].

13. Fraser, R., Burkhardt, H., Coupland, J., Phillips, R., Pimm, D. & Ridgway, J., "Learning activities and

classroom roles" [Shell Centre for Mathematical Education, University of Nottingham, United Kingdom].

14. Friel, S. N. & Russell, S. J., "Used numbers: Collecting and analyzing real data" [Technical Education Research Centers, 1696 Massachusetts Avenue, Cambridge, MA, USA].

15. Guin, D., "Logo, un outil pour mettre en jeu les differents registres de la notion de fonction" [I.R.E.M. Strasbourg, 10, rue du General Zimmer, 67084 Strasbourg Cedex, France].

16. Klep, J., "The problem of controlling complex learning processes" [National Institute for Curriculum Development, Enschede, The Netherlands].

17. Klep, J. & Gilissen, L., "Computer help in learning the multiplication tables" [National Institute for Curriculum Development, Enschede, The Netherlands].

18. Moeller, H., "Elementary analysis with micro-computers" [Heinrich-Behnke-Seminar für Didaktik der Mathematik, Universität Münster, Einsteinstrasse 62, D-4400 Münster, Federal Republic of Germany].

19. Ohlsson, S. & Resnick, L., "Intelligent tutors for elementary and middle school mathematics" [Learning Research and Development Center, University of Pittsburgh, Pittsburgh, PA, USA].

20. Suppes, P., Ager, T., & Berg, P., "Applications of

computer technology to pre-college calculus" [Stanford University, Stanford, CA, USA].

21. Thompson, P. W., "Direct engagement-software for teaching mathematics" [Department of Mathematics, Illinois State University, Normal, IL, USA].

22. Tinker, R. F., "Educational technology and the future of mathematics and science education" [Technical Education Research Centers, 1696 Massachusetts Avenue, Cambridge, MA, USA].

23. Tirza, H. & Hershkowitz, R., "Exploring the coordinate system using microcomputer software" [The Weizmann Institute of Science, Rehovot 76100, Israel].

24. Zehavi, N., "The development of mathematics software: an interactive process" [The Department of Science Teaching, The Weizmann Institute of Science, Rehovot 76100, Israel].

### Referências

Anderson, J. R., Boyle, C., & Reiser, B. (1985), Intelligent tutoring systems, *Science* 228, 456-462.

Ayers, T., Davis, G., Dubinsky, E., Lewin, P. (1988), Computer experiences in learning composition functions, *Journal for Research in Mathematics Education* 19, 246-259.

Bell, M. S. (1987). Microcomputer-based courses for school geometry, In I. Wirszup & R. Streit (Eds.), *Developments in School Mathematics Education Around the World*, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA, USA, 604-623.

Bender, P. (1987). Kritik der logico-philosophie, *Journal fur Mathematik-Didaktik* 8, 3-103.

Bloom, L. M., Comber, G. A., & Cross, J. M. (1986), Use of the microcomputer to teach the transformational approach to graphing functions, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 17, 115-123.

Blume, G. W. & Schoen, H. L. (1988). Mathematical problem-solving performance of eighth-grade programmers and non programmers, *Journal for Research in Mathematics Education* 19, 142-156.

Brolin, H. (1987). Mathematics in Swedish schools, In I. Wirszup & R. Streit (Eds.), *Developments in School Mathematics Education Around the World*, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA, USA, 130-155.

Brolin, H. & Greger, K. (1987). *Computers and the Teaching of Mathematics*. Uppsala University, Department of Teacher Training, Uppsala, Sweden.

Campbell, P. F. (1987). *Measuring Distance: Children's Use of Number and Unit*. (Final Report), Department of Curriculum & Instruction, University of Maryland, College Park, MD, USA.

- Clement, J. (1985). Misconceptions in graphing, *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 369-375.
- Clements, D. H. (1987). Longitudinal study of the effects of logo programming on cognitive abilities and achievement, *Journal of Educational Computing Research* 3, 73-94.
- Corbitt, M. K. (1985). The impact of computing technology on school mathematics: report of an NCTM conference, *Arithmetic Teacher* 32, 14-19.
- Danby, J. M. A. (1988) Computer applications in differential equations, In D. A. Smith, G. J. Porter, L. C. Leinbach, & R. H. Wenger, (Eds.), *Computers and Mathematics: The Use of Computers in Undergraduate Instruction*, The Mathematical Association of America, Washington, DC, USA, 35-42.
- Degraeve, R. (1987). Logo au cp et au cel, *Revue de Mathématiques Sciences et Technologie pour les Maitres de l'Enseignement Elementaire e Pre-elementaire* 41, 37-53.
- Demana, F. & Leitzel, J. (1988). Establishing fundamental concepts through numerical problem solving, In A. F. Coxford & A. P. Shulte (Eds.), *The Ideas of Algebra K-12*, 1988 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA, USA, 61-68.
- Demana, F. & Waits, B. K. (1988). Pitfalls in graphic computation, or why a single graph isn't enough, *The College Mathematics Journal* 19, 177-183.
- Dugdale, S. (1987). Pathfinder: A microcomputer experience in interpreting graphs, *Journal of Educational Technology Systems* 15, 259-280.
- Dugdale, S. (1984). Computers: Applications unlimited, In V. P. Hansen & M. J. Zweng (Eds.), *Computers in Mathematics Education*, 1984 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA, USA, 82-88.
- Engel, A. (1983). The impact of algorithms in mathematics teaching, *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematics Education*, Birkhauser, Boston, MA, USA, 312-330.
- Feurzeig, W. (1986). Algebra slaves and agents in a logo-based mathematics curriculum, *Instructional Science* 14, 229-254.
- Fey, J. T. (Ed.) (1984). *Computing and Mathematics: The Impact on Secondary School Curricula*, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA, USA.
- Fey, J. T.: in press. School algebra for the year 2000, In C. Kieran & S. Wagner (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA, USA.

- Fischer, R.: in press. The human factor in pure and applied mathematics, In M. S. Arora, A. Rogerson, & F. Mina (Eds.), *Mathematics Education into the 21st Century*.
- Fraser, R. (1986). Learning activities and classroom roles: Communication, Paper presented at the Conference on Enhancing Mathematics Teaching with Microcomputers, Coventry Polytechnic, United Kingdom.
- Gaulin, C. & Puchalska, E. (1987). Coded graphical representations: A valuable but neglected means of communicating spatial information in geometry, In I. Wirszup & R. Streit (Eds.), *Developments in School Mathematics Education Around the World*, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA, USA, 514-539.
- Goldenberg, E. P., Harvey, W., Lewis, P., Umiker, R. J., West, J., & Zodhiates, P. (1988). *Mathematical, Technical, and Pedagogical Challenges in the Graphical Representation of Functions*, Education Development Center, Newton, MA, USA.
- Heid, M. K. (1984). *Resequencing Skills and Concepts in Applied Calculus Using the Computer as a Tool*, Doctoral dissertation, University of Maryland, USA.
- Heid, M. K. (1988). Resequencing skills and concepts in applied calculus using the computer as a tool, *Journal for Research in Mathematics Education* 19, 3-25.
- Heid, M. K. & Kunkle, D. (1988). Computer-generated tables: Tools for concept development in elementary algebra, In A. Coxford & A. Shulte (Eds.), *The deas of Algebra, K-12*, 1988 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA, USA, 170-177.
- Hembree, R. & Dessart, D. (1986). Effects of hand-held calculators in precollege mathematics education: A meta-analysis, *Journal for Research in Mathematics Education* 17, 83-89.
- Hosack, J. (1988). Computer algebra systems, In D. A. Smith, G. J. Porter, L. C. Leinbach, & R. H. Wenger, (Eds.), *Computers and Mathematics: The Use of Computers in Undergraduate Instruction*, The Mathematical Association of America, Washington, DC, USA, 35-42.
- Judson, P. T. (1988). *Effects of Modified Sequencing of Skills and Applications in Introductory Calculus*, Doctoral dissertation, University of Texas at Austin, USA.
- Kowszun, J. & Higgs, J. (1986). Algorithms and programming in the secondary mathematics curriculum, *Mathematics in School* 15, 31-33.
- Kramer, E., Hadas, N., & Hershkowitz, R. (1986). Geometrical constructions and the microcomputer, *Proceedings of the Tenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 105-110.

- Lesh, R. (1985). The evolution of problem representations in the presence of powerful conceptual amplifiers, Paper presented at the American Educational Research Association meeting, Washington, DC, USA.
- Lesh, R., Post, T. R., and Behr, M. (1987). Dienes revisited: Multiple embodiments in computer environments, In I. Wirszup & R. Streit (Eds.), *Developments in School Mathematics Education Around the World*, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA, USA, 647-680.
- McArthur, D., Stasz, C., & Hotta, J. Y. (1987). Learning problem-solving skills in algebra, *Journal of Educational Technology Systems* 15, 303-324.
- Maurer, S. B. (1983). The effects of a new college mathematics curriculum on high school mathematics, In A. Ralston & G. S. Young (Eds.), *The Future of College Mathematics*, Springer-Verlag, New York, 153-173.
- Maurer, S. B. (1984). Two meanings of algorithmic mathematics, *The Mathematics Teacher* 77, 430-435.
- Meissner, H. (1987). Schulerstrategien bei einem taschenrechnerspiel, *Journal fur Mathematik-Didaktik* 8, 105-128.
- Mohyla, J. (Ed.) (1985). *The Role of Technology. Theme Group 3: Report. ICME 5*, South Australian College of Advanced Education, Adelaide.
- Noss, R. (1987). Children's learning of geometrical concepts through logo, *Journal for Research in Mathematics Education* 18, 343-362.
- Noss, R. (1988). The computer as a cultural influence in mathematical learning, *Educational studies in Mathematics* 19, 251-268.
- Orzech, M. (1988). Using computers in teaching linear algebra", In D. A. Smith, G. J. Porter, L. C. Leinbach, & R. H. Wenger, (Eds.), *Computers and Mathematics: The Use of Computers in Undergraduate Instruction*, The Mathematical Association of America, Washington, DC, USA, 63-68.
- Palmiter, J. R. (1986) *The Impact of a Computer Algebra System on College Calculus*, Doctoral dissertation, The Ohio State University, USA.
- Papert, S. (1987). Computer criticism vs. technocentric thinking", *Educational Researcher* 16, 22-30.
- Ralston, A. (1985). The really new college mathematics and its impact on the high school curriculum", In C. R. Hirsch & M. J. Zweng (Eds.) *The Secondary School Mathematics Curriculum*, 1985 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA, USA, 29-42.
- Roberts, N., Carter, R., Davis, F., and Feurzeig, W.: (1987), *Power Tools for Algebra Problem Solving (Final Report)*, Lesley College and Bolt, Beranek, and Newman, Cambridge, MA, USA.

- Roberts, N. & Barclay, T. in press. Teaching model building to high school students: Theory and reality, *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*.
- Sandefur, J. T., Jr.(1985). Discrete mathematics: A unified approach, In C.R. Hirsch & M. J. Zweng (Eds.), *The Secondary School Mathematics Curriculum*, 1985 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA, USA, 90-106.
- Sandefur, J. T., Jr. & Vogt, A. (1988). Finite differences: A computer-based alternative to calculus, In D. A. Smith, G. J. Porter, L. C. Leinbach, & R. H. Wenger, (Eds.), *Computers and Mathematics: The Use of Computers in Undergraduate Instruction*, The Mathematical Association of America, Washington, DC, USA, 47-54.
- Scheaffer, R. L. (1987). Statistics and probability in the school mathematics curriculum: A review of the ASA/NCTM/NSF quantitative literacy program, In I. Wirszup & R. Streit (Eds.), *Developments in School Mathematics Education Around the World*, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA, USA, 380-396.
- Schoenfeld, A. H. (1988). Uses of computers in mathematics instruction, In D. A. Smith, G. J. Porter, L. C. Leinbach, & R. H. Wenger (Eds.), *Computers and Mathematics: The Use of Computers in Undergraduate Instruction*, The Mathematical Association of America, Washington, DC, USA, 1-13.
- Schwartz, J. L. (1987). The geometric supposer: Using microcomputers to restore invention to the learning of mathematics, In I. Wirszup & R. Streit (Eds.), *Developments in School Mathematics Education Around the World*, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA, USA, 623-636.
- School Mathematics: New Ideas with Computers:* (1987), National Institute for Educational Research, Tokyo, Japan.
- Swets, J., Rubin, A., & Feurzeig, W. (1987). *Cognition, Computers and Statistics, Software Tools for Curriculum Design*, Bolt, Beranek, and Newman, Cambridge, MA, USA.
- Taiza, N. & Zehavi, N. (1985). Microcomputer-assisted sophistication in the use of mathematical knowledge, *Proceedings of the Ninth International Conference of Psychology of Mathematics Education*, 101-104.
- Tall, D. (1985). Visualizing calculus concepts using a computer, In *The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching*, Institut de Recherches sur l'Enseignement des Mathematiques, Strasbourg, 303-308.
- Terada, F. (1987). Learning mathematics through modern media and the THE system, In I. Wirszup & R. Streit (Eds.), *Developments in School Mathematics Education Around the World*, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA, USA, 576-586.

Terada, F., Hirose, K., & Handa, T. (1985). Towards a self-paced learning support system, In K. Duncan & D. Harris (Eds.), *Computers in Education*, Elsevier Science Publishers, Amsterdam, 39-44.

Thomas, M. O. J. (1987). Algebra with the aid of a computer, *Mathematics in School* 16, 36-40.

Winkelmann, B. (1984). The impact of the computer on the teaching of analysis, *International Journal for Mathematics Education in Science and Technology* 15, 675-689.

Wynands, A. (1984). Rechenfertigkeit und taschenrechner-ergebnisse einer dreijährigen untersuchung in den klassen 7-9, *Journal für Mathematik-Didaktik* 5, 3-32.

Yerushalmy, M. & Houde, R. A. (1986). The geometric supposer: Promoting thinking and learning, *Mathematics Teacher* 79, 418-422.

O autor foi auxiliado na recolha e análise da informação para esta revisão pelas contribuições do grupo temático T2 do ICME VI, organizadores dos subgrupos e muitas outras pessoas que enviaram escritos e perspectivas em resposta a solicitação minha. Especiais agradecimentos são devidos ao Sr. David Dyer que forneceu extensa ajuda na busca e organização da literatura, que se revelou numa pequena montanha de material relacionado com o assunto.

A pesquisa para esta comunicação foi apoiada parcialmente pela United States National Science Founda-

tion. Quaisquer opiniões, conclusões ou recomendações aqui expressas são as do autor e não reflectem necessariamente as opiniões da National Science Foundation.

# A Matemática contará ?

Derek Ball, John Higgs, Adrian Oldknow, Anita Straker, John Wood

Em 1983, a seguir à comunicação do Governo anunciando um prolongamento por dois anos do Programa de Educação em Microelectrónica (MEP), foi organizada pelo Departamento de Educação e Ciência (DES) e pelo MEP uma conferência sobre Currículos em Pendley Manor, no Hertfordshire. O relatório desta conferência, no que respeita à Matemática, publicado na revista *Mathematics in School*, em Março de 1985, dava ênfase ao facto de que a relação especial que existe entre computadores e Matemática não se verificar com outras disciplinas. Esta relação é uma consequência do papel que a Matemática teve no desenvolvimento da tecnologia, em particular dos computadores, e da forma como estes são utilizados para ajudar a resolver problemas de Matemática. Assim, no caso da Matemática, não estamos apenas interessados em ver como a tecnologia nos poderá ajudar a explorar melhor o actual currículo. As máquinas são agora capazes de executar muitas das tarefas que convencionalmente têm sido ensinadas aos alunos. É necessário reflectir permanentemente sobre o que é e o que devia ser a Matemática.

Este relatório contém os resultados duma tal reflexão. Sentimo-nos felizes por nos ter sido dada oportunidade de participar nesta análise, e de dar a conhecer

publicamente os resultados neste artigo, numa altura em que por um lado o MEP estava no fim e por outro lado o Governo anunciava a criação da Unidade de Suporte à Educação em Microelectrónica (MESU). Um grande grupo de pessoas com larga experiência reuniu-se num seminário em Stanhope, no County Durham, para elaborar o relatório. Tomaram parte membros activos das principais associações profissionais: A Associação de Professores de Matemática, a Associação de Matemática, o Instituto de Matemática Aplicada e a Associação Nacional dos Supervisores de Matemática. Do grupo faziam parte professores de escolas primárias, secundárias e superiores, oficiais e particulares, supervisores de autoridades locais de educação, coordenadores do MEP, inspectores e membros de equipas ligadas a projectos de desenvolvimento curricular.

Não necessitamos de começar pelo princípio porque muito já foi dito e escrito sobre o assunto. Receberam-se muitas contribuições escritas que muito agradecemos. Tanto a Associação de Professores de Matemática como a Associação de Matemática realizaram reuniões de preparação para o seminário de Stanhope e contribuíram com importantes documentos. Após quatro dias de debates apaixonados em Stanhope, surgiu enorme

quantidade de material a partir do qual tentámos dar forma a esta reflexão. Este processo foi ao mesmo tempo difícil e demorado, e obrigou a muita consulta e muitos movimentos de vai-vem. Gostaríamos de agradecer a

todos os que contribuíram, quer no conteúdo, quer na sua produção. Em particular, estamos muito gratos ao Departamento de Educação e Ciência e ao programa MEP, por terem tornado possível esta reflexão.

## O lugar dos computadores na educação matemática

### Introdução

Este relatório é o resultado de um seminário, financiado pelo Departamento de Educação e Ciência e que teve lugar em Stanhope, no County Durham, em Março de 1986. Este seminário teve como objectivo emitir um parecer crítico acerca do papel e da importância das novas tecnologias na Educação Matemática. O parecer deveria incluir uma reflexão sobre o modo como os computadores já estão a ser utilizados nas aulas de Matemática, e considerações sobre modos de utilização mais correctos e mais proveitosos num futuro próximo. Devia também fornecer informação, sobre as futuras implicações dos computadores no currículo de Matemática. A lista completa de participantes em Stanhope é dada em apêndice.

Durante os últimos 10 anos os computadores têm vindo a ser considerados um importante recurso das escolas. O número de computadores nas escolas tem aumentado substancial e rapidamente. Professores e educadores deste país têm vindo progressivamente a tomar consciência da importância dos computadores em muitas áreas do currículo, nas escolas do Ensino Primário e do Ensino Secundário. Tem havido iniciativas gover-

namentais importantes, com o objectivo de promover e apoiar a introdução dos microcomputadores nas escolas.

Acolhemos com satisfação estes progressos. Acreditamos que os computadores oferecem grandes oportunidades tanto a quem ensina, como a quem está a aprender Matemática.

É importante que as rápidas mudanças da nossa sociedade, no campo da tecnologia, nos meios de comunicação e no conhecimento, tenham reflexos nas alterações da educação matemática, não só nos conteúdos mas também nos métodos de ensino.

A longo prazo, a divulgação do uso da nova tecnologia implicará mudanças substanciais no currículo de Matemática. Apoiamos os comentários feitos por T. J. Fletcher no documento do DES, *Microcomputers and Mathematics in Schools*, de 1983, quando diz: “as implicações da actual tecnologia na Matemática são tantas, que é difícil fazer uma apreciação equilibrada sem dar a ideia de estar a exagerar”, e ainda “as mudanças que os computadores já provocaram são tão grandes que nos faz falta a existência de um padrão com o qual as possamos comparar”.

Os currículos de Matemática deveriam ter em conta a crescente influência dos computadores e das calcula-

doras, de modo que as oportunidades oferecidas pela tecnologia sejam completamente exploradas.

### A presente situação

Um dos objectivos das recentes iniciativas levadas a cabo pelo Governo é tornar o sistema educacional mais relevante relativamente às futuras necessidades sociais e económicas do país; em particular, o Governo pretende apoiar os sectores do comércio apoiados na informação e as indústrias tecnológicas, e preparar a juventude para a vida numa sociedade cada vez mais "tecnológica".

A Matemática tem um importante contributo a dar, para se atingirem esses objectivos. Os alunos que aprendem Matemática deviam ser capazes de desenvolver capacidades na resolução de problemas, de trabalhar em conjunto e de comunicar conceitos difíceis, de extrair o significado de dados complexos e de apreciar e valorizar os seus próprios processos de aprendizagem. Estilos de ensino que envolvam o uso de microcomputadores podem ajudar enormemente à aquisição destas capacidades de nível mais elevado, que são as que vão ser exigidas no futuro pelas nossas indústrias e, sem dúvida, pelos nossos cidadãos.

Presentemente, só uma minoria de professores de Matemática usam os computadores para apoiar estes estilos de ensino e de aprendizagem. Um estudo recente sugere que aproximadamente três quartos dos professores de Matemática do Ensino Secundário nunca usam ou usam apenas muito raramente o computador no seu trabalho.

Estes professores que pouco ou nenhum uso fazem do computador, deram várias razões para isso. Estas

incluem a falta de *hardware*, a falta de *software*, a falta de formação e o facto de o trabalho envolvendo o uso de computadores não estar no programa. Os computadores têm sido usados principalmente para demonstrações de trabalhos gráficos, estatísticas e cálculo. Só uma pequena parte das escolas inquiridas tinha computadores que estavam constantemente disponíveis, para serem usados como recurso, quando necessário, nas aulas de Matemática.

É provável que a situação nas Escolas Primárias seja ligeiramente melhor. Apesar de cada Escola Primária ter pelo menos um computador, muitas não têm o *hardware* necessário para fazer dos computadores instrumentos diários para aprender Matemática. Mais ainda, um estudo envolvendo 536 Escolas Primárias, em 1985, revelou que, em 70% delas, o uso mais comum dos computadores era para treinar intensivamente as capacidades mais elementares.

Como consequência da nova tecnologia tem havido mudanças significativas, tanto no uso da Matemática na indústria e no comércio, como também nos currículos das disciplinas de Tecnologia, Ciência e Matemática em níveis mais avançados. Estas mudanças implicam a necessidade de mudanças correspondentes no currículo escolar.

Algumas das ideias actualmente exploradas pelos especialistas de informática, como a concepção de sistemas periciais, têm também fortes ligações com a Matemática e, no futuro, muitas poderão encontrar um lugar nos programas escolares de Matemática.

Os responsáveis por iniciativas a nível nacional e pelo financiamento de projectos de desenvolvimento curricular têm posto pouca ênfase, até agora, na intro-

dução dos computadores nas salas de aula onde se ensina a Matemática. Isto é particularmente verdade em aulas do Ensino Secundário.

Há dez anos, a maioria dos professores ligados aos computadores eram professores de Matemática; Matemática e computadores eram entendidos pelos professores responsáveis e administradores, como estando intimamente ligados. No princípio desta década, professores e educadores começaram a perceber que os computadores podiam ser utilizados com êxito para apoiar o ensino de outras disciplinas do currículo escolar. Consequentemente, foram lançados projectos para encorajar os professores de outras disciplinas a usar os computadores e, naturalmente, estes projectos punham pouca ênfase na Matemática. Cursos para professores sobre o uso dos computadores raramente eram destinados a professores de Matemática, e era dado pouco apoio ao desenvolvimento de *software* adequado às aulas desta disciplina.

Entendemos e aceitamos a ideia que conduziu a tal discriminação, mas sentimos agora a necessidade urgente de reconhecer, tanto a importância dos computadores no ensino da Matemática, como as profundas implicações no currículo de Matemática no futuro.

Nos últimos anos, durante os quais os microcomputadores foram introduzidos nas escolas, surgiram várias publicações importantes e influentes no que respeita à Educação Matemática. Estas incluem *Mathematics Counts* (o relatório Cockcroft), *Mathematics from 5 to 16*, um documento visionário do DES (da autoria de Trevor Fletcher) intitulado *Microcomputers and Mathematics in School*, o documento do GCSE3 *National Criteria for Mathematics*, e os programas de Matemática

dos júris de exame do GCSE. Vale a pena notar o que se disse sobre computadores nestas publicações.

O relatório Cockcroft, que foi escrito em 1981, reflecte o facto de só um número limitado de computadores estarem disponíveis nas escolas, na altura em que o inquérito que lhe serviu de base foi realizado. As referências aos computadores estão confinadas num capítulo intitulado *Calculators and Computers*. Neste capítulo diz-se mais sobre calculadoras e ensino de Informática do que sobre o uso dos computadores ligados à aprendizagem da Matemática. Uma edição revista do *Mathematics Counts* diria certamente mais sobre o assunto. Sir Wilfred Cockcroft escreveu no *New Scientist* (4 de Maio de 1985), que “deveríamos ter tomado uma posição diferente... Após o nosso relatório, as escolas introduziram um grande número de microcomputadores nas suas salas de aula... Com a introdução dos microcomputadores é muito mais fácil para o professor realçar as aplicações práticas da Matemática: o microcomputador tornou óbvia a aplicação da Matemática no quotidiano.”

O documento do GCSE *National Criteria for Mathematics* foi publicado em 1985 mas foi redigido muito mais cedo. É de lamentar a quase completa falta de referência ao trabalho com computadores, tanto neste documento como em *Mathematics GCSE: a Guide for Teachers*.

Embora seja verdade que diversas actividades propostas no trabalho do GCSE fornecem boas oportunidades para trabalhar com microcomputadores, na prática os critérios e o programa impedem a introdução de microcomputadores por insistirem em abordagens tradicionais.

*Microcomputers and Mathematics in School* foi publicado em 1983, após um ano de pesquisa, feita por Trevor Fletcher nas escolas. Fez notar a importância que os computadores podem ter na Matemática e deu exemplos de práticas nas escolas. Também chamou a atenção para a quantidade de programação que os alunos faziam nas escolas e, numa altura em que houve alguns debates sobre o seu valor, deu-lhe apoio claro considerando-a como uma actividade matemática.

*Mathematics from 5 to 16*, publicado em 1985, foi um dos primeiros relatórios que defendeu o uso dos computadores em larga escala, mas a referência é tão pequena, que os seus leitores poderiam continuar a ignorar a importância do trabalho que tem vindo a ser feito com os computadores.

Embora a maior parte destas publicações se refira pouco ao papel dos computadores, foi dada atenção e apoio a outra importante corrente que teve início nos anos 50 que defende uma aprendizagem da Matemática activa e mais centrada no aluno. No capítulo "Estilos de aprendizagem", deste relatório, descrevemos como o uso dos computadores ajuda este tipo de mudança no estilo de ensino e aprendizagem.

O relatório da conferência de Pendley Manor, em 1983, intitulado *Mathematics in School*, de Março de 1985, sublinhou:

- a relação privilegiada entre a Matemática e os microcomputadores;
- até que ponto os alunos aprendem ao escrever os seus próprios programas;
- a maneira como uma aproximação algorítmica pode ajudar na compreensão e exploração de novas ideias;

- o valor de certos tipos de *software*, especialmente ferramentas matemáticas, para proporcionar os "ingredientes que faltam", descritos no parágrafo 243 do relatório Cockcroft;
- a necessidade de desenvolvimento de *hardware* e da sua disponibilidade;
- a necessidade de encorajamento por parte das comissões responsáveis pelos exames;
- as implicações na formação inicial e na formação contínua de professores.

O relatório da conferência *Computers in Primary School*, em 1984, acentuou estes pontos de vista mas numa ordem e com ênfase diferentes:

- a primeira e mais importante prioridade (para as Escolas Primárias) devia ser a produção de um conjunto de programas e materiais de apoio, ligados com actividades matemáticas para crianças;
- a segunda prioridade devia ser uma reflexão sobre as diferentes formas de usar o *software* de tipo ferramenta, de modo a alargar as experiências matemáticas das crianças;
- a terceira prioridade seria a investigação no uso de programas simples e pequenos, que poderiam ser desenvolvidos ou adaptados por alunos, de modo a aumentar a sua compreensão matemática.

Durante os últimos cinco anos houve outras publicações significativas.

As actas da Conferência *The Future of A-level<sup>1</sup> Mathematics*, organizada pelo Joint Mathematical Council (JMC) em 1985, incluíam as seguintes recomendações:

- escrever os seus próprios programas ajudaria os alunos na aprendizagem da Matemática;

- algoritmos e Matemática discreta, deviam ser introduzidos no currículo do A - level;
- para encorajar mais investigação e mais resolução de problemas, trinta por cento da avaliação do A - level deveria ser por trabalhos realizados ao longo do ano;
- o actual programa nuclear do A - level deveria ser profundamente revisto.

As publicações do projecto MEP para o Ensino Primário foram elaboradas para apoiar a formação inicial e a formação contínua dos professores. Muitas destas publicações são relevantes para o ensino da Matemática neste nível de ensino: *Primary Maths and Micros*, *Posing and Solving Problems with LOGO*, *Micros in Infant and First Schools* and *Posing and Solving Problems with a Micro* apresentando fortes razões para o uso dos computadores no apoio de investigações, para a programação e para o uso de vários tipos de *software*. O MEP também patrocinou projectos envolvendo a linguagem LOGO. Estes incluem o projecto *Chiltern* sobre LOGO nas Escolas Primárias e o projecto *Capital* sobre LOGO nas Escolas Secundárias. O livro de Beverley Anderson *Learning with LOGO* (Tecmedia, 1986) foi enviado para todas as Escolas Primárias.

O *Secondary Mathematics with Micros Inservice Pack* também foi produzido pelo MEP para apoiar o desenvolvimento de vários tipos de actividades pelos professores. Envolve um conjunto de questões relacionadas com o uso dos computadores na aprendizagem da Matemática, incluindo discussão, visualização geométrica, álgebra, algoritmos, modelização, análise infinitesimal e demonstração.

O MEP também produziu uma colectânea de textos,

publicada pelo Conselho para a Tecnologia Educativa (CET), intitulada *Exploring Mathematics with Microcomputers*.

Tanto a Associação de Professores de Matemática como a Associação de Matemática têm grupos de trabalho que se dedicam aos computadores. A Associação de Professores de Matemática formou o grupo Micro-electrónica na Educação Matemática (MIME) em 1980. O MIME elaborou *Working Notes on Microcomputers in Mathematics Education* em 1981 e posteriormente, ocupou-se especialmente em reflectir sobre as formas como os computadores têm sido usados para apoiar o ensino e aprendizagem da Matemática. Em 1983 foi publicado *Some Lessons in Mathematics with a Microcomputer* que é uma colecção de relatos de aulas com uma disquete de programas. Em 1985 foi publicado *Some More Lessons* contendo maior número de aulas com alunos mais novos do que os anteriormente considerados. Em 1984 o MIME foi responsável pela publicação do *L-A Mathemagical Adventure* e por grande parte do trabalho relacionado com o lançamento do jornal *Micromath*, em 1985. A Associação de Professores de Matemática publicou ainda, em 1984, *Problem-Solving Work Cards* em BASIC; em 1985, foi acrescentado um apêndice em LOGO.

Há agora diferentes grupos de trabalho da Associação de Professores de Matemática dedicados ao LOGO, à utilização da Folha de Cálculo e ao uso de computadores no 6º ano de escolaridade.

A Associação de Matemática possui um subgrupo "Microcomputadores no Currículo de Matemática" que tem estudado o impacto, a longo prazo, dos computadores no currículo de Matemática, a todos os níveis. O

DES patrocinou duas conferências em 1985, donde resultou a publicação de relatórios preliminares para o A-level e para a Matemática na Escola Primária. Educadores com um vasto leque de interesses, comentaram estes relatórios. Uma versão abreviada do relatório do A-level foi publicada na conferência do JMC (já anteriormente mencionada). O subgrupo está a trabalhar num relatório detalhado, para ser publicado em 1988, e também já preparou e coligiu, aproximadamente, 200 comunicações relacionadas com este assunto. Este trabalho foi alargado à faixa etária dos 11 aos 16 anos, numa conferência posterior patrocinada pelo MESU, nos fins de 1986. Em 1985 a Associação publicou 132 pequenos programas para as aulas de Matemática. A Associação de Matemática também tem subgrupos cujo fim é apoiar os professores, que utilizam computadores, tanto nas Escolas Primárias como nas Secundárias, assim como um subgrupo que produz e experimenta o material a ser incluído na publicação *Mathematics Homework with a Microcomputer*.

Em 1984, o MEP criou um painel cujo objectivo era ajudar os professores a usarem o computador em Matemática na Escola Secundária. Este painel produziu o *Secondary Mathematics With Micros Inservice Pack* (mencionado anteriormente) e organizou cursos de introdução ao seu uso, para supervisores das autoridades locais de educação (LEA) e docentes das instituições de formação de professores. O grupo foi responsável pela coordenação do seminário de Stanhope e pela elaboração deste relatório, em colaboração com a Associação de Professores de Matemática e com a Associação de Matemática.

O reduzido uso, até à data, dos computadores no

ensino da Matemática, pode parecer desencorajador. No entanto, se fôr aceite que a inovação educacional é mais lenta que a inovação tecnológica, e que os últimos cinco anos têm sido particularmente difíceis para os professores, então tem que se considerar que muito foi feito. Muitos professores já experimentaram usar o computador nas aulas de Matemática, de diferentes formas. O que agora é preciso, é apoio e recursos para cimentar o bom começo que foi feito.

### Atitudes relativamente à Matemática

Há características dos computadores que facilitam uma abordagem activa e exploratória da Matemática. Pensamos que nos casos em que os professores exploraram estas características, isto constituiu a principal razão da crescente confiança e gosto por parte dos alunos.

Pretendemos aqui salientar o potencial que os computadores representam, no aumento da confiança e do gosto dos alunos pela Matemática, pois pensamos que é esse um dos maiores problemas que os educadores de Matemática enfrentam. A preocupação causada pela falta de licenciados em Matemática e pela falta de competência dos que terminam a escola, reforça a necessidade de aumentar a confiança e a competência em Matemática, entre os alunos das escolas, quer Primárias, quer Secundárias.

Muitos professores de Matemática competentes passaram para o ensino da Informática e para carreiras ligadas aos computadores fora do ensino. Isto reduziu o número de professores de Matemática competentes, tanto nas Escolas Primárias como nas Escolas Secundárias. Uma das razões pode ser o facto dos profes-

sores interessados em utilizar os computadores, terem normalmente mais acesso a eles se deixarem o ensino.

Uma parte considerável dos recursos informáticos de muitas Escolas Secundárias é quase exclusivamente usada para cursos de formação em Informática, e consequentemente não há recursos suficientes disponíveis para as aulas de Matemática. Se se pretende atrair

professores de Matemática competentes, especialmente os que têm experiência e interesse pela inovação, então o currículo de Matemática deverá ter em conta as actuais utilizações dos computadores. É necessário que existam computadores disponíveis em número suficiente, de modo que os professores sintam ser viável usar nas aulas as suas boas ideias.

## Estilos de aprendizagem

### Aprendizagem investigativa da Matemática

A consequência mais importante do uso dos computadores na educação matemática, surge talvez da forma como podem ser usados para apoiar os alunos que fazem a sua própria Matemática na sala de aula. O método “investigativo” ou de “resolução de problemas”, começou a ter grande aceitação, pelo facto deste estilo de trabalho ter sido defendido no *Mathematics Counts*, no relatório do Cockcroft, e no *Mathematics from 5 to 16*. Este estilo de trabalho encoraja os alunos a desenvolver a sua própria Matemática, através da formulação e resolução de problemas, por eles escolhidos. Há também uma crescente preocupação quanto aos aspectos sociais e afectivos da aprendizagem da disciplina, ajudar os alunos a ter atitudes positivas relativamente à Matemática, como uma agradável e útil actividade intelectual, e

encorajar a cooperação e a comunicação entre eles.

Não devem ser subestimadas as dificuldades que os professores podem ter em encorajar e apoiar um estilo investigativo de aprendizagem da Matemática, nas suas aulas. O facto dos alunos aprenderem de acordo com as suas próprias maneiras de ser traduz-se numa maior liberdade, o que pode criar aos professores, em turmas grandes, problemas de gestão do espaço-aula.

- Pode ser difícil pôr um problema que suscite o interesse dos alunos, pois os seus interesses e as suas capacidades matemáticas diferem em grande escala.

- Muitos professores sentem a falta de recursos na sala de aula para apoiar um trabalho de tipo “investigativo”. É essencial que haja uma vasta gama de recursos, pois os alunos que colocam e resolvem problemas, necessitam de um estímulo dado por materiais práticos adequados.

- Muitos alunos, ao colocar e ao resolver os seus

problemas, precisam de ter a garantia de que as abordagens que estão a adoptar são as apropriadas. Podem apenas precisar da confirmação de que fizeram bem a contagem do número de vértices de um poliedro. Levando ao outro extremo, podem sentir necessidade de falar longamente com um professor ou com um colega. É difícil criar um ambiente na sala de aula que permita responder a uma tão grande variedade de necessidades dos alunos.

- Alguns professores que proporcionam investigações ou resolução de problemas aos seus alunos, pretendem dar-lhes a possibilidade de serem eles próprios a formular e generalizar problemas de Matemática. Mas os alunos podem, a princípio, achar estas actividades difíceis e estranhas. Há situações que justificam uma investigação precisamente pelo facto de levarem os alunos a sair do problema originalmente posto e a trabalhar em novos problemas inventados por eles próprios.

Alguns dos atributos dos computadores revelam-se de grande utilidade, na medida em que ajudam a ultrapassar alguns dos problemas que os professores têm, quando usam métodos mais tradicionais. Os atributos dos computadores dependem do *software* utilizado, mas tanto os computadores como as calculadoras, têm normalmente os seguintes atributos:

- Computadores e calculadoras dão respostas; fornecem um *feedback* imediato aos utilizadores, permitindo-lhes fazer novas tentativas para alcançar o resultado desejado, após considerar na razão pela qual a acção anterior não era apropriada. Isto pode ajudar a que conceitos matemáticos abstractos e complexos se tornem mais acessíveis.

- Os computadores e as calculadoras desenvolvem a curiosidade; a experimentação sugere muitas vezes, aos alunos, novos problemas para resolver, particularmente se o contexto onde estão a trabalhar envolve gráficos, diagramas, modelos ou figuras. É comum dizer-se que os alunos “brincam” com o computador e com as calculadoras; essa brincadeira, mesmo quando se trata de jogos semelhantes aos comerciais, aumenta a curiosidade dos alunos e encoraja-os a pôr e resolver os seus próprios problemas.

- A maior parte das utilizações dos computadores e das calculadoras, envolve automaticamente os utilizadores no pensamento matemático. O utilizador comunica com um computador ou com uma calculadora por meio de uma linguagem formal, simbólica e essencialmente matemática. Isto aplica-se não só aos programadores mas também aos que utilizam programas já feitos. Os alunos que utilizam os computadores e as calculadoras para resolver problemas, precisam frequentemente de fazer planos, conceber algoritmos e estar conscientes da necessidade de rigor matemático.

Existem diferentes utilizações dos computadores na educação matemática, mas nem todas têm o mesmo valor, quanto à ajuda que proporcionam aos alunos na investigação e resolução de problemas. Por exemplo, o ensino programado pode ou não ajudar os alunos a adquirir conhecimentos matemáticos, mas em nada contribui para que os alunos se tornem aprendizes activos. Por outro lado, as aulas que envolvem o uso de programas de desenho de gráficos, programas de investigação e mesmo jogos de aventuras, são exemplos de como os alunos e professores usam o computador para

formular e resolver problemas de Matemática, e para descobrir uma necessidade e uma aplicação para novos conceitos matemáticos.

## Programação

Grande parte dos resultados da investigação, no que respeita a alunos que utilizam os computadores na aprendizagem da Matemática, provêm de estudos que implicam a utilização de linguagens de programação, pelos alunos. Uma linguagem de programação é um conjunto de palavras e uma sintaxe associada, usadas de forma que os computadores dêem determinados resultados. Programar significa combinar essas palavras num programa de computador que resolve um determinado problema; pode ser um processo difícil e complexo. Observar os alunos a programar é uma estratégia útil para tomar consciência de alguns dos atributos mais significativos dos computadores.

No ensino da Matemática, uma ênfase crescente tem vindo a ser dada à aplicação das capacidades adquiridas, à resolução de problemas e a actividades exploratórias. O computador é uma importante ferramenta para suporte destas actividades, e será vantajoso que os alunos sejam capazes de usar programas adequados e de escrever ou modificar programas em linguagens de programação adequadas. Há testemunhos de uso proveitoso de LOGO e de BASIC feito nestes moldes, por alunos. Tendo em vista o crescente poder dos microcomputadores, podemos prever o desenvolvimento de linguagens de programação que sejam fáceis de aprender, que permitam aos alunos exprimir com facilidade as suas ideias

matemáticas e que sejam extensíveis. A distinção entre uma linguagem de programação e as aplicações informáticas é cada vez menos clara, e as conclusões tiradas da observação de crianças a programar, aplicam-se de igual modo a outras utilizações do computador.

Muitas linguagens já mostraram o seu valor na aula de Matemática. Nelas estão incluídas o LOGO, o BASIC e o PROLOG. Presentemente, estas linguagens ainda estão em fase de desenvolvimento. Num futuro próximo, os meios de controlar e comunicar com os computadores combinarão as melhores características das linguagens de hoje em dia, com as melhores características dos sistemas operativos. As crianças terão então acesso a uma vasta gama de utilitários matemáticos. É importante que orientemos, avaliemos e influenciemos o desenvolvimento destas linguagens.

O relatório *Pendley Manor* sugere que “o estudo dos algoritmos e procedimentos represente não só uma extensão da Matemática, como uma nova maneira de ver o actual currículo. Além disso, uma abordagem algorítmica constitui um poderoso facilitador do desenvolvimento da compreensão da Matemática, pelas crianças”.

Um algoritmo pode ser descrito como uma receita, definida numa linguagem precisa, para resolver um problema específico ou uma série de problemas, e que após um número finito de passos, conduz a uma solução. Uma linguagem de programação é, entre outras coisas, uma caixa de ferramentas contendo um conjunto de peças normalizadas com as quais se podem construir algoritmos. Assim, a existência do computador, foca mais a atenção na criação e modificação de algoritmos,

do que na sua simples execução. No futuro, o tipo de pensamento associado com a análise dos algoritmos pode exercer influência em alguns aspectos dos currículos de Matemática.

A ideia de que “compreendes um pouco de Matemática desde que o ensines ao teu computador” merece maior desenvolvimento e pesquisa nas salas de aula.

Enquanto programam, os alunos colocam e resolvem problemas, concebem, experimentam e corrigem algoritmos, e confrontam-se com conceitos fundamentais da Matemática, como variáveis e funções, e representação de dados.

Os alunos que programam, necessitam frequentemente de resolver problemas específicos de Matemática. Igualmente, ao introduzir novos conceitos matemáticos na aula, os professores podem fazer uso das capacidades de programação dos alunos. Os professores que usam esta abordagem, envolvem os alunos mais activamente na aprendizagem, do que aqueles que utilizam métodos mais tradicionais.

A programação tem sido usada de diferentes maneiras para apoiar a aprendizagem da Matemática. Dão-se aqui dois exemplos.

(A) O primeiro, de um artigo do *Mathematics in School* mostra como um simples algoritmo, pode despoletar o desenvolvimento de ideias sobre juros compostos. Ao usar e adaptar o algoritmo, os alunos têm a oportunidade de experimentar e desenvolver as suas próprias ideias.

Considere-se este simples algoritmo para calcular juros compostos:

```

INPUT A R
REPEAT
    Find R% of A and call this I
    Add I on to A
    Keep the count...
UNTIL You have done it enough times
PRINT A

```

O algoritmo pode ou não, ser executado numa calculadora ou num computador. De qualquer modo pode ser experimentado de várias maneiras óbvias (para além de um número infinito de maneiras menos óbvias):

(i) Trocando a instrução REPEAT com a linha a seguir, sobressai a diferença entre juros simples e juros compostos.

(ii) Combinar os dois primeiros passos do ciclo numa simples multiplicação, ocorrerá naturalmente a diferentes alunos, em diferentes estádios. Isto pode conduzir à compreensão da razão pela qual diminuir de 10% não é o inverso de aumentar de 10%

(iii) O algoritmo (por exemplo, uma versão BBC BASIC ou uma versão de Folha de Cálculo) pode ser usado para mostrar o crescimento exponencial da soma envolvida. O facto dos alunos experimentarem e terem *feedback* instantâneo deste programa pode ajudá-los a ter uma ideia muito mais significativa do que se lhes for apresentada uma fórmula completamente acabada.

(B) No segundo exemplo, tirado do *Secondary Mathematics with Micros Inservice Pack* do MEP, um professor descreve como duas alunas de 12 anos, usando LOGO, foram encorajadas a estabelecer os seus próprios objectivos e a desenvolver estratégias para os atingir.

“Vamos agora fazer o laço girar!”

Não sabia como reagir quando a Annette e a Luella me revelaram os seus planos. Há seis semanas que aprendem LOGO, e até esta altura todo o trabalho das aulas se reduziu a fazer figuras estáticas e modelos. Respirei fundo e tentei não pensar em todos os problemas que teriam de enfrentar. Se o meu objectivo é o de dar às crianças um controlo completo do seu trabalho, então tenho de aproveitar todas as oportunidades para as encorajar a desenvolverem as suas próprias ideias.

As duas raparigas estão no 1º ano da Escola *Trinity* em *Warwickshire*. Aprenderam LOGO, como parte da Matemática, e já tinham passado algum tempo desenhando *Dusty Bin* no ecrã, quando me comunicaram as suas intenções.

O problema posto pelas alunas conduziu a um extenso trabalho de programação.

As linguagens de programação podem também ser usadas por professores e alunos, como fazendo parte das estratégias convencionais de aprendizagem, contribuindo na aquisição de conceitos ou na investigação. Podemos encontrar vários exemplos no *Exploring Mathematics with Microcomputer* (CET 1986) do MEP. Estes exemplos sugerem estratégias nas quais a programação pode lançar uma nova luz ao presente currículo e apoiar uma aprendizagem activa.

### Packages de Software

Não é só a programação que pode ser usada para apoiar a aprendizagem da Matemática. As ferramentas informáticas também podem ser usadas de diferentes maneiras.

Dão-se aqui dois exemplos. O primeiro é um extracto de um artigo do jornal *Micromath* que descreve como um grupo de jovens de 13 anos utiliza uma Folha de Cálculo, com o objectivo de encontrar um cubo com volume de  $15 \text{ cm}^3$ . Este exemplo ilustra como algumas ferramentas “profissionais” podem ser aplicadas a situações educativas de uma forma adequada. O quadro mostra como uma Folha de Cálculo foi utilizada para este fim e o parágrafo posterior, tirado do artigo, descreve o método adoptado para resolver o problema.

	A	B	C	D	E	F
1			VOLUMES DE CUBOS			
2						
3	ACRÉSCIMO					
4		1				
5						
6		COMP.	LARG.	ALT.	VOL.	
7		[1]	1	1	1	
8		2	2	2	8	
9		3	3	3	27	
10		4	4	4	64	
11		5	5	5	125	
12		6	6	6	216	
13		7	7	7	343	
14		8	8	8	512	
15		9	9	9	729	
16		10	10	10	1000	
17						

Pedi às crianças sugestões para resolver o problema, dado que os únicos valores que podiam ser alterados eram o valor do acréscimo e o primeiro valor do comprimento, porque todos os outros eram resultados de fórmulas. Tiveram imensas ideias sensatas, e chegaram, em certos

casos, a um método sistemático. Como a resposta estava entre 2 e 3 era necessário investigar comprimentos de arestas que estivessem nesse intervalo. O número em B7 foi mudado para 2 e o acréscimo para 0.1. Podia-se então ver que a resposta estava entre 2.4 cm e 2.5 cm. Portanto, 2.4 foi movido para o princípio da coluna do comprimento, e o acréscimo foi mudado para 0,01. Um comprimento de aresta de 2.46 cm originou um volume de 14.8869 cm<sup>3</sup>, e um comprimento de 2.47 cm originou 15.0692 cm<sup>3</sup>.

O extracto que se segue, tirado de outro artigo do *Micromath*, descreve como um jovem professor usou o programa COUNTER com toda a turma, e também como grupos de alunos, por si próprios, usaram o mesmo programa.

Para começar, mostrei o programa a um grupo de crianças mais velhas e joguei alguns jogos, só para as iniciar. Desde o início, era claro que os seus interesses se baseavam na capacidade do programa para contar grandes números. 'Não, não comece outra vez, Oh!' diziam eles quando eu repetia uma sequência com razão 3, pensando que isso ajudaria a contar de 3 em 3. Claro que eles têm toda a razão. É tão fácil ou tão difícil adicionar 3 a 4791 como a 1, uma vez que se tenha o conceito, e os números grandes são mais engraçados de dizer. Porque é que nós limitamos as crianças a operações com as unidades e dezenas durante tanto tempo, quando a sua imaginação as leva aos milhares e milhões?

Com as crianças a controlar, COUNTER começa a mostrar as suas potencialidades. Escrevi todos os comandos de opção num cartão para ficar ao lado do computador. Três ou quatro crianças trabalharam juntas durante o tempo que quiseram (normalmente 1/2 hora). A maior parte das crianças queria que aparecessem números muito

grandes, tão rapidamente quanto possível. Depressa se aperceberam que a razão não precisava de ser um número menor que 10.

As crianças mais novas quiseram logo ter acesso ao novo programa. Mais uma vez, comecei com uma demonstração que prendeu completamente a sua atenção. Gostaram de contar em voz alta com a velocidade 4, e depois tentavam acompanhar a contagem quando o ecrã estava encoberto. 'Contará para trás?', queriam eles saber. 'Talvez possamos escrever Passo -1'. Só alguns deles tinham já usado o símbolo de subtração, mas esta provou ser uma forma efectiva de o introduzir. Agora alguns trabalham sozinhos com o programa, e é este grupo mais novo quem mais aprecia o seu aspecto musical.

### Atributos do *software*

Para impulsionar de uma forma eficaz a aprendizagem da Matemática, tanto as ferramentas informáticas como as linguagens de programação necessitam de ser bem concebidas. Algum *software* é demasiado pobre para permitir que os alunos explorem as situações à sua maneira; outro é demasiado difícil de usar, e os alunos dispendem mais esforços aprendendo a usá-lo do que a aprender Matemática. É necessário haver mais investigação dos atributos que são considerados mais úteis à aprendizagem, tanto no que se refere ao *software* como às linguagens de programação.

O computador só se tornará uma componente importante da aprendizagem, se o *software* disponível para os alunos for cuidadosamente escolhido. Grande parte do *software* disponível é de pouca utilidade, o que leva muitos professores a duvidar da utilidade dos computadores na educação.

É importante que as organizações nacionais que estão ligadas ao desenvolvimento de novo *software*, se debrucem sobre as condições necessárias para que este seja útil a quem aprende, tendo em consideração as utilizações que têm sido dadas ao *software* já existente.

Os professores que usam *software* nas suas aulas têm de escolher não só o *software* a usar, mas também o uso que lhe devem dar. Alguns tipos de *software* são difíceis de avaliar à primeira vista. É fácil recusar um programa por ter poucas possibilidades, e mais tarde descobrir maneiras de o utilizar que fazem com que passe a ter grande valor. Para os professores é útil ter oportunidade de experimentar o *software* com outros colegas, antes de o usarem com os seus próprios alunos.

O *software* mais útil, tanto para a Matemática como para outras disciplinas, tem as seguintes características:

- É poderoso; os alunos ao usarem o *software*, descobrem conceitos importantes e são encorajados a usar estes conceitos para conseguirem resolver problemas.
- É acessível; mesmo os principiantes podem pô-lo a funcionar, e encontrar nele aspectos que desejem desenvolver.
- É controlado pelo aluno; os alunos podem escolher os problemas que pretendem trabalhar, e podem decidir o que é que constitui uma solução para esses problemas. O *software* que apresenta um problema específico para investigar deverá, pelo menos, permitir que os alunos escolham os seus próprios métodos de resolução.

A produção de um grande número de programas diferentes pode não ser adequada a uma política nacional de desenvolvimento de *software*. Muitas actividades interessantes feitas pelos alunos nas aulas de Matemática podem basear-se num pequeno número de programas

poderosos. Linguagens de programação, programas de construção de gráficos, bases de dados e folhas de cálculo, são precisamente alguns dos tipos de *software* que podem ser usados de muitas e diferentes maneiras. É necessário haver mais investigação sobre as vantagens de utilização de *software* deste género. Tal investigação não só ajudará os professores a usar o *software* com bons resultados, como assegurará que os seus produtores terão em conta as características que virão provavelmente a torná-lo mais útil.

## Sexo

Há provas de que apenas vinte por cento dos jovens que aceitam a oportunidade de trabalhar com computadores, depois de acabarem a escola, são raparigas. Há diferentes explicações possíveis para este facto; uma delas é que as razões culturais podem afastar do computador tanto alunas como professoras.

As expectativas dos professores são transmitidas de uma forma directa ou de uma forma subtil. Isto inclui as palavras que os professores usam, a sua entoação e gestos. Os professores mostram o que pensam dos seus alunos através da forma como os tratam; um professor pode, por exemplo, mostrar espanto com o sucesso de um determinado aluno. É provável que estas expectativas sejam responsáveis pela existência de atitudes negativas por parte das raparigas, relativamente aos computadores. É aconselhável que os professores estejam conscientes deste facto.

O meio em que os alunos trabalham afecta muitas vezes as suas atitudes em relação aos projectos que estão

a desenvolver. A sala dos computadores pode ser longe da sala onde a aula de Matemática é normalmente dada, e os ecrãs podem estar dispostos de tal maneira que os alunos sintam que o seu trabalho está a ser vigiado. Não é provável que um ambiente de trabalho possa ser tão estimulante como uma aula bem planeada e bem equipada, onde os alunos estejam habituados a trabalhar em Matemática, e onde os computadores estejam juntamente com outros recursos, num canto atractivo, e colocados de tal maneira que os seus utilizadores possam escolher quando querem trabalhar com outros ou quando preferem trabalhar sòzinhos.

Existem outros aspectos do ambiente de aprendizagem que também podem ser significativos. Muitos alunos, de ambos os sexos, ficam mais interessados pelo trabalho com computadores se as estratégias de aprendizagem forem de cooperação, do que se forem de competição.

Muitos alunos, dos dois sexos, ficam mais motivados quando têm liberdade de escolher os seus próprios objectivos. A investigação da utilização de LOGO nas aulas de Matemática revelou que as raparigas podem ficar tão entusiasmadas com a programação como os rapazes, desde que lhes seja permitido fazer o que quiserem, e fazê-lo à sua maneira.

Provavelmente, o exemplo tem influência. As crianças na Escola Primária precisam de ver que os professores responsáveis pelos computadores e que os utilizam são também do sexo feminino. Nas Escolas Secundárias é aconselhável que os computadores não sejam vistos como reservados aos professores do sexo masculino.

## Professores e salas de aula

As oportunidades de aprendizagem que são dadas aos alunos, não dependem apenas de uma quantidade de computadores adequada e de uma escolha correcta de *software*, mas também do ambiente de aprendizagem criado pelos professores.

Uma das implicações mais claras da investigação feita recentemente, na utilização do LOGO e não só, é que o professor é uma peça essencial em qualquer ambiente de aprendizagem com computadores. Esta conclusão, aparentemente óbvia, necessita de ser reforçada, uma vez que alguns educadores parecem acreditar que os computadores podem ser capazes de substituir os professores. A experiência dos professores é essencial para assegurar que as actividades levadas a cabo pelos alunos são adequadas à sua aprendizagem. Os computadores não podem substituir os professores, mas podem ajudá-los a desempenhar um maior número de papéis. Alguns professores parecem ser capazes de transferir uma maior responsabilidade na aprendizagem para os próprios alunos, quando usam os computadores nas suas aulas. Por vezes os professores optam por trabalhar como "colegas" dos alunos, envolvendo-se nas mesmas actividades que eles. Mesmo quando os professores que usam computadores, decidem seguir abordagens mais didácticas, há frequentemente mudanças subtis no papel que adoptam: têm tendência a pôr perguntas mais frequentes e mais exigentes, e estão preparados para esperar mais tempo pelas respostas. Assim, o uso de computadores pode encorajar os professores a introduzir novos métodos no seu ensino, podendo consequentemente usar uma maior variedade de métodos,

mesmo nas ocasiões em que o computador não está a ser usado.

Outros aspectos da influência da sala de aula na aprendizagem: o ambiente físico, o ambiente social e o grau em que os alunos são encorajados a cooperar e a partilhar ideias. Como os computadores passam a fazer parte do contexto da aprendizagem, é aconselhável ter em consideração quão importante é para os alunos terem

acesso aos computadores, sempre que acharem útil. Nas Escolas Primárias, os computadores necessitam de estar na sala ou em espaços normais de trabalho e não nos corredores ou na biblioteca. Nas Escolas Secundárias, os computadores devem ser postos em salas vulgares: não é suficiente que estejam à disposição em laboratórios de computadores.

## A aula de Matemática

### Introdução

Como consequência da introdução dos computadores nas escolas, muitas mudanças são agora possíveis no currículo de Matemática, algumas das quais certamente inevitáveis. Surgem portanto algumas questões importantes para dar resposta. Será mesmo necessário alterar o currículo? Queremos mudanças e, em caso afirmativo, porquê? Quais as consequências da alteração do currículo, na avaliação, na formação contínua dos professores, nos recursos da sala de aula, e na formação inicial? Como será o currículo no ano 2000?

Várias publicações têm tentado dar resposta a todas ou algumas destas questões. Alguns destas publicações foram anteriormente mencionadas neste relatório.

A divulgação do uso das novas tecnologias irá implicar, a longo prazo, alterações substanciais no currículo

de Matemática, (e este tem de ser permanentemente objecto de reflexão). Estas mudanças levarão à inclusão de alguns tópicos até agora não incluídos, à exclusão de outros, e a reavaliar a ênfase e a ordem dada a muitos dos conteúdos actuais. Os novos tópicos incluirão novas técnicas para a resolução de certos tipos de problemas.

A introdução dos computadores nas aulas de Matemática irá afectar o currículo de diferentes modos. Em particular, há implicações:

- nos conteúdos, nos métodos utilizados pelos professores, e nas atitudes dos alunos face à Matemática;
- na importância relativa dos diferentes assuntos no currículo de Matemática;
- na ordem pela qual os conceitos matemáticos são introduzidos;
- no modo como os conceitos matemáticos são apresentados e abordados;

- na medida em que o currículo de Matemática é integrado com o currículo de outras disciplinas;
- na organização do currículo;
- no modo como é feita a avaliação em Matemática.

### Conteúdo e métodos

Verifica-se uma crescente convicção de que uma maneira de melhorar de forma significativa a aprendizagem da Matemática é encorajar os alunos a investigar e explorar ideias matemáticas e fazer uso das mesmas relações matemáticas numa variedade de diferentes contextos. Estas ideias foram exploradas com detalhe no capítulo anterior.

Na descrição de um currículo de Matemática é importante ter presente, não só a lista de conteúdos que irão ser ensinados, mas também o que os alunos poderão aprender ao trabalhar estes conteúdos. Um programa de Matemática inclui itens que descrevem um conhecimento específico ou uma aptidão, tal como "máximo divisor comum de dois números". Mas pode também incluir itens que descrevem formas de trabalho (incluindo a capacidade de aprendizagem dos alunos, a capacidade de tirar prazer dessa aprendizagem e de comunicar aos outros o que aprenderam). Um exemplo destes itens é "analisar dados e construir hipóteses". Não tem sentido reservar determinados períodos da aula para que os alunos aprendam maneiras de trabalhar. Esta aprendizagem ocorre porque os professores a têm em conta quando decidem que métodos usar para ensinar determinados conhecimentos e determinadas aptidões específicas.

Antigamente, era comum considerar um currículo de

Matemática como uma listagem de conhecimentos específicos e de aptidões a adquirir, sendo tacitamente assumido que seriam aprendidas, ocasionalmente, maneiras de trabalhar adequadas. Mais recentemente, têm sido feitas tentativas no sentido de se ser explícito acerca dos processos-chave envolvidos na actividade matemática. Este assunto é abordado, tanto no relatório Cockcroft como na publicação da DES, *Mathematics from 5 to 16*.

O uso de computadores nas aulas de Matemática tem uma ligação directa com a aprendizagem de formas de trabalho e também com a aprendizagem de aptidões específicas. Os alunos que utilizam o computador estão muitas vezes envolvidos, simultaneamente, nos dois tipos de aprendizagem. Por exemplo, um aluno que utiliza o computador para resolver um problema prático pode estar a aprender procedimentos e algoritmos, enquanto aprende a aplicar a Matemática no contexto da vida real. Reciprocamente, um aluno que utiliza um gráfico para estudar a equação de uma recta, pode simultaneamente aprender a pôr hipóteses, a fazer generalizações e a comunicar aos outros, de uma forma clara, conceitos matemáticos.

Nem tudo o que é ensinado necessita de ser radicalmente alterado. No trabalho com números, entre os itens que vão manter a sua importância, quer no Ensino Primário quer no Ensino Secundário, conta-se a compreensão do valor de posição, a capacidade de estimar e a capacidade de decidir se uma resposta ou um conjunto de dados são ou não correctos. Há jogos e actividades, apresentados por meio de programas de computadores, que contribuem para que os alunos desenvolvam a compreensão destas ideias. Alguns jogos são melhores

quando apresentados em computador; a utilização do computador permite que certos aspectos dos jogos sejam explorados, tornando-os mais interessantes ou mais educativos. Existem no entanto certos jogos que são mais interessantes se o computador não fôr utilizado. Os professores podem fazer pequenos programas que podem ser usados para facilitar a aprendizagem de certos tópicos do currículo de Matemática, tanto no Ensino Primário como no Ensino Secundário.

Por outro lado, a possibilidade de utilização de calculadoras e computadores tem conduzido a que se reconsiderem os tópicos incluídos no currículo de Matemática. Fizeram-se experiências no sentido de aumentar a ênfase a dar a alguns assuntos e no sentido de introduzir outros completamente novos.

Entre estes incluem-se:

- procedimentos, algoritmos e programação;
- técnicas de iteração numérica, como por exemplo, adivinhar um número de uma forma sistemática;
- estatística e probabilidades;
- teoria dos números, que se torna mais acessível quando os computadores se utilizam para gerar modelos e procurar números que possuam determinadas propriedades;
- outros aspectos da Matemática discreta;
- matrizes e vectores, que são usados tanto para armanezar dados em computador, como para obter, também em computador, desenhos e representações de objectos a três dimensões.
- vários assuntos de geometria que podem ser investigados mais rapidamente quando os desenhos são feitos por computador.

Pode-se esperar uma crescente utilização do computador nas abordagens numéricas e gráficas de certos assuntos, como seja a Análise Infinitesimal.

O próximo relatório sobre currículo, da Associação de Matemática, apresentará uma justificação e esclarecimentos mais completos para a razão da introdução destes e de outros assuntos. Não está no âmbito deste relatório dar explicações detalhadas de como podem evoluir, através de experiências adequadas, os conceitos entre os 5 e os 18 anos. Contudo, existem descrições pormenorizadas de actividades, com alunos de todos os níveis etários, relacionadas com certos assuntos, tais como estatística, procedimentos e algoritmos (incluindo programação), e técnicas de iteração.

O currículo escolar também necessita de ser alterado para dar resposta às mudanças na sociedade, à prática industrial, às disciplinas científicas e à própria Matemática.

Os alunos precisam, cada vez mais, de desenvolver aptidões para trabalhar com notações matemáticas e com símbolos. Necessitam destas aptidões para os ajudar a interpretar resultados obtidos pelos computadores e calculadoras, e para lhes permitir transformar expressões de forma a poderem ser comunicadas às máquinas.

Com a utilização dos computadores, é agora possível ensinar a construir modelos matemáticos, o que desde há muito tempo tem vindo a ser considerado desejável integrar no currículo.

Aqueles que recomendam que devem ser feitos acréscimos ao currículo, deverão ter em consideração a necessidade de ser indicado, de uma forma explícita, a maneira de encontrar o tempo adicional requerido.

Deveria haver uma redução substancial no tempo gasto a ensinar e a praticar as numerosas técnicas rotineiras de cálculo com papel e lápis, que agora podem ser executadas mais facilmente utilizando uma calculadora. Isto inclui, tanto a nível do Ensino Primário como nos níveis seguintes, cálculo envolvendo números inteiros, fraccionários e decimais. Em grande parte, o mesmo se aplica também, por exemplo, às regras de derivação e integração aprendidas no âmbito da Análise, no *A-level*. Alguns destes assuntos, embora não devam desaparecer completamente do currículo, deveriam ser tratados de um modo completamente diferente e de maneira a que, na maioria dos casos, não requeressem tanto tempo como presentemente.

### Ênfase

Agora que temos ao nosso alcance computadores e calculadoras, a ênfase dada a diferentes aspectos de um determinado assunto pode ser alterada. Por exemplo, a existência de programas de desenho de gráficos põe de parte a necessidade dos alunos desenharem os seus próprios gráficos. Isto permite-lhes concentrarem-se na interpretação ou análise dos dados dos gráficos, com o fim de investigar o comportamento de diversas relações e funções.

Torna-se cada vez mais difícil decidir quais os aspectos a que deve ser dada maior ênfase no tratamento de um dado assunto, tendo em vista a variedade de poderosos programas utilitários que cada vez mais se encontram à nossa disposição. Um desses utilitários é a Folha de Cálculo. A Folha de Cálculo permite aos utilizadores

armazenar dados e definir fórmulas que calculam resultados a partir desses dados. Os utilizadores podem, facilmente, modificar os dados armazenados; quando isso acontece, as correspondentes alterações dos resultados são automaticamente efectuadas.

Outros utilitários com interesse são os sistemas matemáticos de manipulação simbólica, que são uma espécie de sistemas periciais que podem efectuar todos os tipos mais comuns de manipulações algébricas avançadas. Por exemplo, as fórmulas podem ser introduzidas e manipuladas (expandidas, factorizadas, integradas, diferenciadas). Ainda outros utilitários são os programas de gráficos com os quais se podem desenhar gráficos, curvas, superfícies e sólidos.

Alguns destes utilitários poderão necessitar de ser modificados, antes de serem difundidos pelas escolas, mas em princípio proporcionam novas maneiras de abordar e de aplicar determinados aspectos da Matemática. Apesar destas ferramentas serem na sua maioria relativamente recentes e dos professores apenas terem começado a utilizá-las nas aulas há pouco tempo, é já evidente que, de uma maneira geral, têm um impacto considerável, tanto nos conteúdos, como nas estratégias adoptadas no ensino/aprendizagem da Matemática nas escolas. Há já à venda calculadoras de bolso que podem efectuar todos os cálculos algébricas requeridos pelos programas do *O-level* (incluindo a resolução de equações quadráticas e de sistemas de equações lineares). Há também um programa de computador, disponível nalgumas marcas de microcomputadores muito difundidas, que pode efectuar todo o cálculo (integração, derivação, expressões trigonométricas, matrizes e vectores) requerido pelo programa do *A-level*.

## Sequência de Aprendizagem

Em casa, os alunos são constantemente confrontados com informação que lhes é apresentada de uma forma diferente daquela que lhes é apresentada na escola. A televisão, a rádio e a imprensa utilizam gráficos e tabelas, representações a duas dimensões de objectos tridimensionais, percentagens e câmbios. De uma forma semelhante, objectos tais como relógios digitais, rádios portáteis, vídeos, calculadoras e computadores, apresentam a informação usando, por exemplo o sistema das 24 horas, o ponto decimal e a notação científica.

Alguns alunos que usam computadores nas escolas, estão a ter contacto com muitos conceitos matemáticos mais cedo do que anteriormente. Por exemplo, os alunos podem utilizar: ângulos quando se divertem com brinquedos telecomandados e quando programam em LOGO; coordenadas quando disputam certos jogos de computador e quando fazem programas em BASIC para desenhar figuras; variáveis quando usam a Folha de Cálculo e quando programam; e a recursão quando programam, especialmente em LOGO.

Dentro de um determinado assunto, é possível alterar a ordem pela qual os conceitos são apresentados aos alunos. Por exemplo, o desenho de gráficos em computador torna possível que o método utilizado no estudo das funções e das equações seja aquele que tem sido recomendado há vários anos. Os alunos podem começar por observar gráficos de funções (começando com funções lineares), e só depois irão pensar na solução das equações.

Neste enquadramento de mudanças rápidas no ambiente doméstico e escolar, devemos reconsiderar

quais os assuntos que são apropriados para ensinar aos alunos em cada nível. Haverá provavelmente alterações significativas nas opiniões que anteriormente tinham sido defendidas acerca deste assunto.

À medida que forem feitas alterações à ordem pela qual os assuntos são apresentados aos alunos nas Escolas Primárias, é importante que os professores do Ensino Secundário estejam em posição de fazer as correspondentes adaptações. Isto só poderá acontecer se houver boa comunicação entre Escolas Primárias e Secundárias.

## Apresentação

Apesar das recomendações do relatório Cockcroft, que defendia que devia ser dado maior relevo à discussão, à investigação e à resolução de problemas, os programas de Matemática para computadores que estão mais generalizados e que são normalmente mais usados, tanto nas Escolas Primárias como nas Secundárias, são provavelmente aqueles que dão ao aluno oportunidade de praticar a aritmética tradicional elementar e o cálculo algébrico.

Os programadores podem evitar criar programas deste tipo para os alunos, assegurando-se que os programas que criam não ponham questões e simultaneamente dêem as respostas. Por exemplo, há programas que só dão respostas; fica ao cuidado dos utilizadores decidir quais as questões apropriadas a colocar. Programas de desenho de gráficos são normalmente deste tipo. Os utilizadores podem obter do computador o desenho do gráfico de uma função, e depois pôr as suas perguntas, tais como: "O que é que aconteceria se alterássemos o coeficiente de  $x$ ?". Programas deste tipo

encorajam os alunos a sentir que controlam a situação: fazer conjecturas e procurar a evidência que suporta as suas teorias, perguntando: "Vamos experimentar...?", ou "O que é que aconteceria se ...?", ou "Podemo-lo obter ...?".

Há também *software* que só levanta questões, deixando aos professores e alunos decidir quais as respostas apropriadas. Um tal programa é descrito no *Secondary Mathematics with Micros Inservice Pack* do MEP.

BLOCKS é um jogo para ser disputado entre dois alunos (ou dois grupos). Uma série de números aparece no ecrã do computador. Na vez de cada jogador, o computador simula o lançamento de três dados. O jogador combina então os três números obtidos, usando qualquer combinação das 4 operações aritméticas, de modo a obter um dos números que aparecem no ecrã. Este número é colorido por um bloco, com a cor do jogador. O objectivo do jogo é obter uma linha com 4 blocos (horizontal, vertical ou em diagonal). BLOCKS é um programa no qual o computador põe questões matemáticas: a única alternativa do jogador é competir para ganhar o jogo cujas regras foram estabelecidas pelo computador.

Os jogadores têm no entanto alguma liberdade. O nível de dificuldade é uma opção dos jogadores: determinam-no pelo nível de sofisticação com o qual combinam os 3 números mostrados pelos dados.

É muito provável que tenhamos em breve à nossa disposição computadores com placa gráfica muito baratos e poderosos. Será então mais fácil para os professores utilizarem nas aulas a programação de computadores como uma forma de aprendizagem da Matemática. Linguagens de programação tais como BASIC e LOGO,

actualmente comuns em microcomputadores, foram concebidas de forma a serem fáceis de aprender. Os alunos que tenham apenas aprendido um pouco destas linguagens podem usá-las como uma forma de exploração matemática.

À medida que os computadores se tornam mais baratos e têm mais capacidade de memória, linguagens de programação e *software* serão provavelmente mais fáceis de usar. É possível que algumas das vantagens das linguagens de programação declarativas (como o Prolog) que têm considerável significado matemático, sejam aproveitadas de uma forma que não iniba os principiantes.

Há alunos de algumas Escolas Primárias, e em muito menor número de Escolas Secundárias, que já efectuaram projectos significativos envolvendo uma quantidade considerável de programação em LOGO. É importante garantir que a orientação curricular da Matemática para Escolas Primárias, que foi produzida antes que o LOGO fosse utilizado pelas crianças, seja revista, assegurando que haja uma integração apropriada da Matemática que as crianças usam quando aprendem LOGO com o resto do currículo da Matemática.

Uma consequência da introdução do GCSE é que os programas de Matemática do Ensino Secundário estão a mudar para incluir mais trabalho prático e algumas escolas já estão a encorajar alunos no uso dos computadores e da programação em ligação com este trabalho.

Além disso, seria útil que os programas de exame permitissem alterações mais construtivas envolvendo a incorporação de microcomputadores no currículo. A maior parte dos programas actuais impedem na prática que isto aconteça.

## Integração com outras disciplinas

Há um grande número de programas de bases de dados baratos e disponíveis para as escolas. Esses programas estão a ser usados por alunos de todas as idades. Os alunos tanto recolhem e organizam os seus próprios dados, como obtêm os ficheiros necessários através de professores de outras escolas com interesses semelhantes. Alguns dos programas de bases de dados podem ser usados em conjunto com utilitários de desenho de gráficos e construção de tabelas. Tais programas estão a tornar-se, não só mais fáceis de utilizar, como adequados para levar a cabo tarefas complexas. Também são usados para servir de suporte a trabalho curricular pluridisciplinar no Ensino Primário e a trabalhos semelhantes nos departamentos de humanísticas das Escolas Secundárias. Neste trabalho os alunos desenvolvem aptidões para pôr questões apropriadas e tomar decisões face aos dados disponíveis. Exemplos dos assuntos investigados desta forma, são os factores que são importantes na escolha de marcas para o jogo do CONKER 1 e um inquérito sobre as pedras tumulares de um cemitério local. Trabalhos deste género podem encorajar os alunos a levantar questões estatísticas tais como "Qual a proporção de...?" ou "Há alguma relação entre..." ou "Isso é mais provável que ...?"

A folha de cálculo também está a ser usada em algumas escolas para ajudar os alunos a manusear dados numéricos. Alunos de Economia Doméstica usam a folha de cálculo para efectuar cálculos para descobrir o valor nutricional de diferentes alimentos; alunos de cursos de Gestão usam-nas para fins contabilísticos.

Há um certo número de programas que fazem a ponte

entre os conceitos matemáticos e os conceitos de arte e do desenho gráfico. Alguns programas permitem que os utilizadores explorem modelos repetidos a duas dimensões, utilizando diversas transformações geométricas. Outros proporcionam representações de objectos a três dimensões, que também podem ser transformados de diferentes maneiras.

Num pequeno número de Escolas Primárias, e em alguns departamentos de Escolas Secundárias (Trabalhos Manuais, Desenho e Tecnologia), os alunos estão a encontrar soluções para problemas práticos, através de modelos que eles próprios executam e que controlam com o computador. O processo de construção de modelos envolve muitas vezes desenhos à escala e medições, conceitos geométricos tais como rigidez e o funcionamento das engrenagens, alavancas e roldanas.

Um número crescente de Escolas Primárias está a usar jogos de aventuras ou programas de simulação como foco central de projectos interdisciplinares. Problemas de lógica surgem e são resolvidos durante a utilização do software, e as crianças necessitam de encontrar métodos para registarem posições relativas das áreas a serem exploradas. Para além disso, programas como estes têm estimulado actividades de pesquisa, experimentação, arte, bem como trabalho prático e actividades dramáticas, todas interligadas pelo tema do programa.

A Matemática nunca foi apenas ensinada por especialistas desta disciplina. Nas Escolas Primárias é ensinada por professores generalistas. Nas Escolas Secundárias os professores de Ciências, Desenho e Tecnologia, Informática, Humanísticas e outras disciplinas, usam a Matemática no seu ensino. O computador está a enco-

rajar uma maior e mais diversificada aplicação de conceitos matemáticos em diferentes áreas do currículo. Em consequência, há necessidade de maior cooperação e partilha de experiências entre os professores.

Nalgumas Escolas Secundárias, a Informática é leccionada como uma disciplina sujeita a exame. Os professores destas escolas que utilizem os computadores nas aulas de Matemática deverão ter em conta o programa dessa disciplina. Algum *software* usado nas Ciências, também dá corpo às estruturas matemáticas. Por exemplo, o modelo de hereditariedade usado por um programa de simulação de genética pode ser probabilístico. Os alunos que usam um tal programa como um meio de exploração da estrutura do modelo em questão, estão a empregar estratégias que são geralmente descritas como “método científico”. Esta é uma das razões pela qual os professores de Matemática, Ciências, Informática e outras disciplinas precisam de clarificar áreas de interesse comum e partilhar experiências. Uma vez que consideramos que a programação tem lugar nas aulas de Matemática, quer nas Escolas Primárias quer nas Secundárias, os professores de Matemática e de Informática terão necessidade de discutir o assunto. Também é importante que comuniquem uns aos outros as diferentes necessidades de equipamento, de modo a estudarem a possibilidade de partilha de utilitários de modo a usá-los de forma adequada. Assim, os professores poderão tirar o maior proveito dos escassos recursos existentes.

### Organização

O uso de computadores no ensino da Matemática tem obviamente implicações nos equipamentos, no ar-

ranjo das salas de aula e na formação de professores. Nas Escolas Primárias é relativamente fácil redistribuir o tempo reservado às actividades numa base diária. No entanto, dentro das limitações do horário das Escolas Secundárias a flexibilidade é menor.

Os cursos da escolaridade obrigatória irão incluir, no futuro, trabalho de projecto. Os projectos de alguns alunos irão envolver programação ou dispender bastante tempo com a utilização de *software* apropriado. Poderá assim ser necessário que as escolas reavaliem o tempo reservado às aulas de Matemática — algumas actividades podem requerer que a aula de Matemática ocupe um período mais longo do que lhe é reservado actualmente.

Será sem dúvida aconselhável, que os pais sejam informados sobre as razões e benefícios das alterações do currículo de Matemática. Em grupos em que a maior parte dos alunos tem acesso a microcomputadores nas suas casas, os professores podem sugerir-lhes tarefas em que tirem proveito dos recursos que possuem em casa e na escola, mas terá que se ter cuidado em não pôr em desvantagem aqueles alunos que não disponham de computador em casa.

De igual modo, as escolas devem manter-se em contacto com os empregadores locais que utilizem computadores. Isto ajudará a assegurar que os professores que venham a redefinir os currículos escolares, tenham em conta, entre outros factores, as qualificações e capacidades que os empregadores necessitam. Os empregadores locais podem desejar oferecer recursos quer humanos quer materiais para uso nas escolas.

## Formação de professores

Não existe um único modelo de formação de professores que garanta sucesso em todas as circunstâncias. Porém, há uma crescente concordância em que os modelos com mais sucesso são provavelmente, os que envolvem uma forte componente de trabalho efectivo na escola e a troca de ideias entre os professores.

Durante os últimos anos, foram concebidos vários modelos de formação de professores. Apresentam-se aqui alguns exemplos de diferentes situações que dizem respeito ao desenvolvimento profissional dos alunos, professores, supervisores e docentes do Ensino Superior.

**Formação inicial.** Estudantes de um novo curso para professores do Ensino Primário que se estavam a especializar em Matemática, aprenderam novos conceitos ao elaborar programas em LOGO. Trabalharam em grupos de dois, numa estrutura onde muito pouco era imposto. Durante um período lectivo o tempo destinado para o trabalho era de hora e meia semanal além do tempo de estudo. Um dos objectivos do curso era dar aos estudantes experiência de trabalho, em moldes idênticos aos que se esperava que usassem, mais tarde, com os alunos. No mesmo período lectivo, os estudantes passavam um dia por semana na escola, observando, ensinando e usando microcomputadores sempre que possível. Os estudantes eram encorajados a descrever como trabalhavam em grupo e o que é que aprendiam. Para muitos deles, era a primeira vez, ao longo da sua educação matemática, que trabalhavam desta forma.

**Combinação de formação inicial e de formação contínua.** Ao longo de dez meios dias, durante o segundo período, os estudantes do PGCE<sup>2</sup>, os seus monitores e professores, colaboraram na planificação e execução de aulas em que se utilizaram os computadores. A experiência partilhada provou ser um pilar importante a partir do qual se desenvolveu mais trabalho.

**Professores como inovadores do currículo.** Uma supervisora de Matemática, durante a visita a algumas Escolas Secundárias, encontrou professores que revelaram interesse em utilizar uma Folha de Cálculo. “O que é isto?”, “Como é que pode ser usada em Matemática?”, “Conhece alguém que esteja a obter resultados com a sua utilização?”. A supervisora promoveu uma reunião durante um dia, e convidou um grande número de pessoas. Sabia pouco sobre Folha de Cálculo, mas tinha a certeza que alguns dos convidados tinham mais conhecimentos do que ela. O dia permitiu que os professores trabalhassem em Matemática e trocassem experiências de utilização da Folha de Cálculo com os alunos. Como resultado, a maior parte das pessoas quiseram experimentar algumas das ideias apresentadas e formar um grupo de trabalho. O grupo continuou a encontrar-se. Os membros do grupo partilham entre si as experiências das aulas e discutem artigos escritos por outros professores.

**Desenvolvimento de novos materiais.** Um grupo de professores resolveu encontrar-se regularmente, um dia por mês, para elaborar programas para computador

2) *Post-Graduate Certificate in Education*, correspondente à licenciatura em Ensino da Matemática

e materiais de apoio. O grupo era dinamizado por um supervisor e podia contar com o apoio de um programador a tempo inteiro. Nas reuniões eram sugeridas, debatidas e alteradas, ideias para novos programas, programando-se ocasionalmente. O grupo também desenvolvia projectos com outros materiais - cartazes, puzzles, cartões de actividades, pontos de partida para investigações. Durante o tempo que decorria entre duas reuniões, os professores experimentavam nas suas aulas as versões preliminares dos materiais elaborados pelo grupo, e o processo de aperfeiçoamento e de rejeição era contínuo. Em cada reunião, surgiam e eram desenvolvidas ideias matemáticas do interesse dos participantes, e eram levantados e discutidos aspectos fundamentais da Pedagogia.

**Os professores como investigadores.** Alguns dos professores que frequentaram no seu dia livre, ao longo de um ano, um curso de Matemática elementar, decidiram que continuariam a encontrar-se como grupo de trabalho. O grupo incluía alguns professores principiantes que, sob a orientação de monitores, decidiram trabalhar em conjunto nas suas experiências de utilização de LOGO nas aulas. Nos primeiros encontros não estavam à vontade: os participantes precisaram de conhecer melhor os outros professores antes de partilhar as suas experiências de aula. Por vezes os professores trabalhavam em conjunto, com o LOGO, reflectindo e desenvolvendo ideias que tinham partido dos alunos nas aulas. O monitor visitou escolas e observou professores e alunos trabalhando com o LOGO e contribuiu algumas vezes para a maneira de pensar do grupo. Depois de um ano de trabalho nestes moldes, os professores começaram a actuar como investigadores nas suas aulas. Estavam a

ganhar consciência de algumas das alternativas que se punham à sua maneira de ensinar, a reflectir sobre o significado que pretendiam dar quando falavam de "compreensão" ou "ter ideias sobre".

**Visitas a outras aulas.** Um professor de Matemática do Ensino Secundário, ficou interessado em utilizar na aula os microcomputadores, que só estavam a ser usados para o ensino da Informática. O professor estava particularmente preocupado com o modo de gerir o *hardware*, e com o que poderia acontecer se as coisas corresse mal. O supervisor de Matemática sugeriu que o professor visitasse outra escola para ver como é que os microcomputadores eram usados e a autorização foi conseguida pela LEA. O professor teve possibilidade de ver um grande número de aulas em que eram utilizados computadores. Ficou impressionado com a forma como os professores manejavam o equipamento, e ficou especialmente entusiasmado com uma aula em que o computador era usado de permeio com outras actividades. Na semana seguinte, tentou dar uma aula semelhante, com uma das suas turmas. Esta aula não foi igual à que tinha observado; a observação tinha-lhe dado confiança para adaptar e ampliar o que tinha visto, de um modo apropriado para si e para os seus alunos.

**Um curso.** Um grupo de professores do Ensino Secundário desempenhou um papel fundamental na organização de um curso, no qual quatro entidades educativas locais cooperaram com uma instituição de ensino superior. O curso durou 20 dias, distribuídos ao longo de um ano, e foi financiado pela DES. Aos professores que tinham sentido a necessidade de mudar a sua forma de ensinar Matemática, foi dada oportunidade de reflectir sobre a sua prática lectiva e de

ganhar confiança e experiência na utilização dos micro-computadores. Um dos resultados do curso foi a organização de posteriores reuniões em que se apoiavam as mudanças que os professores faziam nas suas aulas.

**Formação de formadores.** Diligenciou-se no sentido de supervisores de Matemática e docentes de instituições de formação participarem num curso de 5 dias em regime de internato. Isto deu oportunidade aos participantes de partilharem as suas experiências e de conhecer novos materiais. Foi dada maior importância ao trabalho prático e às discussões organizadas pelos participantes. Durante o curso, estabeleceram-se contactos informais e organizaram-se pequenos grupos de pessoas que viviam ou trabalhavam na mesma localidade, de forma a encontrarem-se uma vez por período.

Algumas questões surgem destes exemplos.

- A valorização profissional é provavelmente bem sucedida quando os elementos envolvidos partilham as suas experiências.

- Os professores apercebem-se claramente das suas necessidades e precisam de ser envolvidos na planificação das actividades organizadas para a sua valorização profissional.

- Os participantes aprenderam em moldes semelhantes àqueles que na prática lectiva parecem ser bons.

- Os promotores destes cursos contribuíram de forma decisiva para a existência de um bom ambiente de trabalho, ao aperceberem-se de que não estavam em tão boa posição para definir as actividades a realizar, como estavam os participantes no curso, e de que estes podiam valorizar os momentos de discussão, de trabalhar em Matemática em pequenos grupos, de contribuir com breves episódios das aulas e de partilhar problemas e

tensões.

- Supervisores de Matemática, responsáveis pelos centros de professores e docentes do Ensino Superior podem desempenhar papéis importantes. Podem ajudar:

- trabalhando com professores e alunos, nas aulas, organizando grupos de trabalho;
- criando ligações entre os diferentes grupos;
- estimulando apresentações dos trabalhos dos alunos;
- preparando fotocópias de fichas de trabalho ou de outros materiais;
- organizando a publicação de folhas informativas em que haja relatos de aulas;
- ajudando a difundir as ideias desenvolvidas.

- Pelo facto da utilização de computadores proporcionar caminhos completamente novos para a aprendizagem da Matemática, torna-se necessário que os professores adquiram uma série de novas aptidões. Isto exige tempo. Nos exemplos anteriormente descritos, foi dado tempo aos professores que quisessem adquirir essas aptidões, através de:

- visitas a outras escolas e a outros professores;
- reuniões a nível de escola e de departamento,
- discussão das implicações de novas iniciativas;
- participação em encontros e cursos;
- leitura e reflexão;
- partilha de experiências com outros professores.

- Pelo facto dos professores levarem algum tempo a desenvolver novos estilos de trabalho, é irrealista esperar que todos os professores de uma escola ou de um departamento trabalhem do mesmo modo. O trabalho de um ou dois professores que tiveram oportunidade de desenvolver novas ideias é muitas vezes de interesse para os seus colegas, especialmente quando o professor res-

ponsável pela disciplina o encoraja.

Nos cursos de formação inicial, o tempo dedicado à utilização de computadores é muitíssimo limitado. Por consequência, é importante que sejam adequados os recursos e as verbas fornecidas para a formação contínua. As Associações de Professores podem desempenhar um papel importante nesta formação contínua.

Embora haja actualmente supervisores nas Escolas Primárias e Secundárias para Matemática e Ciências (pagos pelo *Educational Support Grant*), nem todos se sentem aptos a apoiar as escolas na utilização dos microcomputadores. São necessários mais supervisores para desenvolver o trabalho com computadores nas escolas, e tanto os futuros supervisores como os actuais, necessitam de oportunidades para se familiarizarem com o *software* apropriado.

É bem vinda a formação da MESU pelo DES, e de-

sejamos que tenha o maior sucesso. Obviamente, desejamos que dê um forte contributo no apoio à utilização de computadores pelos professores de Matemática. Fazendo isto, acreditamos que trabalhará em cooperação com as iniciativas das Entidades Locais, das Associações de Professores e do MEP. A MESU tem um papel importante a desempenhar, apoiando supervisores e outros educadores ligados às iniciativas locais das escolas, e patrocinando a produção de materiais de apoio ao desenvolvimento curricular da Matemática. Agradar-nos-ia vê-la tomar a liderança na divulgação de registos (por escrito, em cassete ou em vídeo) de situações em que alunos trabalham com computadores de formas interessantes. Acreditamos que continuará a apoiar e a desenvolver materiais para a formação contínua já produzidos pelo MEP para professores de Matemática das Escolas Primárias e Secundárias.

## O equipamento das salas de aula de Matemática

Durante os últimos anos, o número de microcomputadores nas escolas e em casas particulares aumentou consideravelmente. Os computadores existentes nas escolas passaram a ter, frequentemente, monitores policromáticos e com alto poder de resolução e as cassetes foram substituídas por disquetes que são o meio mais usado para guardar programas.

É agora possível prever que chegará um tempo em que o custo dos computadores baixe de tal maneira, que as escolas passem a ter tantos computadores como hoje têm calculadoras. Contudo, actualmente, o número de

computadores existentes na maioria das escolas impede os professores de adoptarem muitas das abordagens descritas neste relatório.

A gama de potencialidades de utilização dos computadores na aprendizagem da Matemática é grande e irá aumentar à medida que o *hardware* progrida. Aqueles que estão encarregados de fornecer os computadores, têm que se assegurar de que há *hardware* apropriado disponível e em quantidade suficiente para as actividades matemáticas que eles pretendem encorajar. Confiamos que seja incluída toda a gama de actividades descritas

neste relatório.

É importante que haja um computador disponível nas aulas de Matemática sempre que surja a necessidade de o utilizar, o que pode ocorrer apenas numa pequena parte da aula. O ideal seria que todas as crianças tivessem livre acesso aos computadores, a qualquer hora. As crianças deveriam aprender a utilizar os computadores e as calculadoras quando e só quando, constituíssem as ferramentas apropriadas.

Devia haver, no mínimo, um computador em cada departamento de Matemática das Escolas Secundárias e em cada 2 ou 3 salas de aula nas Escolas Primárias ou de Ensino Especial. Devia também haver computadores disponíveis em todas as salas onde decorressem cursos de formação contínua de Matemática. Para além disto, deve ser urgentemente considerada a existência de 1 ou 2 sistemas completos em todas as salas de aula (Ensino Primário, Ensino Secundário e Ensino Especial) onde a Matemática é ensinada. Um sistema completo consiste num computador com *drive*, um processador de texto, linguagem BASIC, linguagem LOGO, uma folha de cálculo e uma impressora. Num futuro não muito distante, a par de outros avanços técnicos que poderão revolucionar o ensino da Matemática, é provável que tenhamos ao nosso dispor computadores baratos, poderosos e fáceis de utilizar. Temos que nos preparar para adquirir e utilizar conjuntos deste tipo.

Algumas utilizações de computadores nas aulas de Matemática requerem monitores de grandes dimensões, e estes deveriam existir disponíveis em número suficiente nas salas de aula de Matemática. As impressoras são necessárias porque a existência de cópias do trabalho feito fornece uma base de reflexão e discussão, além de

constituir um meio de partilhar o trabalho com outros alunos e com os professores. O equipamento necessita de manutenção, pelo que é necessário um fundo de maneiio para este fim.

As normas de utilização dos microcomputadores numa escola têm particular importância para a Matemática. Se a utilização de alguns microcomputadores for espalhada por todo o currículo e por todos os níveis etários, torna-se difícil a um professor ter fácil acesso a um ou mais computadores quando necessitar. Em algumas Escolas Secundárias os computadores são usados pelo Departamento de Informática, o que pode tornar o acesso ainda mais difícil.

O acesso a uma sala de computadores é desejável, mas não substitui a necessidade de existência de computadores disponíveis nas salas de aula onde a Matemática é normalmente ensinada.

Ainda não há um número suficiente de bons exemplos de utilização de redes de computadores no ensino da Matemática. A política de compra de sistemas independentes, permite às escolas adquirir os computadores necessários para determinados fins e também reduz as preocupações de operar com uma rede.

À medida que o número e a gama de tecnologias aumenta nas escolas, torna-se necessário fornecer um apoio técnico adequado. A necessidade deste apoio foi reconhecida, há já algum tempo, nos departamentos de ciências das Escolas Secundárias. São aqueles que utilizam frequentemente estes equipamentos, os que sentem necessidade de apoio.

É natural que durante a próxima década o desenvolvimento quer de *hardware* quer de *software* proporcione um maior apoio aos que ensinam e aprendem

Matemática. O aparecimento de ecrãs planos, sem distorção, facilitará o deslocamento dos ecrãs e proporcionará maior adequação no estudo da Geometria. A maior compatibilidade entre os computadores usados nas empresas e os que são usados nas escolas, irá permitir a utilização de *software* comercial nas salas de aula. Os progressos das linguagens de programação actualmente

disponíveis tornarão mais fácil, a alunos e a professores, o uso de computadores na forma pretendida. Os computadores serão também mais fáceis de utilizar devido à melhoria dos meios de comunicação com os computadores; estes métodos incluem o uso do rato, canetas luminosas, mesas digitalizadoras, ecrãs de contacto, *modems* e video-discos interactivos.

## Recomendações

### Sumário

Neste relatório chama-se a atenção para a necessidade de:

- um desenvolvimento curricular permanente para que se produzam materiais, incluindo *software*;
- um aumento da investigação sobre o impacto que as novas tecnologias têm no currículo de Matemática;
- um mecanismo que permita uma reflexão permanente sobre as implicações das alterações tecnológicas no currículo da Matemática, e que promova a discussão, entre os educadores, sobre o possível alcance das mudanças em educação matemática, como resultado da utilização das novas tecnologias.
- suficiente formação inicial e formação contínua de professores, devidamente encorajante.
- equipar as salas de aula de Matemática com um número suficiente de computadores, de modo a permitir que os alunos os utilizem como ferramenta adequada na resolução de problemas e aumentem o gosto e a curiosidade pela Matemática, e a atrair e motivar novos professores de Matemática.

### Desenvolvimento curricular

Há uma necessidade urgente de desenvolver o currículo de Matemática de uma forma que encorage um maior número de professores a utilizar os computadores no ensino da Matemática, quer nas Escolas Primárias quer nas Secundárias. A utilização dos computadores deve incluir trabalho com *software* apropriado, e também o uso da programação na aprendizagem da Matemática.

Projectos de desenvolvimento curricular em Matemática deveriam originar materiais curriculares e materiais para a formação contínua fornecendo exemplos apropriados de diversas utilizações de *software* e de programação. Estes exemplos deveriam ilustrar uma série de estilos de ensino, que podem ser usados para apoiar a resolução de problemas e a investigação.

O desenvolvimento curricular deveria envolver associações profissionais de professores de Matemática. As associações têm grupos de professores bem organizados, a trabalhar no desenvolvimento do uso dos microcomputadores nas salas de aula, quer nas Escolas Primárias quer nas Escolas Secundárias, e podem dar a

melhor garantia de apoio continuado e de progresso.

Embora haja uma grande quantidade de *software* para o ensino da Matemática, deve ser dado apoio ao desenvolvimento de novo *software* que tire partido do permanente aumento da capacidade dos computadores.

Deveria haver uma redução substancial do tempo que os alunos gastam a praticar exercícios rotineiros de cálculo, que seria mais razoável serem efectuados por calculadoras ou computadores. Há uma necessidade urgente de produção de materiais para apoiar os professores que terão dificuldades em usar adequadamente os computadores para alterar os aspectos antiquados do ensino da Matemática.

Há necessidade de apoiar os grupos de trabalho já existentes, que estão a estudar as formas que os currículos de Matemática do Ensino Primário, Preparatório e Secundário deverão apresentar, tendo em conta as novas tecnologias. As associações profissionais já realizaram trabalho válido, nesta área. Há no entanto necessidade de formar novos grupos, cujos membros deveriam incluir representantes dos departamentos envolvidos nas alterações do currículo.

Todas as futuras propostas para projectos curriculares e para outros desenvolvimentos relacionados com o ensino da Matemática, deveriam ter em conta a forte contribuição que os computadores podem ter na aprendizagem da Matemática.

### Investigação

É necessário investigar os efeitos da alteração do currículo da Matemática nas Escolas Primárias e Secundárias.

É necessário investigar o tipo e a utilização de *software* que apoia a aprendizagem da Matemática.

É necessário investigar diferentes modos de utilização dos computadores para melhorar o ensino/aprendizagem da Matemática.

Deve ser considerada a possibilidade de apoiar projectos envolvendo um professor ou grupos de professores, tal como aqueles que são propostos por instituições.

Deve ser dado apoio à recolha e divulgação de estudos de casos que descrevam as utilizações que têm vindo a ser feitas dos computadores, relacionadas com o ensino e a aprendizagem da Matemática.

### Formação de professores

Todos aqueles que formam professores na utilização de computadores devem estar sensibilizados para o facto dos professores serem muitas vezes os melhores juizes das actividades que lhes solicitam.

O estilo de aprendizagem de professores e estudantes durante os cursos de formação contínua e de formação inicial deveria assemelhar-se tanto quanto possível ao estilo de aprendizagem dos alunos defendido nesses cursos.

Deve reservar-se tempo para formar professores e estudantes, assim como os supervisores e todos aqueles que trabalham com professores e estudantes, de forma a aumentar os seus conhecimentos na utilização de computadores no ensino da Matemática. Este tempo deve ser usado para preparar materiais, para observar os outros e para partilhar ideias e experiências.

Todos os cursos de formação inicial no ensino da

Matemática devem reflectir perfeitamente o papel que os computadores desempenham no ensino e aprendizagem da Matemática. Da mesma forma, sempre que a Matemática esteja incluída como disciplina académica, os métodos de ensino e aprendizagem deverão estar de acordo com o que dissemos anteriormente.

A formação contínua de professores na utilização de computadores no ensino/aprendizagem da Matemática, deveria agora ser vista como uma questão prioritária. É necessário que exista uma iniciativa a nível nacional de modo a assegurar que ao fim de um período, digamos de 3 anos, cada escola tenha um elemento dinamizador, preparado e com experiência nesta área, e que todos os professores de Matemática, quer das Escolas Secundárias quer das Escolas Primárias, tenham estado ligados a programas apropriados de valorização profissional e desenvolvimento curricular nas suas escolas.

As Autoridades Locais apoiaram o esquema de *Education Support Grant* que está a financiar a criação de lugares suplementares para supervisores de Matemática até 1988. Estes professores deram um apoio considerável aos professores que se estão a iniciar na utilização de computadores na sala de aula. É aconselhável que se considere a extensão deste esquema na Matemática, para além de 1988.

Deve ser dado apoio e encorajamento às associações de professores de Matemática que já tenham começado a trabalhar com professores que utilizam o computador nas suas aulas. Materiais de apoio à formação contínua como os que foram produzidos pelo MEP deverão continuar a ser apoiados, e deverão ser encorajados futuros desenvolvimentos nesta área. Seria particularmente útil que os referidos materiais fossem postos à

disposição de todos os supervisores de Matemática.

## Recursos Informáticos

Professores e alunos devem ter acesso aos computadores nas suas salas de aula. É prioritário que haja um número adequado de computadores. Deveria haver, pelo menos, um sistema de computadores por sala de aula (em escolas do Ensino Primário, Preparatório, Secundário e Especial), onde se ensine Matemática.

Aqueles que estiverem encarregados de equipar as salas destinadas a aulas de Matemática em que se utilize computadores devem estar alertados para a necessidade que todos os alunos têm de ver bem o que se passa. É necessário que haja ecrãs grandes que permitam ver com nitidez.

Deveriam ser postas à disposição das escolas verbas suficientes que permitissem aos professores adquirir material adequado para apoiar o ensino e a aprendizagem da Matemática.

Deve ter-se em conta as verbas necessárias à manutenção do equipamento usado no ensino da Matemática.

Deve ser posto à disposição das Escolas Primárias, Preparatórias e do Ensino Especial, assim como dos departamentos de Matemática das Escolas Secundárias, o suporte técnico auxiliar necessário para que se mantenha e se desenvolva o acesso ao uso dos computadores — tanto do *hardware* como do *software*.

## Promoção da mudança

Há necessidade de promover a introdução das novas

tecnologias no ensino da Matemática e de alertar as escolas para as prováveis mudanças.

Há necessidade de reconhecer o que tem vindo a ser feito com computadores nas aulas de Matemática, e encorajar a sua utilização na aprendizagem da Matemática.

O *Secondary Examinations Council* e as comissões de exame deveriam facilitar a introdução de exames baseados em programas que tenham em conta os computadores e as calculadoras.

Os programas e as respectivas sugestões metodológicas devem encorajar os alunos a levar a cabo trabalhos mais elaborados. Os computadores devem ser recomendados como uma base adequada de apoio a tais projectos. Deverá ser reconhecido o valor do trabalho de colaboração entre os alunos que levem a cabo tais projectos.

Devem ser encorajados todos os professores das Escolas Primárias a utilizarem os computadores no ensino da Matemática, e são necessários materiais para ajudar os coordenadores de Matemática a proporcionar formação contínua aos seus colegas.

Tanto os professores das Escolas Primárias, como os Professores das Escolas Secundárias, deverão assegurar-se que todos os alunos tenham igual oportunidade de utilizar os micro-computadores na aprendizagem da Matemática, e que nem a Matemática nem os computadores sejam considerados mais apropriados para os rapazes do que para as raparigas. Isto pode requerer acções afirmativas, tanto das raparigas como das mulheres.

Deve ser fomentada uma boa comunicação entre as Escolas Primárias e as Escolas Secundárias, de forma a

garantir que os professores de Matemática das Escolas Secundárias estejam ao corrente da forma como os computadores têm sido usados, em ligação com a Matemática, nas Escolas Primárias.

Os professores necessitam de estar ao corrente das aplicações dos computadores em outras disciplinas, de forma a que se torne possível uma abordagem mais integrada do currículo.

Os professores devem manter um estreito contacto com os pais e informá-los das razões das alterações do currículo de Matemática, assim como da forma como é feita a aprendizagem da Matemática.

Deveria ser formado um grupo permanente com representantes de associações de professores. Este grupo deveria estar disponível para consultas. As funções do grupo incluiriam:

- Ajudar a identificar de que formas deve mudar o currículo de Matemática;
- Dar parecer sobre projectos curriculares e prioridades;
- Acompanhar o desenvolvimento de novas ideias em educação, em *software* e em *hardware*;
- Ajudar a divulgar informação entre os professores, através do uso dos meios normais de comunicação disponíveis nas associações.

Os *Cadernos de Educação e Matemática* têm por objectivo divulgar, entre os professores de Matemática, traduções e originais portugueses relativos à Matemática, à Educação e à Educação Matemática. Os *Cadernos* são editados pela Associação de Professores de Matemática e constituirão uma série, embora a sua publicação não seja regular. Cada caderno é formado por uma antologia de textos referentes a um daqueles grandes temas.