

1. Numerisches Rechnen. Von E. MEHMKE in Stuttgart. (Abgeschlossen im Juni 1902.)

by

in: Encyklopädie der mathematischen
Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen,
(page(s) 938 -...
Leipzig; 1898

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright.

Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept there Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact:

Niedersaechsische Staats- und Universitaetsbibliothek

Digitalisierungszentrum

37070 Goettingen

Germany

Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

I F. NUMERISCHES RECHNEN

VON

R. MEHMKE

IN STUTT GART.

Inhaltsübersicht.

A. Genaues Rechnen.

I. Das Rechnen ohne besondere Vorrichtungen.

1. Geordnete Multiplikation und Division.
2. Komplementäre Multiplikation und Division.
3. Umgehung der Division.
4. Beschränkung in den verwendeten Ziffern.

II. Numerische Tafeln.

5. Produktentafeln.
6. (Multiplikationstafeln mit einfachem Eingang:) Tafeln der Viertelquad und der Dreieckszahlen.
7. Quotienten- und Divisionstafeln.
8. Tafeln der Quadrate, Kuben und höheren Potenzen.
9. Faktoren-(Divisoren-)Tafeln.

III. Rechenapparate und -Maschinen.

a. Rechenapparate.

10. Rechenbrett (Abacus).
11. Sonstige Additions- (bzw. Subtraktions-) Apparate ohne selbstthätige Zeh übertragung.
12. Multiplikations- und Divisionsapparate.
13. Arithmographen für alle vier Spezies.

b. Rechenmaschinen.

α. Maschinen für die gewöhnlichen Rechnungsarten.

14. Zählwerk.
15. Maschinen zum Addieren und Subtrahieren.
16. Schaltwerk.
17. Erweiterte Additionsmaschinen (für alle vier Spezies).
18. Eigentliche Multiplikationsmaschinen.
19. Subtraktion und Division. Nebenzählwerk (Quotient).
20. Besondere Einrichtungen.
21. Ausführung zusammengesetzter Rechnungen.

- β. Maschinen zur selbstthätigen Ausführung zusammengesetzter Rechnungen.**
- 22. Differenzenmaschinen.
 - 23. Analytische Maschinen.

B. Genähertes Rechnen.

- 24. Das Rechnen mit ungenauen Zahlen im allgemeinen.

I. Das Rechnen ohne besondere Vorrichtungen.

- 25. Abgekürzte Multiplikation und Division.
- 26. Abgekürztes Wurzelausziehen.

II. Numerische Tafeln.

- 27. Logarithmentafeln.
- 28. Fortsetzung: Abgekürzte Logarithmentafeln.
- 29. Tafeln der Antilogarithmen.
- 30. Tafeln der Additions- und Subtraktionslogarithmen.
- 31. Quadratische Logarithmen.
- 32. Tafeln der Proportionaltheile.
- 33. Tafeln der Reziproken und zur Verwandlung gewöhnlicher Brüche in Dezimalbrüche.
- 34. Tafeln der Quadrate und höheren Potenzen.
- 35. Tafeln der Quadrat- und Kubikwurzeln.
- 36. Tafeln zur Auflösung numerischer Gleichungen.

III. Graphisches Rechnen.

a. Grundmassstab gleichmässig geteilt.

- 37. Gewöhnliche arithmetische Operationen.
- 38. Berechnung rationaler ganzer Funktionen und Auflösung von Gleichungen mit einer Unbekannten.
- 39. Systeme linearer Gleichungen.

b. Grundmassstab logarithmisch geteilt.

- 40. Gewöhnliche arithmetische Operationen.
- 41. Berechnung von Funktionen und Auflösung von Gleichungen mit einer Unbekannten.
- 42. Systeme von Gleichungen.

IV. Graphische Tafeln (Nomographie).

- 43. Tafeln für Funktionen einer Veränderlichen.
- 44. Cartesische Tafeln.
- 45. Hexagonale Tafeln.
- 46. Methode der fluchtrechten Punkte.
- 47. Mehrfach bezifferte Elemente.
- 48. Bewegliche Systeme.
- 49. Allgemeine Theorie von *d'Ocagne*.

V. Stetige Rechenapparate und -Maschinen.

- 50. Logarithmischer Rechenschieber.
- 51. Gekrümmte Rechenschieber (Rechenscheiben u. s. w.).

- 52. Verallgemeinerungen des Rechenschiebers.
- 53. Stetige Rechenmaschinen für die gewöhnlichen arithmetischen Operationen.
- 54. Mechanismen zur Auflösung von Gleichungen mit einer Unbekannten.
- 55. Mechanismen zur Auflösung von Gleichungssystemen.

VI. Physikalische Methoden.

- 56. Hydrostatische Auflösung von Gleichungen und Systemen solcher.
- 57. Elektrische Auflösung von Gleichungen.

C. Anhang.

- 58. Proben.
- 59. Gemischte Methoden.
- 60. Vorbereitung der Formeln und der Rechnung.

Monographie: *J. Lüroth*, Vorlesungen über numerisches Rechnen, Leipzig 1900 („Lüroth“).

A. Genaues Rechnen.

In diesem Abschnitt sollen allein Verfahren und Hilfsmittel zur Ausführung von Zahlenrechnungen, die von dem Ergebnis eine beliebige Anzahl genauer Ziffern zu finden gestatten, besprochen werden.

I. Das Rechnen ohne besondere Vorrichtungen.

Die bei uns jetzt allgemein übliche, weil in den Schulen gelehrt Art, beim schriftlichen Rechnen die „vier Spezies“, namentlich die Multiplikation und Division auszuführen¹⁾, ist wohl am leichtesten zu lernen, aber nicht die unbedingt vorteilhafteste. Dem Bestreben, entweder die Schreiarbeit zu vermindern und die Schnelligkeit aufs höchste zu steigern, oder das Rechnen möglichst zu erleichtern, oder sonst einen bestimmten Zweck zu erreichen, sind die Verfahren entsprungen, die wir im folgenden zu betrachten haben.

1) Sie setzt nur die Fähigkeit voraus, einziffrige Zahlen im Kopfe zu addieren, zu subtrahieren und mit einander zu multiplizieren. Addition und Subtraktion werden bei derselben immer, die Multiplikation in der Regel von rechts nach links ausgeführt, d. h. bei den Ziffern niedersten Ranges begonnen; das Subtrahieren geschieht entweder durch ziffernweises Abziehen des Subtrahenden vom Minuenden, oder aber durch Hinzuzählen zum Subtrahenden (Subtrahieren durch Ergänzen: auch beim Dividieren in Betracht kommende sog. österreichische Rechenmethode, vgl. *A. Sadowski*, Die österreichische Rechenmethode . . . , Progr. Altst. Gymn. Königsberg i. Pr. 1892); beim Multiplizieren werden der Reihe nach die Produkte des Multiplikanden mit den einzelnen Ziffern des Multiplikators gebildet, in richtiger Stellung untereinander geschrieben und addiert, beim Dividieren die Produkte des Divisors mit den einzelnen Ziffern des Quotienten von den Partialdividenden subtrahiert, die Reste darunter geschrieben.

1. Geordnete Multiplikation und Division. Die Ziffern zweier dekadisch geschriebenen²⁾ Zahlen und ihres Produkts seien (bei den Einern angefangen) $a_0, a_1, a_2, \dots, b_0, b_1, b_2, \dots$, und c_0, c_1, c_2, \dots ³⁾. Dann ist

$$\begin{aligned} c_0 + c_1 \cdot 10 + c_2 \cdot 10^2 + \dots &= (a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \dots)(b_0 + b_1 \cdot 10 + b_2 \cdot 10^2 + \dots) \\ &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) \cdot 10 + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) \cdot 10^2 + \dots \end{aligned}$$

Also wird c_0 durch die Einer von $a_0 b_0$ geliefert; man muss die von $a_0 b_0$ etwa übrig gebliebenen Zehner, als Einer aufgefasst, zu $(a_0 b_1 + a_1 b_0)$ addieren und von der Summe die Einer nehmen, um c_1 zu erhalten u. s. w. Auf diese Weise ist es möglich, von dem Produkt zweier Zahlen Ziffer um Ziffer zu finden, ohne dass man nötig hat, irgend ein Zwischenergebnis zu schreiben, wenn man im Stande ist, zweistellige Zahlen im Kopfe zu addieren⁴⁾. Praktisch wertvoll ist eine auf *J. Fourier*⁵⁾ (wenn nicht weiter) zurückgehende Bemerkung: Hält man

2) D. h. in unserem gewöhnlichen Zahlensystem mit der Grundzahl (Basis) 10. Ist B die Grundzahl, so hat die, $\dots a_3 a_2 a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \dots$ geschriebene Zahl den Wert

$$\dots a_3 \cdot B^3 + a_2 \cdot B^2 + a_1 \cdot B + a_0 + \frac{a_{-1}}{B} + \frac{a_{-2}}{B^2} + \dots$$

Über vom dekadischen abweichende Zahlensysteme, von denen man Spuren bei einzelnen Völkern gefunden hat, s. *H. Hankel*, Zur Gesch. der Math., Leipz. 1874, p. 20, sowie *M. Cantor*, Vorl. üb. Gesch. der Math. 1, 2. Aufl., Leipzig 1894, p. 8f. Es besteht die Thatsache, dass unser Zahlensystem *nicht* das für das Rechnen geeignetste ist, weshalb wiederholt, selbst in neuester Zeit, vorgeschlagen worden ist, ein Zahlensystem mit anderer Basis — am geeignetsten wäre 12 oder 8, aber auch 16 und 6 haben Fürsprecher gefunden — zu benutzen. Über die Geschichte dieser Bestrebungen vgl. *E. Ullrich*, Das Rechnen mit Duodezimalzahlen, Progr. Realsch. Heidelberg 1891. Weitere Litteratur: *John W. Nystrom*, Project of a new system of arithmetic . . . with sixteen to the base, Philadelphia 1862; *W. Woolsey Johnson*, Octonary numeration, New York Bull. M. Soc. 1, 1891/92, p. 12; *E. Gelin*, Du meilleur système de numération . . ., Mathésis (2) 6 (1896), p. 161. S. auch Intermédiaire des mathématiciens 6 (1899), p. 133—135.

3) Bloss der Einfachheit wegen sind hier ganze Zahlen vorausgesetzt; bei der Multiplikation von Dezimalbrüchen lässt man das Komma zunächst ausser Acht und setzt es nachträglich an die richtige Stelle.

4) Diese Methode, die schon den Indern, welche sie die „blitzbildende“ nannten, im 6. Jahrh. n. Chr. bekannt war und die im Mittelalter unter dem Namen „kreuzweise Multiplikation“ auch bei uns geübt wurde (s. etwa *M. Cantor*, Vorl. üb. Gesch. der Mathem., insbes. Bd. 1, p. 571; Bd. 2, 2. Aufl., Leipzig 1900, p. 9), ist im 19. Jahrhundert des öfteren wieder entdeckt und mit verschiedenen Namen (z. B. symmetrische Multiplikation, kolligierende Multiplikation) belegt worden.

5) Analyse des équations déterminées, Paris 1830, p. 190. Vorbereitet durch die Regel von *W. Oughtred*, s. Nr. 25, Anm. 216.

den mit verkehrter Ordnung der Ziffern auf ein besonderes Blatt geschriebenen Multiplikator so über den Multiplikanden, dass die Einerziffer des ersteren über die Ziffer mit dem beliebigen Range i kommt und multipliziert je zwei alsdann über einander befindliche Ziffern, so ergeben sich die jenem Range entsprechenden Teilprodukte⁶⁾, z. B.

$$\begin{array}{r} \text{verkehrter Multiplikator:} \quad b_0 \ b_1 \ b_2 \ \dots \\ \text{Multiplikand:} \quad \dots a_3 \ a_2 \ a_1 \ a_0 \end{array}$$

$$\text{Teilprodukte vom Range } i = 2: \quad a_0 b_2, a_1 b_1, a_2 b_0.$$

Die Umkehrung dieses Multiplikationsverfahrens bildet die von *J. Fourier* für Zwecke der Auflösung numerischer Gleichungen [I B 3 a, bes. Nr. 9] erfundene *geordnete Division*⁷⁾, die zwar grössere Übung und Aufmerksamkeit erfordert, als die gewöhnliche, aber den Vorzug hat, dass von dem Divisor immer nur so viele Ziffern benützt werden, als jedesmal nötig sind, um die nächste Ziffer des Quotienten mit Sicherheit zu erhalten.

2. Komplementäre Multiplikation und Division. Das Produkt zweier Zahlen lässt sich manchmal bequemer als auf andere Art nach der Regel⁸⁾ finden: Man zerlege die Summe der beiden Zahlen in zwei Teile, deren Produkt leicht gefunden werden kann und füge diesem Produkt dasjenige der Differenzen aus den gegebenen Zahlen und einem der Teile hinzu. Ist nämlich

$$a + b = a' + b',$$

6) Diese „Papierstreifenmethode“ ist überall nützlich, auch beim Rechnen mit Buchstaben, wo man es mit nach Potenzen einer Grösse geordneten Reihen zu thun hat, z. B. in der Theorie der algebraischen Zahlen [I C 4 a].

7) *Analyse des équations déterminées*, Paris 1830, p. 188; s. auch z. B. *A. Cauchy-C. Schnuse*, Vorlesungen über Differentialrechnung, Braunschweig 1836, Anhang, p. 327; „Lüroth“ § 17 flg. Einige der Anfangsziffern des Divisors werden durch Überstreichen als „bezeichneter Divisor“ abgesondert; ist hierzu blos eine Ziffer genommen, so unterscheidet sich das Verfahren (das sich nicht in Kürze beschreiben lässt) nur äusserlich — die Reste der Partialdividenden werden unterwärts, nicht überwärts geschrieben — von der häufiger bekannten indisch-mittelalterlichen Divisionsmethode. Fast ganz mit letzterer stimmt die „symmetrische Division“ von *C. J. Giesing* (Neuer Unterricht in der Schnellrechnenkunst, Döbeln 1884) überein, nur dass *Giesing* die nötigen Subtraktionen im Kopfe ausführt. Abgesehen von der Verallgemeinerung der Methode hat *Fourier* das Verdienst, ein Kennzeichen dafür gegeben zu haben, ob die jeweils gefundene Ziffer des Quotienten zuverlässig ist.

8) Nach *A. Cauchy* (Par. C. R. 20, 1845, p. 280) = *Oeuvres* (1) 9, p. 5, der diese Regel in den Par. C. R. 11 (1840), p. 789 = *Oeuvres* (1) 5, p. 431 aufgestellt hatte, kommt sie in einem Buche von *Berthevin* über die Anwendung der Komplemente in der Arithmetik (1823) vor.

so hat man

$$ab = a'b' + (a - a')(b - a') = a'b' + (a - b')(b - b').$$

Während diese und ähnliche Methoden komplementärer Multiplikation, von denen sich schon im römischen und griechischen Altertum Spuren finden⁹⁾, nur gelegentlich Vorteil bringen, ist die komplementäre Division von allgemeiner Anwendbarkeit. Römischen Ursprungs und im Mittelalter viel geübt¹⁰⁾, ist sie von *A. L. Crelle*¹¹⁾ wieder vorgeschlagen und verbessert worden. Auf Grund des Gedankens, dass Additionen leichter und sicherer zu vollziehen sind, als Subtraktionen, wird statt des Divisors, dessen Produkte mit den einzelnen Ziffern des Quotienten man beim gewöhnlichen Verfahren nach und nach vom Dividenden abzuziehen hat, die Ergänzung des Divisors entweder zur nächst höheren Potenz von 10 oder zur nächst höheren Zahl mit einer einzigen geltenden Ziffer genommen, wodurch die Subtraktionen sich in Additionen verwandeln¹²⁾.

3. Umgehung der Division. Zur Verwandlung echter Brüche in Dezimalbrüche hat *A. Cauchy*¹³⁾ folgende Regel gegeben: Nachdem auf gewöhnliche Weise die zwei oder drei ersten Ziffern gefunden sind, multipliziere man die erhaltene Gleichung wiederholt mit dem Rest und kombiniere die neuen Gleichungen mit der ursprünglichen. Man bekommt so bei jedem neuen Schritt ungefähr doppelt so viele genaue Ziffern, als vorher bekannt waren. Beispiel:

$$\frac{1}{7} = 0,14 \frac{2}{7}.$$

Diese Gleichung mit dem Rest 2 wiederholt multipliziert, giebt

$$\frac{2}{7} = 0,28 \frac{4}{7}, \quad \frac{4}{7} = 0,56 \frac{8}{7} = 0,57 \frac{1}{7},$$

somit

$$\frac{1}{7} = 0,142857 142857 \dots$$

9) *M. Cantor*, Vorl. üb. Gesch. der Mathem. 1, p. 404, 492, 739, 855; 2, p. 65 und Register.

10) *M. Cantor*, Vorl. üb. Gesch. der Mathem. 1, p. 544, 817 und Register.

11) *J. f. Math.* 13 (1835), p. 209.

12) Man kann, ähnlich wie bei der „österreichischen Rechenmethode“ (Anm. 1), das Schreiben der Partialprodukte ersparen, indem man letztere sofort, während man sie bildet, im Kopfe addiert, aber es besteht dann derselbe Nachteil, dass, wenn im Quotienten die gleiche Ziffer mehrmals auftritt, das betreffende Partialprodukt ebenso oft auszurechnen ist.

13) *Par. C. R.* 11 (1840), p. 847 = *Oeuvres* (1) 5, p. 443; *Cauchy* geht von dem Gedanken aus, dass die *Newton'sche* Annäherungsmethode zur Auflösung numerischer Gleichungen [s. I B 3 a, Nr. 10] schon bei linearen Gleichungen angewendet werden kann.

Nachdem für die Division mit gewissen Zahlen, wie 9, mehrfach besondere Regeln gegeben worden waren, hat *J. Fontès*¹⁴⁾ allgemein die Frage untersucht, in wie weit die arithmetische Division entbehrlich ist, d. h. wie Quotient und Rest der Division einer beliebigen Zahl durch eine andere bei geeigneter Beschaffenheit der letzteren durch einfachere Operationen direkt gefunden werden können.

4. Beschränkung in den verwendeten Ziffern. Zur Vereinfachung der Multiplikation hat *A. Cauchy*¹⁵⁾ vorgeschlagen, mindestens im Multiplikator statt der Ziffern 6, 7, 8, 9 ihre negativen Ergänzungen zu 10 einzuführen¹⁶⁾, sodass man nur Multiplikationen mit 2, 3, $4 = 2 \cdot 2$ und $5 = \frac{10}{2}$ vorzunehmen oder eigentlich nur noch mit 2 und 3 zu multiplizieren und mit 2 zu dividieren hat. Bei der Addition und Subtraktion ist der Gebrauch negativer Ziffern von geringem Nutzen, bei der Division im allgemeinen nicht zu empfehlen. Nach *Ed. Collignon*¹⁷⁾ lässt sich die Multiplikation zweier Zahlen auch erleichtern durch die (höchstens drei Glieder erfordernde) Zerlegung des einen Faktors in Zahlen, die nur aus den Ziffern 0, 1, 2, 5 zusammengesetzt sind (z. B. $7289795 = 5200005 + 2100000 - 10210 = 5255555 + 2022220 + 12020$).

II. Numerische Tafeln¹⁸⁾.

5. Produktentafeln. Sie werden auch Pythagoräische Tafeln genannt und haben zwei Eingänge für die Zahlen x und y , deren

14) Assoc. franç. 21², Pau 1892, p. 182. *Fontès* erläutert sein Verfahren an der Division durch 99, 37 und 499.

15) Par. C. R. 11 (1840), p. 796 = Oeuvres (1) 5, p. 438.

16) Die negativen Ziffern werden überstrichen. Die nötige Umwandlung einer Zahl geschieht, indem man rechts anfangend jede Ziffer, die grösser als 5 ist, durch ihre Ergänzung zu 10 mit einem Strich darüber ersetzt und die links davon stehende Ziffer um 1 erhöht, z. B. $187647 = \overline{2}1\overline{2}4\overline{5}3$. *E. Selling* (Eine neue Rechenmaschine, Berlin 1887, p. 16) empfiehlt, $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$, . . . zu lesen: miss-eins, mizwei, midrei . . . , oder auch: abeins, abzwei, abdrei u. s. w.

17) Annales ponts chaussées (7) 5 (1893), 1. sér., p. 790. Ein ähnliches Verfahren scheinen übrigens nach *M. Cantor*, Vorl. üb. Gesch. der Mathem. 1, p. 570, schon die Inder gekannt zu haben.

18) Es wird nur von Hülftafeln die Rede sein, die das Rechnen im allgemeinen zu erleichtern bestimmt sind, dagegen z. B. nicht von Tafeln für die besonderen Zwecke der Zahlentheorie [s. I C]. Monographien: *A. De Morgan* English Cyclopaedia, London 1861, Artikel „Tables“; *J. W. L. Glaisher*, Report of the Committee on mathematical tables (Brit. Assoc. Report 1873), London 1873.

Produkte xy sie enthalten. Wie in den vorhergehenden Jahrhunderten, bilden sie noch immer das verbreitetste Erleichterungsmittel des Zahlenrechnens; in der Regel sind sie bei Multiplikation und Division gleich gut verwendbar. Ganz abgesehen von den für Unterrichtszwecke bestimmten „Einmaleinstafeln“ giebt es schon solche, bei denen ein Faktor einstellig ist, der andere nur bis Hundert geht¹⁹⁾. Bis 10×10000 reichten von älteren bereits eine Tafel von *J. Dodson* (1747)²⁰⁾, von neueren zeigen diesen Umfang diejenigen von *R. Picarte* (1861?)²¹⁾ und *Th. v. Esersky* (5. Ausg. 1874)²²⁾. Die obere Grenze 10×100000 haben *C. A. Bretschneider* (1841)²³⁾, *S. L. Laundry* (1865)²⁴⁾ und *G. Diakow* (1897)²⁵⁾ gewählt, während am weitesten in dieser Richtung, bis 10×10000000 , *A. L. Crelle* in seiner wenig bekannten „Erleichterungstafel“ geht²⁶⁾, wenn wir von einer in der Anwendung sehr umständlichen Tafel *Ch. Z. Slonimsky's*²⁷⁾ mit völlig anderer Einrichtung absehen, bei der die Zahl der Ziffern des zweiten Faktors unbegrenzt ist.

Den grössten Ruf geniessen mit Recht *A. L. Crelle's* „Rechentafeln“²⁸⁾, die alle Produkte bis 1000×1000 in zweckmässiger An-

19) Z. B. die „kleine Produktentafel“ der königl. preuss. Landesaufnahme, trigonom. Abteilung, Berlin 1897.

20) In „The calculator“, London.

21) „Tables de multiplication“, s. *Glaisher* a. a. O. p. 34.

22) „Ausgeführte Multiplikation und Division“, St. Petersburg u. Leipzig. Ein Anhang gestattet noch, den zweiten Faktor bis 1111111 auszudehnen.

23) „Produktentafel . . .“, Hamburg u. Gotha.

24) „A table of products . . .“, London.

25) „Multiplikations-Tabelle“, St. Petersburg. Sie umfasst 1000 S. quer Quart, so viel wie die 100mal so weit reichende „Erleichterungstafel“ von *Crelle*²⁶⁾, *Laundry's* Tafel nur 10 S., *Bretschneider's* (ähnlich wie *Crelle's* eingerichtete) 100 S.

26) Berlin 1836. Interessant ist die Vorrede, der zufolge beim Druck der Tafel kein Manuskript benützt worden ist.

27) Dem *J. f. Math.* 30 (1846) beigelegt; ebenda p. 215 *Crelle's* Erklärung und Beweis des zu Grunde liegenden arithmetischen Satzes. Vgl. auch Anm. 96.

28) Sie erschienen zuerst 1820 in zwei Oktavbänden von etwa 900 S.; die 2., von *C. Bremiker* besorgte Ausgabe, Berlin 1857 (7. Ausg. 1895, deutsch u. französisch, 1. englische Ausg. 1897), besteht nur noch aus einem Band mit 450 S. klein Folio. Auf jeder halben Seite befinden sich die Produkte der am Kopfe stehenden (1-, 2- oder 3-ziffrigen) Zahl mit den Zahlen von 1—999, wobei leider die durch 10 teilbaren Faktoren nicht berücksichtigt sind. Die Raumersparnis gegenüber der ersten Ausgabe rührt wesentlich daher, dass die zwei letzten, den Produkten einer und derselben Reihe gemeinschaftlichen Ziffern abgetrennt und in eine besondere Spalte gesetzt worden sind. *Crelle's* Fortschritt ist ein rein technischer, denn die zwar noch sehr unhand-

ordnung geben. Wenn in einer Produktentafel die beiden Faktoren zur gleichen Höhe ansteigen, kommt jedes Produkt zweimal vor und die Tafel nimmt daher nur halb soviel Raum ein, wenn man jedes Produkt nur einmal schreibt. Diesen Gedanken haben *C. Cario-H. C. Schmidt*²⁹⁾ und *A. Henselin*²⁹⁾ zur Ausführung gebracht³⁰⁾. In manchen Fällen erweisen sich Produktentafeln bequemer, bei denen ein Faktor sich nur von 1—100 erstreckt, der andere von 1—1000³¹⁾. Es gab solche schon im 18. Jahrhundert, z. B. von *Ch. Hutton*³²⁾; neuere Tafeln dieser Art sind die von *C. L. Petrick*³³⁾, *H. Zimmermann*³⁴⁾, *C. A. Müller*³⁵⁾ und *L. Zimmermann*³⁶⁾, während in einer

lichen Tabulae arithmeticae ΠΡΟΣΘΑΦΑΙΡΕΣΕΩΣ universales des *Herwarth von Hohenburg* aus dem Jahre 1610 (Beschreibung und Probe z. B. in *Fr. Unger, Methodik der prakt. Arithmetik, Leipzig 1888, p. 127*) hatten schon dieselbe Ausdehnung.

29) „Zahlenbuch“, entworfen von *C. Cario*, ausgeführt u. s. w. von *H. C. Schmidt*, Aschersleben 1896; *A. Henselin*, „Rechentafel“, Berlin 1897. Um das durch die veränderte (bei der letzteren Tafel wohl am wenigsten gelungene) Einrichtung erschwerte Aufsuchen wieder einigermaßen zu erleichtern, sind „Registerzettel“ angebracht. Dem Vorteile, weniger Raum zu beanspruchen, steht bei diesen Tafeln ein (bei längeren Divisionen fühlbarer) Nachteil gegenüber: die Vielfachen einer und derselben Zahl sind in der Regel durch die ganze Tafel zerstreut, statt wie bei *Crelle* auf einer halben Seite bei einander zu stehen.

30) In kleinerem Umfange, wie es scheint, bereits *R. Picarte* (1861?); vgl. den von *Glaiser* (Anm. 18), p. 34 angeführten Titel: „Tableau Pythagorique, étendu jusqu'à 100 par 100, sous une nouvelle forme qui a permis de supprimer la moitié des produits“.

31) In der Mitte zwischen diesen und *Crelle's* Tafeln stehen einige von kunstloser Anordnung, bei denen der eine Faktor bis rund 500 anwächst, z. B. die 1860 in Oldenburg ohne Verfasseramen erschienenen „Multiplikationstabellen aller Zahlen von 1 bis 500“, in deren Vorrede auf ein französisches Vorbild aus dem J. 1805 hingewiesen wird, ferner *Oyon*, Tables de multiplication, 5^{ème} éd., Paris 1886 (2 Bde; im 1. geht der Multiplikand von 2—500, im 2. von 501—1000).

32) Tafel 1 der „Tables of the products and powers of numbers...“, London 1781.

33) „Multiplikationstabellen, geprüft mit der Thomas'schen Rechenmaschine...“, erste Lieferung 1—1000, Libau 1875. In den folgenden Lieferungen ist der zweite Faktor von 1001—2000, 2001—3000 u. s. w. fortgeführt.

34) „Rechentafel...“, Berlin 1889.

35) „Multiplikations-Tabellen...“, Karlsruhe 1891. Sie sind viel handlicher als 34), weil eine ähnliche Anordnung, wie bei *Crelle's* Rechentafeln benützt ist.

36) „Rechen-Tafeln“, Liebenwerda 1895. Durch Absonderung der drei letzten Ziffern der Produkte ist grosse Kürze erreicht — 10 Doppelseiten, statt (wie bei den vorhergehenden Tafeln) deren 100 — aber die Produkte können selten fertig der Tafel entnommen werden, sondern es muss der Überschuss der Hunderter,

grösseren Tafel von *L. Zimmermann*³⁷⁾ und derjenigen von *J. Riem*³⁸⁾ beim einen Faktor ebenfalls 100, beim anderen 10000 als obere Grenze genommen ist. Wegen einer Art von zusammensetzbaren Produktentafeln vgl. Nr. 12 (Apparate von *Slonimsky*, *Jofe* und *Genaille*).

6. (Multiplikationstafeln mit einfachem Eingang:) Tafeln der Viertelquadrate und der Dreieckszahlen. *P. S. Laplace* hat die Frage aufgeworfen, wie durch Benützung von Tafeln mit einfachem Eingang die Multiplikation auf Addition und Subtraktion zurückgeführt werden könne³⁹⁾. Er denkt sich xy aus einem oder mehreren Gliedern der Form $\varphi(X \pm Y)$ gebildet, wo X eine Funktion von x allein, Y eine Funktion von y allein bedeutet. Die Annahme $xy = \varphi(X + Y)$ führt zu den Logarithmen [s. Nr. 27], während die Annahme $xy = \varphi(X + Y) - \varphi(X - Y)$ einerseits die Lösung

$$xy = \frac{1}{2} [\cos(X - Y) - \cos(X + Y)]$$

mit $x = \sin X$, $y = \sin Y$ ergibt, auf der die, vor der Erfindung der Logarithmen benützte prosthaphäretische Methode⁴⁰⁾ beruht, andererseits die Lösung⁴¹⁾

$$xy = \frac{1}{4} [(x + y)^2 - (x - y)^2].$$

der bis zu 9 Einheiten betragen kann, im Kopfe addiert werden, wodurch die Sicherheit und Schnelligkeit der Rechnung bedeutend leidet.

37) „Rechentafeln...“, grosse Ausgabe, Liebenwerda 1896. Die vier letzten Ziffern der Produkte sind abgesondert; zuweilen ist eine Erhöhung der vorhergehenden Ziffer, aber nur um eine Einheit, nötig.

38) „Rechentabellen für Multiplikation und Division“, Basel 1897. Die Produkte sind in drei Teile zerlegt. Durch Benützung von Proportionalteilen können auch die Produkte von 2-ziffrigen mit 5-ziffrigen Zahlen gefunden werden. Der Hauptunterschied zwischen 37) und 38) besteht darin, dass jede Doppelseite in letzterer Tafel die Produkte der am Kopf stehenden 2-ziffrigen mit allen 1- bis 4-ziffrigen Zahlen enthält, in ersterer die Produkte aller 1- und 2-ziffrigen mit hundert, dieselben Mittelziffern enthaltenden 4-ziffrigen Zahlen. Bei der Division mit 2-ziffrigen Zahlen sind deshalb wohl die letzteren, bei derjenigen mit 3- oder 4-ziffrigen Zahlen die ersteren vorteilhafter.

39) Sur la réduction des fonctions en tables, *J. éc. pol.* 8, cah. 15 (1809), p. 258.

40) *S. M. Cantor*, Vorl. üb. Gesch. der Mathematik 2, p. 454; *A. v. Braunmühl*, *Zeitschr. Math. Phys.* 44, 1899, Suppl. p. 15.

41) *J. J. Sylvester* hat im *Phil. Mag.* (4) 7 (1854), p. 430 die Ausdehnung der zweiten Formel, *J. W. L. Glaisher* ebenda (5) 6 (1878), p. 331 diejenige der ersten auf n Faktoren gegeben (weniger allgemein beide Arten von Formeln schon bei *J. D. Gergonne*, *Ann. de math.* 7 (1816/1817), p. 157). Im Falle $n = 3$ ist z. B.

Den Gebrauch dieser Formel unter Zuhilfenahme einer Quadrattafel hatte schon 1690 *L. J. Ludolff*⁴²⁾ gelehrt; eine Vereinfachung, der Schreibweise

$$xy = \frac{(x+y)^2}{4} - \frac{(x-y)^2}{4}$$

entsprechend, brachten die Tafeln der Viertelquadrate⁴³⁾. Eine solche, bis zum Argument 20000 gehende Tafel gab zuerst *A. Voisin* 1817 heraus⁴⁴⁾. Ebenso weit reichten die Tafeln von *J. A. P. Bürger*⁴⁵⁾, und *J. J. Centnerschwer*⁴⁶⁾, dagegen bis 30000 die von *J. Ph. Kulik*⁴⁷⁾, bis 40000 die von *J. M. Merpaut*⁴⁸⁾, bis 100000 die von *S. L. Laundry*⁴⁹⁾. Die beste Tafel der Viertelquadrate hat *J. Blater* herausgegeben⁵⁰⁾. Sie geht bis 200 000, liefert also noch die Produkte 5-ziffriger Faktoren bis auf die letzte Stelle genau. Eine derartige Tafel wird nämlich in Stand setzen, zwei Zahlen mit n Ziffern zu multiplizieren, wenn ihre Summe, deren obere Grenze $2 \cdot 10^n$ beträgt, sich noch im Eingang der Tafel findet. Nach *J. W. L. Glaisher*⁵¹⁾ leistet eine halb so umfangreiche Tafel der Dreieckszahlen dieselben Dienste; denn ist T_x die zu x gehörige Dreieckszahl, d. h. $T_x = \frac{1}{2} x(x+1)$, so hat man

$$xy = T_x + T_{y-1} - T_{x-y} = T_{x-1} + T_y - T_{x-y-1},$$

sowie $24abc = (a+b+c)^3 - (b+c-a)^3 - (c+a-b)^3 - (a+b-c)^3$,

$$4 \sin a \cdot \sin b \cdot \sin c$$

$$= \sin(b+c-a) + \sin(c+a-b) + \sin(a+b-c) - \sin(a+b+c),$$

oder

$$4 \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c$$

$$= \cos(a+b+c) + \cos(b+c-a) + \cos(c+a-b) + \cos(a+b-c).$$

42) „Tetragonometria Tabularia“, Lipsiae 1690.

43) Der bei ungeradem Argument auftretende Bruch $\frac{1}{4}$ wird immer weggelassen, sodass die eigentlich dargestellte Funktion unstetig ist, nämlich $f(2x) = x^2$, $f(2x+1) = x^2 + x$.

44) „Tables des multiplications...“, Paris 1817.

45) „Tafeln zur Erleichterung in Rechnungen...“, Karlsruhe 1817.

46) „Neu erfundene Multiplikations- und Quadrat-Tafeln“, Berlin 1825.

47) „Neue Multiplikationstafeln“, Leipzig 1852.

48) „Tables Arithmonomiques“, Vannes 1832 (Arithmonome = Viertelquadrat).

49) „Table of Quarter-squares...“, London 1856.

50) „Tafel der Viertel-Quadrate“, Wien 1887. Durch verschiedene Kunstgriffe in der Anordnung hat sie auf 200 Quartseiten zusammengedrängt werden können; eine dasselbe leistende Produktentafel nach Art der *Crelle*'schen würde 10 000 Foliobände umfassen.

51) *Nature* 40 (1889), p. 575.

in welcher Formel kein grösseres Argument, als die grössere der gegebenen Zahlen vorkommt⁵²⁾. Eine für diese Anwendung bestimmte Tafel der Dreieckszahlen von 1—100000 hat *A. Arnaudeau*⁵³⁾ berechnet. Zum Dividieren eignen sich die Tafeln der Viertelquadrate und der Dreieckszahlen nicht.

7. Quotienten- und Divisionstabeln. Tafeln zur Verwandlung gemeiner echter Brüche, die nicht bei einer bestimmten Anzahl von Dezimalen stehen bleiben (über derartige s. Nr. 33), sondern jedesmal die Periode des Dezimalbruchs vollständig enthalten, giebt es von *F. W. C. Bierstedt*⁵⁴⁾, *H. Goodwyn*⁵⁵⁾ und *K. Fr. Gauss*⁵⁶⁾.

Unter dem Namen „Tafeln der konstanten Ziffern“ hat *F. Calza*⁵⁷⁾ Hülftabeln im Entwurf bekannt gegeben, die das Dividieren mit 3- und 4-ziffrigen Zahlen auf unbedeutende Additionen und Subtraktionen zurückführen, ja noch bei 5- bis 12-ziffrigem Divisor anwendbar sind.

52) *Laplace* (Anm. 39) kennt diese Lösung nicht. Sie hat den Mangel, dreimaliges Eingehen in die Tafel nötig zu machen, um welchen Preis, wie *Glaisher* selbst bemerkt, mit einer Tafel der Viertelquadrate oder noch besser der halben Quadrate dasselbe zu erreichen wäre, wenn man die Formel

$$ab = \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} b^2 - \frac{1}{2} (a - b)^2$$

zu Grunde legte.

53) Bis jetzt ist nur ein Bruchstück mit Erläuterungen unter dem Titel „Tables de triangulaires de 1 à 100000...“, Paris 1896, veröffentlicht. Die einzige ältere Tafel scheint die von *E. de Joncourt*, De natura et praeclaro usu simplicissimae speciei numerorum trigonalium..., Hagae Comitum 1762, zu sein, welche bis 20000 geht.

54) „Dezimalbruch-Tabellen...“, 1. Teil, die Brüche vom Nenner 1 bis zum Nenner 300 enthaltend (mehr nicht erschienen), Fulda 1812.

55) „Table of circles...“, London 1823; giebt nur die Ziffern der Periode, die bei der Division einer ganzen Zahl durch eine ganze Zahl unter 1024 auftritt: sie wird durch die „Tabular series of decimal quotients...“ (8-stellig), London 1823, ergänzt. S. *Glaisher* (Anm. 18) p. 31, wo auch zwei kleinere Tafeln desselben Verfassers aus dem J. 1816 besprochen sind.

56) „Tafel zur Verwandlung gemeiner Brüche mit Nennern aus dem ersten Tausend in Dezimalbrüche“, Werke 2, p. 412—434, Göttingen 1863. Zum Gebrauch der Tafel sind Kenntnisse aus der (elementaren) Zahlentheorie nötig. Ein Teil findet sich als tabula III in den *Disqu. arithm.*, Lipsiae 1801 (s. *K. Fr. Gauss'* Untersuchungen über höhere Arithmetik, deutsch hrsg. von *H. Maser*, Berlin 1889), woselbst in Art. 316 die Erklärung.

57) „Saggio di calcolazione rapida per mezzo delle tavole delle cifre costanti“, Napoli, Bideri (1893?). Eine Probe nebst Erklärung giebt *G. C. Baravelli*, Nota su alcuni aiuti alla esecuzione dei calcoli numerici, Roma 1895, p. 19; in verbesserter, auch zur Multiplikation geeigneter Form in *Zeitschr. Math. Phys.* 44 (1899), p. 50.

8. Tafeln der Quadrate, Kuben und höheren Potenzen. Tafeln der Quadrate aller ganzen Zahlen bis zu einer gewissen Höhe, denen gewöhnlich Tafeln der Kuben in mehr oder weniger enger Verbindung zusammen vorkommen⁵⁸), sind fast so alt und zahlreich als die Produktentafeln. In vielen Tafelsammlungen und Taschenbücher findet man (um von noch kleineren Tafeln abzusehen) die Quadrate und Kuben der Zahlen bis 1000, in nicht wenigen Tafeln auch bis 10000⁶⁰). Bis zum Quadrat von 27000 und Kubus von 24000 (s. *G. A. Jahn*⁶¹). Die ausgedehntesten Tafeln dieser Art haben wir von *J. Ph. Kulik*⁶²); sie enthalten die Kuben sowohl als die Quadrate aller 1- bis 5-ziffrigen Zahlen, gehen also, was die Quadrate betrifft, zwar nicht über *L. J. Ludolff's* *Tetragonometria tabularia*⁴²), bei den Kuben dagegen über die früheren Tafeln bedeutend hinaus. Die Quadrate bis zur gleichen Höhe können auch mittelst der Tafel der Viereckquadrate von *J. Blater*⁵⁰) sehr leicht bestimmt werden. *E. Duhamel* hat ein Tableau herausgegeben, das die Quadrate der Zahlen bis Tausend direkt, diejenigen der Zahlen bis 1 Milliarde mittelst weniger Additionen und Subtraktionen finden lässt.

Den höheren Potenzen von 2, 3 und 5 sowie den ersten 9 bis 10 Potenzen der Zahlen von 1 bis 100 begegnet man in mehreren Tafelsammlungen: erstere hat z. B. *G. Vega*⁶⁴) und in Entlehnung von ihm *J. Hülsse*⁶⁵) bis 2^{45} , 3^{36} , 5^{27} , letztere ausser den genannten

58) Auch Tafeln der Quadrat- und Kubikwurzeln; über diese, wie über Tafeln der auf eine bestimmte Zahl von Stellen verkürzten Quadrate und höheren Potenzen s. Nr. 34 u. 35.

59) Z. B. in *J. A. Hülsse*, Sammlung mathem. Tafeln, Leipzig 1840 oder dem „Taschenbuch der Mathematik“ von *W. Ligowski*, Berlin 1867, 3. Aufl.:

60) Wegen ihrer Korrektheit hervorgehoben werden z. B. die dem „*Manuel d'Architecture...*“ von *M. Séguin aîné* (Paris 1786) angehängten, sowie die „*Tables of squares, cubes...*“ von *P. Barlow*, London 1840. Die ältesten Quadrat- und Kubiktafeln dieses Umfangs scheinen die dem Werke „*De cælesti gravitatis*“ von *P. Guldin*, Viennæ 1635, beigelegten zu sein.

61) „Tafeln der Quadrat- und Kubikwurzeln aller Zahlen von 1 bis 27000, der Quadratzahlen aller Zahlen von 1 bis 27000, der Kubikzahlen aller Zahlen von 1 bis 24000“, Leipzig 1839.

62) „Tafeln der Quadrat- und Kubik-Zahlen aller natürlichen Zahlen bis Hunderttausend...“, Leipzig 1848. Die Eingänge sind für die Quadrat- und Kubikzahlen, welche neben einander stehen, gemeinsam. Die sehr gedrängte Anordnung hat mit der von *Crelle's* Rechentafeln²⁸) Ähnlichkeit.

63) „*Carrés et racines carrées*“, Marseille, Barthelet et Co., ohne Jahre (1896?).

64) „*Logarithmisch-trigonometrische Tafeln*“ 2, 2. Aufl., Leipzig 1797

65) „*Sammlung mathematischer Tafeln*“, Leipzig 1840. Die Potenzen

*Ch. Hutton*³²⁾ und *P. Barlow*⁶⁶⁾. Eine besondere Tafel der 12 ersten Potenzen der Zahlen von 1 bis 1000, von *J. W. L. Glaisher*⁶⁷⁾ berechnet, ist stereotypiert (1874), aber bis jetzt nicht veröffentlicht worden.

9. Faktoren-(Divisoren-)Tafeln. Nicht blos in der Zahlentheorie [I C 1, Nr. 9], sondern auch beim gewöhnlichen Rechnen (besonders mit grossen Zahlen) leisten mitunter Tafeln, die entweder alle einfachen Teiler oder wenigstens den kleinsten Teiler aller Zahlen (allenfalls mit Ausnahme der durch 2, 3 oder 5 teilbaren) bis zu möglicher Höhe angeben, treffliche Dienste. Vor Beginn des 19. Jahrhunderts war am weitesten *A. Felkel*⁶⁸⁾ gekommen. *L. Chernac*⁶⁹⁾ veröffentlichte dann die einfachen Teiler der Zahlen bis 1020000, *J. Ch. Burckhardt*⁷⁰⁾ die kleinsten Teiler der Zahlen der 3 ersten Millionen, während diejenigen der 7., 8. und 9. Million (die letzte nicht vollständig) auf *Gauss'* Veranlassung von dem Rechenkünstler *Z. Dase*⁷¹⁾ berechnet und nach dessen Tode (die 9. Million von *H. Rosenberg* ergänzt) herausgegeben wurden. Die Lücke von 3—6 Millionen hat *J. Glaisher*⁷²⁾ endgültig ausgefüllt. Während nicht einmal die 10. Million gedruckt vorliegt, befindet sich im Besitz der Wiener Akademie als Manuskript eine den Zahlenraum von 3—100

2 bis 2^{144} kommen nach *Glaisher* (Anm. 18) bei *J. Hill*, Arithmetic 1745, jede 12. Potenz von 2 bis 2^{721} bei *W. Shanks*, Contribution to Mathematics..., London 1853, vor.

66) „New Mathematical Tables...“, London 1814.

67) *S. Glaisher* (Anm. 18), p. 29.

68) „Tafel aller einfachen Faktoren der durch 2, 3, 5 nicht teilbaren Zahlen von 1 bis 10000000; 1. Teil, enthaltend die Faktoren von 1 bis 144000...“, Wien 1776. Der 2. und 3. Teil (bis 336000 bzw. 408000) ist nur in wenigen Abdrücken erhalten geblieben. Im Manuskript hatte *Felkel* die Tafel bis 2 Millionen fertig.

69) „Cribrum arithmetikum...“, Daventriae 1811.

70) „Tables des Diviseurs pour tous les nombres du deuxième million...“, Paris 1814; „... troisième million...“, Paris 1816; „... premier million...“, Paris 1817.

71) „Faktorentafeln für alle Zahlen der siebenten Million...“, Hamburg 1862; die achte Million erschien 1863, die neunte 1865.

72) „Factor table for the fourth million“, London 1879; fifth million 1880; sixth million 1883. *A. L. Crelle* und *J. Ch. Burckhardt* hatten diesen Teil ebenfalls berechnet. Mehr als irgendwo scheint auf diesem Gebiet durch Wiederholung schon gethaner Arbeit Zeit und Kraft verschwendet worden zu sein. Vgl. *P. Seelhoff*, Geschichte der Faktorentafeln, Arch. Math. Phys. 70 (1884), p. 413.

Millionen umfassende Faktorentafel, ein von *J. Ph. Kulik*⁷³⁾ hinterlassenes Riesenwerk.

Leicht zugängliche kleinere Faktorentafeln sind u. a. die in *H. Zimmermann's* Rechentafel⁷⁴⁾ (bis 1000), in *J. Hoüel's* Tables de Logarithmes⁷⁴⁾ (bis 10841) und in *J. A. Hülsse's* Sammlung mathematischer Tafeln⁷⁵⁾ (bis 102000).

III. Rechenapparate und -Maschinen.

Monographien mit Abbildungen: *M. d'Ocagne*, Le calcul simplifié par les procédés mécaniques et graphiques [extrait des Annales du Conservatoire des Arts et Métiers (2) 5, 6, 1893—1894], Paris 1894. — *W. I. von Bohl*, Apparate und Maschinen zur mechanischen Ausführung arithmetischer Operationen (russisch), Moskau 1896. — Viele Beschreibungen und Abbildungen enthält auch: *W. Dyck*, Katalog mathem. und mathem.-physikal. Modelle, Apparate und Instrumente, München 1892, Nachtrag München 1893.

Mechanische Vorrichtungen, die bestimmt und geeignet sind, dem Rechner einen kleineren oder grösseren Teil seines Geschäftes abzunehmen und so nicht nur eine Ersparnis an geistiger Arbeit, sondern auch eine grössere Sicherheit und Schnelligkeit herbeizuführen, giebt es heute in überraschender Zahl und Mannigfaltigkeit. Die eigentlichen Rechenmaschinen insbesondere haben eine grosse Bedeutung erlangt und sind zu einem unentbehrlichen Werkzeug von nicht geringer und stetig zunehmender Verbreitung⁷⁶⁾ geworden; auf weiten Gebieten haben sie die Anwendung der rechnenden Mathematik

73) *S. Kulik's* kurze Mitteilung in den Prager Abh. d. böhm. Ges. d. W. (5) 11 (1860), p. 24, Fussnote, sowie *Petzval's* Bericht, Wien. Ber. 53² (1866), p. 460. Um Raum zu sparen, bezeichnet *Kulik* (ähnlich wie *Felkel*) die Teiler nicht durch Ziffern, sondern durch Buchstabenverbindungen, deren Bedeutung einem Schlüssel zu entnehmen ist.

74) Paris 1858; nur die kleinsten Teiler der durch 2, 3, 5 und 11 nicht teilbaren Zahlen.

75) Leipzig 1840; die betr. Tafel geht auf *G. Vega*⁶⁴⁾ oder eigentlich *J. H. Lambert*, Zusätze zu den logarithm.-trigonom. Tabellen..., Berlin 1770 zurück. Ihre Einrichtung ist für spätere (*Burckhardt*, *Dase*, *Glaisher*) vorbildlich gewesen.

76) In der Litteratur kommen mehr als 120 verschiedene Konstruktionen vor. Mögen auch die meisten davon nur in Zeichnungen oder Modellen vorhanden sein, also ihre Lebensfähigkeit nicht bewiesen haben, so beträgt doch die Zahl der ausgeführten Rechenmaschinen (deren grösster Teil nur ganz wenigen Systemen angehört) immerhin 4000, während am Ende des 18. Jahrhunderts kaum über 15 Arten mit etwa 30 Exemplaren zu zählen waren.

in der jetzigen Ausdehnung erst ermöglicht und manche wissenschaftliche Unternehmung wäre ohne ihre Hilfe wahrscheinlich nicht in Angriff genommen worden; ja sie fangen an, auf die Gestaltung gewisser Formeln und Berechnungsweisen einen bestimmenden Einfluss zu üben, so wie es früher die Logarithmen gethan haben.

Die auf dem fraglichen Gebiete im 19. Jahrhundert erzielten Fortschritte sind von zweierlei Art. Abgesehen davon, dass wegen Unkenntnis der früheren Leistungen nicht wenige Erfindungen sich des öfteren wiederholt haben, galt es in erster Linie, das Überkommene technisch durchzubilden und zum wirklichen Gebrauch geeigneter zu machen⁷⁷⁾; auf der anderen Seite sind auch eine Fülle wesentlich neuer Gedanken aufgetaucht und teilweise zur Durchführung gelangt. Die Entwicklung ist noch nicht abgeschlossen, sondern in den letzten Jahrzehnten und Jahren wieder in lebhaften Fluss gekommen.

Vorrichtungen, die nur Zwecken des Unterrichts dienen, nämlich Begriffe und Verfahren des gewöhnlichen Rechnens veranschaulichen sollen, aber trotzdem fälschlicherweise oft Rechenmaschinen genannt werden, bleiben im folgenden von der Betrachtung ausgeschlossen.

Die Grenze zwischen Rechenapparaten und Rechenmaschinen wollen wir in der Weise ziehen, dass wir automatische Zehnerübertragung [s. Nr. 11 und Nr. 14], ausser dem Vorhandensein von Mechanismen überhaupt, als wesentlich für letztere ansehen.

a. Rechenapparate.

10. Rechenbrett (Abacus). Das Rechenbrett — $\acute{\omicron}$ $\acute{\alpha}\beta\alpha\acute{\xi}$ der alten Griechen, abacus der Römer — mit auf parallelen Drähten, Stäben oder in Rinnen verschiebbaren Kugeln, Knöpfen oder dergl. zur mechanischen Ausführung der Addition und Subtraktion, wurde bei uns noch im 17. Jahrhundert zum ernstlichen Rechnen benützt⁷⁸⁾, scheint aber seine Bedeutung für Westeuropa endgiltig verloren zu haben⁷⁹⁾. In Russland dagegen ist es unter dem Namen Stschoty⁸⁰⁾,

77) In dieser Beziehung sei schon hier bemerkt, dass die wichtigsten Konstruktionsteile der heute verbreitetsten Rechenmaschinen am Ende des 17. Jahrhunderts von *G. W. Leibniz* erdacht worden sind.

78) *M. Cantor*, Vorles. üb. Gesch. der Math. 1, p. 120, 493 u. Register. — Indem der Rechnende die einzelnen Summanden — mit den höchsten Stellen, wie beim Sprechen, beginnend — der Reihe nach aufstellt, erhält er zugleich die Summe.

79) Bei der auf Anregung von *J. V. Poncelet*, welcher als Kriegsgefangener in Russland (1812—1814) das Rechenbrett kennen gelernt hatte, erfolgten Ein-

bei den Chinesen als suán-pân (Rechenwanne), bei den Japanern als Soro-Ban⁸¹⁾ noch in allgemeinem Gebrauch. *G. von der Gabelentz* hat die Verwendbarkeit eines Rechenbrettes allgemeinerer Form beim Rechnen in nicht-dekadischen Zahlensystemen gezeigt⁸²⁾.

11. Sonstige Additions- (bzw. Subtraktions-)Apparate ohne selbstthätige Zehnerübertragung. Beim Rechenbrett, wo die Einheiten der verschiedenen Ordnungen durch Kugeln dargestellt sind, ist es beim Setzen oder Addieren einer Zahl notwendig, die den einzelnen Ziffern entsprechenden Anzahlen von Kugeln, wenigstens durch schnelles Überblicken, wirklich zu zählen. Bei den folgenden Apparaten dagegen, welche Vorstufen der Additionsmaschinen bilden [s. Nr. 15], sind im einfachsten Falle die natürlichen Zahlen bis zu irgend einer Höhe in gleichen Zwischenräumen auf einer geraden oder in sich beweglichen krummen Linie angebracht, wobei als Träger der so erhaltenen Skala u. a. ein Stab, ein Band, eine kreisförmige Scheibe genommen sein kann. Das Weiterzählen oder Addieren geschieht dann entweder durch Fortbewegen eines Zeigers an der Skala⁸³⁾, oder umgekehrt durch Bewegung der Skala (z. B. unter einem Fenster, in welchem immer nur eine Zahl derselben erscheint), und kann — worin der Hauptunterschied gegenüber dem Rechenbrett liegt — durch Benützung einer zur ersten kongruenten Skala zu einem rein mechanischen gemacht werden⁸⁴⁾.

führung desselben in die Schulen ist es zu einem Anschauungsmittel herabgesunken. Neuere Versuche, ihm wieder Eingang in die Praxis zu verschaffen (vgl. *A. R. von Loehr*, Österr. Eisenbahnzeitung 1897, p. 9), werden schwerlich ein besseres Ergebnis haben; auch wäre zu erwägen, ob die russische Form mit 10 Kugeln; oder die chinesisch-japanische mit 6 oder 7 Kugeln in jeder Reihe, von denen 5 je Eins, die übrigen je Fünf bedeuten, den Vorzug verdient.

80) Dieses Wort ist plurale tantum. Wegen einiger Abarten, die zur Anwendung beim Multiplizieren und Dividieren vorgeschlagen worden sind, vgl. *von Bohl* p. 8, 9.

81) Über das Rechnen damit (einschliesslich des Ausziehens von Wurzeln) vgl. *A. Westphal*, Mitteilungen der deutschen Gesellsch. f. Natur- u. Völkerkunde Ostasiens in Tōkiō, 1875, Heft 8, p. 27.

82) Arch. Math. Phys. (2) 11 (1892), p. 213.

83) Ein ähnlicher Gedanke findet sich schon im Anfang des 14. Jahrhunderts bei dem Rechenbrett von *Jean de Murs* (oder *de Meurs*), s. *Alfred Nagl*, Zeitschr. Math. Phys. 34 (1889), Suppl. p. 141.

84) Der Gedanke, die Addition durch Verschieben eines gleichmässig geteilten Massstabes an einem zweiten auszuführen, ist unbekanntes Ursprungs, aber jedenfalls alt. *J. C. Houzeau*, Fragment II sur le calcul numérique, Brux. Bull. (2) 40 (1875), p. 74, empfiehlt die „addition au ruban“, welche in Bankhäusern angewendet werde: man misst mit einem Massstab an einem ebenso

Zusammengesetzte Apparate dieser Art, welche z. B. für die Einer, Zehner u. s. w. je eine besondere Skala besitzen, ermöglichen auch die Addition vielziffriger Zahlen. So besteht der Apparat von *Kummer* (1847)⁸⁵⁾, wie verschiedene ältere⁸⁶⁾ und neuere, aus parallelen, in Nuten verschiebbaren Stäbchen, derjenige von *Lagroux* (1828)⁸⁷⁾ aus konzentrischen Kreisringen, der von *Djakoff*⁸⁸⁾ und der „*Ribbon's Adder*“⁸⁹⁾ von *Ch. Webb* aus Bändern, die über Rollen laufen. Der wunde Punkt ist die sogenannte Zehnerübertragung: Wird z. B. 7 zu 46 addiert durch Weiterbewegen der auf 6 stehenden Einerskala um 7 Stellen, so wird der Apparat nur 43 zeigen, wenn der Rechner nicht mit der Hand die nötige Erhöhung der Zehner um eine Einheit ausführt. Oft ist nur eine Regel gegeben, wie man sehen kann, ob eine Zehnerübertragung stattfinden muss; letztere erfolgt mechanisch bei dem oben genannten Apparat von *Kummer*, dessen Einrichtung auch einen Bestandteil mehrerer Arithmographen (z. B. der von *Troncet* und *Bollée*, s. Nr. 13, bes. Fig. 3 bei *R*) bildet.

Mit den meisten dieser Apparate, die alle nur ein verhältnismässig langsames Arbeiten gestatten, lässt sich auch subtrahieren, indem man die bei der Addition nötigen Bewegungen umkehrt.

12. Multiplikations- und Divisionsapparate. Zuerst seien, vielfach nur als elementare Unterrichtsmittel gedachte, schon in früheren Jahrhunderten häufige und immer wieder in neuen Formen auftauchende Apparate von geringer Bedeutung erwähnt, bei denen eine fertige Produktentafel [s. Nr. 5], meist kleinen Umfangs, auf einen Schieber oder die Mantelfläche eines Prismas oder Cylinders geklebt oder auf Rollen gewickelt ist und gemäss den Werten der Faktoren so bewegt werden kann, dass an einer zum Ablesen bestimmten Stelle das gesuchte Produkt erscheint⁹⁰⁾.

Bemerkenswerter sind *J. Neper's* Rechenstäbchen (*virgulae nume-*

geteilten Bande weiter. Ein Messband ist auch in dem Apparat von *L. Reimann*, D. R. P. (= deutsches Reichspatent) Nr. 45482 (1888) benützt.

85) von *Bohl* p. 14.

86) Z. B. der von *C. Caze* (1720), s. *M. d'Ocagne* p. 6.

87) Soc. d'Encour. Bull. 1828, p. 394.

88) von *Bohl* p. 191.

89) *Dyck's* Katalog, Nachtr. p. 5, Abb. bei von *Bohl* p. 25.

90) Eines unter sehr vielen Beispielen: Rechenapparat „*Zeus*“ von *Edm. Schneider-München* (Walzenform). Bei *Fr. Sönnecken's* Apparat D. R. P. Nr. 51445 (1889) deutet ein Zeiger auf das Produkt, wenn zwei andere Zeiger auf die Faktoren gestellt worden sind. — Natürlich können auch andere Tabellen mit einfachem oder doppeltem Eingang entsprechend eingerichtet werden.

ratrices)⁹¹⁾, die nebst den zahlreichen Abarten, die schon im 17. und 18. Jahrhundert erdacht wurden, im 19. Jahrhundert verschiedene Auferstehungen erlebt haben⁹²⁾. Sie können als eine durch Zerschneiden in Streifen beweglich gemachte Einmaleinstafel betrachtet werden und führen die Multiplikation einer Zahl von beliebig vielen Ziffern, welche man aus den betreffenden Stäbchen zusammensetzen hat, mit einer der Zahlen 2 bis 9 auf eine Addition einzifferiger Zahlen zurück. Einen wesentlichen Fortschritt zeigen die Apparate von *Slonimsky* (1844)⁹³⁾, *Jofe* (1881)⁹⁴⁾ sowie *H. Genaille* und *Ed. Lucas* (1885)⁹⁵⁾ (Fig. 1), da bei denselben keine Addition mehr nötig ist;

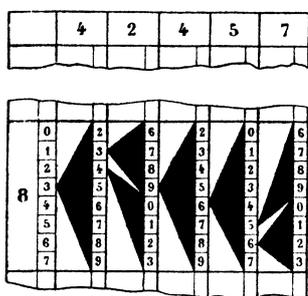


Fig. 1. Réglattes multiplicatrices von *Genaille* und *Lucas*.

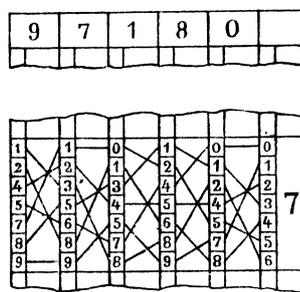


Fig. 2. Réglattes multisectrices von *Genaille* und *Lucas*.

jede Zusammenstellung der Stäbchen giebt hier eine fertige Produktafel⁹⁶⁾. Von ähnlicher Einrichtung wie die *réglattes multiplicatrices*

91) Ende des 16. Jahrh. erfunden. Zuerst beschrieben in: *Rabdologiae seu numerationis per virgulas libri duo...*, Edimburgi 1617; *Abb. d'Ocagne* p. 8, von *Bohl* p. 29.

92) Eine der neuesten Ausgaben ist z. B. *J. Blater's* „Erleichterungstafel“, Wien 1889. — Wegen sonstiger neuerer und älterer Formen vgl. von *Bohl* p. 29—32 und die Zusammenstellung von Dr. *Roth*, *Soc. d'Encour. Bull.* 1843, p. 415. Fast jedes Jahr werden Apparate dieser und der vorhergehenden Art patentiert.

93) *J. f. Math.* 28 (1844), p. 184. Die Beschreibung ist ungenügend, lässt aber vermuten, dass der Apparat aus Stäbchen derselben Art bestand, wie der spätere von *Jofe*; ausserdem hatte er einen Mechanismus für das schnelle Verbringen der Stäbchen in die richtige Ordnung.

94) von *Bohl* p. 194.

95) „*Réglattes multiplicatrices*“, Paris, Eugène Belin.

96) *Jofe* (und vermutlich auch *Slonimsky*) hat bedeutend mehr Stäbchen nötig, als *Genaille* und *Lucas*, wogegen die Ziffern des gesuchten Produkts bei seinem Apparat immer in gerader Linie stehen, während bei demjenigen der zuletzt genannten die Einer, Zehner u. s. w. durch ein eigentümliches Ableser-

sind die „réglettes multisetrices“ (Fig. 2) von *Genaille* und *Lucas*⁹⁷⁾, welche den Quotienten und Rest der Division einer beliebig-ziffrigen Zahl durch eine einziffrige mittelst blossen Ablesens finden lassen.

Mehrziffrigen Multiplikatoren angepasst sehen wir *Neper's* Gedanken in *Ad. Poppe's* „Arithmograph“⁹⁸⁾, in dem „Calculateur“ von *H. Genaille*⁹⁹⁾ und dem „Tableau multiplicateur-diviseur“ von *Léon Bollée*¹⁰⁰⁾. Bleibt bei diesen Apparaten die Addition der von ihnen gelieferten Partialprodukte noch dem Rechner überlassen, so wird das fertige Ergebnis der Multiplikation oder Division zweier beliebigen mehrziffrigen Zahlen durch successives Ablesen erhalten bei dem eine Verallgemeinerung der réglettes multisetrices darstellenden „Arithmomètre“ von *H. Genaille*¹⁰¹⁾, gleichsam einer zusammensetzbaren Multiplikations- und Divisionstafel, die, was den Umfang der Leistungen betrifft, von keiner gedruckten erreicht werden kann.

13. Arithmographen für alle vier Spezies. Die hier zu besprechenden Apparate sind aus einer Vorrichtung für Multiplikation und einer solchen für Addition bezw. Subtraktion zusammengesetzt. So finden wir eine Produktentafel in Verbindung mit einem Rechenbrett bei *Th. v. Esersky* (1872)¹⁰²⁾, in Verbindung mit Additionsschiebern nach Art derjenigen von *Kummer* (s. Anm. 85) bei *Troncet* (1891)¹⁰³⁾; dagegen Neperstäbchen mit einem Rechenbrett vereinigt

verfahren, bei dem man (s. das Beispiel $42457 \times 8 = 339656$ in Fig. 1) rechts oben anfangend den Spitzen der nach links gerichteten Dreiecke zu folgen hat, der Reihe nach bestimmt werden müssen. Es beruhen diese Apparate auf demselben arithmetischen Satze, welcher auch der Multiplikationstafel von *Slo-nimsky* (s. Anm. 27) zu Grunde liegt, die Umsetzung des mathematischen Gedankens in einen Apparat ist aber in diesem Falle erfolgreicher gewesen.

97) Paris 1885, Eugène Belin. Links oben beginnend und den Linien folgend liest man in Fig. 2 ab $97180 : 7 = 13882$, Rest 6.

98) Beschreibung Frankfurt a. M. 1876, s. auch *Dingler's polyt. J.* 223 (1877), p. 152; *von Bohl* p. 38. Es ist nicht die gewöhnliche, sondern die geordnete Multiplikation (s. Nr. 1) zu Grunde gelegt, weshalb der eine Faktor in umgekehrter Ordnung der Ziffern aus Stäbchen gebildet werden muss. In der Handhabung weniger einfach, als die folgenden Apparate.

99) Assoc. franç. 20¹, Marseille 1891, p. 159; 23², Caen 1894, p. 272.

100) Soc. d'encouragem. Bull. 1895, p. 985. Entsprechend den Ziffern der beiden Faktoren sind wagerechte und senkrechte Schieber auszuziehen, worauf die in den Öffnungen erscheinenden Partialprodukte in diagonalen Richtung addiert werden müssen.

101) Assoc. franç. 24¹, Bordeaux 1895, p. 179; s. auch *d'Ocagne* p. 12—13.

102) *von Bohl* p. 12.

103) *von Bohl* p. 19.

bei *Michel Rous* (1869)¹⁰⁴), mit Additionsschiebern nach Art der *Kummer'schen* bei *Eggis* (1892)¹⁰⁵). Eine organische Verbindung der beiden Teile zeigt jedoch erst der „Arithmograph“ von *Léon Bollée*

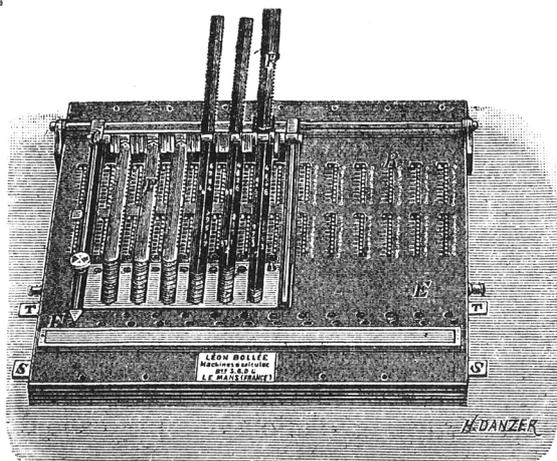


Fig. 3. Arithmograph von *Bollée*.

(Fig. 3)¹⁰⁶), der auf der Grenze der eigentlichen Rechenmaschinen steht (hinter deren Leistungen er allerdings weit zurückbleibt), da alle Rechnungsarten sich mechanisch mit ihm ausführen lassen

b. Rechenmaschinen.

Es lässt sich nicht umgehen, im folgenden über die innere Einrichtung von Rechenmaschinen zu sprechen. Jedoch wollen wir technische Einzelheiten so viel als möglich bei Seite lassen und uns auf das beschränken, was nötig ist, um die Wirkungsweise im ganzen zu verstehen.

104) Soc. d'enc. Bull. 1869, p. 137; das Rechenbrett hat in jeder Reihe nur 4 Einerkugeln und 1 oder 2 Fünferkugeln.

105) v. *Bohl* p. 33. Die „machine arithmétique“ von *Grillet* (1678) bestand ebenfalls aus Neperstäbchen in Verbindung mit Additionsscheiben ohne automatische Zehnerübertragung; s. *J. Leupold*, *Theatrum arithmetico-geometricum*, Leipzig 1727, p. 26.

106) Soc. d'enc. Bull. 1895, p. 977, 985; s. auch die deutsche Patentschrift Nr. 82963. Bemerkenswert ist, dass die Partialprodukte, derer man beim Multiplizieren bedarf, nicht, wie bei den Neperstäbchen, durch Ziffern angegeben sind, sondern ihrem Werte nach durch die Stellung zu den Additionsschiebern eingeführt werden.

α. Maschinen für die gewöhnlichen Rechnungsarten.

14. Zählwerk. Wie das Zählen die Grundlage des Rechnens, so bildet ein Zählwerk den Hauptbestandteil einer jeden Rechenmaschine. Dasselbe ist in der Regel dem dekadischen Zahlensystem angepasst und dementsprechend aus je einem Element für die Einer, Zehner, Hunderter u. s. w. zusammengesetzt¹⁰⁷). Die Elemente sind gewöhnlich cylindrische Scheiben¹⁰⁸), auf deren ebener oder krummer Fläche die Ziffern 0, 1, 2, . . . 9, einmal oder mehrmals in der Richtung der Halbmesser bez. Mantellinien oder senkrecht dazu im Kreise herum stehend angebracht sind¹⁰⁹). Was die Anordnung dieser Zifferscheiben betrifft, so können ihre Drehungsachsen parallel sein und in einer Ebene liegen¹¹⁰), oder Mantellinien eines Cylinders bilden¹¹¹), oder endlich zusammenfallen, so dass die Zifferscheiben sich auf gemeinsamer Welle neben einander befinden und die Ziffern auf der gekrümmten Fläche senkrecht zur Axenrichtung stehen. Letztere Anordnung, die erstmals bei der Maschine von *Percire* (1750)¹¹²) vorzukommen und sich mehr und mehr einzubürgern scheint, verdient den Vorzug, weil sie den geringsten Raum erfordert und die Resultate wegen der engeren Stellung der Ziffern leichter überblicken lässt.

In keinem Zählwerk einer eigentlichen Rechenmaschine fehlen Mechanismen, die bewirken, dass die „Zehnerübertragung“ (vgl. Nr. 11) sich ohne Zuthun des Rechners vollzieht. Die Einrichtung kann der-

107) In den Fig. 11, 13, 14, 16—18, 20 ist das Zählwerk mit *Z—Z* bezeichnet. — Nicht wenige der älteren Rechenmaschinen — hervorzuheben sind in dieser Hinsicht die von *Percire*¹¹²) und *Müller*¹⁶²) — waren auch auf das Rechnen mit nicht-dekadischen Zahlen und mit den gewöhnlichsten Brüchen ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ u. s. w.) eingerichtet; heute ist es (abgesehen von den Differenzmaschinen, Nr. 22, bei welchen auf die nicht-dezimalen Winkel- und Zeitteilungen Rücksicht zu nehmen war) nur noch bei Additionsmaschinen in Ländern mit nicht-dezimalen Mass- und Münzsystemen der Fall.

108) In Nuten verschiebbare Stäbe, wie sie die Additionsmaschine von *Perrault* hatte (vor 1699, s. *Machines approuvées par l'Ac. des sc.* 1, p. 55), scheinen bei eigentlichen Rechenmaschinen nicht mehr vorzukommen.

109) Die Anordnung der Ziffern in Schraubelinien ist selten, s. Nr. 15, Anm. 119 u. 121.

110) Wie bei den Maschinen von *Pascal*¹¹⁶), *Leibniz*¹⁴⁰), *Thomas*¹⁴³) und vielen anderen.

111) Ist der Fall bei den, dem 18. Jahrh. angehörigen Maschinen von *Leupold*¹³⁵), *Hahn*¹⁴¹), *Müller*¹⁶²) und der neueren von *Edmondson*¹⁵⁸); bedingt kreisförmige Bauart der Maschine.

112) *J. des Savans*, 1751, p. 507. Es haben dieselbe u. a. die Maschinen von *Grant*¹⁵⁵), *Tschebyscheff*¹¹³), *Odhner*¹⁴⁴), *Selling*¹³⁶)¹⁵²), *Büttner*¹⁴⁶), *Bollée*¹⁴⁹), *Küttner*¹⁴⁷).

art sein, dass wenn irgend eine Zifferscheibe über die Stellung, in der sie die Ziffer 9 zeigt, hinaus gedreht wird, die Zifferscheibe nächst höherer Ordnung sich plötzlich um eine Stelle weiter bewegt, oder aber so, dass bei jeder Drehung einer beliebigen Zifferscheibe die nächste sich $1/10$ so schnell dreht und folglich während einer Drehung der ersten Scheibe um 10 Stellen die nächste sich allmählich um eine Stelle dreht. Im ersten Fall, der die Regel bildet, spricht man von unstetiger oder springender, in dem sehr seltenen letzteren Falle¹¹³⁾ von stetiger oder schleichender Zehnerübertragung.

Für das Rückwärtszählen beim Subtrahieren — wenn dieses vorgesehen ist — hatten die älteren Maschinen¹¹⁴⁾ meist in jedem Element des Zählwerks noch eine zweite, rot gefärbte Ziffernreihe mit verkehrter Ordnung der Ziffern, so dass die Bewegung der Elemente immer in demselben Sinne stattfand. Wegen mancher Unbequemlichkeiten ist später diese Einrichtung verlassen und die Rückwärtsbewegung der Elemente an ihre Stelle gesetzt worden. (Näheres in Nr. 19.)

15. Maschinen zum Addieren und Subtrahieren. Ist beim Zählwerk Vorsorge getroffen, dass jedes seiner Elemente unabhängig von den übrigen sich nach Belieben um eine Ziffer, oder um 2, 3, ... 9 Ziffern vorwärts bewegen lässt, so kann man es offenbar zum Addieren benutzen. Wir legen hier keinen Wert darauf, ob die Elemente unmittelbar von der Hand des Rechners bewegt werden, oder die Bewegung an besonderen Gliedern ausgeführt und durch gezahnte Räder oder Stangen, Gliederketten oder dergleichen auf die Elemente übertragen wird. Dagegen macht es für die erreichbare Schnelligkeit des Arbeitens einen Unterschied — wir verwenden ihn als Einteilungsgrund für die sehr zahlreichen Additionsmaschinen¹¹⁵⁾ — ob

113) Er findet sich zuerst in dem „Arithmometer“ von *P. L. Tschebyscheff* (1878, Abb. bei *d'Ocagne* p. 40 fig., von *Bohl* p. 113 fig.), ferner (mit denselben kinematischen Elementen, sog. Planetenrädern, die übrigens, obwohl für einen andern Zweck, schon in dem „Arithmaurel“¹³¹⁾ verwendet sind) in der älteren Rechenmaschine von *Selling*¹³⁶⁾. Diesen Zählwerken eigentümlich ist, dass die Ziffern des Resultates nicht in einer geraden Linie stehen — in den Augen mancher Rechner ein Nachteil, dem *Tschebyscheff* und *Selling* in verschiedener Weise zu begegnen gesucht haben.

114) Z. B. die von *Pascal*¹¹⁶⁾, *Perrault*¹⁰⁸⁾, *Hahn*¹⁴¹⁾, *Müller*¹⁶²⁾ und noch die Maschine von *Thomas*¹⁴⁸⁾ in ihrer ersten Gestalt (1820).

115) Verfasser konnte über 80 Arten zählen und fast jedes Jahr kommen einige neue hinzu; die Zahl der ausgeführten Additionsmaschinen lässt sich auf 1000 schätzen. Es kann sich hier nur darum handeln, an Vertretern der wichtigsten Gattungen die stattgehabte Entwicklung darzulegen. Die zu tausenden

verschiedene Ziffern desselben Ranges durch die Bewegung eines und desselben Gliedes, jedoch um verschiedene, diesen Ziffern proportionale Beträge, addiert werden, oder aber durch Bewegung verschiedener Glieder (Tasten oder Druckknöpfe).

Zur ersten Gruppe gehört die älteste aller Rechenmaschinen, die (technisch noch unvollkommene) „machine arithmétique“ (Fig. 4) von

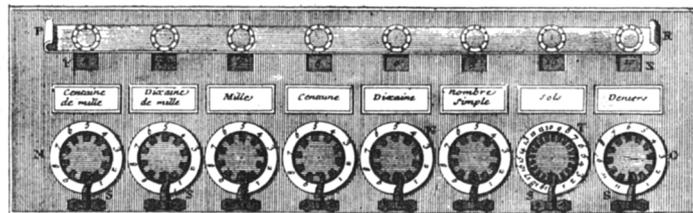


Fig. 4. Rechenmaschine von *Pascal*.

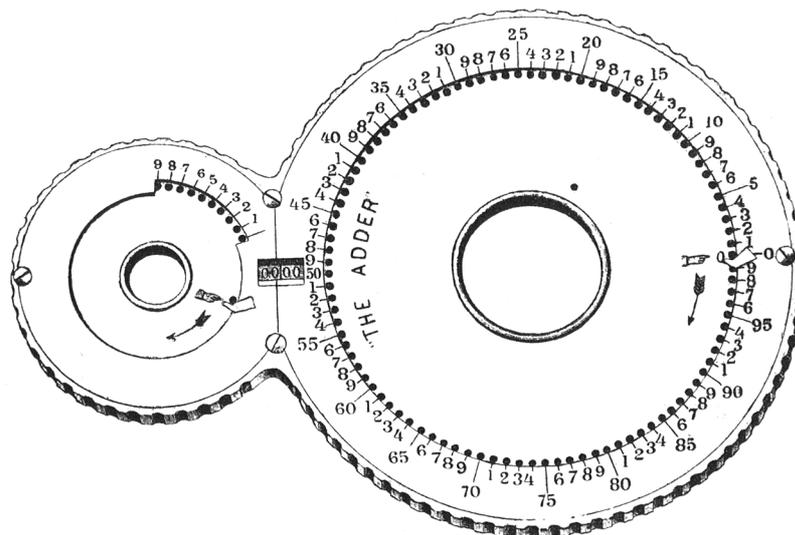


Fig. 5. *Webb's Adder*.

Blaise Pascal (1642)¹¹⁶⁾, welche zum Addieren und Subtrahieren diente. Die vielen älteren Versuche zur Verbesserung der Maschine von *Pascal* übergehend, erwähnen wir als einige der letzten Ausläufer dieser Reihe

verbreiteten sog. Registerkassen mit Additionswerk mögen ganz ausser Betracht bleiben.

116) Sie hat Räder mit 10 Speichen (abgesehen von den mit Sols und Deniers überschriebenen), die der Rechner mit einem Stift herumdreht, bis letzterer an die betreffende Zunge *S* anstößt; die ausführlichen Beschreibungen in den

den gut konstruierten „Additionneur“ des Dr. *Roth* (1843)¹¹⁷) und den einfachen „Adder“ (Fig. 5) von *C. H. Webb* (1868)¹¹⁸). Auch *J. v. Orlin's* „automatische Schraubenrechenmaschine“ für Addition und Subtraktion (1893) lässt sich hier anschliessen¹¹⁹).

Eine Steigerung der Schnelligkeit und Sicherheit der Bewegungen, die sehr zu wünschen war, ist durch Einführung der Tasten ermöglicht worden¹²⁰). Man hat bei den Maschinen dieser zweiten Gruppe entweder nur die Addition einziffriger Zahlen ins Auge gefasst und für jede der Zahlen 1—9 eine Taste vorgesehen, wie z. B. *Alb. Stettner* (1882)¹²¹) und *Max Mayer* (1887, s. Fig. 6)¹²²), zuweilen sogar sich noch eine Beschränkung in der Zahl der Tasten auferlegt¹²³), oder aber für die Einer, Zehner u. s. w. je 9 Tasten, in parallelen Reihen

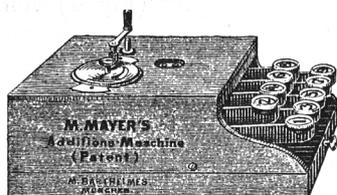


Fig. 6.

M. Mayer's Additionsmaschine.

verschiedenen Ausgaben der Oeuvres complètes von *Pascal* gehen auf *Diderot* (Grande Encyclopédie 1, Paris 1751, p. 680; Encyclopédie méthodique 1, Paris 1784, p. 136) zurück.

117) Soc. d'enc. Bull. 1843, p. 411, 421. Abb. bei *d'Ocagne* p. 20, von *Bohl* lithogr. Tafel.

118) Amer. scient. 20 (1869), p. 20; J. Franklin Institute (3) 60 (1870), p. 8. Eine grössere Scheibe für die Ziffern 1—100 und eine kleinere für die Hunderter befinden sich nebeneinander und werden unmittelbar mit einem Stift gedreht.

119) *S. von Bohl*, Moskau, techn. Gesellschaft Denkschr. (russisch), 1898. Der Antrieb der Zifferscheiben, welche auf den Spindeln paralleler Schrauben befestigt sind, erfolgt durch Verschieben (ohne Drehen) von Schraubenmuttern in der Axenrichtung. — Schraubengewinde, aber als Träger einer Ziffernreihe, haben auch die für das ernstliche Rechnen kaum in Betracht kommenden „Addierstifte“ zum Addieren einziffriger Zahlen, z. B. der von *Smith* und *Pott* 1875, Amer. scient. 33, p. 214 oder *Polyt. J.* 219 (1876), p. 401; vgl. auch Anm. 121.

120) Eine 1851 auf der Weltausstellung in London durch ehrenvolle Erwähnung ausgezeichnete Additionsmaschine von *V. Schilt* soll nach *C. Dietzschold* (Die Rechenmaschine, Leipzig 1882, p. 19) Tasten gehabt haben; ältere Beispiele sind dem Verfasser nicht bekannt.

121) Deutsche Patentschr. Nr. 21236 und 23098. Eigentümlich ist die Anordnung der (bis 1000 gehenden) Ziffern nach einer Schraubenlinie auf einer drehbaren und in der Axenrichtung verschiebbaren Trommel.

122) D. R. P. Nr. 44398. Abb. des Inneren *Dyck's* Katalog p. 147, von *Bohl* p. 63; jetziger Handelsname „Summa“. Ältere Konstruktion s. Anm. 124.

123) Abgesehen von wertlosen „Taschenaddierern“, die nur Eins wiederholt addieren können, seien erwähnt *Fritz Arzberger's* Addiermaschine [Schweiz. *polyt. Zeitschr.* 11 (1866), p. 33; *Dingl. polyt. J.* 181, p. 28] mit nur zwei Tasten, nämlich für Eins und Drei, und die von *Shohé Tanaka* (1895, D. R. P. Nr. 90288)

angeordnet, bestimmt¹²⁴). Seitdem noch selbstthätige Vorrichtungen zum Drucken der addierten Zahlen und ihrer Summe auf einen weiterlaufenden Papierstreifen hinzugekommen sind (vgl. auch Anm. 165), ist das Problem einer Additionsmaschine als befriedigend gelöst

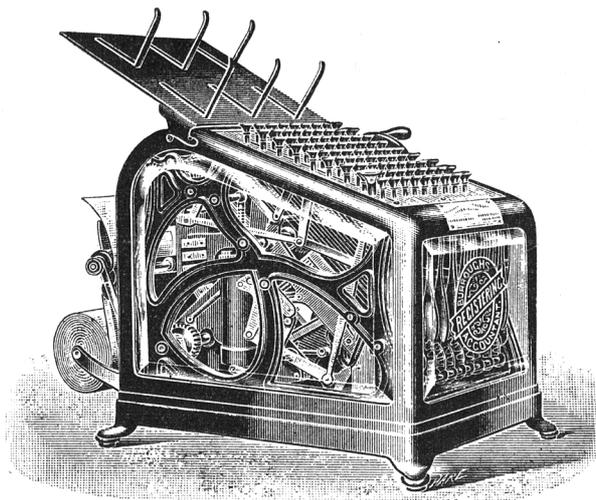


Fig. 7. *Burrough's* selbstschreibende Additionsmaschine.

zu betrachten. Von dieser neuen Gattung hat zur Zeit die grösste Verbreitung *Burrough's* „selbstschreibende Additionsmaschine“ („Registering Accountant“, 1888, s. Fig. 7)¹²⁵), neben welcher noch die

mit 5 Tasten für die Ziffern 1—5 (es wird z. B. 7 durch gleichzeitiges Drücken der Tasten für 5 und 2 addiert).

124) Beispiel: Der „Comptometer“ von *Dorr. E. Felt* (1887), *Abb. von Bohl* p. 198. — Die ältere Additionsmaschine von *M. Mayer* [1881, D. R. P. Nr. 29206 und 35496, *Dingl. polyt. J.* 260 (1886), p. 263] hatte zwar je eine besondere Zifferscheibe für die Einer, Zehner u. s. w., aber nur eine Reihe Tasten für die Ziffern 1—9, die mit jeder einzelnen Zifferscheibe in Verbindung gebracht werden konnte; ähnlich der Grundgedanke der Additionsmaschine von *E. Runge*, D. R. P. Nr. 87776 (1896), *Abb. Zeitschr. Math. Phys.* 44 (1899), Suppl. p. 533, nur dass die Wirkung jener Tasten auf die einzelnen Zifferscheiben durch eine zweite Reihe von Tasten vermittelt wird, also mehrziffrige Zahlen sich addieren lassen, aber bei jeder Ziffer zwei Tasten gleichzeitig gedrückt werden müssen.

125) S. deutsche Patentschrift Nr. 77068 (ältere Konstruktion Nr. 50324); es ist die u. a. bei vielen deutschen Postämtern eingeführte Maschine. Weniger Anklang scheint der einst viel genannte „Comptograph“ gefunden zu haben, von welchem der Comptometer, Anm. 124, eine vereinfachte Form ist. Bei der Maschine von *Ad. Bahmann* (1888, D. R. P. Nr. 46960) geschah die Registrierung der Summanden nicht durch Drucken der Ziffern selbst, sondern (ähnlich wie

Additionsmaschine mit Posten- und Summendruck von *W. Heinitz* (Fig. 8)¹²⁶ genannt sei; da durch das Niederdrücken der Tasten die Summanden nur vorläufig eingestellt und erst nach Bewegung

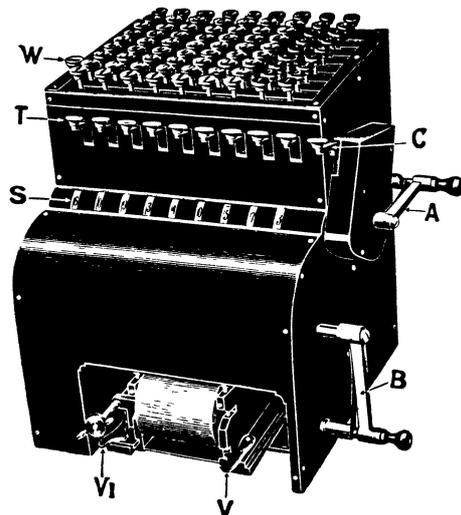


Fig. 8. Additionsmaschine mit Posten- und Summendruck von *Heinitz*.

Mechanismen versehen — sie bilden das sog. Schaltwerk — die es ermöglichen, nach Vornahme der nötigen Einstellungen alle Zifferscheiben des Zählwerks zugleich, jede um eine gewünschte Zahl von Stellen, weiter zu bewegen (zu „schalten“), und zwar durch eine einzige Handbewegung, z. B. das Drehen einer Kurbel (*K* in Fig. 11, 13, 16—18, 20).

Bis jetzt sind im wesentlichen vier Arten von Schaltwerken in Anwendung gekommen. Am öftesten begegnet man der von *G. W.*

bei Kontrolluhren) durch Stifte, deren relative Lage der Grösse der addierten Ziffern entsprach.

¹²⁶) D. R. P. Nr. 111906, 111916, 112252.

¹²⁷) Aus jeder Maschine für alle vier Spezies (s. Nr. 17) lässt sich durch Vereinfachung eine blosse Additionsmaschine ableiten, wie dies z. B. *Hahn*, *Thomas*, *Selling* gethan haben (bei *Tschebyscheff's* Arithmometer¹¹³) kann sogar das Addierwerk abgetrennt und für sich benutzt werden); sofern derartige Maschinen nicht mit Tasten versehen, also den zuletzt beschriebenen ähnlich sind, arbeiten sie zu langsam.

¹²⁸) Auch lässt sich die Subtraktion einer Zahl auf die Addition ihrer leicht im Kopf zu bildenden Ergänzung zur nächst höheren Potenz von 10 zurückführen (der *Comptometer*¹²⁴) hat schon auf den Tasten neben jeder Ziffer die Ergänzung zu 10).

eines Hebels wirklich addiert und registriert werden, so stehen derartige Maschinen den in Nr. 17 zu behandelnden erweiterten Additionsmaschinen bereits sehr nahe¹²⁷).

Für Subtraktion sind die neueren Additionsmaschinengewöhnlich nicht eingerichtet, weil das Bedürfnis dazu gering ist¹²⁸).

16. Schaltwerk. Um eine Rechenmaschine für die wiederholte Addition einer und derselben mehrziffrigen Zahl und damit für die Multiplikation brauchbar zu machen, kann man sie mit besonderen

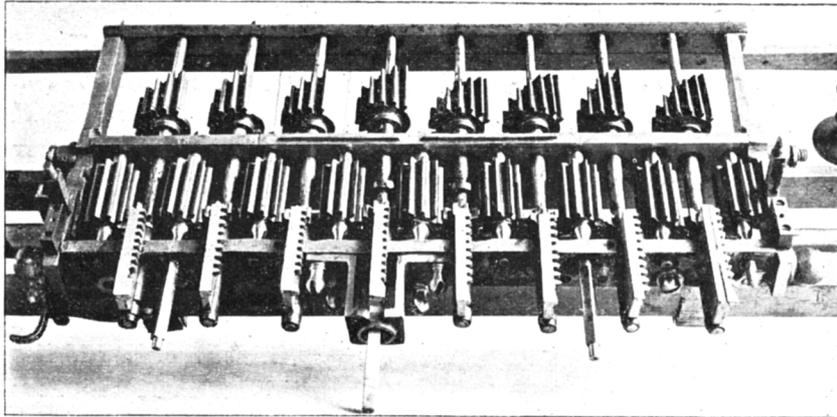


Fig. 10. Schaltwerk aus der *Leibniz'schen* Rechenmaschine in Hannover.

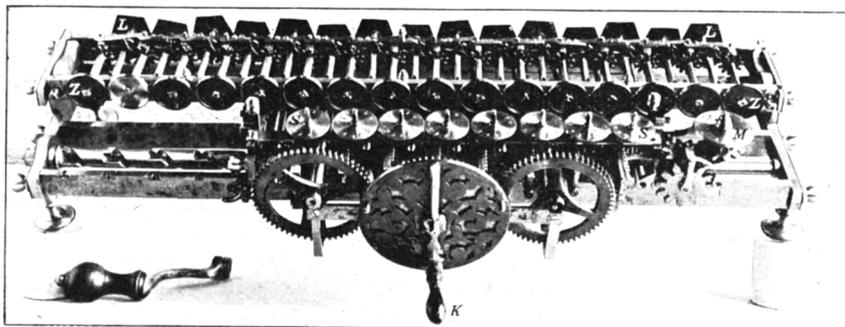


Fig. 11. *Leibniz'sche* Rechenmaschine in Hannover, ohne Gehäuse.

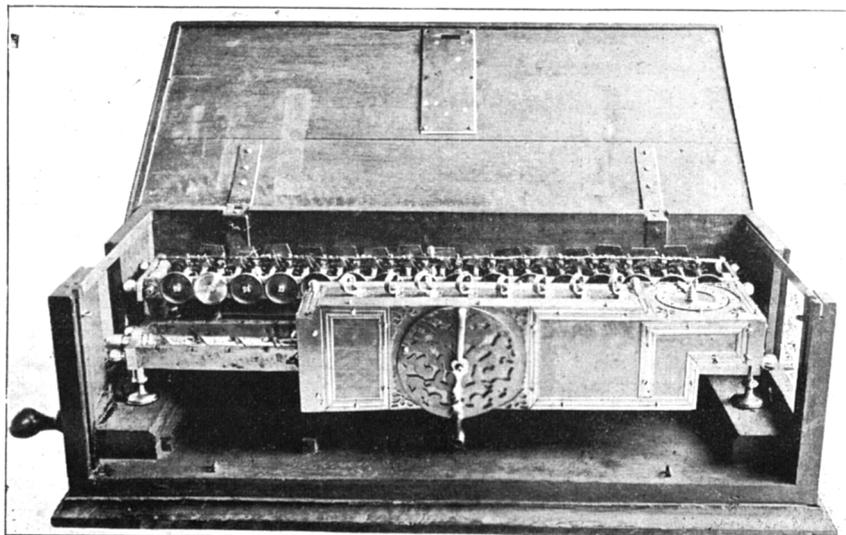


Fig. 12. *Leibniz'sche* Rechenmaschine in Hannover.

Leibniz erfundenen „Stufenwalze“ oder „Staffelwalze“¹²⁹⁾, (französisch cylindre ou tambour denté, englisch stepped reckoner), einem Cylinder mit neun Zähnen verschiedener Länge, der als Verschmelzung von neun auf derselben Welle neben einander befindlichen Rädern oder Sektoren, die der Reihe nach 1, 2, ... 9 Zähne gleicher Grösse haben, betrachtet werden kann¹³⁰⁾. In der Regel ist für die Einer, Zehner u. s. w. je eine Stufenwalze bestimmt, jedoch lässt sich auch mit einer einzigen auskommen¹³¹⁾.

Ein anderes Mittel, das ebenfalls schon *Leibniz*¹³²⁾ gekannt hat, ist die Verwendung von Zahnrädern, von deren Zähnen sich beliebig viele nach innen schieben¹³³⁾ und dadurch unwirksam machen lassen (s. Fig. 9). Schaltwerke mit solchen Rädern zeichnen sich vor denen mit Stufenwalzen durch geringen Raumbedarf aus und sind in neuerer Zeit sehr in Aufnahme gekommen¹³⁴⁾.

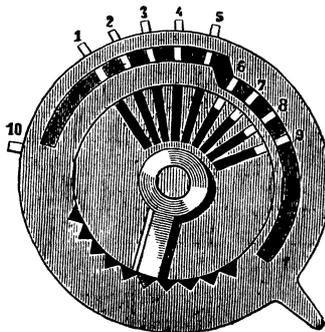


Fig. 9. Schaltrad aus *Odhner's* Arithmometer.

129) Die einzige uns erhalten gebliebene (1694 vollendete?) von den beiden sicher ausgeführten Rechenmaschinen von *G. W. Leibniz* (Fig. 11 u. 12), welche in der kgl. Bibliothek zu Hannover aufbewahrt wird und neuerdings von *A. Burkhardt* wieder in Stand gesetzt worden ist (s. Zeitschr. f. Vermessungswesen 1897, p. 392), besitzt deren acht, die man in Fig. 10 oben neben einander bemerkt. Ausserdem kommen Stufenwalzen z. B. vor in den Maschinen von *Hahn* (1774)¹⁴¹⁾ Viscount *Mahon*, späterem Earl of *Stanhope* [in der ersten von 1775, s. Phil. Mag. (5) 20 (1885), p. 15], *Müller* (1783)¹⁶²⁾, *Thomas* (1820)¹⁴³⁾.

130) Befindet sich ein Zahnrädchen, das die Bewegung auf eine Zifferscheibe zu übertragen hat, z. B. der Stelle gegenüber, bis zu welcher 7 Zähne der Stufenwalze reichen, so wird es bei jeder vollen Umdrehung der letzteren um 7 Zähne weiter gedreht werden.

131) Das zeigen die „Arithmaurel“ genannte Maschine von *Maurel* und *Jayet*, Fig. 14 [Par. C. R. 28 (1849), p. 209; mit Abb. der Mechanismen: *Lalanne*, Ann. ponts chaussées, (3) 8 (1854), 2. sér., p. 288; s. auch *d'Ocagne* p. 29] und diejenige von *Tschebyscheff*¹¹³⁾.

132) S. die von *Jordan* veröffentlichte Übersetzung eines Manuskripts aus dem Nachlasse von *Leibniz*, Zeitschr. f. Verm.-Wes., 1897, p. 308; vielleicht hatte die verschollene zweite Rechenmaschine von *Leibniz* ein solches Schaltwerk.

133) Nach der Seite umlegbare Zähne hatten die Schalträder der im übrigen unvollkommenen Maschine von *Joh. Poleni* (Miscellanea, Venetiis 1709, p. 27; s. auch *Leupold*, Theatrum arithmetico-geometricum, 1727, p. 27).

134) Nach dem Vorgange von *Odhner*¹⁴⁴⁾ haben sie z. B. *Büttner*¹⁴⁶⁾, *Esser*¹⁵⁹⁾ und *Küttner*¹⁴⁷⁾ angenommen. Übrigens hat Dr. *Roth* etwa 40 Jahre vor *Odhner* ähnliche Schalträder verwendet (ausgestellt im Conservatoire des Arts et Métiers zu Paris).

Drittens giebt es Schaltwerke mit gezahnten Rädern oder Stangen, die, sobald von ihren Zähnen die gewünschte Zahl gewirkt hat, ausser Eingriff mit den Zahnradern, welche die Drehung der Zifferscheiben vermitteln, gebracht werden können¹³⁵).

Endlich kann die Einrichtung getroffen sein, dass die Glieder des Schaltwerks (z. B. Zahnstangen) sich mit verschiedener Schnelligkeit bewegen lassen¹³⁶).

Von grosser Bedeutung ist es noch — ein ebenfalls von *Leibniz* zuerst unternommener Schritt — das Schaltwerk und Zählwerk um beliebig viele Stellen gegen einander verlegbar zu machen, damit auch das 10-fache, 100-fache u. s. w. irgend einer mehrziffrigen, im Schaltwerk eingestellten Zahl durch eine einzige Handbewegung auf das Zählwerk übertragen werden kann¹³⁷).

17. Erweiterte Additionsmaschinen (für alle vier Spezies). Eine auch die Subtraktion zulassende Additionsmaschine mit einem verleg-

135) Ein solches kommt zuerst in einer Rechenmaschine von *Jac. Leupold* vor, s. dessen *Theatrum arithm.-geometr.*, 1727, p. 38; ferner haben es z. B. die zweite Rechenmaschine von *Viscount Charles Mahon*, späterem *Earl of Stanhope* (1777, s. *Vogler*, Anleitung zum Entwerfen graphischer Tafeln, Berlin 1877, p. 59), sowie die Maschinen von *C. Dietzschold* („Die Rechenmaschine“, Leipzig 1882, p. 40; gebaut von 1877 an), *Fr. Weiss* (D. R. P. Nr. 71307 von 1893), *Bollée*¹⁴⁹) und *Steiger*¹⁵¹). Bei *Grant's* Maschine¹⁵⁰) ist der Gedanke eigentlich der umgekehrte: jedes Schaltrad hat nur einen Zahn, durch welchen eine Hemmung für die zugehörige Zifferscheibe (die sich sonst fortwährend drehen würde) ausgelöst wird, sobald letztere die gewünschte Drehung vollzogen hat.

136) Einziges Beispiel die ältere, 1886 patentierte Rechenmaschine von *Ed. Selling*, Fig. 15 („Eine neue Rechenmaschine“, Berlin 1887; ausführlichste Beschreibung der von *M. Ott* durchgebildeten Konstruktion von *A. Poppe*, *Polyt. J.* 271 (1889), p. 193). Jede Zahnstange des Schaltwerks kann nach Belieben mit dem 1., 2., 3. u. s. w. der beweglichen Gelenkpunkte einer „Nürnbergischer Schere“ mit festem Anfangspunkt verbunden werden, so dass beim Öffnen der Schere um einen und denselben Betrag die Zahnstange je nach der Einstellung um 1, 2, 3 u. s. w. Zähne weiter geschoben wird.

137) Da es nur auf die gegenseitige Lage von Schaltwerk und Zählwerk ankommt, ist es gleichgiltig, ob das erste bewegt wird und das zweite ruht, wie bei den Maschinen von *Leibniz*¹⁴⁰), *Selling*¹³⁶), *Bollée*¹⁴⁹) u. s. w., oder umgekehrt, wie bei denen von *Hahn*¹⁴¹), *Müller*¹⁵²), *Thomas*¹⁴³), *Odhner*¹⁴⁴) u. s. w. Meistens geschieht die Verlegung des Schaltwerks resp. Zählwerks von Hand, man kann aber auch, wie *Leibniz*, für diesen Zweck eine besondere Kurbel anbringen (in Fig. 12 links), oder der schon vorhandenen Kurbel auch diese Aufgabe zuweisen, wie *Thomas* bei seinen späteren Maschinen grossen Formats, *Tschebyscheff*¹¹³), *Dietzschold*¹³⁵) und *Steiger*¹⁵¹). Beim „Arithmaurel“¹³¹) ist jene Verlegung durch Wiederholung des Schaltwerks und der Kurbel (*K*, *K'*, *K''*, *K'''* in Fig. 14) unnötig gemacht.

baren Schaltwerk (Nr. 16), das in jedem Gliede auf irgend eine der Ziffern 0, 1, . . . 9 gestellt werden kann¹³⁸), ist für Multiplikation und Division ebenfalls tauglich, denn um z. B. 1973 mit 254 zu multiplizieren, wird man, nachdem die Zifferscheiben alle auf Null gestellt (s. Nr. 20) und die Einer des Schaltwerks denen des Zählwerks (Nr. 14) gegenüber gebracht sind, den Multiplikatoren 1973 im Schaltwerk einstellen, dann viermal die Kurbel drehen¹³⁹), hierauf das Zählwerk um eine Stelle nach rechts verlegen, dann fünfmal die Kurbel drehen, endlich das Zählwerk um eine weitere Stelle nach rechts verlegen und die Kurbel zweimal drehen, worauf im Zählwerk das gesuchte Produkt 501142 erscheinen wird. Und wie die Multiplikation durch wiederholte Addition, so lässt sich auch die Division durch wiederholte Subtraktion ausführen (s. Nr. 19). In der That sind die Erfinder der meisten und verbreitetsten Rechenmaschinen von dieser Erwägung ausgegangen. Indem wir einige der bemerkenswertesten dieser „erweiterten Additionsmaschinen“ hier aufzählen, nennen wir nach der an der Spitze stehenden „machina arithmetica“ von *G. W. Leibniz* (s. Fig. 10—12)¹⁴⁰), die Rechenmaschine des Pfarrers

138) Die Vorrichtungen zum Einstellen (das „Stellwerk“, *S—S* in Fig. 11, 13, 14, 16—18, 20) betreffend, ist zu bemerken, dass für die Einer, Zehner u. s. w. entweder je ein in einem Schlitz entlang einer Skala beweglicher Knopf (*Thomas*¹⁴³) oder Hebel (*Odmer*¹⁴⁴) vorhanden sein kann, oder ein Schieber (*Hahn*¹⁴¹), *Edmondson*¹⁴⁵) bzw. eine drehbare Scheibe (*Leibniz*, s. Fig. 11, *S—S*; *Müller*¹⁴²), *Büttner*¹⁴⁶), mit Ziffern besetzt, von denen die gewünschte etwa unter eine Öffnung gebracht wird, oder aber — für schnelles Arbeiten am zweckmässigsten — eine Reihe von Tasten für die Ziffern 1—9 (*Selling*¹³⁶). Wegen der nachträglichen Prüfung der eingestellten Zahl ist es erwünscht, dass deren Ziffern (wie bei *Duschaneck*¹⁴¹), *Büttner*, *Steiger*¹⁴¹) in gerader Linie neben einander erscheinen. — Bei den Maschinen von *Grant*¹⁴⁵) und *Selling* lässt sich die Einstellung häufig wiederkehrender Konstanten so vorbereiten, dass dieselbe (statt Ziffer für Ziffer) momentan erfolgen kann.

139) Bei der ältesten Maschine von *Thomas* (1820) wurde die Bewegung durch Ziehen an einem Bande eingeführt; beim Arithmaurel¹⁴¹) genügte es, einen Zeiger, deren für jede Stelle des Multiplikators einer vorhanden war (*M*, *M'*, *M''*, *M'''* in Fig. 14), mittelst der zugehörigen Kurbel auf die betreffende Ziffer eines Zifferblattes zu drehen, weshalb diese Maschine sehr schnell arbeitete; bei der älteren Maschine von *Selling*¹³⁶) geschah die Multiplikation mit 2, 3, . . . durch Öffnen des Systems der Nürnberger Scheren um das Doppelte, Dreifache, . . . des bei einfacher Addition nötigen Betrags, also auch durch eine einzige Handbewegung.

140) Erfunden 1671, ehe *Leibniz* die *Pascal'sche* Maschine kannte. Beschreibung von *Leibniz* selbst *Miscell. Berol.* 1 (1710), p. 317, Übersetzung *Zeitschr. Verm.-W.* 1892, p. 545. Zur Geschichte s. *W. Jordan*, *Zeitschr. Verm.-W.* 1897, p. 289, woselbst weitere Litteratur. Grundriss ebenda. S. auch *Anm.* 129 u. 132.

*Ph. M. Hahn*¹⁴¹⁾ als erste wirklich brauchbare und gewerbsmässig hergestellte¹⁴²⁾; den „Arithmomètre“ von *Ch. X. Thomas* (Fig. 13)¹⁴³⁾

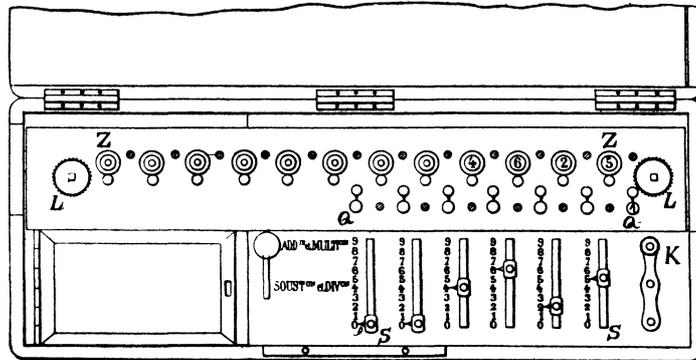


Fig. 13. Arithmomètre von *Thomas* im Grundriss.

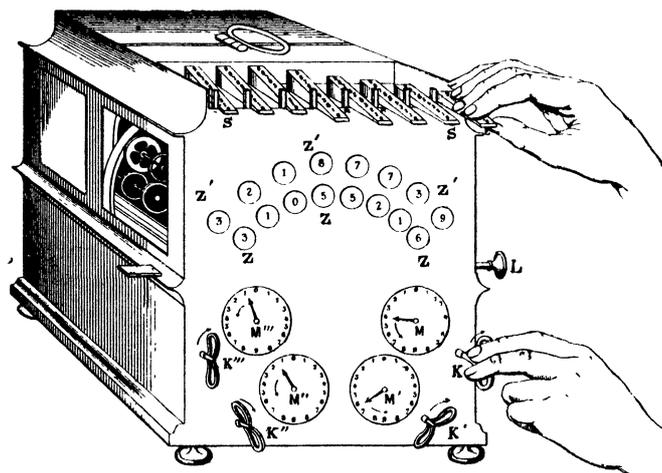


Fig. 14. Rechenmaschine von *Maurel und Jayet*.

als erste Maschine, die grössere Verbreitung erlangt hat; dann wegen besonders eigenartiger Bauart die zu ihrer Zeit leistungsfähigste, den

141) Erfunden 1770; 1774 erste Maschine fertig, s. *Ph. M. Hahn*, Beschreib. mechan. Kunstwerke, Stuttgart 1774, Vorrede; Teutscher Merkur, 2 (1779), p. 137. Abb. und gute Beschreibung fehlt noch. Mehrere noch brauchbare Maschinen vorhanden, z. B. in den Sammlungen der techn. Hochschulen Berlin, München, Stuttgart.

142) Noch im Anfang des 19. Jahrh. von dem Uhrmacher *Chr. Schuster* in Ansbach, vgl. *Dyck's Katalog* p. 150.

143) Erfunden 1820; hat viele durchgreifende Änderungen erlebt und war

eigentlichen Multiplikationsmaschinen (Nr. 18) nahe stehende Maschine von *Maurel* und *Jayet* (Fig. 14)¹³¹), sowie die ältere Maschine von *E. Selling* (Fig. 15)¹³⁶); ferner den „Arithmometer“ von *W. T. Odhner*

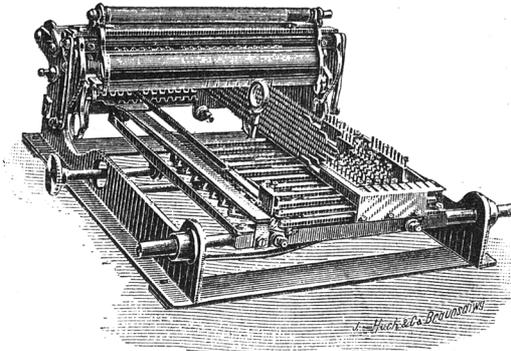


Fig. 15. Ältere Rechenmaschine von *Selling*.

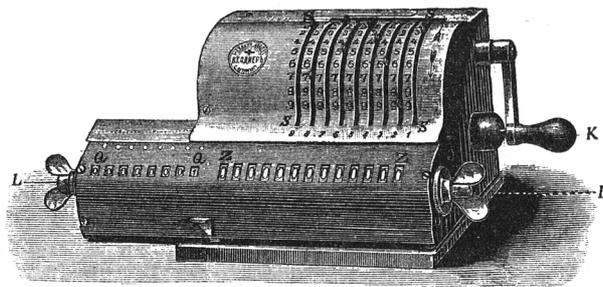


Fig. 16. Arithmometer von *Odhner*.

(Fig. 16)¹⁴⁴), welcher zwar in mancher Beziehung hinter den vorigen Maschinen zurücksteht¹⁴⁵), aber weniger Raum einnimmt und zu

anfangs (bis 1858) teilweise weniger zweckmässig eingerichtet, als die Rechenmaschinen von *Hahn*¹⁴¹), *Müller*¹⁶²), und sogar von *Leibniz*¹⁴⁰). Ausführl. Beschreib. mit Abb. *F. Reuleaux*, Die Thomas'sche Rechenmaschine, Freiberg 1862 (aus *Civilingenieur* 8), 2. Aufl. Leipzig 1892; *Sebert*, Soc. d'enc. Bull. 1879, p. 393; *A. Cavallero*, Torino Ist. tecn. Ann. 8, bezw. *Revue universelle*, 1880, p. 309 (wegen der älteren Formen s. *Hoyau*, Soc. d'enc. Bull. 1822, p. 355, *Benoit*, Soc. d'enc. Bull. 1851, p. 113); wird in vielen Werkstätten hergestellt, in Deutschland (mit Verbesserungen) von *A. Burkhardt*, Glashütte in S. seit 1878.

144) In Deutschland 1878 patentiert (Nr. 7393, u. Nr. 64925 von 1891); seit 1892 als „Brunsviga“ im Handel (s. *Trinks*, Zeitschr. Ver. deutscher Ingen. 1892, S. 1522), in Frankreich unter den Namen „Dactyle“ und „la Rapide“.

145) Ist nicht zuverlässig, weil die Bewegungen nicht hinreichend gesichert und die Zehnerübertragungen nicht weit genug geführt sind (erfüllt die

neuer Erfindungsthätigkeit angeregt hat¹⁴⁶); endlich die Rechenmaschine von *W. Küttner* (Fig. 17)¹⁴⁷, als die am meisten Vorteile bietende der jetzt im Handel befindlichen erweiterten Additionsmaschinen¹⁴⁸).

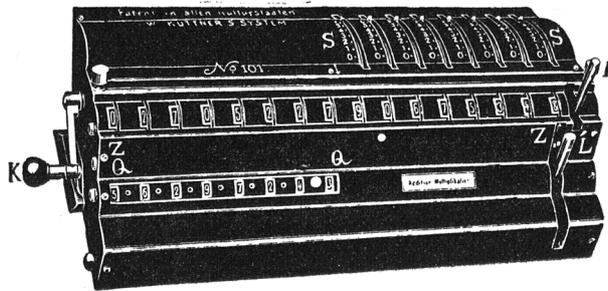


Fig. 17. Rechenmaschine von *Küttner*.

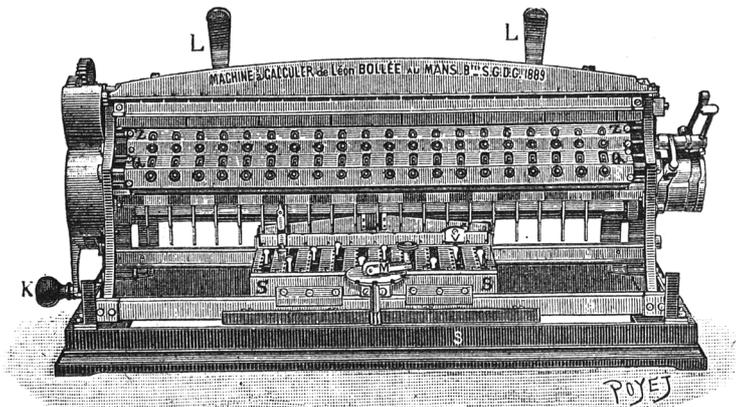


Fig. 18. Rechenmaschine von *Bollée* (Modell von 1888).

18. Eigentliche Multiplikationsmaschinen. Einen ganz neuen Gedanken hat 1888 *Léon Bollée* in seiner „machine à calculer“

an jede R.-Maschine zu stellende Bedingung nicht, dass im Zählwerk 000...0 erscheint, wenn 999...9 eingestellt war und 1 addiert wird); hat sehr schweren Gang und andere Mängel.

146) Von ähnlicher Bauart, jedoch in wesentlichen Punkten verbessert sind die Rechenmaschinen von *Esser*¹⁵⁶) und *Küttner*¹⁴⁷). Auch die sehr brauchbare Maschine von *O. Büttner* (D. R. P. Nr. 47243, 1888, Abb. *Dyck's* Katalog p. 151, von *Bohl* p. 102) scheint davon beeinflusst zu sein.

147) D. R. P. Nr. 84269 (1894), s. *Dingler's Polyt. J.* 300 (1896), p. 199; wird hergestellt von *W. Heinitz* in Dresden.

148) Zu denselben gehören auch u. a. die Rechenmaschinen von *Leupold*¹³⁵),

(Fig. 18)¹⁴⁹⁾ verwirklicht: Die gegenseitigen Produkte der Zahlen 1—9 sind körperlich dargestellt, nämlich durch Paare von Stiften, deren Längen den Einern und Zehnern jener Produkte entsprechen¹⁵⁰⁾. Diese Stifte begrenzen die Verschiebung von Zahnstangen, welche so

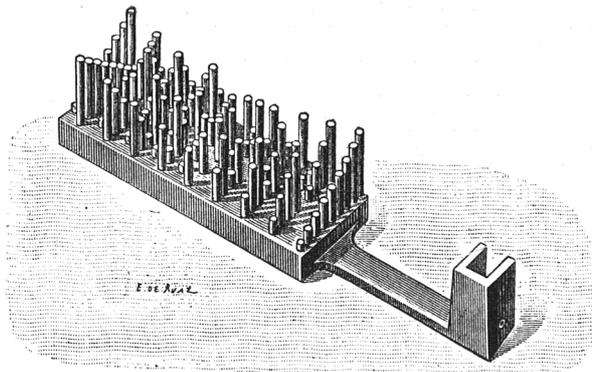


Fig. 19. Einmaleinskörper aus der Rechenmaschine von Bollée.

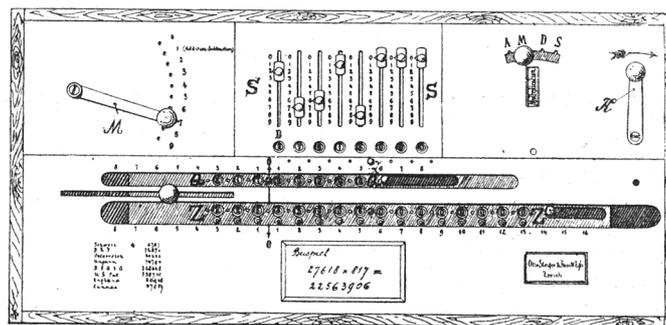


Fig. 20. Grundriss der Rechenmaschine von Steiger.

durch eine sich immer gleich bleibende Handbewegung (das einmalige Drehen einer Kurbel) gezwungen werden können, das Produkt des

Mahon^{129) 135)}, *Müller*¹⁶²⁾, *Stern*¹⁶⁶⁾, *Staffel*¹⁶³⁾, *Grant*¹⁵⁵⁾, *Tschebyscheff*¹¹³⁾, *Dietzschold*¹³⁵⁾, *Edmondson*¹⁵⁸⁾, *Duschaneck*¹⁶¹⁾, *Esser*¹⁵⁹⁾, *Weiss*¹³⁸⁾. S. auch Nr. 53.

149) Beschr. in den Par. C. R. 109 (1889), p. 737; mit Abb. Soc. d'enc. Bull. 1894, p. 989, auch *d'Ocagne* p. 32 fig., *von Bohl* p. 160 fig., deutsche Patentschrift Nr. 88936 (von 1894).

150) Der „calculateur“ (Fig. 19) ist gewissermassen ein verkörpertes Einmaleins; z. B. befinden sich an der Kreuzungsstelle der 7. Reihe mit der 9. Kolonne zwei Stifte von den Längen 3 und 6, weil $7 \times 9 = 63$. Offenbar können statt Produktentafeln ebenso gut andere numerische Tafeln verkörpert und in die Maschine eingeführt werden; in der That hat *Bollée* auf diese Art besondere Maschinen für Zinsberechnung und andere Zwecke konstruiert.

eingestellten Multiplikatoren mit irgend einer Ziffer des Multiplikators auf das Zählwerk zu übertragen. Bei der auf demselben Gedanken beruhenden Rechenmaschine von *O. Steiger* (Fig. 20)¹⁵¹ kommen die Teilprodukte durch Paare von abgestuften Scheiben (s. Fig. 21), die auf einer gemeinsamen Welle sitzen, zum Ausdruck. *E. Selling* führt in seiner „elektrischen Rechenmaschine“¹⁵² die Teilprodukte durch Elektromagneten in der Art ein, dass die den Werten ihrer Ziffern entsprechenden galvanischen Leitungen durch verschiedene, den Multiplikatoren- und Multiplikatorziffern entsprechende Einstellungen geschlossen werden. Es leuchtet ein, dass mit einer solchen Maschine

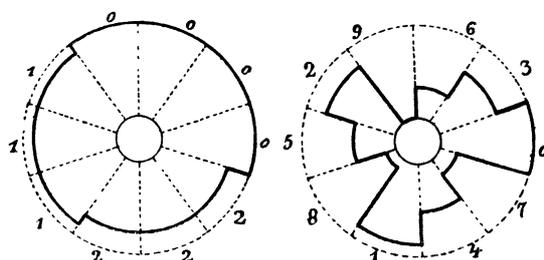


Fig. 21.

viel schneller multipliziert (und dividiert) werden kann, als mit den in Nr. 17 beschriebenen — den „Arithmaurel“, vgl. Anm. 153, allenfalls ausgenommen — namentlich wenn, wie bei der Maschine von *Selling*, für das Einstellen von Multiplikand und Multiplikator Tasten vorgesehen sind. Ein Mangel haftet freilich auch diesen Maschinen noch an: ohne Verlegung des Zählwerks (die zwar bei der Maschine von *Steiger* automatisch während jeder Kurbeldrehung erfolgt) lässt sich nur mit einziffrigen Zahlen multiplizieren¹⁵³). *K. Strehl* hat

151) In Deutschland 1892 patentiert, Nr. 72870; bei den Stufenscheiben entspricht dem Wert einer Ziffer der Abstand der betreffenden Stelle des Scheibenrandes von der Aussenlinie (Fig. 21 zeigt die zur Multiplikatorziffer 3 gehörigen Scheiben, links die der Zehner, rechts die der Einer); s. auch *H. Sossna*, Zeitschr. Verm.-W. 1889, p. 674 (hiernach wendet *Steiger* jetzt ähnliche Einmaleinskörper an, wie *Bollée*). Hergestellt unter dem Namen „Millionär“ in der Fabrik Stolzenberg in Oos (Baden).

152) Deutsche Patentschrift Nr. 88297 (1894). Neuerdings ist *Selling* zur mechanischen Lösung zurückgekehrt, wobei es ihm gelungen ist, die (bei *Bollée* und *Steiger*, wie bei *Thomas* u. a. noch vorhandene) Häufung der Widerstände bei der Zehnerübertragung zu vermeiden.

153) *Maurel* und *Jayet* waren mit ihrer Rechenmaschine¹⁵¹), trotzdem sie nur eine erweiterte Additionsmaschine ist, dem anzustrebenden Ziele schon näher gekommen, da bei derselben das Zählwerk nicht verlegt wird und mit der Einstellung des Multiplikators die Multiplikation beendigt ist.

eine Vorrichtung beschrieben¹⁵⁴), durch die das Ideal einer Rechenmaschine in erkennbare Nähe gerückt erscheint; wenn die Ausführung gelänge, so brauchte man bei dieser Maschine die beiden, hier ganz gleich berechtigten Faktoren bloss einzustellen, und das Produkt stünde schon da.

19. Subtraktion und Division. Nebenzählwerk (Quotient). Von seltenen Ausnahmen¹⁵⁵) abgesehen wird mit einer Rechenmaschine subtrahiert, indem nach Einstellung des Subtrahenden im Zählwerk (und des Minuenden im Schaltwerk, falls solches vorhanden) die Zifferscheiben des Zählwerks gezwungen werden, die den Ziffern des Minuenden entsprechenden (bezw. durch das Schaltwerk vorgezeichneten) Bewegungen rückwärts auszuführen. Bei der Rechenmaschine von *Thomas*¹⁴³) und einigen andern, wie *Bollée*¹⁴⁹) und *Steiger*¹⁵¹), wird gleichwohl die Kurbel immer in demselben Sinne gedreht, aber durch ein „Wendegetriebe“ bewirkt, dass nach Einstellen eines Hebels oder Knopfes auf „Subtraktion“ bezw. „Division“ die Zifferscheiben des Zählwerks ihre Bewegung umkehren. In neuerer Zeit nimmt der Gebrauch zu, die Maschinen so einzurichten, dass derselbe Zweck durch Rückwärtsbewegen der Kurbel (oder des ihr entsprechenden Gliedes) erreicht wird, wie dies schon bei der Rechenmaschine von *Leibniz*¹⁴⁰) der Fall war und für den Rechner aus naheliegenden Gründen angenehmer ist¹⁵⁶).

Um zu dividieren stellt man den Dividenden im Zählwerk, den Divisor im Schaltwerk ein, bringt die Ziffern höchsten Ranges beider Zahlen unter einander, subtrahiert nun den Divisor, so oft es geht, wodurch man die höchste Ziffer des Quotienten erhält, verlegt hierauf das Zählwerk um eine Stelle nach links (bezw. das Schaltwerk nach rechts), subtrahiert aufs neue den Divisor u. s. w.¹⁵⁷).

154) Centralztg. f. Optik u. Mechanik, 1890, p. 242; beruht auf einfachen geometrischen Beziehungen.

155) Bis auf einige Additionsmaschinen, wie den Comptometer¹²⁴), gehören dazu von neueren Rechenmaschinen nur die von *G. B. Grant* [s. Amer. J. sc. arts (3) 8 (1874), p. 277]. Die Zifferscheiben ihres Zählwerks können blos in einem Sinne gedreht werden und die Subtraktion irgend einer Ziffer geschieht durch Addition ihrer Ergänzung zu 10. Vgl. den Schluss der Nr. 14 sowie Anm. 114.

156) Unter den neueren Maschinen haben solche Einrichtung z. B. die von *Odhner*¹⁴⁴), *Duschaneck*¹⁶¹), *Büttner*¹⁴⁶) (ist gleichzeitig mit Umsteuerung versehen), *Esser*¹⁵⁹), *Küttner*¹⁴⁷), unter den älteren die von *Mahon*¹³⁵), *Maurel* und *Jayet*¹³¹), *Staffel*¹⁶³) (bei dieser musste ausserdem noch ein Zeiger auf „Subtraktion“ gestellt werden).

157) Eine Ausnahme bildet die Maschine von *Tschebyscheff*¹¹³): es wird im

Die meisten, für alle vier Grundrechnungsarten bestimmten Maschinen haben ein besonderes Zählwerk — Neben- oder Teilerzählwerk¹⁵⁸⁾ — in welchem beim Multiplizieren der Multiplikator, beim Dividieren der Quotient erscheint und das aus letzterem Grunde gewöhnlich der *Quotient* ($Q - Q$ in Fig. 13, 16—18, 20) genannt wird¹⁵⁹⁾.

20. Besondere Einrichtungen. Man würde es heute als einen grossen Mangel empfinden, wenn eine Rechenmaschine keinen „Auslöscher“ hätte, mit Hilfe dessen alle Zifferscheiben des Zählwerks rasch in die Nullstellung zurückgeführt werden können¹⁶⁰⁾. Bei den neueren Rechenmaschinen auch im Quotienten (s. Nr. 19) angebracht¹⁶¹⁾, ist diese Vorrichtung (die gewöhnlich mittels eines Knopfes oder Hebels durch Drehen oder Druck in Thätigkeit gesetzt wird, in den Figuren 13, 14, 16 u. s. w. mit L bezeichnet) stetig verbessert worden.

Schon *Joh. Helfrich Müller's* Rechenmaschine (1783)¹⁶²⁾ liess eine *Glocke* ertönen, sobald ihr zugemuthet wurde, eine Zahl von einer kleineren abzuziehen, oder grössere Ergebnisse zu bilden, als das

Zählwerk die Ergänzung des Dividenden zu einer höheren Potenz von 10 eingestellt und der Divisor addiert, was einer Abart der komplementären Division (s. Nr. 2) entspricht.

158) Bei der „circular calculating machine“ von *J. Edmondson* [s. *Philos. Mag.* (5) 20 (1885), p. 15; Abb. *Dyck's* Katalog p. 151, von *Bohl* p. 151] sind Haupt- und Nebenzählwerk mit einander vereinigt. Der kreisförmige Bau derselben gestattet, jede Ziffer des Zählwerks jeder Ziffer des Schaltwerks gegenüber zu bringen, so dass eine nicht aufgehende Division beliebig lange ohne neue Einstellung des Restes fortgesetzt werden kann.

159) Mit einem solchen waren bereits die Maschinen von *Hahn*¹⁴¹⁾ und *Müller*¹⁶²⁾ ausgestattet; die Maschine von *Thomas*¹⁴³⁾ ist es erst seit 1858. — Zehnerübertragung ist gewöhnlich im Quotienten nicht vorgesehen, sodass bei Maschinen mit Kurbel die Drehungen der letzteren bloss dann richtig angezeigt werden, wenn ihre Zahl in keiner Stelle mehr als 9 beträgt. Bei wissenschaftlichen Rechnungen wäre diese Zehnerübertragung oft erwünscht; sie kommt vor bei der Maschine von *H. Esser*, D. R. P. Nr. 82965 (1892) und der „Duplex“-Rechenmaschine von *Küttner*¹⁴⁷⁾; bei *Selling's* älterer Maschine¹⁸⁶⁾ versteht sie sich von selbst.

160) Wir finden einen solchen schon in der Rechenmaschine von *Leibniz* (s. die polygonalen Scheiben $L - L$ in Fig. 11, deren Bedeutung *Burkhardt*¹²⁹⁾ erkannt hat) während der Arithmometer von *Thomas*¹⁴³⁾ ihn erst um 1858 erhielt.

161) Bei der Maschine von *K. Duschaneck*, D. R. P. Nr. 26778 (1883), s. *Polyt. J.* 260 (1886), p. 264, können alle drei Systeme von Ziffern durch eine einzige Kurbeldrehung auf Null gestellt werden; bei derjenigen von *Edmondson*¹⁶⁸⁾ lassen sich die Ziffern des inneren Kreises, in welchem Haupt- und Nebenzählwerk vereinigt sind, nach Belieben insgesamt oder teilweise auslöschen.

162) S. *Götting. Anzeigen*, 120. Stück, 1784, S. 1201; *Müller's* „Beschreibg. seiner neu erfund. Rechenmaschine . . .“, hrsg. von *Ph. E. Klipstein*, Frankfurt und Mainz 1786; *Dyck's* Katalog p. 148 (m. Abb.).

Zählwerk fassen konnte. Auch *J. A. Staffel's Maschine* (1845)¹⁶³) hatte diese Warnungsglocke, die man jetzt in vielen Rechenmaschinen antrifft¹⁶⁴).

Wichtig, obwohl noch selten angewendet, ist ein *Druckwerk*, bestehend in Vorrichtungen zum automatischen Kopieren der eingestellten Zahlen und der Ergebnisse, wie solche schon bei den Additionsmaschinen (Nr. 15) erwähnt wurden¹⁶⁵).

Schon *Leibniz*¹³²) spricht davon, dass ein *mechanischer Antrieb* an Stelle des Bewegens der Rechenmaschine durch die Hand des Rechners gesetzt werden könnte. Ausser in der Rechenmaschine von *A. Stern*¹⁶⁶), die ein vollständiger Automat war, scheint dieser Gedanke noch nicht zur Ausführung gebracht worden zu sein¹⁶⁷).

21. Ausführung zusammengesetzter Rechnungen. Ihre Kraft am besten entfalten können Rechenmaschinen der in Nr. 17 und Nr. 18 betrachteten Arten bei Ausdrücken der Form

$$ab \pm a_1 b_1 \pm a_2 b_2 \pm \dots$$

Wenn die Zahl a im Schaltwerk eingestellt und mit b multipliziert worden ist, lässt man das im Zählwerk erschienene Produkt ab stehen und führt in derselben Weise der Reihe nach die Multiplikationen

163) S. Tygodnik ilustrowany, Warschau 1863, p. 207.

164) Z. B. in *A. Burkhardt's Maschine Thomas'scher Bauart*¹⁴⁹) seit 1885. — Durch Nichtbeachtung des dem Rechner gegebenen Zeichens können Fehler entstehen.

165) Abgesehen von den Differenzenmaschinen (Nr. 22) war damit wohl zuerst die Rechenmaschine von *Grant*¹⁵⁵), dann die ältere Maschine von *Selling*¹³⁶) versehen. Bei *A. T. Ashwell's* offenbar von den Schreibmaschinen herübergenommener Konstruktion, D. R. P. Nr. 102935 und Nr. 103009 (1897) kann man sogar ein Blatt Papier, ohne es von der Maschine zu entfernen, nacheinander mit parallelen Reihen von Zahlenkolonnen bedrucken und es ertönt eine Glocke, wenn eine bestimmte Zahl von Reihen zum Abdruck gekommen ist.

166) S. Leipz. Litteraturztg. f. d. J. 1814, p. 244; Warschauer Gesellsch. d. Wiss. Roczniki 12 (1818), p. 106. Nach Einstellung der gegebenen Zahlen führte die Maschine ihre Operationen, deren Beendigung durch eine Glocke angezeigt wurde, allein aus. S. auch Anm. 173.

167) Bei der älteren Additionsmaschine von *Burrough*¹²⁵) dienten allerdings Federn, welche durch einen Fusstritt gespannt und durch die Tasten lediglich ausgelöst wurden, zum Hervorbringen der Bewegungen. Nach *C. Dietzschold* (Die Rechenmasch., Leipzig 1882, p. 43 oben), wäre es leicht (entsprechend einem Vorschlage von *G. Zeuner*) an Rechenmaschinen mit Kurbel ein durch Pedal aufziehendes Laufwerk zum Antrieb der Hauptwelle anzubringen. Additionsmaschinen mit Uhrwerk und Tasten erwähnt *Dietzschold* p. 19 als von *Bieringer & Hebetanz* 1873 ausgestellt; eine solche wurde auch *Fr. Cuhel* 1890 unter Nr. 59377 patentiert.

$a_1 b_1, a_2 b_2, \dots$ aus; die Addition bzw. Subtraktion¹⁶⁸⁾ jedes neu gebildeten Gliedes vollzieht sich von selbst¹⁶⁹⁾. *G. A. Hirn* hat gezeigt¹⁷⁰⁾, wie auch Ausdrücke, die in einem Aggregat von Gliedern der Form abc, d^2e, f^3 bestehen, ohne Niederschreiben von Zwischenergebnissen berechnet werden können. Das Ausziehen von Quadratwurzeln¹⁷¹⁾, allgemeiner die Berechnung einer Wurzel einer beliebigen quadratischen Gleichung¹⁷²⁾, wird bei Anwendung einer Rechenmaschine ebenfalls zu einem mechanischen Verfahren, ebenso bei gleichzeitiger Benutzung zweier Rechenmaschinen das Ausziehen von Kubikwurzeln bzw. die Berechnung einer Wurzel einer kubischen Gleichung¹⁷²⁾. Zur Erleichterung der ersteren Operation sind einige Rechenmaschinen mit besonderen Vorrichtungen versehen worden¹⁷³⁾.

168) Bei der Rechenmaschine von *Thomas*¹⁴³⁾ und anderen erscheint, wenn man eine im Schaltwerk eingestellte Zahl von Null subtrahiert, im Zählwerk deren Ergänzung zu 10^n , wo n die Anzahl der Stellen des Zählwerks bezeichnet, m. a. W. die Maschine „entlehnt“ Eins in der $(n+1)$ ten Stelle und gibt es zurück, wenn eine grössere Zahl addiert wird. Positive und negative Glieder können deshalb in beliebiger Ordnung in die Maschine eingeführt werden. Dagegen bei der Maschine von *Maurel* und *Jayet*¹³¹⁾, sowie der von *Bollée*¹⁴⁹⁾ ist es durch eine Hemmung unmöglich gemacht, eine Zahl von einer kleineren zu subtrahieren, beim Dividieren und Ausziehen von Quadratwurzeln ein Vorteil.

169) Insbesondere liefert jede Kurbeldrehung ein weiteres Glied einer arithmetischen Reihe $a, a \pm d, a \pm 2d, \dots$, wenn das Anfangsglied a in das Zählwerk gebracht und die konstante Differenz d im Schaltwerk eingestellt ist. — Der *Arithmaurel*¹³¹⁾ hat zwei Zählwerke; auf dem ersten (Fig. 14, $Z-Z$) können im Fall eines Ausdrucks obiger Form die Werte der einzelnen Glieder $ab, a_1 b_1, \dots$, wenn man ihrer bedarf, abgelesen und dann ausgelöscht werden, im zweiten Zählwerk (Fig. 14, $Z'-Z'$) erscheint der Wert des ganzen Ausdrucks $ab \pm a_1 b_1 \pm a_2 b_2 \pm \dots$. Es erleichtert dies manche Rechnungen, z. B. die Bestimmung des grössten gemeinschaftlichen Teilers zweier Zahlen. *Burkhardt*¹⁴³⁾ liefert Maschinen *Thomas*'scher Bauart auf Wunsch ebenfalls mit doppeltem Zählwerk, ferner Maschinen für abgekürzte Multiplikation (s. Nr. 25).

170) *Génie civil*, 2², 1863, p. 160.

171) Man kann die gewöhnliche Methode zu Grunde legen. *A. Töpler* hat ein besonderes Verfahren angegeben [s. *F. Reuleaux*, Verh. V. f. Gewerbfleiss, 44 (1865), p. 112], welches darauf beruht, dass die Summe der n ersten ungeraden Zahlen gleich n^2 ist.

172) *S. R. Mehmke*, Zeitschr. Math. Phys. 46 (1901), Heft 4.

173) Z. B. die Maschinen von *Stern*¹⁶⁶⁾, *Staffel*¹⁶⁵⁾ und *Bollée* (Modell von 1892)¹⁴⁹⁾. *Stern* hat drei Maschinen konstruiert, von welchen die erste (1813) nur für die „vier Spezies“, die zweite (1817) für das Wurzelausziehen bestimmt war, die dritte (1818) die beiden ersten in sich vereinigte. Die Mitteilung der Leipz. Litterat.-Ztg. von 1814, p. 244, *Stern* arbeite an einem Instrument zur Auffindung der Primzahlen, beruht wohl auf einer Verwechslung der polnischen Wörter für Quadratwurzel und Primzahl.

β. Maschinen zur selbstthätigen Ausführung zusammengesetzter Rechnungen.

22. Differenzenmaschinen. Die in der Überschrift genannten Maschinen haben den Zweck, mathematische, astronomische und dergleichen Tafeln, also Wertereihen von Funktionen, mit Hilfe der Differenzen verschiedener Ordnung (s. I E) zu berechnen und überdies zu stereotypieren. Sie bilden das einzige Mittel zur Herstellung gänzlich fehlerfreier Tafeln, woraus allein schon ihre Wichtigkeit erhellt. Der Gedanke geht auf *J. H. Müller* (1786) zurück¹⁷⁴), aber erst *Ch. Babbage* war (1823) in der Lage, den Bau seiner (um 1812 erdachten) Differenzenmaschine in Angriff zu nehmen, wenn auch infolge ungünstiger äusserer Umstände (1833) die Arbeit wieder eingestellt werden musste¹⁷⁵)¹⁷⁶). Zur Ausführung gelangte zuerst (1853, ein zweites Exemplar 1858) die (1834 erfundene) Differenzenmaschine von *Georg und Eduard Scheutz* (Vater und Sohn)¹⁷⁷)¹⁷⁸). Von ähnlicher Wirkungsweise¹⁷⁹), aber in der Bauart vereinfacht, sind die

174) „Beschreibg. seiner neu erfund. Rechenmaschine“, hrsg. von *Ph. E. Klipstein*, Frankf. u. Mainz 1786, p. 48.

175) *S. Polyt. J.* 47 (1832), p. 441, ferner:

176) *Babbage's Calculating engines*, London (Spon) 1839. (Sammlung zahlreicher zerstreuter Arbeiten über die Rechenmaschinen von *Ch. Babbage*.)

177) *S. H. Meidinger*, *Polyt. J.* 156 (1860), p. 241, 321. Abb. von *Bohl* p. 189. Beschreib. der Einzelheiten in *Brit. patent specific.*, Oct. 17, 1854, Nr. 2216.

178) *George et Edouard Scheutz*, *Spécimen de Tables calculées stéréotypées et imprimées au moyen d'une machine*, Paris 1858, (1857 in London englisch erschienen). — *Tables of lifetimes, annuities and premiums, with an introduction by W. Farr*, London 1864.

179) Fünf Zählwerke mit je 15 Stellen sind vorhanden, eines für die Werte der Funktion $u = f(x)$, die übrigen für die Differenzen [I E, Nr. 2] der ersten vier Ordnungen, von welchen die der vierten Ordnung einander gleich vorausgesetzt sind. Die anfänglichen Einstellungen sind:

$$u_0, \Delta u_{-1}, \Delta^2 u_{-1}, \Delta^3 u_{-2}, \Delta^4 u.$$

Bei der ersten halben Umdrehung addiert die Maschine die Differenzen gerader Ordnung $\Delta^4 u$ und $\Delta^2 u_{-1}$ zu den benachbarten Differenzen $\Delta^3 u_{-2}$ bzw. Δu_{-1} , wodurch diese in $\Delta^3 u_{-1}$ und Δu_0 übergehen; bei der zweiten halben Umdrehung der Kurbel werden die ungeraden Differenzen $\Delta^3 u_{-1}$ und Δu_0 zu den benachbarten Zahlen $\Delta^2 u_{-1}$ und u_0 addiert, sodass in den Zählwerken jetzt

$$u_1, \Delta u_0, \Delta^2 u_0, \Delta^3 u_{-1}, \Delta^4 u$$

erscheinen, also die Indices alle um Eins gewachsen sind. Ist $\Delta^4 u$ thatsächlich nicht konstant, so darf es bei Abrundung auf eine bestimmte Zahl von Stellen wenigstens eine Strecke weit als konstant angesehen werden.

Differenzenmaschinen von *M. Wiberg*¹⁸⁰⁾ und *George B. Grant*¹⁸¹⁾, von welchen die erste gleich der *Scheutischen*¹⁷⁸⁾ bemerkenswerte Proben ihrer Leistungsfähigkeit abgelegt hat¹⁸²⁾.

23. Analytische Maschinen. Die 1834 von *Ch. Babbage* erfundene „analytical engine“¹⁷⁶⁾¹⁸³⁾ hat die Bestimmung, arithmetische oder analytische Operationen irgend welcher Art¹⁸⁴⁾ an beliebigen gegebenen Zahlen auszuführen und die Ergebnisse zu drucken. Die Formeln oder Vorschriften, nach denen die Maschine rechnen soll, werden ihr in Gestalt durchlochter Kartons (ähnlich den in der Jacquard-Weberei benützten) dargeboten. Bis jetzt ist nur ein kleiner (jedoch benutzbarer) Teil dieser Maschine vollendet¹⁸⁵⁾.

B. Genähertes Rechnen.

Den Hilfsmitteln des Zahlenrechnens, die wir im folgenden zu betrachten haben, wohnt eine beschränkte Genauigkeit inne, was nicht ausschliesst, dass einzelne von ihnen bei geeigneter Verwendung auch zum genauen Rechnen dienen können (s. Anhang, Nr. 59), wie umgekehrt natürlich die im ersten Abschnitt vorgeführten alle auch beim genäherten Rechnen anwendbar sind. Zunächst ist:

24. Das Rechnen mit ungenauen Zahlen im allgemeinen zu besprechen. Nicht nur sind alle durch Messungen gefundenen Zahlen — sie seien denn ihrer Natur nach ganze Zahlen — mehr oder weniger ungenau, sondern es können auch irrationale Zahlen (die wir uns durch unendliche Dezimalbrüche dargestellt denken [I A 3, Nr. 9]) immer nur unvollständig angegeben, also nicht genau in die Rechnung eingeführt

180) *S. Delaunay*, Par. C. R. 56 (1863), p. 330.

181) *Amer. J. sc. arts* (3) 2 (1871), p. 113.

182) So erschienen 1875 in Stockholm die ausführl. 7-stelligen „Logarithm-Tabeller, uträknade och tryckte med räknemaskin af Dr. *M. Wiberg*“.

183) Neben¹⁷⁶⁾ sei als leichter zugänglich genannt die Mitteilung von *L. F. Menabrea*, Par. C. R. 99 (1884), p. 179.

184) So ist¹⁷⁶⁾ p. 45 f. angegeben, wie die Maschine verfährt, um die *Bernoulli*'schen Zahlen [I E Nr. 10; II A 3, Nr. 18] zu berechnen.

185) Im Namen einer von der British Association niedergesetzten Kommission, die darüber befinden sollte, ob es sich empfehle, die Maschine auszuführen und Tafeln mit ihr zu berechnen, hat *C. W. Merrifield* 1878 es für ratsam erklärt, die Maschine zu spezialisieren, z. B. nur für Multiplikation oder für die Auflösung eines Systems linearer Gleichungen (bezw. die Berechnung von Determinanten, s. I A 2) einzurichten, s.¹⁷⁶⁾ p. 323 = *Brit. Ass. Rep.* 1878. — Wegen eines „piano arithmétique“ von *Genaille* zur Prüfung grosser Primzahlen s. *Assoc. franç.* 20¹, Marseille 1891, p. 159.

werden. Wenn eine dekadisch geschriebene Zahl mit einer grösseren Anzahl von Stellen gegeben ist, als ihrer verbürgbaren oder der für einen bestimmten Zweck notwendigen Genauigkeit entspricht, so wird man sie *verkürzen* (abkürzen), d. h. rechts eine Anzahl von Stellen weglassen (bezw. durch Null ersetzen, wenn keine Dezimalstellen vorhanden sind¹⁸⁶). Die meisten Rechner befolgen hierbei die Regel, die letzte behaltene Ziffer um Eins zu erhöhen, wenn die rechts folgende (erste weggelassene) Ziffer 5 oder grösser als 5 war („Ab-runden“)¹⁸⁷; so wird erreicht, dass der Fehler einer verkürzten Dezimalzahl höchstens eine halbe Einheit der letzten angegebenen Stelle (statt bis zu einer vollen) betragen kann. Verlangt man, dass nach mehrmaligem Kürzen einer Zahl sich dasselbe ergibt, wie wenn um die betreffende Gesamtzahl von Stellen auf einmal gekürzt worden wäre, so ist es notwendig, bei der Endziffer 5 zu unterscheiden, ob sie durch Erhöhung aus 4 entstanden („kleine 5“¹⁸⁸), gewöhnlich 5 geschrieben¹⁸⁹), oder schon vorher 5 gewesen ist („grosse 5“¹⁸⁸)¹⁹⁰.

Die eigentliche, von Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen abhängige Fehlerrechnung ist in I D 2 erledigt worden; einfacheren Methoden zugänglich und deshalb ausser in Monographien¹⁹¹)¹⁹²) auch in

186) Die Schreibweise lässt dann zwar nicht erkennen, sondern es muss ausdrücklich gesagt werden, dass und auf wieviel Stellen verkürzt worden ist. (A. Gernerth hängt in seinen fünfstelligen Logarithmentafeln, Wien 1866, jeder vollständigen Zahl einen Punkt an, zur Unterscheidung von den unvollständigen Zahlen.)

187) Sie wurde schon von J. Kepler angewendet (vgl. die aus dem J. 1623 stammenden Beispiele einer abgekürzten Multiplikation und Division, Opera omnia, ed. Frisch, 7, Greifswald 1855, p. 296), dagegen noch nicht bezw. nicht folgerichtig von Bürgi²⁰⁶) u. Prätorius²⁰⁷).

188) Vgl. F. G. Gauss, Fünfstell. logarithm. u. trigonom. Tafeln, Berlin 1870, Einleitung.

189) Wegen anderer Arten, die Erhöhung zu bezeichnen, s. Anm. 237.

190) Weniger nötig, aber dennoch bei manchen Tafeln (s. Anm. 237) durchgeführt, ist bei anderen Endziffern die Unterscheidung, ob Erhöhung vorliegt oder nicht. Sie giebt das Vorzeichen des Fehlers, ohne die Grenze für dessen absoluten Betrag herabzusetzen. Diese wird auf 0,25 Einheiten der letzten Stelle erniedrigt, wenn man (wie dies z. B. Gernerth¹⁸⁶) p. 121 als „zweite Methode“ auseinandersetzt) jede nicht erhöhte Endziffer um 0,25 vermehrt, jede erhöhte um 0,25 vermindert, was aber, als zu umständlich, selten geschieht. J. Kepler erreichte denselben Zweck, indem er (in seiner „Chilias Logarithmorum“, Marpurgi 1624 = Opera 7, p. 392; Erklärg. p. 347) der letzten Ziffer eines unvollständigen Dezimalbruchs ein + oder ein — beifügte, wenn derselbe um einen Betrag zwischen 0,25 und 0,5 Einheiten der letzten Stelle zu klein bezw. zu gross war.

191) Z. B. J. Vieille, Théorie génér. des approximations numér., Paris 1852,

vielen elementaren Lehrbüchern der Arithmetik (namentlich in französischen)¹⁹²⁾¹⁹³⁾ mehr oder weniger vollständig und zutreffend behandelt sind die Fragen, die sich nur auf die grösstmöglichen Werte der Fehler beziehen. Zwei Aufgaben bieten sich hauptsächlich dar: 1) Den Fehler zu bestimmen, der dem Ergebnis einer Rechnung höchstens anhaften kann, wenn die Fehler der in die Rechnung eingehenden Zahlen gegebene Werte nicht überschreiten; 2) eine Rechnung mit möglichst geringem Aufwand an Ziffern so auszuführen, dass die für das Ergebnis vorgeschriebene Genauigkeit gesichert ist¹⁹⁴⁾. Es genügt, die absoluten Beträge der Fehler in Betracht zu ziehen¹⁹⁵⁾.

Bezüglich der ersten Aufgabe sei folgendes mitgeteilt. Der Fehler einer Summe oder Differenz ist höchstens gleich der Summe der Fehler der einzelnen Glieder¹⁹⁶⁾. Die entsprechenden Beziehungen für Produkt, Quotient, Potenzen und Wurzeln sind ebenfalls bekannt und mittelst elementarer Methoden zu gewinnen¹⁹⁷⁾. Einfacher und in schwierigeren Fällen nicht zu umgehen ist es, mit *Guyou*¹⁹⁸⁾ sich der Differentialrechnung zu bedienen. In dem zu berechnenden Ausdruck ersetzt man die ungenauen oder unvollständigen Zahlen durch die Buchstaben a, b, c, \dots , bildet hierauf, wenn $f(a, b, c, \dots)$ eben jenen Ausdruck bezeichnet, die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial a}, \frac{\partial f}{\partial b}, \frac{\partial f}{\partial c}, \dots$, setzt in jeder für a — unter a_1 den gegebenen Näherungswert dieser Zahl, unter Δa den Höchstbetrag ihres Fehlers verstanden — denjenigen der beiden Werte $a_1 + \Delta a$ und $a_1 - \Delta a$ ein, zu welchem

2. éd. 1854; *Babinet-Housel*, *Calculs pratiques*, Paris 1857; *Ch. Ruchonnet*, *Éléments de calcul approximatif*, Lausanne 1874, 4. éd. 1887; *Ch. Galopin-Schaub*, *Théorie des approx. numér.*, Genève 1884; *E. M. Langley*, *A treatise on computation*, London 1895; *J. Griess*, *Approxim. numér.*, Paris 1898. „Lüroth“ Kap. 5 und 6.

192) Die deutsche Litteratur ist ziemlich erschöpfend angegeben und kritisch besprochen in *E. Kullrich*, *Die abgekürzte Dezimalbruchrechnung*, Progr. Schöneberg 1897/98.

193) Genannt seien: *J. A. Serret*, *Traité d'arithmétique*, 7. éd. Paris 1887; *J. Tannery*, *Leçons d'arithmétique théorique et pratique*, Paris 1894, 2. éd. 1900.

194) Vielleicht zuerst gestellt, wenn auch nicht gelöst, von *F. Wolff*, *Theoret.-prakt. Zahlenlehre*, Berlin 1832.

195) Die Einschliessung jeder ungenauen Zahl zwischen zwei Grenzen ist dabei ebenso gut erreicht, aber die Formeln und Regeln werden einfacher, als wenn man (wie *Vieille* a. a. O.) die Vorzeichen der Fehler berücksichtigt.

196) *C. Fr. Gauss*, *Theoria motus corporum coelestium*, Hamburg 1809, art. 31, Schluss.

197) Vgl. *Griess* a. a. O. p. 14 f.

198) *Nouv. Ann. de mathém.* (3) 8 (1889), p. 165; ausführlicher *Griess* a. a. O.; Ansätze bei *Ruchonnet*, *Vieille* und schon *Gauss*¹⁹⁶⁾.

der absolut grössere Wert der betreffenden Ableitung gehört und verfährt ähnlich mit b, c, \dots ; dann ist, wenn man die fraglichen Absolutwerte jener Ableitungen mit A, B, C, \dots bezeichnet, der Fehler von f höchstens:

$$(1) \quad \Delta f = A \cdot \Delta a + B \cdot \Delta b + C \cdot \Delta c + \dots$$

Bis jetzt haben wir nur den sogenannten *absoluten* Fehler, den Unterschied zwischen dem genauen und dem ungenauen Wert, ins Auge gefasst. Ein besseres Mass für die Ungenauigkeit einer Zahl ist eigentlich der (oft in Prozenten ausgedrückte) *relative* Fehler, d. h. der Quotient aus dem absoluten Fehler und dem genauen Wert, jedoch ist bei der vorliegenden Aufgabe seine Benützung bloss bei „Monomen“, Ausdrücken der Form:

$$f = \frac{ab^m \dots}{c \sqrt[n]{d} \dots}$$

zu empfehlen¹⁹⁹), wo man (mit den obigen Bezeichnungen):

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta a}{a} + m \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c} + \frac{1}{n} \frac{\Delta d}{d} + \dots$$

setzen kann²⁰⁰).

Zuweilen wird von der Anzahl der genauen Ziffern ausgegangen. Eine ungenaue Zahl hat m genaue Ziffern, wenn ihre m ersten Ziffern links mit denjenigen gleichen Ranges in der Entwicklung der zugehörigen genauen Zahl in einen Dezimalbruch übereinstimmen. Die von jenen Ziffern gebildete Zahl ist dann ein unterer (zu kleiner) Näherungswert, dessen Fehler höchstens eine Einheit der m^{ten} Stelle beträgt. Umgekehrt, wenn der (absolute) Fehler einer Zahl nicht grösser als 10^{-m} ist, so hat sie $(m - 1)$ genaue Dezimalen, ausser die m^{te} Ziffer ist 0 oder 9, in welchem Falle man sich nur auf $(m - 2)$ Dezimalen verlassen kann²⁰¹). Wenn zwei Zahlen mit m bzw. n genauen Ziffern bekannt sind und $m < n$ ist, so kann man bei ihrem Produkt oder ihrem Quotienten im allgemeinen auf $(m - 2)$ genaue Ziffern rechnen, aber nur auf $(m - 3)$, wenn a mit der Ziffer 1 beginnt²⁰²).

199) *Vieille* operiert meist mit dem relativen Fehler, was grosse Verwicklungen herbeiführt.

200) *Griess* ¹⁹¹) p. 18.

201) S. *Griess* a. a. O. — Setzt man die Anzahl der genauen Ziffern zu dem relativen Fehler in Beziehung, so kommt noch die erste geltende Ziffer in Betracht, s. *Vieille* u. *Griess* a. a. O.

202) *Griess* a. a. O. p. 19; *Vieille* giebt andere Regeln an. Weitere Sätze dieser Art, auch für Quadrat- und Kubikwurzeln, bei *Griess*.

Zur zweiten der oben genannten Aufgaben übergehend, nehmen wir an, die Genauigkeit, mit der eine Formel $f(a, b, c, \dots)$ berechnet werden soll, sei geringer als die, welche bei direktem Einsetzen der gegebenen ungenauen Zahlen a, b, c, \dots sich herausstellen würde, so dass letztere Zahlen gekürzt werden können. Das durch Einsetzen der gekürzten Zahlen entstehende vorläufige Ergebnis wird im allgemeinen überflüssige Ziffern enthalten; durch Abrunden desselben auf die Anzahl von Stellen, welche der verlangten Genauigkeit entspricht, begeht man einen Fehler, der eine halbe Einheit der letzten behaltene Stelle betragen kann²⁰³). Soll daher das endgültige Ergebnis auf n Einheiten einer gewissen Stelle richtig sein, so müssen die gegebenen Zahlen a, b, c, \dots mit solcher Genauigkeit in die Rechnung eingeführt werden, dass der Fehler des vorläufigen Ergebnisses höchstens $\varepsilon = n - \frac{1}{2}$ Einheiten der fraglichen Stelle beträgt. Die Aufgabe ist unbestimmt, da in Gleichung (1) die Fehlergrenzen $\Delta a, \Delta b, \Delta c, \dots$ auf unendlich viele Arten so gewählt werden können, dass die Bedingung $\Delta f \leq \varepsilon$ erfüllt wird. Das einfachste ist, mit *Guyou*¹⁹⁸):

$$A \cdot \Delta a < \frac{\varepsilon}{m}, \quad B \cdot \Delta b < \frac{\varepsilon}{m}, \quad C \cdot \Delta c < \frac{\varepsilon}{m}, \dots$$

also:

$$(2) \quad \Delta a < \frac{\varepsilon}{mA}, \quad \Delta b < \frac{\varepsilon}{mB}, \quad \Delta c < \frac{\varepsilon}{mC}, \dots$$

zu setzen, wo m die Anzahl der Grössen a, b, c, \dots bedeutet²⁰⁴). Vor dieser allgemeinen Methode waren für die einfachen Rechnungsarten wiederholt Regeln angegeben worden, von der Art, dass, um die Addition als Beispiel zu nehmen, bis zu einer gewissen Anzahl von Summanden jeder mit einer Stelle mehr eingeführt werden soll, als man im Ergebnis zu behalten gedenkt („überzählige“ Stelle oder „Überstelle“), und ähnliche²⁰⁵).

203) S. *Guyou*¹⁹⁸). Dieser Umstand wird häufig übersehen; berücksichtigt, aber noch wenig hervorgehoben, schon bei *Harms*, Das abgekürzte Rechnen, Progr. Realsch. Oldenburg 1872.

204) Da bei diesen Fehlergrenzen 1 oder 2 geltende Ziffern genügen, so wird man sich das Ausrechnen derselben durch Abrunden aller Zahlen möglichst erleichtern, wobei es statthaft ist, die rechten Seiten zu verkleinern. *Guyou* bringt das Ganze in ein zweckmässiges Schema, mit Kolonnen für die auszuführenden Operationen, die notwendigen Annäherungen u. s. w.

205) *Babinet* wollte sich noch bei 20 Summanden mit einer Überstelle begnügen, andere [z. B. *J. Vinot*, Ann. Génie civil, 2² (1863), p. 172] sind auf 10, ja auf 8, 6, 3 (vgl. *Kullrich* a. a. O.) Summanden herunter gegangen; wenn man jedoch anstrebt, das Ergebnis auf eine halbe Einheit der letzten Stelle genau

I. Das Rechnen ohne besondere Vorrichtungen.

25. Abgekürzte Multiplikation und Division. Bildet man das Produkt zweier ungenauen Zahlen auf die gewöhnliche Weise, so ergeben sich rechts eine Anzahl überflüssiger, weil ungenauer Ziffern. Deshalb wandten schon *Joost (Jobst) Bürgi*²⁰⁶, *Joh. Prätorius*²⁰⁷ und namentlich *Joh. Kepler*²⁰⁸ die sogenannte abgekürzte Multiplikation an. Bei derselben wird mit der höchsten Ziffer des Multiplikators begonnen und beim Übergang zu den rechts folgenden Ziffern des letzteren der Multiplikand jedesmal um eine Stelle gekürzt, sodass die Teilprodukte mit Ziffern gleichen Ranges abrechnen. Es empfiehlt sich, das Dezimalkomma im Multiplikator hinter die erste geltende Ziffer zu bringen²⁰⁹. Der grösseren Genauigkeit wegen wird der erste Teilmultiplikand entweder mit einer Stelle mehr genommen („Überstelle“), als im Produkt schliesslich behalten werden sollen²¹⁰ oder mit zwei Überstellen²¹¹ oder sogar drei²¹²), wobei einige die nachträgliche Verkürzung schon an den Teilprodukten vornehmen²¹³), manche wenigstens teilweise²¹⁴), andere erst an dem gesuchten Produkt²¹⁵).

zu erhalten, so würde schon (wie *Kullrich*, der bei nicht mehr als 20 Summanden zwei Überstellen anwenden will, bemerkt) bei zwei Summanden eine Überstelle nicht immer ausreichen und es kann sogar durch Hinzunahme weiterer Überstellen der Fehler grösser werden. — Nicht minder mannigfaltig sind die für die Multiplikation u. s. w. aufgestellten Regeln. Man möge daraus ersehen, wie wenig übereinstimmend noch die Ansichten auf diesem Gebiete sind.

206) In der handschriftlichen, kurz nach 1592 geschr. „Arithmetica“, vgl. *Cantor*, Vorles. üb. Gesch. d. Math. 2, p. 618.

207) Vgl. *Max Curtze*, Zeitschr. Math. Phys. 40 (1895), hist.-litter. Abt., p. 7.

208) *Opera omnia* 7, p. 306, 372 u. a. *Kepler* weist auf *Prätorius* zurück, verfährt aber etwas anders, als letzterer.

209) *F. Wolff*¹⁹⁴). Natürlich muss zum Ausgleich im Multiplikanden das Komma um ebensoviel Stellen in der umgekehrten Richtung versetzt werden.

210) So *Prätorius*, *Kepler* a. a. O. p. 306; *R. Baltzer*, Elemente d. Mathem. (p. 48 der 7. Aufl., Leipz. 1885).

211) So *Bürgi*, *Kepler* a. a. O. p. 372; *Cauchy* (Anm. 217); *Vieille*, *Babinet*, *Griess* u. a.

212) Z. B. *Krönig*, Über Mittel zur Vermeidung u. Auffindung v. Rechenfehlern, Progr. Berlin 1855; *Kullrich* a. a. O.

213) *Kepler* a. a. O. p. 306 und *Baltzer*.

214) Es kürzen die Teilprodukte schon um eine Stelle bzw. berücksichtigen den von einer weiteren Überstelle herrührenden Übertrag z. B. *Bürgi*, *Kepler* a. a. O. p. 372, *Babinet*, *Kullrich*.

215) *Prätorius*, *Cauchy*, *Vieille*, *Griess*, *Krönig* (letzterer verfährt beim Abkürzen verschieden, je nachdem die drittletzte Ziffer $\begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix}$ 4) u. a. Schon die

Schreibt man die Einerziffer des Multiplikators über die letzte Ziffer des Multiplikanden, die noch berücksichtigt werden soll, und lässt links die übrigen Ziffern des Multiplikators in verkehrter Ordnung folgen, so kommt jede über die Ziffer zu stehen, bei welcher der zugehörige Teilmultiplikand abzubrechen ist²¹⁶). Im Anschluss hieran die Multiplikation selbst als geordnete (s. Nr. 1) auszuführen, liegt nahe²¹⁷).

Ebenfalls schon von *Kepler* geübt wurde die abgekürzte Division²¹⁸), die gewöhnlich mit der abgekürzten Multiplikation zusammen gelehrt wird und auf ähnlichen Gedanken beruht²¹⁹). Die geordnete Division (Nr. 1) eignet sich unmittelbar für das Rechnen mit ungenauen Zahlen²²⁰).

26. Abgekürztes Wurzelausziehen. Unter diesem Namen wird in den einschlägigen Lehrbüchern ein Verfahren beschrieben, um bei einer (Quadrat-, Kubik- oder höheren) Wurzel, von der eine Anzahl genauer Stellen auf irgend eine Art bestimmt worden sind²²¹), un-

Teilmultiplikanden auf soviel Stellen abzurunden, als berücksichtigt werden sollen, wie *Müller* a. a. O. thut, ist nicht zweckmässig (vgl. *Kullrich* a. a. O. p. 23).

216) Sog. Regel von *W. Oughtred*, angeblich in dessen *Artis analyticae praxis* (1631?) zu finden, welche Schrift der Verfasser nicht einsehen konnte.

217) *A. Cauchy*, Par. C. R. 11 (1840), p. 847 = Oeuvres (1) 5, p. 443.

218) *Kepler* verweist auch bei dieser, a. a. O. p. 306, auf *Prätorius*, von welchem aber keine Beispiele bekannt zu sein scheinen. Identisch mit *Kepler's* Verfahren ist das von *A. L. Crelle*, J. f. Math. 31 (1846), p. 167, der übrigens auch Genauigkeitsbetrachtungen anstellt.

219) Es versteht sich von selbst, dass nur der Quotient (mehr oder weniger genau) erhalten wird, nicht aber der Rest. Ausführliche Regeln bei *Serret* a. a. O. p. 130 f.

220) *J. C. Houzeau* [Brux. Bull. (2) 40 (1875), p. 101 f.] zeigt noch eine „division en série“, „div. par approximations successives“ und einige andere Methoden, die aber nicht als zweckmässig bezeichnet werden können; wegen einer von demselben Verf. erwähnten „multiplication sommaire“ vgl. Anhang, Nr. 59.

221) Wegen der gewöhnlichen Methoden zum Ausziehen von Quadrat- und Kubikwurzeln muss auf die Lehrbücher der Arithmetik (s. etwa *Serret* p. 145 f.) verwiesen werden. S. auch „Lüroth“ Kap. 9. Übrigens ist es, wenn eine grössere Zahl genauer Ziffern verlangt ist, sodass Logarithmen nicht ausreichen, am zweckmässigsten, entsprechend der Auffassung von $\sqrt[p]{N}$ als Wurzel der Gleichung $x^p - N = 0$, die allgemeinen Verfahren zur Auflösung numerischer Gleichungen (I B 3 a, Nrn. 10—14) anzuwenden (so mit besonderem Vorteil die Methode von *K. Runge* und *W. Fr. Meyer*, ib. p. 440, Anm. 36); insbesondere ist dasjenige von *Horner* (dieser Band p. 436) schon bei Quadratwurzeln bequemer als jedes andere (vgl. *H. Scheffter*, Die Auflösung der algebr. u. transcend. Gleichungen,

gefähr ebensoviel weitere genaue Stellen durch eine blosse Division zu finden. In der *Newton'schen* Näherungsmethode [I B 3 a, Nr. 10] als besonderer Fall enthalten, besteht dasselbe darin, für den gegebenen Näherungswert a von $\sqrt[p]{N}$ die Verbesserung δ aus der Formel:

$$\delta = \frac{N - a^p}{p a^{p-1}}$$

zu berechnen²²²⁾).

II. Numerische Tafeln.

Monographien s. Anm. 18.

27. Logarithmentafeln. Sie bilden seit Erfindung der Logarithmen²²³⁾ ohne Frage das wichtigste Werkzeug in der Hand des Rechners, unentbehrlich für ganze Gebiete des wissenschaftlichen Rechnens.

Die nach Erklärung der Logarithmen auf p. 25 dieses Bandes durch die Gleichungen I—IV ausgedrückten Grundeigenschaften derselben zeigen, dass mit ihrer Hülfe nicht nur (wie mittelst der Tafeln der Viertelquadrate und der Dreieckszahlen, s. Nr. 6) die Multiplikation, sondern auch die Division auf Addition bezw. Subtraktion sich zurückführen lässt, und überdies die Potenzierung und Radizierung auf Multiplikation bezw. Division. (Wegen der Erniedrigung der Operationsstufen um zwei Einheiten s. Nr. 31.)

Den Vorrang behaupten (als für das Rechnen am bequemsten) die sogenannten *gemeinen* oder *Briggs'schen* Logarithmen, deren Basis 10 ist; die Angabe der Basis unterbleibt bei ihnen. (Wegen anderer Logarithmensysteme s. den Schluss dieser Nummer.) Man schreibt jeden Logarithmus dezimal²²⁴⁾; der ganzzahlige Teil, welcher nur von

Braunschweig 1859, p. 20f.). — Wie 2^{te}, 3^{te}, 5^{te} Wurzeln aus Zahlen mit höchstens 5, bezw. 6, bezw. 10 Ziffern im Kopfe ausgezogen werden können, zeigt *H. Schubert* in seinen „mathemat. Mussestunden“, 2. Aufl., Leipzig 1900, p. 184f.

222) Um bei mehrmaliger Verbesserung wiederholte Divisionen zu vermeiden, setzt *Cauchy*²¹⁷⁾, p. 857 = Oeuvres (1) 5, p. 453:

$$\delta = \frac{1}{pN} a(N - a^p),$$

wo $\frac{1}{pN}$ im voraus berechnet wird.

223) Betreffs der Geschichte s. etwa *Ch. Hutton*, Mathem. Tables, London 1785 (u. spätere Auflagen bis zur 6. von 1822 einschl.), Introduction; *Glaisher* p. 49—55 (der Anteil *Bürgi's* nicht richtig gewürdigt); *Cantor* 2, p. 725—747; vgl. auch Anm. 272.

224) Als Dezimalzeichen wird in Deutschland ziemlich allgemein bei Loga-

der Stellung des Kommas im Logarithmanden oder „Numerus“ abhängt, wird die *Kennziffer* oder *Charakteristik* genannt und in den Tafeln gewöhnlich weggelassen, der angehängte Dezimalbruch ist durch die Folge der Ziffern des Numerus allein bestimmt und heisst die *Mantisse*²²⁵). Hat der Numerus n ganze Stellen, so ist $(n-1)$ die Kennziffer des zugehörigen Logarithmus. Der Logarithmus eines echten Bruchs ist zwar negativ, jedoch wird die Mantisse positiv geschrieben und das Vorzeichen auf die Kennziffer geworfen, welche letztere $-m$ ist, wenn der ersten geltenden Ziffer des Numerus m Nullen (diejenige vor dem Komma mitgerechnet) vorangehen²²⁶). Statt einen Logarithmus zu subtrahieren, kann man seine Ergänzung zu 10 — *dekadische Ergänzung*, complementum logarithmi oder *Cologarithmus* genannt — addieren²²⁷).

Die Logarithmentafeln sind so zahlreich, dass nicht einmal die

rithmen der Punkt, bei allen anderen Zahlen das Komma verwendet — eine zweckmässige Unterscheidung (vgl. *E. Hammer*, Lehrb. der eben. u. sphär. Trigonom., 2. Aufl., Stuttgart 1897, p. 549, Anm. 8).

225) Das Wort mantisa oder mantissa stammt nach einer Stelle bei Festus, Pauli excerpta (ed. *E. O. Müller*) p. 132, 10 aus dem Etrurischen und bedeutet eine (unnütze) Zugabe. S. noch *E. Hoppe*, Hamb. Math. Ges. Mitt. 4 (1901), p. 52. — *L. Schrön*²²⁵⁾ nennt jede der Kennziffer angehängte Dezimalstelle eine Mantisse, spricht also von der 1., 2., . . . Mantisse, statt, wie sonst üblich, von der 1., 2., . . . Ziffer der Mantisse. — *K. Fr. Gauss* benützt (Disqu. arithm., art. 312) das Wort Mantisse auch für die Reihe der Dezimalen, die sich bei der Verwandlung eines gewöhnlichen Bruchs in einen Dezimalbruch ergeben.

226) Manche setzen diese Kennziffer mit — darüber vor die Mantisse, z. B. $\log 0,04 = \bar{2}.60206$ statt $0.60206 - 2$; verbreiteter und wohl auch vorzuziehen ist die Gewohnheit, statt der negativen Kennziffer ihre positive Ergänzung zu 10 (bezw. dem nächst höheren Vielfachen von 10) zu nehmen, wobei das eigentlich noch anzuhängende -10 (bezw. das betr. Vielfache von -10) gewöhnlich nur hinzugedacht wird, z. B. $\log 0,04 = 8.60206$, oder vollständig $8.60206-10$.

227) Geschrieben *E log* oder *cpl. log* oder *colog*. Sehr vorteilhaft namentlich bei Rechnungen, die aus Multiplikationen und Divisionen zusammengesetzt sind. Man bildet die dekadische Ergänzung eines Logarithmus im Kopfe, indem man, links anfangend, jede Ziffer von 9 subtrahiert, bis auf die letzte geltende Ziffer, die von 10 zu subtrahieren ist. — Besondere Tafeln der Cologarithmen sind zwar überflüssig, finden sich aber doch, z. B. in den 4-stelligen Tablas *logarítmicas* von *L. G. Gascó* (Valencia 1884) und (ebenfalls 4-stellig) in *Silas W. Holman's Computation rules and logarithms*, New York 1896. Die von den Cologarithmen nur um eine Konstante verschiedenen Werte von $\log \frac{\alpha}{x}$ (α und x in Sekunden ausgedrückte Winkel, α konstant, z. B. 1° oder $3600''$) sind unter dem Namen *logistische* oder *proportionale Logarithmen* öfters (mit 4 {oder 5 Stellen} tabuliert worden, vgl. *Glaisher* p. 73.

bedeutendsten alle hier namhaft gemacht werden können²²⁸). Fassen wir zunächst diejenigen ins Auge, bei deren Benützung in der gewöhnlichen Weise mittelst Differenzen interpoliert wird²²⁹). (Wegen anderer s. Nr. 28.) *Adrian Vlack (Vlacq)* hat zum ersten mal die Logarithmen der ununterbrochenen Zahlenreihe von 1—100000 gegeben, und zwar mit 10 Dezimalstellen²³⁰). Von ihm haben alle Späteren abgeschrieben und eine Neuberechnung von Logarithmen²³¹) in grossem Stile ist, abgesehen von der unter *R. Prony's* Leitung am Ende des 18. Jahrhunderts erfolgten der handschriftlichen „Tables du

228) Die vollständigste Liste, über 553 Tafeln umfassend, verdankt man *D. Bierens de Haan*: Tweede ontwerp eener naamlijst van Logarithmentafels, Amst. Verh. 15 (1875), p. 1. [Vorher ging: Jets over Logarithmentafels, Amst. Versl. en Meded. (1) 14 (1862), p. 15.] Wo in den folgenden Anmerkungen ein Titel auf eine Tafel der Logarithmen der natürlichen Zahlen allein sich bezieht, ist ein * vorgesetzt. In allen anderen Fällen handelt es sich um Tafelsammlungen, die ausserdem noch Tafeln der Logarithmen der trigonometrischen Funktionen [III A 2] und andere (z. B. Tafeln der natürl. Zahlenwerte der trigonom. Funktionen, Quadrattafeln u. s. w.) enthalten, welche Zugaben ausserordentlich wechseln, je nachdem die Sammlung den Bedürfnissen der Astronomen, Geodäten, Ingenieure, Nautiker gerecht werden will. Wegen der trigonom. Tafeln für die dezimale Teilung der Winkel s. *R. Mehmeke*, Bericht üb. Winkelteilung, Deutsch. Math.-Ver. 8 (1900), insbes. Anm. 20, p. 149.

229) Die Handhabung der gewöhnlichen Logarithmentafeln ist sehr bekannt und darf hier um so eher unbesprochen bleiben, als in den allermeisten Tafeln ausführliche Anleitungen zum Gebrauche zu finden sind. Bei 10-stelligen Tafeln hat man zur Interpolation im allgemeinen auch die Differenzen 2. Ordnung nötig (s. Interpolation, I D 3, Nr. 6). Die kleinste Zahl der Logarithmen, die eine Tafel enthalten muss, wenn Interpolation mit 1. Differenzen möglich sein soll, untersucht *J. E. A. Steggall*, Edinb. Math. Soc. Proc. 10 (1891/92), p. 35.

230) In seiner (gleichzeitig lateinisch, französisch und holländisch herausgeg.) „Arithmetica logarithmica“, Goudae 1628, (die er bescheidener Weise als 2. Auflage von *H. Briggs'* 1624 unter gleichem Titel erschienenem Werke, das aber eine Lücke von 20000—90000 enthielt, bezeichnete); Ausgabe mit Titel und Erklärung in engl. Sprache von *George Müller*, London 1631. War neben *G. Vega's* „Thesaurus“²⁴⁶), welchem sie von Manchem (z. B. *Glaisher*) vorgezogen wird, bis vor kurzem die einzige vollständige Tafel mit 10 Dezimalen (wird in den Katalogen meist unter *Briggs* oder *Neper* aufgeführt, welche Namen im ausführl. Titel stehen). *Glaisher* giebt in den Lond. Roy. Astr. Soc. Monthly Notices 32 (1872), p. 255 alle Stellen an, wo Fehler in *Vlack's* Tafeln (über 600) veröffentlicht sind.

231) Wegen der thatsächlich angewandten oder zweckmässigsten Methoden vgl. etwa *Hutton*²²⁸) (bezügl. der älteren); *Vega's* Thesaurus²⁴⁶), Einleitung; *A. Cauchy*, Par. C. R. 32 (1851), p. 610 = Oeuvres (1) 11, p. 382 (Bericht üb. e. Arbeit von *Koralek*, nur 7-stellige Logarithmen); *J. Glaisher*, Factor table for the fourth million, London 1879, Einleitung (üb. die Anwendung von Faktorentafeln, s. Nr. 9, bei der Berechnung); *Ellis*²⁷⁵); *K. Zindler*, Zeitschr. Realschulwesen 22 (1897), p. 398; s. auch Nr. 28.

Cadastre²³²), erst wieder in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts von *E. Sang* ausgeführt worden²³³). Man hat jedoch nicht versäumt, den überlieferten Vorrat an Logarithmen wiederholt zu prüfen²³⁴) und die ererbten Fehler²³⁵) allmählich auszumerzen, sodass nicht allein in immer noch unentbehrlichen älteren Tafeln, wie denen von *Vlack*²³⁰) und *Vega*²⁴⁶), die Fehler genau bekannt sind, sondern auch die neueren Auflagen der besten heutigen Tafeln als fehlerfrei gelten können²³⁶), wobei in Betreff der Richtigkeit der letzten Stelle zu bemerken ist, dass die Anforderungen sich immer mehr gesteigert haben²³⁷). Im übrigen hat sich besonders im 19. Jahrhundert das Bestreben geltend

232) Es gehören dazu Tafeln der trigonometrischen Funktionen und ihrer Logarithmen für Dezimalteilung des Quadranten. Der Druck ist begonnen, aber nicht zu Ende geführt worden. Genaueste Beschreibung von *F. Lefort*, Paris Observ. Ann. 4 (1858), p. 123. *Sang* hat (Edinb. Roy. Soc. Proc. 1874/75, pp. 421, 581) die Zuverlässigkeit dieser Tafeln stark in Zweifel gezogen, *Lefort* (ebenda, pp. 563, 578) dieselben in Schutz genommen. Nachdem sie mehrfach zur Revision anderer Tafeln gedient hatten, ist 1891 ein 8-stelliger Auszug²⁴⁶) daraus erschienen.

233) *Sang* berechnete von Grund aus die Logarithmen der Zahlen von 1—10 000 mit 28 Stellen, sowie von 100 000—370 000 mit 15 Stellen, s. dessen 7-stellige, 1871 erschienene Tafel²⁵³), Preface, sowie Edinb. Roy. Soc. Proc., 1874/75, p. 421. Vgl. auch Anm. 248.

234) Ausser *A. Gernerth*, der sich durch besonders gründliche Prüfung zahlreicher Tafeln verdient gemacht hat (Bemerkungen üb. ältere u. neuere mathemat. Tafeln, Wien 1863 = Zeitschr. österr. Gymn. 1863, S. 407), seien erwähnt *Babbage*²⁴⁴), *Breniker*²⁵⁶), *Sang*²⁵³), *Shortrede*²⁵⁶), *Schrön*²⁵²).

235) Vgl. *Glaisher*, On the progress to accuracy of logarithmic tables, Monthly Notices Astr. R. Soc. 33 (1873), p. 330; mehr als 200 Jahre waren seit dem Druck von *Vlack's* Tafeln²³⁰) verflossen, bis eine von deren Fehlern freie Tafel erschien, und wiederholt haben sich neue Fehler eingeschlichen. — Ein Verzeichnis aller bekannten (an den verschiedensten Orten veröffentlichten) Druckfehler in den im Gebrauch befindlichen Tafeln ist (nach *Glaisher*) von dem „Table Committee“ der British Association längst geplant, aber noch nicht erschienen.

236) Ihrer Entstehung nach sollten die 7-stelligen Tafeln von *Wiberg*¹⁸²) unter allen Umständen fehlerfrei sein.

237) Im 18. Jahrhundert wurde ein Fehler von mehreren Einheiten der letzten Dezimale noch leicht genommen (vgl. *Gernerth*²³⁴), Einleitung). Erst später kam der von *K. Fr. Gauss* (Einige Bemerkungen zu Vega's Thesaurus Logarithmorum, Astr. Nachr. 32 (1851), p. 181 = Werke 3, p. 257) stark betonte Grundsatz, „dass die Tabulargrösse dem wahren Wert allemal so nahe kommen soll, als bei der gewählten Anzahl von Dezimalstellen möglich ist“, allmählich zur Herrschaft. Im Gegensatz dazu begnügt sich *Glaisher* [Monthly Notices R. Astr. Soc. 33 (1873), p. 440 fig.] mit der Forderung, der Tafelwert solle nie um mehr als 0,555 . . . einer Einheit in der letzten Stelle falsch sein. Noch grössere Schärfe, als *Gauss* für nötig hielt, haben einzelne durch die An-

gemacht, die Einrichtung der Tafeln immer zweckmässiger und für den Gebrauch bequemer zu gestalten. Der Raumersparnis und besseren Übersicht wegen hatte *John Newton* (1658)²³⁸) auf jeder Seite nicht nur die, einer Anzahl von Mantissen gemeinsame Gruppe der drei ersten Ziffern abgetrennt²³⁹) und nur einmal, am Anfang einer Zeile, gedruckt, sondern auch die Logarithmen aller Zahlen mit derselben Einerziffer je in eine Kolonne, mit dieser Ziffer als Ueberschrift, gestellt, wodurch seine Tafel zwei Eingänge erhielt. Mit seltenen Ausnahmen²⁴⁰) wird seit langem diese Anordnung bei allen Logarithmentafeln befolgt. Während aber gewöhnlich die Vielfachen der Differenzen oder auch die Proportionalteile in einer besonderen Spalte, die keinen Zusammenhang mit den übrigen hat, angegeben sind, haben *A. M. Nell*²⁴¹), *Gascó*²²⁷), *N. E. Lomholt*²⁴²) u. a. durch Hinzufügung

gabe, ob die letzte Ziffer erhöht ist oder nicht, zu erreichen gesucht. Abgesehen von *Kepler*¹⁹⁰) bezeichnen die Erhöhung bei allen Ziffern z. B. *M. von Prasse* (fünfstellige logarithmische Tafeln, Leipzig 1810), *Babbage*²⁴⁴) 1827, *Sedlacek* (Wien. Ber. 1847, p. 428), *Steinhauser*²⁸⁰) 1857, *Schrön*²⁵²) 1860, *Gernerth*¹⁸⁶) 1866, *Gascó*²²⁷) 1884; dagegen bloss, wenn die durch Erhöhung entstandene Ziffer 5 ist, z. B. *Filipowski*³⁰²) 1849 u. *F. G. Gauss*¹⁸⁸) 1870, und zwar durch andere Gestalt der Endziffer von *Prasse* (kursiv), *Filipowski* (V statt 5), *Gascó* (fett gedruckt), beziehentlich durch einen Punkt unter oder neben der Endziffer *Babbage*, *Sedlacek* (auch *Steinhauser*), durch einen Strich unter oder über der Endziffer oder durch dieselbe *Schrön*, *Gauss*, *Gernerth*. Jedenfalls ist unter sonst gleichen Umständen eine Tafel mit Erhöhungszeichen die wertvollere (vgl. Nr. 24, insbes. Anm. 190). Auf einen höheren Standpunkt stellt sich *N. E. Lomholt*²⁴²), indem er die letzte Ziffer so wählt, dass bei allen mittelst der Tafel gefundenen Logarithmen (einschl. der durch Interpolation erhaltenen) die durchschnittliche Abweichung von ihrem wahren Wert ein Minimum wird.

238) In seiner zu London erschienenen „Trigonometria Britannica“; die betreffende, bis 100 000 gehende Tafel ist 8-stellig und statt der Differenzen sind ihre Logarithmen in besonderer Spalte mit 5 Stellen gegeben. *Newton* wandte übrigens bloss Neuerungen seiner Vorgänger *N. Roe*²⁸¹) (1633) und *E. Wingate* (1624) vereinigt an, vgl. *Hutton*²²³) p. 36, 39.

239) Bei 5-stelligen Mantissen werden gewöhnlich zwei Ziffern abgetrennt, bei 4-stelligen lohnt sich die Abtrennung nicht. Findet innerhalb einer Zeile ein Wechsel in der letzten abgetrennten Ziffer statt, so wird meist (wie schon von *Vega*²⁴⁶)), jedem folgenden Mantissteil dieser Zeile ein * vorgesetzt; *Hutton*²²³) druckte einen Strich, *Filipowski* zwei Punkte über die Anfangsziffer desselben, *Sang*²⁵³) wie *R. Shortrede*²⁵⁶) statt der 0 das arabische Nokta (d. i. Punkt) ◆ (ähnlich dem arabischen Zeichen für 0), und noch andere Unterscheidungsmitel kommen vor.

240) Z. B. *J. Houël* (Tables de logarithmes à cinq décim., Paris 1858) und *Th. Albrecht* (Logarithm.-trigon. Tafeln mit fünf Dezimalstellen, Berlin 1884) sind zu einem Eingang zurückgekehrt.

241) Fünfstellige Logarithmen . . ., Darmstadt 1865, 9. Aufl. 1898.

242) Fircifret Logarithmetabel, Kjøbenhavn 1897 [Erklärung übersetzt in

eines dritten Eingangs, nämlich für die mit den Logarithmen auf gleiche Zeile gebrachten Proportionalteile, die Interpolation noch mehr erleichtert²⁴³). Die Sorgfalt der Herausgeber von Logarithmentafeln hat sich weiter auf das Format, auf Schnitt und Grösse der Ziffern, deren Verhältnis zu den Zwischenräumen und ähnliches, ja auf die Farbe des Papiers und der Druckerschwärze erstreckt²⁴⁴).

Während man es anfangs für nötig hielt, die Logarithmen mit einer grossen Zahl von Stellen anzugeben²⁴⁵) und auch für gewisse Zwecke Tafeln mit vielen Stellen immer unentbehrlich bleiben werden, ist man nach und nach auf eine immer kleinere Stellenzahl herabgegangen und im 19. Jahrhundert schliesslich bei 4- und 3-stelligen Tafeln angekommen. Bei 10 Stellen sind wir immer noch auf die seltene „Arithmetica logarithmica“ von *Vlack*²³⁰) und den durch photozinkographische Reproduktion wieder zugänglich gemachten „The-saurus logarithmorum“ von *G. Vega*²⁴⁶) angewiesen²⁴⁷). Neunstellige

der Zeitschr. f. Vermessungsw. 27 (1898), p. 240]; bietet unter allen vierstelligen Tafeln bei bequemstem Gebrauch die grösste durchschnittl. Genauigkeit, vgl. Anm. 237, Schluss.

243) Beispiel einer Zeile aus *Lomholt's* Tafel:

	0	1	2	3	...	7	8	9	1 2 3	...	7 8 9
79	8976	8982	8987	8993	...	9015	9020	9025	1 1 2	...	4 4 5

Also z. B. $\log 7,983 = \log 7,98 + \text{Proport.}-\text{Teil zu } 3 = 0,9020 + 2 = 0,9022$.

244) *Ch. Babbage* hat hierüber 12, aus der Vergleichung vieler Tafeln abgeleitete Regeln aufgestellt (*Tables of the logarithms . . .*, London 1827, 2. ed. 1831, Preface; 3. Aufl. mit deutscher Einleitung von *K. Nagy*, London 1834); vgl. etwa noch *Schrön*²⁶²), Einleitung. Selbst *Gauss* hat diesen Fragen grosse Beachtung geschenkt, wie seine Besprechungen verschiedener Logarithmentafeln in den Göttingischen gelehrten Anzeigen = Werke 3, p. 241—255, darthun. Vgl. noch Anm. 299.

245) Die älteste Tafel der gemeinen Logarithmen, *Briggs' ** „Logarithmorum chilias prima“ von 1617 hatte (nach *Glaisher* p. 55) ebenso wie dessen *Arithmetica logarithmica* von 1624²³⁰) 14 Stellen.

246) Leipzig 1794; Titel, Vorrede und Einleitung auch deutsch. Reproduktion vom Istituto Geografico Militare in Florenz 1889 herausgegeben, zum 2. male 1896. Hülftafeln zur leichteren Interpolation bei Benützung des *The-saurus*, wie auch ein Verzeichnis der Fehler in letzterem giebt *M. v. Leber*, *Tabularum ad faciliorem . . . trias*, Vindobonae 1897 (Einleitung auch deutsch). S. noch *S. Gundelfinger*²⁹³) (9-stellige Tafeln), p. 60.

247) Zwar hat *W. W. Duffield* [U. S. Coast and Geodetic Survey Report 1895/96, Washington 1897, Appendix 12, p. 422—722] eine neue (auf 12-stelligen Originalberechnungen beruhende und mit *Vega* verglichene) Tafel mit 10 Stellen veröffentlicht, aber sie ist noch auf ihre Korrektheit zu prüfen und ihre Anordnung lässt sich nicht als zweckmässig bezeichnen.

Tafeln scheinen nicht veröffentlicht zu sein²⁴⁸); solche mit 8 Stellen haben sich nicht eingebürgert²⁴⁹), wogegen 7-stellige Tafeln lange Zeit fast allein Gebrauch gewesen sind. Die erste vollständige, d. h. bis 100000 gehende²⁵⁰) Tafel mit 7 Stellen gab 1633 *N. Roe*²⁵¹); besonderes Vertrauen genießt *L. Schrön's* Tafel²⁵²); am bequemsten zu gebrauchen ist die von *E. Sang*²⁵³), weil sie sich von 20000 bis 200000 erstreckt; aus der ungemein grossen Zahl sonstiger seien herausgegriffen diejenigen von *Ch. Babbage*²⁴⁴), *C. Bruhns*²⁵⁴), *Fr. Callet*²⁵⁵) und *R. Shortrede*²⁵⁶). An 6-stelligen Tafeln ist ebenfalls kein Mangel; ausser der ältesten von *S. Dunn* (1784)²⁵⁷) sei die am meisten geschätzte von *C. Bremiker*²⁵⁸) genannt. Am verbreitetsten sind Logarithmentafeln mit fünf Stellen — den schon erwähnten von *Th. Albrecht*²⁴⁰), *F. G. Gauss*²⁵⁹), *A. Gernerth*²⁶⁰), *J. Höüel*²⁴⁰), *A. M. Nell*²⁴¹), seien hinzugefügt die vermutlich älteste von *D. Bates*

248) *E. Sang* hat eine Subskription auf eine 9-stellige Logarithmentafel von 100000—1000000 mit 1. Differenzen eröffnet [sie wurde noch 1883 in der 2. Aufl. der 7-stell. Tafel desselben Verfassers²⁵³) angeboten und als nahezu fertig bezeichnet], von ihrem wirklichen Erscheinen ist jedoch nichts bekannt.

249) Die vom Service géographique de l'Armée hrsg. „Tables des logarithmes à huit décimales“, Paris 1891, ein revidierter Auszug aus den „Tables du Cadastre“²³²), sind die ersten seit 1658²³⁸).

250) Manche Tafeln, wie die von *Callet*²⁵⁵) und *Schrön*²⁵²), gehen bis 108000; ausserdem geben sie die letzten 8000 Logarithmen mit 8 Stellen, wofür eigentlich kein Bedürfnis vorliegt.

251) *Tabulae logarithmicae*, London.

252) Siebenstellige gemeine Logarithmen . . . , Braunschweig 1860, 24. Aufl. 1900 (auch engl., französ., italien. u. s. w. Ausgaben).

253) *A new table of seven-place logarithms . . . , London and Edinburgh 1871, 2. issue 1883. Die grossen Differenzen am Anfang anderer Tafeln sind vermieden; zwar beginnt die 2. Auflage, wie andere Tafeln, mit 1, man wird aber die Logarithmen der mit der Ziffer 1 anfangenden mehr als 5-ziffrigen Zahlen in der zweiten Hälfte der Tafel suchen.

254) Neues logarithmisch-trigonometrisches Handbuch auf sieben Dezimalen, Leipzig 1870, 5. Aufl. 1900 (gleichzeitig engl., französ. u. italien. hrsg.).

255) *Tables portatives de logarithmes* . . . , Paris 1795 und viele (nicht numerierte) neue Ausgaben.

256) *Logarithmic tables* . . . , Edinburgh 1844, 2. Aufl. 1849 (geht bis 120000); 2. Teil (die Logar. der trigonom. Funkt. enthaltend) 2. Aufl. 1854.

257) *Tables of correct and concise logarithms* . . . , London; nur bis 10000.

258) *Logarithmorum VI decimalium nova tabula* . . . , Berolini 1852; Logarithm.-trigonom. Tafeln mit sechs Dezimalstellen, Berlin 1860 (diese beiden Ausgaben noch nicht stereotypiert), 11. Ausgabe 1890.

259) Fünfstellige vollständige logarithmische u. trigonometrische Tafeln, Berlin 1870, 60. Aufl. 1899.

260) Fünfstellige gemeine Logarithmen . . . , Wien 1866.

(1781)²⁶¹) und die von *C. Bremiker*²⁶²), *Fr. W. Rex*²⁶³), *Th. Wittstein*²⁶⁴) — welche die 7-stelligen z. B. aus den Schulen nahezu verdrängt haben, nicht ohne dass ihnen wieder von den 4-stelligen Tafeln dieses Gebiet streitig gemacht würde. Unter den letzteren sind bereits die von *Gascó*²²⁷) und *Lomholt*²⁴²) genannt worden; vielleicht die früheste stammt von *J. F. Encke*²⁶⁵); erwähnt seien ausserdem die von *F. G. Gauss*²⁶⁶) und *Fr. W. Rex*²⁶⁷). Dreistellige Tafeln kommen hier und da mit 4- oder 5-stelligen zusammen vor²⁶⁸).

Über die Genauigkeit, mit welcher aus einer Logarithmentafel durch Interpolation die Mantisse des Logarithmus einer gegebenen Zahl oder umgekehrt gefunden werden kann, sind auf Grund der Wahrscheinlichkeitsrechnung [s. I D 1; I D 3, Nr. 9] von *C. Bremiker*²⁶⁹), *H. A. Howe*²⁷⁰) und *H. Stådthagen*²⁷¹) Theorien aufgestellt und experimentell geprüft worden. — Über graphische Logarithmentafeln s. Nr. 43.

261) Logarithmic tables . . . , Dublin.

262) Logarithm.-trigonom. Tafeln mit fünf Dezimalstellen, Berlin 1872, 8. Aufl. (besorgt v. *A. Kallius*) 1899.

263) Fünfstellige Logarithmen-Tafeln, Stuttgart 1884.

264) Fünfstellige logarithmisch-trigonom. Tafeln, Hannover 1859. 17. Aufl. 1896.

265) Logarithmen von vier Dezimal-Stellen, Berlin 1828 (Titelblatt ohne Verfasseramen).

266) Vierstellige logarithm.-trigonom. Handtafel, Berlin 1873, 3. Aufl. 1899 (auch Ausgabe f. Dezimalteilung des Quadranten, 2. Aufl. 1899), Plakatformat. Der geringe Umfang gestattet es, 4-stellige Tafeln zusammenlegbar in Taschenformat auf Karton zu drucken, wie *H. Schoder's* logarithm. u. trigonom. Tafeln mit vier u. drei Stellen, Stuttgart 1866, 2. Aufl. 1869, und die „vierstellige logarithm. Taschentafel“ der trigonom. Abteilung der kgl. preussischen Landesaufnahme, Berlin 1897. Bei letzterer ist über die Endziffer ein Punkt oder ein Strich gesetzt, jenachdem die Abrundung auf 4 Stellen eine Verkleinerung oder Vergrößerung bedingt hat (Anklang an *Kepler*, s. Anm. 190).

267) Vierstellige Logarithmen-Tafeln, Stuttgart (Metzler, ohne Jahreszahl).

268) Vgl. *L. Schrön*, Tafeln der drei- und fünfstelligen Logarithmen . . . , Jena 1838; *Houël*²⁴⁰) (5-, 4- u. 3-stellig); *Nell*²⁴¹) (5- u. 3-stellig), *Schoder*²⁶⁶).

269) De erroribus, quibus computationes logarithmicæ afficiuntur, in der Einleitung zu den 6-stelligen Tafeln²⁶⁸), Ausg. v. 1852.

270) *Annals of Mathematics* 1 (1885), p. 126; 3 (1887), p. 74; angenähert richtige Theorie.

271) „Ueb. die Genauigkeit logarithm. Rechnungen“, Berlin 1888 (*Bremiker's* Unters. fortgesetzt; insofern nicht abgeschlossen, als noch ein Unterschied zwischen Theorie u. Wirklichkeit besteht). Dass (bei belieb. Tafeln u. Differenzen aller Ordnungen) die Tafeldifferenzen den wahren Differenzen beim Interpolieren vorzuziehen sind, zeigt *J. Lefort*, *Edinb. Roy. Soc. Proc.* 8 (1875), p. 602.

Für das gewöhnliche Rechnen von sehr geringer Bedeutung sind Tafeln der „natürlichen“ oder „hyperbolischen“ Logarithmen, deren Basis $e = 2,71828 \dots$ ist²⁷²⁾ [I A 3, Nr. 17]. Die vollständigste, welche ähnlich wie eine gewöhnliche 7-stellige Logarithmentafel (wenn auch naturgemäss nicht so bequem) benützt werden und so allenfalls zu Kontrollrechnungen dienen kann, ist die von *Z. Dase*²⁷³⁾.

28. Fortsetzung: Abgekürzte Logarithmentafeln. Um höhere Potenzen oder Wurzeln sehr genau zu berechnen, und für andere Zwecke²⁷⁴⁾, braucht man Logarithmen mit einer grossen Zahl von Stellen. Tafeln der gewöhnlichen Einrichtung würden hier zu umfangreich und kostspielig werden, aber eine Reihe von Kunstgriffen, die sich im wesentlichen auf zwei Grundgedanken zurückführen lassen, sind ersonnen worden, um aus Logarithmentafeln beschränkter Zahlbereiche die Logarithmen beliebiger Zahlen mittelst mehr oder weniger einfacher Nebenrechnungen zu bestimmen und umgekehrt die Numeri zu gegebenen Logarithmen. Es braucht blos von der ersten Aufgabe gesprochen zu werden, weil die zweite in der Regel durch das umgekehrte Verfahren gelöst wird.

Dienen für gewöhnlich die Logarithmen zur Verwandlung der Multiplikation in Addition, so beruhen die meisten abgekürzten Logarithmentafeln gerade umgekehrt auf der Anwendung von Produkten, deren Faktoren auf elementarem Wege bestimmt werden, worauf man die Logarithmen der Faktoren den einzelnen Teilen der Tafel entnimmt und addiert²⁷⁵⁾. *H. Briggs*²⁷⁶⁾ zerlegte die gegebene Zahl

272) Bis in die neueste Zeit ist der Irrtum verbreitet gewesen, die von *J. Neper* in seiner „Mirifici logarithmorum canonis descriptio“ 1614 veröffentlichten Logarithmen der Sinus seien natürliche, weshalb letztere vielfach *Neperische* Logarithmen genannt werden; jedoch hat *G. Kewitsch* [Zeitschr. math. naturw. Unterr. 27 (1896), p. 321, 577] nachgewiesen, dass *Neper's* Logarithmen der Basis $\frac{1}{e}$ entsprechen, während die Basis e den „roten“ (weil rot gedruckten) Zahlen in *Joost Bürgi's* „arithm. u. geometr. Progress-Tabulen . . .“, Prag 1620, zukommt.

273) Tafeln der natürlichen Logarithmen der Zahlen . . ., Wien 1850 [= Wien. Observ. Ann. (2) 14 (1851)].

274) *Z. B.* Zinseszins- u. Amortisationsrechnungen [s. *Thoman*²⁸⁸⁾, p. 24 flg.], zur Prüfung mancher Sätze der höheren Arithmetik [vgl. *Gray*²⁷⁸⁾] u. s. w.; vgl. noch *G. Govi*, Rapport sur l'utilité des tables de logarithm. à plus de sept décim., Tor. Atti 8 (1872/73), p. 163.

275) Geschichte dieser Methode (mit wenig Lücken) bei *A. J. Ellis*, Lond. Roy. Soc. Proc. 31 (1881), p. 398 flg., Postscript (*Atwood* betr.) 32 (1881), p. 377. Da es mindestens 25 Tafeln dieser Art giebt, können oben nur die wichtigsten genannt werden.

selbst in ein Produkt, indem er als ersten Faktor die Anfangsziffer der Zahl, als zweiten Faktor die ersten beiden Ziffern des Quotienten aus der gegebenen Zahl und dem ersten Faktor u. s. w. nahm; ähnlich u. a. *P. Gray*, der jedoch dem ersten Faktor zwei²⁷⁷⁾ bzw. drei²⁷⁸⁾ Ziffern giebt, jedem folgenden dieselbe Zahl von Ziffern mehr, und *A. Steinhäuser*, der [wie vor ihm *Ch. Borda-J. B. J. Delambre*²⁷⁹⁾] nur zwei Faktoren verwendet²⁸⁰⁾, später drei²⁸¹⁾ bzw. vier²⁸²⁾, die (abgesehen vom letzten) nach Gruppen von drei bzw. vier Ziffern fortschreiten. Um grosse Divisionen zu vermeiden, gab *R. Flower*²⁸³⁾ der gegebenen Zahl zunächst die Form $0, \dots$ und multiplizierte dann der Reihe nach mit Zahlen der Form $1, 0^m r$ (r einziffrig, $m = 0, 1, 2, \dots$), zu dem Zweck, die Zahl auf die Form $0,999 \dots$, mit wachsender An-

276) *Tabula inventioni logarithmorum inserviens*, p. 32 der *Arithmetica logarithmica* von 1624, giebt (mit 15 Stellen) die gemeinen Logarithmen von $r; 1, r; 1, 0^m r$ mit $r = 1$ bis 9 und $m = 1$ bis 8, was *Ellis*²⁷⁵⁾ im Anschluss an *Flower*²⁸³⁾ „a positive numerical radix“ nennt; von *Vlack*²⁸⁰⁾ mit 10 Stellen abgedruckt.

277) *Mechanics Magazine*, 12. u. 26. Febr. 1848; 12 Stellen.

278) *Tables for the formation of logarithms . . .*, London 1876; 24 Stellen. Vorläufer mit 12 Stellen 1865 erschienen. Bei der Bestimmung des Numerus zu gegebenem Logarithmus *Flower's* Methode, s. unten.

279) Anhang zu den gewöhnlichen Logarithmentafeln in den „*Tables trigonom. décimales . . .*“, Paris an IX (1801); 11-stellig. Der erste Faktor besteht in den drei ersten geltenden Ziffern der gegebenen Zahl.

280) Anhang zu . . . Logarithmentafeln, enthaltend zwei Hilfstafeln zur Berechnung elfstelliger Logarithmen . . ., Wien 1857; wird im Titel als Erweiterung von *Borda's* Tafel bezeichnet.

281) Kurze Hilfstafel zur bequemen Berechnung 15-stelliger Logarithmen . . ., Wien 1865. Auf jeder der 20 Seiten drei mit *A, B, C* überschriebene Kolonnen, die Logarithmen der Zahlen 1 bis 999, bzw. 100999 und 10000999 enthaltend. Beim letzten Logarithmus (wie in der folgenden und vorhergehenden Tafel) Interpolation nötig.

282) Hilfstafeln zur präzisen Berechnung 20-stelliger Logarithmen . . ., Wien 1880. Prüfungen durch *J. Perott* [*Darboux' Bulletin* (2) 11 (1887), p. 51], *J. Blater* [s. *F. C. Lukas, Ehrenzweig's Assekuranz-Jahrbuch* 20 (1899), p. 69, 73] u. a. haben zahlreiche Fehler ergeben.

283) *The radix, a new way of making logarithms*, London 1771; zugehörige Tafeln (gemeine Logarithmen) 23-stellig. *Z. Leonelli* [*Supplément logarithmique*, Bordeaux an XI (1802/3), 2. Aufl. v. *J. Hoüel*, Paris 1875, deutsch von *G. W. Leonhardi*, Dresden 1806] giebt die Tafeln mit 20 Stellen und fügt solche gleicher Ausdehnung für natürliche Logarithmen hinzu (auch 15-stellige gemeine Logarithmen der Zahlen r und $1, 0^{2m+1}r$ mit $r = 1$ bis 99, $m = 0$ bis 3); diese Tafeln mehrmals abgedruckt, z. B. v. *Hoüel*²⁴⁰⁾³¹⁵⁾, von *Schrön*²⁵²⁾ (3. Teil, p. 76) mit 16 Stellen. — *Hoüel* teilte *Bord. Mém.* 8 (1870), p. 188 eine Methode von *F. Burnier* mit, die Rechnung zu beschleunigen.

zahl der Ziffern 9, also der Einheit immer näher zu bringen. *G. Atwood*²⁸⁴) wandte auch Faktoren der Form $(1 - 0,0^m r)$ an²⁸⁵), wodurch die Zahl von oben her der Eins immer näher gebracht wird, beseitigte alles Probieren und vereinfachte die Rechnungen durch weitere Hülftafeln und zweckmässige Regeln. Im 19. Jahrhundert sind *Atwood's* (wie *Flower's* und *Briggs's*) Methoden mehrmals (oft nur teilweise) wieder entdeckt worden, z. B. von *Weddle*²⁸⁶), *H. Wace*²⁸⁷), *F. Thoman*²⁸⁸) und *R. Hoppe*²⁸⁹), bei dem sie die einfachste Gestalt angenommen haben. *S. Pineto*²⁹⁰) bringt durch einen einzigen gut ausgewählten Faktor, *A. Namur*²⁹¹) durch einen oder zwei solcher, die gegebene Zahl in den Rahmen der Tafel.

Jegliche Multiplikation und Division (auch Interpolation) vermeidet *H. Prytz*²⁹²) durch Anwendung von Additionslogarithmen (s. Nr. 30); er denkt sich die Zahl N auf die Form:

284) An essay on the arithmetic of factors . . . , London 1786 (nach *Ellis*²⁷⁵). *Atwood* wandte seine Methode auch auf das Ausziehen von Wurzeln u. s. w. an. Damit verwandt scheinen die Bestrebungen von *O. Byrne* zu sein (Dual arithmetic, London 1863, neue Ausgabe 1864, Tables of dual logarithms 1867), der alle irrationalen Zahlen in der Form $(1,1)^\alpha (1,01)^\beta (1,001)^\gamma \dots$ oder $(0,9)^\alpha (0,99)^\beta (0,999)^\gamma \dots$, symbolisch geschrieben $\downarrow \alpha \beta \gamma \dots$ bzw. $\alpha \beta \gamma \dots \uparrow$, ($\alpha, \beta, \gamma \dots$ bedeuten Ziffern), darstellen will.

285) Eine Tafel dieser Grössen und der Negativen der entsprechenden Logarithmen nennt *Ellis*²⁷⁵) „a negative numerical radix“.

286) „The mathematician“, nov. 1845, p. 17; Tafeln mit 16 und 25 Stellen wurden 1849 von *Shortrede*²⁵⁶) gegeben.

287) Mess. of math. (2) 3 (1874), p. 66; Tafeln (gemeine und natürliche Logarithmen) auf 20 Stellen.

288) Tables de logarithmes à 27 décimales . . . , Paris 1867.

289) Tafeln zur dreissigstelligen logarithmischen Rechnung, Leipzig 1876; natürliche Logarithmen mit 33 Stellen, nur 7 Seiten 8°. *Hoppe* betont die Vorzüge der natürlichen Logarithmen beim Rechnen mit sehr vielen Stellen.

290) Tables de logarithmes vulgaires à dix décimales . . . , St. Pétersbourg 1871. Umfang der Tafeln 56 S. 8°. Die Haupttafel geht von 1 000 000 bis 1 011 000; die Faktoren haben höchstens (aber selten) drei Ziffern; Interpolation nötig.

291) Tables de logarithmes à 12 décimales . . . , Bruxelles 1877 (theoretische Einleitung von *P. Mansion*). Die Tafeln nehmen 10 S. 8° ein. Direkt gegeben sind die gemeinen Logarithmen der natürlichen Zahlen zwischen 433300 und 434299, weil nach einem von *Namur* empirisch gefundenen, von *Mansion* bewiesenen Satz bei diesen in der Nähe des millionenfachen Moduls liegenden Zahlen die logarithmischen Differenzen mit 100 . . . anfangen, also die Interpolationen leicht auszuführen sind. Jede Bestimmung eines Logarithmus oder Numerus zur Probe auf zwei Arten möglich; noch andere Proben, auch Fehler-schätzung.

292) Tables d'anti-logarithmes, Copenhague (kein Erscheinungsjahr an-

$$N = A(1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3) \dots (1 + a_r)$$

gebracht, woraus für

$$A = 10^L, \quad a_r = 10^{-L_r}$$

einerseits folgt:

$$\log N = L + \log(1 + 10^{-L_1}) + \log(1 + 10^{-L_2}) + \dots + \log(1 + 10^{-L_r}),$$

andererseits (wegen

$$N = A(1 + a_1 + a_2 + a_1 a_2 + a_3 + a_1 a_3 + a_2 a_3 + a_1 a_2 a_3 + \dots):$$

$$N = 10^L + 10^{L-L_1} + 10^{L-L_2} + 10^{L-L_1-L_2} + 10^{L-L_3} + 10^{L-L_1-L_3} + \dots$$

*S. Gundelfinger*²⁹³) beschränkt sich auf zwei Faktoren bzw. Summanden, wodurch die Zahl der Additionen und Subtraktionen geringer wird, aber Interpolation sich einstellt.

Sammlungen von Logarithmen mit aussergewöhnlich hoher Stellenzahl, die für wissenschaftliche Zwecke in Betracht kommen können, sind die öfters abgedruckten Tafeln der natürlichen Logarithmen von

gegeben, nach den „Fortschr. d. Mathem.“ 1886). Es können die Numeri (Antilogarithmen) zu gegebenen Logarithmen mit dreistelliger Mantisse, deren Differenzen also auch in der Tafel sich finden, dieser entnommen werden, und eine Hilfstafel giebt die Additionslogarithmen $\log(1 + 10^{-L_r})$. Anzahl der Stellen 15, 10 und 5 (Umfang bez. 10, 5, 2 Seiten 8^o). Auch andere Anwendungen des Grundgedankens möglich: durch Mitbenützung einer Hilfstafel, die nur eine Seite einnimmt, werden 15-stellige $\log \sin$ mittelst blosser Additionen und Subtraktionen gefunden. Vorläufer eine 1881 in Kopenhagen erschienene 8-stellige Tafel („Udkast til Antilogarithmetabel . . .“).

293) Tafeln zur Berechnung neunstelliger Logarithmen . . . , Darmstadt 1891

(in Gemeinschaft mit *A. M. Nell* herausgeg.). Es wird $N = n + p = n \left(1 + \frac{p}{n}\right)$

gesetzt, wo n aus den vier höchsten geltenden Ziffern von N (mit soviel angehängten Nullen, dass N und n gleichviel Stellen haben) gebildet ist. Die erste Tafel giebt die 9-stelligen Logarithmen von $n = 1000$ bis 10 000, die

zweite für $A = \log \frac{p}{n}$ das zugehörige $B = \log \left(1 + \frac{p}{n}\right)$, sodass $\log N = \log n + B$.

(Beide Tafeln zusammen 50 S. gross 8^o). (Über die Genauigkeit des Rechnens mit diesen Tafeln vgl. „Lüroth“ S. 118.) Auf demselben Grundsatz beruht die Anwendung einer neuen, 18 S. 4^o einnehmenden 7-stelligen Tafel von *Gundelfinger* (Sechsstellige Gaussische und siebenstellige gemeine Logarithmen, Leipzig 1900). — Durch Benützung von 3 oder mehr Summanden könnte die Methode auf Logarithmen mit mehr als 9 Stellen ausgedehnt werden, was noch nicht versucht worden zu sein scheint. — Auf Additionslogarithmen beruhen im Grunde genommen auch die „Canons de logarithmes“ von *Hoene-Wronski* (Paris 1827; russisch von *Annenkoff*, St. Petersburg 1845; polnisch in 2 Ausgaben von *S. Dickstein*, Warschau 1890; vgl. *Bibliotheca mathematica* (2) 7, 1893, p. 11), die zwar nur 4, 5, 6 und 7 Stellen (je auf einer Seite) bieten; Anordnung sehr sinnreich, aber für den wirklichen Gebrauch wohl zu künstlich.

Wolfram mit 48 Stellen²⁹⁴), sowie der gewöhnlichen Logarithmen von *A. Sharp* mit 61 Stellen²⁹⁵). Die höchste Stellenzahl, nämlich 102 bzw. 260, haben *H. M. Parkhurst*²⁹⁶) und *J. A. Adams*²⁹⁷) erreicht.

29. Tafeln der Antilogarithmen. Sie bilden die Umkehrung der gewöhnlichen Logarithmentafeln, haben also im Eingang Logarithmen bzw. Mantissen und geben die zugehörigen Zahlen, d. h. die Werte der Funktion $y = 10^x$, bzw. $y = e^x$, wenn natürliche Logarithmen zu Grunde liegen²⁹⁸). Trotz mancher Vorteile trifft man sie — als entbehrlich und nochmals denselben Raum beanspruchend, wie die gewöhnlichen Tafeln — recht selten, am meisten noch in vierstelligen Sammlungen, wo sie nur zwei Seiten einnehmen. In Zwischenräumen von mehr als hundert Jahren erschienen: *Bürgi's* „Progress-tafeln“²⁷²) als erste aller Antilogarithmentafeln²⁹⁹), *J. Dodson's* 11-stellige Tafel³⁰⁰) als ausgedehnteste³⁰¹) und eine Tafel in *Shortrede's*

294) Für alle natürlichen Zahlen von 1 bis 2200, von da bis 10009 grösstenteils nur für die Primzahlen; zuerst in *J. C. Schulze*, Neue und erweiterte Sammlung logarithmischer . . . Tafeln, Berlin 1778, erschienen; abgedruckt z. B. von *Vega*²⁴⁹) und *Callet*²⁵⁵).

295) Für die natürlichen Zahlen von 1 bis 100 und die Primzahlen von da bis 1097, ferner für die Zahlen von 999980 bis 1000020 mit Differenzen verschiedener Ordnungen, zuerst in dem Werke „Geometry improved . . .“, London 1717; abgedruckt z. B. von *Hutton*²²³) und *Callet*²⁵⁵).

296) Gemeine Logarithmen der Zahlen von 1 bis 109, in den „Astronomical tables . . .“, New-York 1871.

297) Natürliche Logarithmen der Zahlen 2, 3, 5, 7, 10 auf 272 Stellen, der Modul *M* auf 282 Stellen, wovon 260 als sicher bezeichnet werden, Lond. Roy. Soc. Proc. 27 (1878), p. 88.

298) Tafeln der „hyperbolischen“ Antilogarithmen, mehr den Zwecken der Analysis als dem gewöhnlichen Rechnen dienend, haben wir von *G. Vega*⁶⁴) [Werte von e^x und $\log e^x$ für $x = 0,00$ bis $10,00$ mit 7 Ziffern bzw. Dezimalen], abgedruckt z. B. von *Hülse*⁶⁵), *J. H. Lambert* [Zusätze zu den logarithmischen und trigonometrischen Tabellen, Berlin 1770; e^{-x} für $x = 0,1$ bis $1,0$ und $x = 1$ bis 10 mit 7 Stellen] und *J. W. L. Glaisher* [Cambr. Trans. 13 (1883), p. 243; e^x für $x = 0,001$ bis $0,100$ sowie für $x = 0,1$ bis $10,0$; e^{-x} für $x = 0,01$ bis $2,00$ und für $x = 1$ bis 500 mit 9 Stellen, die gemeinen Logarithmen davon mit 10 Stellen] und *H. W. Newman* [Cambr. Trans. 13 (1883), p. 145; e^{-x} für $x = 0,001$ bis $27,635$ in verschiedenen Intervallen und mit 12 bis 18 Stellen]. Die Potenzen von e mit den Exponenten 1, 2, . . . , 25, 30, 60 gab *Schulze*²⁹⁴) mit 27 geltenden Ziffern (abgedruckt von *Glaisher* a. a. O.).

299) Auf *Bürgi's* Unterscheidung der Logarithmen von den übrigen Zahlen durch roten Druck ist *H. Schubert* (vierstellige Tafeln und Gegentafeln . . . , Leipzig 1898) wieder verfallen; zum Schutze gegen Verwechslung hätte es wohl genügt, jede Seite der „Gegentafeln“ mit einer roten Linie einzufassen.

300) „The antilogarithmic canon . . .“, London 1742. Wie eine 7-stellige Tafel angeordnet; die Mantissen gehen von 00000 bis 99999.

Sammlung²⁵⁶⁾ als erste 7-stellige. Es reihen sich an eine Antilogarithmentafel mit 7 Stellen von *H. E. Filipowski*³⁰²⁾, solche mit fünf Stellen³⁰³⁾ von *Fr. Stegmann*³⁰⁴⁾ und *H. Schubert*³⁰⁵⁾, während unter den vierstelligen die von *Lomholt*²⁴²⁾ hervorzuheben ist³⁰⁶⁾.

30. Additions- und Subtraktionslogarithmen. Wie grosse Erleichterungen bei Multiplikation, Division und den Operationen höherer Stufen die Logarithmen gewähren mögen, bei Addition und Subtraktion bilden sie im Gegenteil ein Hindernis. Um hier das Zurückgehen von den Logarithmen auf die Numeri überflüssig zu machen, hat *Z. Leonelli*³⁰⁷⁾ die Additions- und Subtraktionslogarithmen („logarithmes additionnels et deductifs“) erfunden³⁰⁸⁾. Die Aufgabe, $\log(a \pm b)$

301) Zwar mit 20 Stellen und Differenzen 1.—3. Ordnung, aber nur für die Mantissen bis 00139 kommen die Antilogarithmen bei *W. Gardiner* (Tables of logarithms . . ., London 1742, französisch Avignon 1770) vor.

302) „A table of anti-logarithms . . .“, London 1849. Die Mantissen gehen, wie bei *Dodson* und *Shortrede*, von 00000 bis 99999.

303) Fünfstellige Tafel besonderer Art: *R. von Sterneck*, Anti-Logarithmen . . . Wien 1878; Titel irreführend: Einrichtung die einer gewöhnlichen Logarithmentafel, aber nicht die wirklichen Logarithmen der im Eingang stehenden 1—4-ziffrigen Zahlen, sondern die kleinsten Logarithmen, denen bei Abrundung auf die betr. Zahl von Stellen jene Zahlen noch zukommen, werden geliefert.

304) „Tafel der fünfstelligen Logarithmen und Anti-Logarithmen“, Marburg 1855. Mantissen von 0000 bis 9999.

305) „Fünfstellige Tafeln und Gegentafeln . . .“, Leipzig 1897. Auch „Gegentafeln“ zu denen der Logarithmen und natürlichen Zahlenwerte der trigonometrischen Funktionen! Logarithmen durchweg mit anderen Typen gedruckt, als die übrigen Zahlen, vgl. ²⁹⁹⁾. — Die Fortschr. d. Math. für 1876, p. 763 erwähnen noch: *R. W. Bauer*, Femciffrede logarithmer til hela tal fra 1—15 500 og anti-logarithmer, Kjøbenhavn 1876.

306) Vielleicht die frühesten kommen vor in *J. H. T. Müller*, Vierstellige Logarithmen . . ., 2. Aufl. Halle 1860; ferner haben solche z. B. noch *Hoiël*²⁴⁰⁾, *Gascò*²²⁷⁾, *Rex*²⁶⁷⁾, *Holman*²²⁷⁾.

307) Supplément logarithmique . . ., Bordeaux an XI (1802/3), 2. Ausgabe von *J. Hoüel*, Paris 1875 (deutsch von *G. W. Leonhardi*, Dresden 1806), 2^{me} partie.

308) Vorher behalf man sich mit trigonometrischen Funktionen, z. B. wandte nach *S. Günther* (Vermischte Unters. zur Geschichte der mathemat. Wissensch., Leipzig 1876, p. 285 flg.) *J. Muschel von Moschau* (1696) die Regel an

$$\log(a + b) = \log b + \log 2 + 2 \log \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right),$$

mit

$$\log \sin \varphi = \log a - \log b$$

(ähnlich später *Delambre*, s. *Leonelli* a. a. O. p. 64:

$$\log(a \pm b) = \log a + \log 2 + 2 \log \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}}, \text{ mit } \log \cos \varphi = \log b - \log a,$$

dagegen *Chr. Wolf*:

oder $\log(a-b)$ zu bestimmen, wenn $\log a$ und $\log b$ gegeben, dagegen a und b selbst nicht bekannt sind, löst *Leonelli* mittelst einer Tafel, die aus drei, von *K. Fr. Gauss* später mit A, B, C überschriebenen Kolonnen folgenden Zusammenhangs gebildet ist. Bezeichnen A, B, C drei in derselben Reihe stehende Werte dieser Kolonnen und setzt man:

$$A = \log x, \quad C = \log z,$$

so ist:

$$B = \log \frac{x+1}{x} = \log \frac{z}{z-1} \quad 309).$$

Für

$$\log a - \log b = A \quad \text{bezw.} \quad \log a - \log b = C$$

ergiebt sich daher:

$$\log(a+b) = \log a + B = \log b + C$$

$$\text{bezw.:} \quad \log(a-b) = \log a - B = \log b + A \quad 310).$$

$$\log(a+b) = \log a - 2 \log \sin \varphi,$$

$$\text{mit} \quad \log \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2} (\log a - \log b)$$

[ähnlich noch *J. C. Houzeau*, Brux. Ann. 51 (1883), p. 103:

$$\log(a+b) = \log a - 2 \log \cos \varphi, \quad \text{mit} \quad \log \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2} (\log b - \log a),$$

$$\log(a-b) = \log b + 2 \log \operatorname{ctg} \varphi, \quad \text{mit} \quad \log \sin \varphi = \frac{1}{2} (\log b - \log a)].$$

Gernerth zweifelt noch 1866 an dem Nutzen der Additionslogarithmen, der allerdings erst bei ausgedehnteren Anwendungen recht hervortritt, und schlägt ²⁶⁰⁾ p. 142 vor, wenn $\log a$ und $\log b$ gegeben sind, $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$ zu bilden, die Zahl $\frac{a}{b}$ zu suchen und sofort im Kopfe Eins zu addieren bezw. zu subtrahieren, dann $\log\left(\frac{a}{b} \pm 1\right)$ zu suchen und $\log b$ zu addieren, was *Leonelli* selbst a. a. O. p. 73 als Notbehelf angeben hatte.

309) Offenbar auch $C = \log(1+x)$, und für $B = \log y$ überdies:

$$x = \frac{1}{y-1} = z-1, \quad z = \frac{y}{y-1}.$$

Die Tafel ist eigentlich aus zweien, einer für Addition (Kolonnen A und B) und einer für Subtraktion (Kolonnen C und B), mit der gemeinsamen Kolonne B , zusammengesetzt.

310) Soll allgemeiner, unter $f(a, b)$ eine homogene Funktion n^{ten} Grades von a und b verstanden, $\log f(a, b)$ aus $\log a$ und $\log b$ bestimmt werden, so ist dies ebenfalls ohne Kenntnis von a und b durch eine Hilfstafel mit einem Eingang möglich, welche etwa zu dem Argument $u = \log t$ den Wert $v = \log f(t, 1)$ enthält, da für $u = \log a - \log b$ sich ergibt $\log f(a, b) = v + n \cdot \log b$. Homogene Funktionen von drei reellen oder zwei imaginären Veränderlichen wür-

Leonelli's, mit 14 Dezimalen berechnete Tafel ist nicht veröffentlicht worden (a. a. O. sind bloß drei Probeseiten mitgeteilt). *Gauss* hat den Gedanken aufgenommen und eine ebenso konstruierte Tafel, aber nur mit fünf Dezimalen, herausgegeben³¹¹). Nachdem noch mehrere Tafeln mit derselben Anordnung erschienen waren³¹²), hat man angefangen³¹³), letztere in mannigfaltiger Weise abzuändern. Zuerst wurde, u. a. von *J. Zech*³¹⁴), die Trennung in je eine besondere Tafel für Addition und Subtraktion vorgenommen, oft auch eine der von *Leonelli* tabulierten Funktionen durch eine andere ersetzt³¹⁵), schliesslich von *Th. Wittstein*³¹⁶) durch Aufgeben einer von *Leonelli's* drei Kolonnen eine einheitliche Tafel hergestellt, welche Möglichkeit übrigens *Leonelli* selbst schon ins Auge gefasst hatte (a. a. O. p. 55).

den Hülftafeln mit zwei Eingängen erfordern (s. *Mehmke*, „*Dyck's* Katalog“, Nachtrag, p. 20).

311) *Zach's* Monatliche Correspondenz 26 (1812), p. 498 fig.

312) Darunter als erste 7-stellige die von *E. A. Matthiessen* (Tafel zur bequemen Berechnung des Logarithmen der Summe oder Differenz . . . , Altona 1818), die keinen Anklang gefunden hat.

313) Zuerst vielleicht *J. H. T. Müller*, Vierstellige Logarithmen . . . , Halle 1843, der nicht die Kolonne der Resultate, sondern umgekehrt die Eingangskolonne *A* als gemeinschaftliche nimmt, zu welcher die mit *S* (Summe) und *U* (Unterschied) bezeichneten Kolonnen in derselben Beziehung stehen, wie bei *Leonelli* *A* zu *B* bzw. *C* zu *B*.

314) „Tafel der Additions- und Subtraktionslogarithmen“ in *J. A. Hülsse's* Sammlung mathematischer Tafeln, 2. Abdruck, Leipzig 1849 (in der ersten Auflage von 1840 noch nicht), auch gesondert erschienen, 2. Aufl. Berlin 1863, mit 7 Dezimalen. Abgesehen von der Stellenzahl und dem dadurch bedingten Umfang ist der Inhalt noch derselbe wie bei *Müller*³¹³). *Bremiker* nimmt in seinen 6-stelligen²⁵⁸), 5-stelligen²⁶²) und 4-stelligen Tafeln (Berlin 1874) zu Additionslogarithmen wie *Gray*³¹⁵) und spätere $\log(1+x)$ und zu Subtraktionslogarithmen die dekadischen Ergänzungen der von *Leonelli* bis *Zech* gewählten, um lauter positive Differenzen zu erhalten; ähnlich *Albrecht*²⁴⁰).

315) *P. Gray*, Tables and formulae for the composition of life contingencies . . . , London 1849, second issue 1870, verwendet bei Addition $\log(1+x)$, bei Subtraktion $\log(1-x)$; statt der letzteren Funktion nimmt *J. Houël* (Recueil de formules et de tables numériques, Paris 1866) die mit wachsendem Argument zunehmende $\log \frac{1}{1-x}$, ebenso *Rex*²⁶³)²⁶⁷). Die Beschränkung auf negative Werte des Argumentes in der ersten Tafel ist bei manchen Anwendungen ein Nachteil.

316) Zuerst (1859) in der 5-stelligen Sammlung²⁶⁴), dann in der besonderen Tafel „Siebenstellige Gaussische Logarithmen . . .“, Hannover 1866 (Titel und Einleitung auch französisch). Die auch von andern gebrauchte Bezeichnung „Gaussische“ Logarithmen natürlich unberechtigt; *Gauss* hat selbst *Leonelli* als den Urheber des Gedankens genannt, sogar *Leonelli's* Schrift ausführlich besprochen (Allgemeine Litteraturzeitung vom J. 1808, p. 353 = Werke 8, p. 121).

Bei dieser jetzt verbreitetsten Anordnung³¹⁷⁾ stehen die beiden einzigen, mit A und B bezeichneten Kolonnen in der Beziehung:

$$A = \log x, \quad B = \log(1 + x), \quad \text{oder} \quad 10^B = 1 + 10^A,$$

und die obige Fundamentalaufgabe wird mittelst der Formeln gelöst:

$$\log a - \log b = A, \quad \log(a + b) = B + \log b = \log a + (B - A)$$

bezw. $\log a - \log b = B, \quad \log(a - b) = A + \log b = \log a - (B - A).$

Von „Additionslogarithmen für komplexe Grössen“ hat *R. Mehmke*³¹⁸⁾ einen dreistelligen Entwurf gegeben. Verwandt mit den Additionslogarithmen ist die nach einem Gedanken von *Gauss* und auf dessen Veranlassung von *v. Weidenbach* berechnete Tafel³¹⁹⁾, die auch *Hoüel*³¹⁵⁾ und *Rex*^{263) 267)} haben und welche neuerdings *E. Hammer*^{319a)} erweitert hat.

31. Quadratische Logarithmen. Setzt man:

$$(a)^{b^y} = x,$$

so wird:

$$y = \frac{\log \log x - \log \log a}{\log b}.$$

*Conte A. di Prampero*³²⁰⁾, der speziell:

317) Dieselbe haben z. B. noch *F. G. Gauss*^{259) 266)} und *Nell*²⁴¹⁾. Eigentlich nur eine Umordnung von *Leonelli's* Tafel, denn *Wittstein's* Kolonne B stimmt in ihrer 2. Hälfte (für positive A , die *Leonelli* allein berücksichtigt) mit *Leonelli's* 3. Kolonne überein und enthält in der 1. Hälfte (für negative A) insgesamt dieselben Funktionswerte, wie *Leonelli's* 2. Kolonne, weil man für

$$x' = \frac{1}{x} \quad A' = \log x' = -\log x = -A, \quad B' = \log(1 + x')$$

erhält. Hieraus folgt noch

$$B' = \log(1 + x) - \log x = B - A,$$

d. h. wird mit der dekadischen Ergänzung von A in die Tafel eingegangen, so liefert sie $(B - A)$; deshalb hat *Gundelfinger* bei der 4-stelligen Tafel der ersten Seite von³⁵²⁾ und der neuen, in Anm. 293 genannten 6-stelligen rechts diese dekadischen Ergänzungen als zweiten Eingang angebracht, wozu ein Vorbild in den trigonometrischen Tafeln gegeben war.

318) *Zeitschr. Math. Phys.* 40 (1895), p. 15.

319) „Tafel, um den Logarithmen von $\frac{x+1}{x-1}$ zu finden, wenn der Logarithme von x gegeben ist...“, Copenhagen 1829; 5 Dezimalen. Abgedruckt in *M. v. Prasse's* logarithmischen Tafeln, Ausgabe von *K. Br. Mollweide* und *G. A. Jahn*, Leipzig (ohne Jahreszahl).

319a) „Sechsstellige Tafel der Werte $\log \frac{1+x}{1-x}$...“, Leipzig 1902.

320) *Saggio di tavole dei logaritmi quadratici*, Udine 1885. Die Haupt-

$$a = \sqrt[2^{10}]{10}, \quad b = 2$$

nimmt und so:

$$y = \frac{\log \log x}{\log 2} + 10$$

erhält, nennt y den quadratischen Logarithmus von x , geschrieben $y = L_q x$. Es bestehen die fundamentalen Eigenschaften:

$$L_q z^t = L_q z + \frac{\log t}{\log b}, \quad L_q \sqrt[t]{z} = L_q z - \frac{\log t}{\log b},$$

also führt eine Tafel der quadratischen Logarithmen zusammen mit einer Hülftafel der Grössen $\log t : \log b$, wie solche *di Prampero* im Entwurf gegeben hat, jede Potenzierung oder Radizierung mit beliebigem Exponenten auf eine Addition bzw. Subtraktion zurück.

32. Tafeln der Proportionalteile. So heissen Tafeln der auf eine bestimmte Zahl von Dezimalen abgerundeten Grössen:

$$\frac{x}{a}, \frac{2x}{a}, \frac{3x}{a}, \dots, \frac{a-1}{a}x,$$

wo die Konstante a gewöhnlich den Wert 10 oder 100 hat (dezimale Tafeln), seltener 60 oder 600 (sexagesimale bzw. sexcentenare Tafeln)³²¹). Von der ersten Art sind ausser den wahrscheinlich ältesten von *J. Moore*³²²) zu nennen die Tafeln von *C. Bremiker*³²³), *L. Schrön*³²⁴), *H. Schubert*³²⁵), von der letzten diejenigen von *John Bernoulli*³²⁶) und *H. Schubert*³²⁷).

tafel enthält für (sich nicht in gleichen Zwischenräumen folgende) Werte von $L_q x$ mit 6 Dezimalen, die zwischen 0 und etwas über 12 liegen, die zugehörigen x mit verschiedener Stellenzahl. Es liegt wohl näher, $a = b = 10$ zu setzen, was $L_q x = \log \log x$ giebt, welche Funktion noch nicht tabuliert worden zu sein scheint. Vorläufig ist es zweckmässiger, Potenzen und Wurzeln auch bei nicht ganzzahligen Exponenten mit gewöhnlichen Logarithmen zu berechnen, aber der Gedanke ist vielleicht entwicklungsfähig.

321) Zwar finden sich in den meisten Logarithmensammlungen die zum linearen Interpolieren nötigen Proportionalteile in zerstreuten Täfelchen, dieselben können aber auch zu einer besonderen Tafel zusammengestellt sein, und um solche handelt es sich hier, die oft noch anderen Zwecken dienen kann. Gewöhnliche Produktentafeln (Nr. 5) und noch besser mechanische Hilfsmittel, wie der Rechenschieber (Nr. 50), können beim Interpolieren ebenfalls mit Vorteil verwendet werden.

322) In dem Werke „A new systeme of the Mathematicks...“, 2, London 1681. $a = 10$, x von 44 bis 4320.

323) „Tafeln der Proportionalteile...“, Berlin 1843. $a = 100$, x von 70 bis 699.

324) Tafel III der Sammlung²⁵²), auch gesondert erschienen; $a = 100$, x von 40 bis 409, mittelst eines Hülftäfelchens bis 40955 ausdehnbar. Von

33. Tafeln der Reziproken und zur Verwandlung gewöhnlicher Brüche in Dezimalbrüche. Tafeln der Reziproken, d. h. der Werte $\frac{1}{x}$, führen Division auf Multiplikation zurück. Von x gleich 1 bis 1000 gehen u. a. diejenigen von *Chr. Hutton*³²⁸), *E. Gelin*³²⁹) und *W. Ligowski*³³⁰), bis 10 000 die von *P. Barlow*³³¹), bis 100 000 die von *W. H. Oakes*³³²), womit die bemerkenswertesten genannt sind. Auf blosse Additionen zurückgeführt werden Divisionen durch eine Tafel, die ausser den Reziproken auch ihre neun ersten Vielfachen enthält. Wir haben solche von *R. Picarte*³³³) und *J. C. Houzeau*³³⁴). Sie bilden den Übergang zu Tafeln, die allgemein der Verwandlung gewöhnlicher Brüche in Dezimalbrüche dienen [I C 1, Nr. 5]. Den bereits in Nr. 7 genannten sind die von *W. F. Wucherer*³³⁵), *H. Goodwyn*³³⁶), *A. Brocot*³³⁷)

Schrön „Interpolationstafel“ genannt, welche Bezeichnung auch in anderem Sinne gebraucht wird, z. B. von *Hülse*⁶⁵) für eine Tafel der Werte:

$$\frac{x(x-1)}{1 \cdot 2}, \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \text{ u. s. w.}$$

325) „Dezimale Interpolationstafel“ in ³⁰⁵); $a = 10$ und $a = 100$, x von 1 bis 180.

326) „A sexcentenary table...“, London 1779. $a = 600$, x in Minuten und Sekunden ausgedrückt.

327) „Sexagesimale Interpolationstafel“ in ³⁰⁵); $a = 60$, x von 1 bis 150.

328) *Miscell. math.*, London 1775, vol. 4; mit 9 Stellen.

329) *Recueil de tables numériques*, Huy 1894; mit 10 Dezimalen.

330) Mit 6 geltenden Ziffern in ⁵⁹), abgedruckt im „Taschenbuch der Hütte“, 17. Aufl. Berlin 1899.

331) „New mathematical tables“..., London 1814, Stereotypausgabe von 1840, auch 1851, mit 9 und 10 Stellen.

332) „Table of the reciprocals of numbers from 1 to 100000...“, London 1865; 7 geltende Ziffern, wie eine 7-stellige Logarithmentafel angeordnet, mit Differenzen und Proportionalteilen, die noch bis $x = 10$ Millionen zu gehen erlauben. *Arnaudeau*⁵⁸) giebt eine Probeseite einer ebenfalls bis 100 000 reichenden Reziprokentafel, aber nur mit 5 geltenden Ziffern.

333) „La division réduite à une addition...“, Paris 1859; geht bis 10000, mit 10 und 11 geltenden Ziffern.

334) *Brux. Bull.* (2) 40 (1875), p. 107; die Reziproken der Zahlen bis 100 mit 20 Stellen und ihre ersten 9 Vielfachen mit 12 Stellen.

335) „Beyträge zum allgemeinem Gebrauch der Decimalbrüche...“, Carlsruhe 1796; 5-stellig, Zähler und Nenner der Brüche beide unter 50 und relativ prim.

336) „A tabular series of decimal quotients...“, London 1823; 8-stellig, Zähler und Nenner beide nicht grösser als 1000, die Brüche selbst kleiner als $\frac{99}{991}$, nach ihrem Wert geordnet.

337) In „*Calcul des rouages*...“, deutsch herausgegeben vom Verein

hinzuzufügen, die im Gegensatz zu ersteren immer bei der gleichvielten Dezimale abbrechen.

34. Tafeln der Quadrate und höheren Potenzen. Ausser den in Nr. 8 besprochenen genauen Quadrattafeln finden sich in einer Reihe von Sammlungen³³⁸⁾ wie auch Lehrbüchern der Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichsrechnung [I D 1; 2]³³⁹⁾ Tafeln, welche die Quadrate nur auf eine bestimmte Zahl von Stellen verkürzt enthalten. Höhere Potenzen geben ähnlicherweise *J. H. Lambert*³⁴⁰⁾ und *Hülse*³⁴¹⁾.

35. Tafeln der Quadrat- und Kubikwurzeln. Mittelst einer, mit Einrichtung zum Interpolieren versehenen Tafel der Quadrate (Nr. 34) können Quadratwurzeln auf dieselbe Weise, wie mittelst einer gewöhnlichen Logarithmentafel die Numeri zu gegebenen Logarithmen, bestimmt werden. Von besonderen Tafeln der Quadrat- und Kubikwurzeln gehen mehrere³⁴²⁾ bis 1000; bis 10 000 reichen u. a. die von *P. Barlow*³⁴³⁾ und *Hülse*³⁴⁴⁾, bis 25 500 die von *G. A. Jahn*³⁴⁵⁾.

36. Tafeln zur Auflösung numerischer Gleichungen. Durch eine Substitution der Form $x' = \lambda x$ und Division mit einer Konstanten lässt jede trinomische (dreigliedrige) Gleichung sich auf solche Form bringen, dass irgend zwei der drei Koeffizienten absolut ge-

„Hütte“ unter dem Titel „Berechnung der Räderübersetzungen“, Berlin 1870, 2. Aufl. 1879; verwandelt echte Brüche mit Nennern bis zu 100 in (nach ihrem Wert geordnete) Dezimalbrüche auf 11 Stellen. *Gundelfinger's* „Interpolationstabelle...“, p. 2—3 in ³⁵²⁾ giebt bloß 2 Stellen.

338) Z. B. in *F. G. Gauss*³³⁸⁾ die Werte x^2 für $x = 0,000$ bis 10,009 mit 4 Dezimalen; auch Proportionalteile zum Interpolieren.

339) Z. B. in *Faà de Bruno*, *Traité élémentaire du calcul des erreurs...*, Paris 1869; bis zum Quadrat von 12,000; ebenfalls mit 4 Dezimalen.

340) Nämlich x^n für $n = 1, 2, \dots, 11$ und $x = 0,01$ bis 1,00 auf 8 Dezimalen in den „Zusätzen...“³³⁸⁾, abgedruckt z. B. von *Schulze*³³⁴⁾.

341) In der Tafelsammlung⁶⁵⁾; ausser der *Lambert'schen* Tafel noch x^n für $n = 1, 2, \dots, 100$ und 12 Werte von x zwischen 1,01 und 1,06, die Grenzen eingeschlossen, mit 6 Stellen und die reziproken Werte hiervon mit 7 Stellen,

endlich die Werte $\sum_{n=1}^{100} x^n$ und $\sum_{n=1}^{100} x^{-n}$.

342) Z. B. von *Ligowski*⁵⁹⁾ mit 6 bzw. 5 geltenden Ziffern.

343) In ³³¹⁾, 7 Dezimalen.

344) In der Sammlung⁶⁵⁾, die Quadratwurzeln mit 12 Dezimalen, die Kubikwurzeln mit 7 Dezimalen.

345) In ⁶¹⁾, am Anfang mit 14 Dezimalen, von 1010 an mit 5 Dezimalen *Gelin*³²⁹⁾ giebt die Quadrat- und Kubikwurzeln zwar nur von den ersten 100 Zahlen, aber mit 15 bzw. 10 Dezimalen.

34. Tafeln d. Quadrate. 35. Tafeln d. Quadratwurzeln. 36. Tafeln für Gl. 1005

nommen gleich Eins werden, also nur noch *ein* Parameter c vorkommt — z. B. jede reduzierte kubische Gleichung auf die Form:

$$x^3 \pm x = c.$$

Eine Tafel der zusammengehörigen Werte von x und c ermöglicht daher die Auflösung aller numerischen Gleichungen der betreffenden Art. So hat für kubische Gleichungen schon *J. H. Lambert*³⁴⁶⁾ eine 7-stellige Tafel der Werte $\pm(x - x^3)$, *P. Barlow*³⁴⁷⁾ eine 8-stellige der Werte $(x^3 - x)$ und *J. Ph. Kulik*³⁴⁸⁾ weiter fortgesetzte Tafeln, auch für $(x^3 + x)$, mit 6 und 7 Stellen veröffentlicht. *A. S. Guldberg*³⁴⁹⁾ wählt als Normalform einer trinomischen Gleichung n^{ten} Grades:

$$x^n + cx + c = 0$$

(c positiv oder negativ) und gibt in mehreren Tafeln, nämlich für Gleichungen 2^{ten}, 3^{ten} und 5^{ten} Grades, zu gleichmässig fortschreitenden Werten von x und $1 : x$ nicht die Werte von c selbst, sondern ihre Logarithmen, weshalb seine Tafeln in der Mitte zwischen den vorigen und den jetzt namhaft zu machenden stehen. Offenbar ist es für die logarithmische Rechnung vorteilhafter, wenn derartige Tafeln auch die Werte von $\log x$, statt von x , enthalten; für quadratische Gleichungen hat solche *K. Fr. Gauss*³⁵⁰⁾ berechnen lassen, *R. Mehmke*³⁵¹⁾

346) In den Zusätzen zu den logarithmischen und trigonometrischen Tabellen, Berlin 1770; x geht von 0,001 bis 1,155; wie die folgenden nur für den Fall dreier reellen Wurzeln.

347) In ³³¹⁾; x von 1,0000 bis 1,1549.

348) Prag. Abhandl. (5) 11 (1860), p. 23; x von 0,0001 bis 3,2800; für alle Fälle.

349) Christ. Vidensk. Selsk. Forhandl., aar 1871, p. 287, 307; aar 1872, p. 144. Die Umkehrung der Funktion:

$$y = \frac{x^n}{1+x}$$

wird mit $x = \frac{n}{r}$ (y) bezeichnet, sodass z. B. eine Wurzel der Gleichung:

$$x^5 + ax + b = 0$$

durch

$$x = \frac{b}{a} \frac{5}{r} \left(-\frac{a^5}{b^4} \right)$$

geliefert wird. Die Tafeln geben 5- und 7-stellige Logarithmen, sind aber für bequemen Gebrauch nicht ausgedehnt genug.

350) Sie finden sich in *J. A. Hülsse's* Sammlung mathematischer Tafeln, Leipzig 1840 (in der späteren Auflage nicht mehr). Drei mit D, E, F überschriebene Kolonnen für die Werte:

$$\log \frac{(1+x)^2}{x}, \quad \log(x+x^2), \quad \log \frac{1+x}{x^2},$$

welche sich an die Kolonnen A, B, C der Additionslogarithmen mit den Werten

eine bessere Einrichtung angeben. Endlich hat *S. Gundelfinger*³⁵²), den Gedanken von *Gauss* erweiternd, 3-stellige Tafeln mit zwei Eingängen, die zur Auflösung trinomischer Gleichungen aller Arten und Grade dienen, veröffentlicht.

III. Graphisches Rechnen.

Monographien und Lehrbücher: *B. E. Cousinery*, Le calcul par le trait, Paris 1839; *H. Eggers*, Grundzüge einer graphischen Arithmetik, Progr. Gymn. Schaffhausen 1865; *E. Jäger*, Das graphische Rechnen, Prom.-Dissert. Speyer 1867; *J. Schlesinger*, Vorträge über grafisches Rechnen und Grafo-Statik, Wien 1868/69; *K. Culmann*, Die graphische Statik, Zürich 1866, zweite Auflage Zürich 1875, 1. Abschnitt („Culmann“); *A. Favaro*, Sulle prime operazioni del calcolo grafico, Venezia 1872; *L. Cremona*, Elementi di calcolo grafico, Torino 1874, deutsche Übertragung von *M. Curtze* mit dem Titel: Elemente des graphischen Calculs, Leipzig 1875 („Cremona“), englische Übersetzung von *Th. Hudson Beare* mit dem Titel: Graphical Statics, Oxford 1890; *K. von Ott*, Das graphische Rechnen

$\log x$, $\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$, $\log(1+x)$ anschliessen; drei Fälle mit verschiedenen Formeln werden unterschieden.

351) Zeitschr. Math. Phys. 43 (1898), p. 80. Dreistelliger Entwurf; zwei Teile, welche zu gegebenen Werten von $u = \log(x^2 - x)$ bzw. $\log(x - x^2)$ die Werte von $v = \log x$ liefern. Direktes Eingehen in die Tafel und einheitliche Formeln. Die Wurzeln von $ax^2 \pm bx - c = 0$ bzw. $ax^2 \pm bx + c = 0$ ergeben sich aus:

$$u = \log \frac{ac}{b^2}, \quad \log(\pm x_1) \text{ bzw. } \log(\mp x_1) = \log \frac{c}{b} - v,$$

$$\log(\mp x_2) = v + \log \frac{b}{a}.$$

352) „Tafeln zur Berechnung der reellen Wurzeln sämtlicher trinomischer Gleichungen . . .“, Leipzig 1897 [I B 3 a, Nr. 14, p. 446, Anm. 41]. Sie beruhen auf der (schon von *H. Geelmuyden*, Christ. Vidensk. Selsk. Forhandl., aar 1873, p. 481 gegebenen) Anpassung der Gaussischen Formeln zur Auflösung trinomischer Gleichungen an die *Wittstein'sche* Anordnung der Additionslogarithmen (Nr. 30). Zwei Tafeln, welche die Werte von:

$$A - \mu B = \log \frac{x}{(1+x)^\mu} \quad \text{bzw.} \quad B - \mu A = \log \frac{1+x}{x^\mu}$$

zu gegebenen Werten von:

$$A = \log x \quad \text{und} \quad \mu = 0,00; 0,05; 0,10; \dots 1,00$$

$$\text{bzw. } \mu = 0,000; 0,025; 0,075; \dots 0,500$$

liefern. Bei kubischen Gleichungen ist, namentlich wenn drei Stellen nicht ausreichen und alle Wurzeln verlangt sind, im Fall dreier reellen Wurzeln die goniometrische Lösung (s. etwa *L. Matthiessen*, Grundzüge der . . . Algebra der litteralen Gleichungen, Leipzig 1878, VI. Abschn.), im Fall einer reellen Wurzel die Lösung mittelst Hyperbelfunktionen (s. etwa *S. Günther*, Hyperbelfunktionen, Halle a. S. 1881, p. 154) vorzuziehen.

und die graphische Statik, erster Teil, vierte Auflage, Prag 1879; *J. Wenck*, Die graphische Arithmetik und ihre Anwendungen auf Geometrie, Berlin 1879; *A. Favaro*, Lezioni di statica grafica, Padova 1877, französische Übersetzung mit Zusätzen von *P. Terrier* mit dem Titel: Leçons de Statique graphique, 2^{ème} partie, Calcul graphique, Paris 1885 („Favaro-Terrier“); *A. Steinhäuser*, Die Elemente des graphischen Rechnens . . ., Wien 1885; *J. J. Prince*, Graphic arithmetic and statics, London 1893; *O. Bürklen*, Graphisches Rechnen und graphische Darstellungen im Mathematikunterricht, Progr. Realgymn. Gmünd 1899.

Zum graphischen Rechnen im weiteren Sinne gehören alle Verfahren, die bezwecken, analytische Aufgaben durch Zeichnung zu lösen. Jedoch haben wir an dieser Stelle nur die gewöhnlichen Rechnungsarten und die Auflösung von Gleichungen zu betrachten³⁵³). Im allgemeinen sind die zeichnerischen Verfahren anschaulicher, übersichtlicher, schneller ausführbar und mit geringerer Anstrengung des Geistes verbunden, als die rechnerischen³⁵⁴); in manchen Fällen (wie bei der Auflösung beliebiger Gleichungen) gewähren sie bis jetzt allein die Möglichkeit eines direkten Vorgehens; bei nicht ausreichender Genauigkeit³⁵⁵) können sie immer noch zur Vorbereitung, Ergänzung und Prüfung der Rechnung dienen. Zwar ist das graphische Rechnen kein neues, etwa dem 19. Jahrhundert eigentümliches Lehrgebiet³⁵⁶), aber nachdem es zeitweilig durch die rechnerischen Methoden

353) Ausgeschlossen werden so hauptsächlich die graphische Interpolation, Summierung von Reihen, Differentiation und Integration (die nebst der graphischen Bestimmung von Bogenlängen, Flächen- und Rauminhalten, Schwerpunkten und Momenten teilweise in den oben genannten Schriften behandelt werden) und die graphische Ausgleichsrechnung. Wir schliessen ferner aus die geometrische Veranschaulichung von Begriffen, Sätzen und Beweisen der Arithmetik und Algebra.

354) *G. Hauck* lässt (Zeitschr. mathem.-naturw. Unterricht 12 (1881), p. 333) diese Vorzüge nur für die „geometrische“ Auffassung des graphischen Rechnens gelten, bei der als Gegebenes und Gesuchtes nicht Zahlen, sondern Strecken und Verhältnisse von solchen betrachtet werden. Im Sinne der „arithmetischen“ Auffassung gegebene Zahlen durch Strecken zu ersetzen, um diese geometrischen Konstruktionen zu unterwerfen und die erhaltenen Strecken wieder durch Zahlen auszudrücken, lohnt sich allerdings bei einfachen Rechnungen, besonders wenn sie vereinzelt vorkommen und ein gewöhnlicher Massstab benützt wird, nicht, wohl aber bei der Auflösung numerischer Gleichungen und der Anwendung der logarithmographischen Methode (Nr. 40—42).

355) *Culmann* bezeichnet (Vorrede zur 1. Aufl. der graph. Statik, p. V) eine Genauigkeit von 3 Stellen oder 1/1000 als vollständig erreichbar.

356) Schon 1593 hat *Vieta* Konstruktionen zusammengestellt, sowohl mit Lineal und Zirkel ausführbare als auf der Anwendung von Kurven beruhende, die zur geometrischen Ermittlung rechnerisch erhaltener Ausdrücke, sogar zur Lösung kubischer und biquadratischer Aufgaben dienen (vgl. *M. Cantor*, Vorles. üb. Gesch. der Mathem. 2, 2. Aufl. Leipzig 1900, p. 584, sowie das Register

zurückgedrängt worden war, ist es in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts durch systematischen Ausbau wie durch die Entwicklung neuer, allgemeiner Methoden bedeutend gefördert worden und es hat (besonders unter den zeichengewandten Ingenieuren) grosse Verbreitung gefunden.

Behufs Versinnlichung der (zunächst reell vorausgesetzten) Zahlen kann man diese entweder den Punkten einer geraden Punktreihe³⁵⁷ ein-eindeutig zuordnen, oder die (mit bestimmter Richtung genommene) Strecke vom Nullpunkt der Reihe bis zu einem beliebigen Punkt derselben als Bild der zu letzterem Punkt gehörigen Zahl betrachten. Am nächsten liegt es, die Längen der Strecken den Zahlen, die sie versinnlichen sollen, proportional zu nehmen, sodass die den natürlichen Zahlen 1, 2, 3, . . . entsprechenden Punkte der erwähnten Punktreihe einander in gleichen Abständen folgen oder ein gewöhnlicher (gleichmässig geteilter) Massstab vorliegt (Nr. 37—39); für manche Zwecke (namentlich die Auflösung von höheren Gleichungen und Systemen solcher) hat es sich weit vorteilhafter erwiesen, die Zahlen durch Strecken darzustellen, deren Längen den Logarithmen der Zahlen proportional sind, d. h. einen logarithmischen Massstab zu benützen (Nr. 40—42).

a. Grundmassstab gleichmässig geteilt.

37. Gewöhnliche arithmetische Operationen. Die Addition mehrerer Zahlen wird bei der Darstellung durch ihnen proportionale Strecken bewirkt, indem man diese Strecken unter Beachtung ihres Sinnes aneinander fügt, und die Subtraktion wird durch Umkehrung des Sinnes der zu subtrahierenden Strecken auf die Addition zurückgeführt; dagegen empfiehlt es sich, bei Benützung einer gleich-



Fig. 22.

förmigen Punktreihe als Bild der Zahlenreihe die Bestimmung von $x = a - b + c$, welche dadurch geschieht, dass man (Fig. 22) die

unter „algebraische Geometrie“. Über geometrische Auflösung von Gleichungen bei Griechen und Arabern vgl. z. B. *Zeuthen*, *Gesch. d. Math.*, p. 44, 300, 304. Vgl. auch *Anm. 375*.

³⁵⁷ Über die Verwendung krummliniger Punktreihen s. Abschnitt IV und V, namentlich Nr. 46 und 51.

Strecke cx nach Länge und Richtung gleich ba macht, als Grundaufgabe zu betrachten, von welcher vermöge der Auffassungen $a + b = a - 0 + b$ und $a - b = a - b + 0$ die Addition und Subtraktion als besondere Fälle erscheinen³⁵⁸). Auch Multiplikation und Division werden am besten verallgemeinert, zu der Operation $x = \frac{a}{b} c$ nämlich, aus der sie für $b = 1$ bzw. $c = 1$ hervorgehen.

Wegen $b : a = c : x$ können die zu den Zahlen a, b, c, x gehörigen Strecken als zwei Paare entsprechender Seiten zweier ähnlicher Dreiecke betrachtet werden, von denen man gern zwei entsprechende

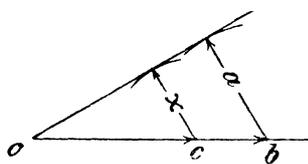


Fig. 23.

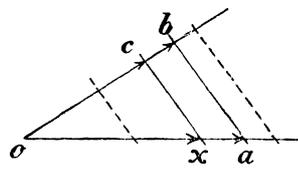


Fig. 24.

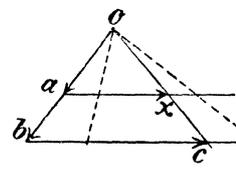


Fig. 25.

Winkel zusammenfallen lassen wird; a und b können zu demselben Dreieck genommen werden (Fig. 23 und 24), oder nicht (Fig. 25)³⁵⁹). Zusammengesetzte Ausdrücke der Form

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i} c_i$$

lassen sich mittelst der, bei dieser Verwendung von *Culmann* „Summationspolygone“ oder „Multiplikationspolygone“ genannten, aus der

358) Die Zahl der Operationen wird so geringer, z. B. ist bei der Bestimmung von $a + b + c$ auf gewöhnliche Weise die Zirkelspitze 7mal, bei der Auffassung $a - (-b) + c$ nur 4mal einzusetzen.

359) Einige andere Auffassungen „Cremona“ p. 33. Das Verhältnis a/b kann auch als tg oder als \sin eines Winkels gedeutet werden; in letzterem Falle lässt sich, wenn der Winkel gezeichnet ist, x unmittelbar mit dem Zirkel abgreifen („Culmann“ p. 11, woselbst auch Behandlung des Falles $a > b$). Sind eine Reihe von Werten c mit einem konstanten Verhältnis a/b zu multiplizieren, und legt man Fig. 24 oder 25 zu Grunde, so beschreiben die Endpunkte von c und x ähnliche Punktreihen in perspektiver Lage; es ist auch vorgeschlagen worden, den Satz zu benützen, dass zwei beliebige feste Tangenten einer Parabel von einer beweglichen Tangente in ähnlichen Punktreihen geschnitten werden („Cousinery“ p. 19), ferner den Satz, dass ein Büschel von Kreisen mit zwei reellen gemeinsamen Punkten von allen durch einen dieser Punkte gehenden Strahlen in ähnlichen Punktreihen geschnitten wird („Favaro-Terrier“ p. 17). Die obige Aufgabe lässt sich als besonderer Fall der (mittelst projektiver Punktreihen zu lösenden) ansehen, zu gegebenem c das x zu bestimmen, wenn c und x durch irgend eine bilineare Gleichung verbunden sind.

Statik (IV 5) entlehnten Seilpolygone auswerten³⁶⁰). Produkte mit mehr als zwei Faktoren und Potenzen mit ganzzahligen Exponenten können durch Wiederholung der vorigen Konstruktionen graphisch berechnet werden³⁶¹).

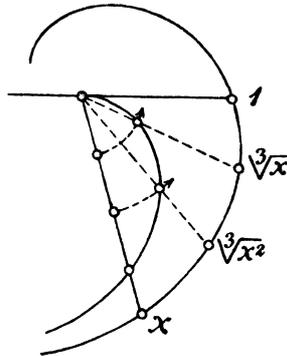


Fig. 26.

Vorteilhafter ist es, eine im voraus gezeichnete logarithmische Spirale zu benützen, am besten in Verbindung mit einer Archimedischen Spirale, wodurch das Multiplizieren auf Zusammenfügen, das Potenzieren und Wurzelausziehen auf Vervielfachen und Teilen von Strecken zurückgeführt wird³⁶²). Diese beiden Kurven leisten also in ihrer Verbindung für das graphische Rechnen³⁶³) dieselben Dienste, wie die Logarithmen für das Zahlenrechnen³⁶⁴). Denselben Zweck erreicht man mit Hilfe der logarithmischen Kurve³⁶⁵).

Für das graphische Rechnen mit komplexen Zahlen bildet die Grundlage, was auf S. 155—156 dieses Bandes über die geometrische

360) „Culmann“ p. 21, über die Ermittlung von Ausdrücken der Formen

$\sum \frac{a_i}{b_i} \frac{c_i}{d_i} e_i$ u. s. w. durch wiederholte Konstruktion von Seilpolygonen p. 28.

361) S. etwa „Cremona“ p. 42, 47; „Favaro-Terrier“ p. 24, 35. Aus den Konstruktionen für rationale ganze Funktionen in Nr. 38 erhält man durch Spezialisierung ebenfalls Methoden zur graphischen Potenzierung, z. B. aus der von *Lill*³⁶⁹) die später von *Reuleaux* angegebene (Der Konstrukteur, 3. Aufl. Braunschweig 1869, p. 84; „Cremona“ p. 50).

362) „Cousinery“ p. 44; „Favaro-Terrier“ p. 42, 52. Zu Radienvektoren der Archimedischen Spirale, die eine arithmetische Progression bilden, gehören in geometrischer Progression fortschreitende Radienvektoren der logarithmischen Spirale. Wegen der zweckmässigsten Konstruktionen für letztere s. auch „Cremona“ p. 32 ff. Fig. 26 erläutert das Ausziehen von Kubikwurzeln.

363) Wofern eben die Zahlen durch ihnen proportionale Strecken dargestellt sind.

364) Beruht darauf, dass wenn $r = a^p$ die Polargleichung der logarithmischen Spirale, $\varphi = \varphi$ diejenige der Archimedischen ist, man hat $\varphi = \log r$.

365) Die Abscissen sind proportional den Logarithmen der durch die Ordinaten dargestellten Zahlen, wie bei *J. de la Gournerie*, *Traité de géométrie descriptive* 3, Paris 1864, p. 197 u. fig. 451, oder umgekehrt, wie „Cremona“ p. 56. — Hat man häufig Potenzen oder Wurzeln mit demselben rationalen, positiven oder negativen Exponenten zu berechnen, so kann man mit *J. Schlesinger* (Österr. Ingen. u. Archit.-Ver. Zeitschr. 18 [1866], p. 156; „Favaro-Terrier“ p. 57) besondere „Potenzkurven“ verwenden, deren Polargleichung $r = \sec^n \varphi$ bzw. $r = \cos^n \varphi$ ist; über ein daraus folgendes Annäherungsverfahren bei n^{ten} Wurzeln

38. Berechn. rat. ganzer Funkt. u. Auflösung von Gleich. mit einer Unbek. 1011

Bedeutung der Addition und Multiplikation komplexer Grössen gesagt ist³⁶⁶).

38. Berechnung rationaler ganzer Funktionen und Auflösung von Gleichungen mit einer Unbekannten. *J. A. v. Segner* hat 1761

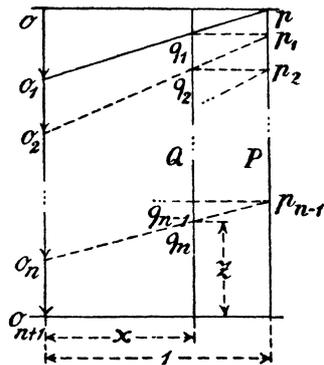


Fig. 27.

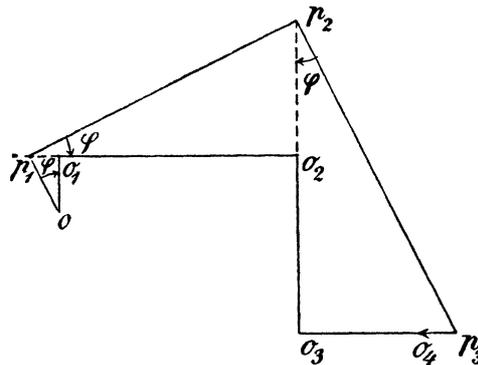


Fig. 28.

die in Fig. 27 dargestellte Konstruktion zur Bestimmung des Wertes einer rationalen ganzen Funktion

$$z = f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

für einen gegebenen Wert von x veröffentlicht³⁶⁷). Von den im 19. Jahrhundert angegebenen Konstruktionen, bei denen ein gewöhn-

s. „Favaro-Terrier“ p. 64. Dieselben Kurven wurden übrigens schon von *R. Descartes* in seiner „*Géométrie*“ von 1637 betrachtet, der auch einen Mechanismus zu ihrer Erzeugung angab (s. etwa die deutsche Ausgabe von *L. Schlesinger*, Berlin 1894, p. 21 u. Taf. 1, Fig. 6).

366) Wie beim graphischen Rechnen mit reellen Zahlen ist es vorteilhaft, die allgemeineren Operationen $x = a - b + c$ und $x = (a : b)c$ zu betrachten; die erste wird ausgeführt, indem man — unter $a, b, c, x, 0$ zugleich die Punkte verstanden, welche diese komplexen Zahlen darstellen — die Strecke cx nach Länge und Richtung gleich ba macht, die zweite durch Konstruktion des zu dem Dreieck oba gleichstimmig ähnlichen Dreiecks ocx . Zur Erleichterung des Potenzierens und Wurzelausziehens dient wieder die logarithmische zusammen mit der Archimedischen Spirale.

367) Acad. Petrop. Novi Comment. 7, pro 1758/59 (1761), p. 211. Sie stützt sich wie alle späteren (s. dagegen Nr. 41) auf die Kette von Gleichungen

$$z_1 = a_0 x + a_1, \quad z_2 = z_1 x + a_2 = a_0 x^2 + a_1 x + a_2, \dots$$

$$z_n = z_{n-1} x + a_n = f(x) = z.$$

Nachdem man zur Vorbereitung in einer senkrechten Geraden, der z -Axe, die Strecken $oo_1 = a_0, o_1 o_2 = a_1, o_2 o_3 = a_2, \dots, o_n o_{n+1} = a_n$ abgetragen (und zwar abwärts oder aufwärts, je nachdem das Vorzeichen $+$ oder $-$ ist), durch

licher Massstab benützt wird³⁶⁸), ist nur eine der vorigen ebenbürtig, die von *E. Lill*³⁶⁹). Die Funktion $f(x)$ wird durch einen rechtwinkligen Linienzug $oo_1o_2o_3\dots o_{n+1}$ (Fig. 28) dargestellt, dessen Seiten bzw. den (in einem beliebigen Massstabe aufgetragenen) Koeffizienten a_0, a_1, \dots, a_n gleich sind³⁷⁰). Beschreibt man diesem einen rechtwinkligen Linienzug $op_1p_2\dots p_n$ ein, dessen erste Seite op_1 um den Winkel $(-\varphi)$ von der Richtung oo_1 abweicht, so ist (in demselben Massstabe) $p_n o_{n+1} = f(x)$ für $x = \operatorname{tg} \varphi$.³⁷¹

Der einbeschriebene Linienzug wird zu einem „auflösenden“, d. h. $\operatorname{tg} \varphi$ ist eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$, wenn p_n mit o_{n+1} zusammenfällt³⁷²). *Lill* hat sein Verfahren auch auf den Fall einer komplexen Veränderlichen und einer Funktion mit komplexen Koeffizienten ausgedehnt³⁷³).

o_{n+1} eine die x -Axe gebende Wagerechte, im Abstand $+1$ von der z -Axe die Parallele P zu letzterer und durch den Schnittpunkt p derselben mit der Wagerechten durch o die Gerade po_1 gezogen hat, zieht man im Abstand x von der z -Axe die Parallele Q mit derselben, durch ihren Schnittpunkt q_1 mit o_1p die Wagerechte q_1p_1 , von deren Schnittpunkt p_1 mit P eine Gerade nach o_2 u. s. w. Der gesuchte Wert von $f(x)$ ist dann gleich dem z des Punktes q_n . Wird Q parallel mit der z -Axe verschoben, so beschreibt q_n die Kurve zur Gleichung $z = f(x)$. Die Methode ist von *Bellavitis* wiedergefunden worden, vgl. „Favaro-Terrier“ p. 204.

368) Erwähnt seien eine Konstruktion von *A. Winckler*, Wien. Ber. 53 (1866), 2. Abt., p. 326, und die von *H. Wehage*, Ver. Deutsch. Ingen. Zeitschr. 21 (1877), p. 105, Fig. 4 u. 5 auf Textblatt 3 (auch *Lill*'s Konstruktion erscheint wieder, Fig. 1—3). *Eggers* behandelt a. a. O. p. 17 allgemeiner die Funktion:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_0 x_1 x_2 x_3 \dots x_n + a_1 x_1 x_2 \dots x_{n-1} + a_2 x_1 x_2 \dots x_{n-2} + \dots + a_{n-1} x_1 + a_n$$

und fasst die x als tg von Hülfs winkeln auf, „Culmann“ p. 18 dagegen als \sin , um die Konstruktion soviel als möglich mit dem Zirkel ausführen zu können.

369) Par. C. R. 65 (1867), p. 854 [vorher mitgeteilt von „un abonné“ Nouv. Ann. math. (2) 6 (1867), p. 359]; „Cremona“ p. 61; „Favaro-Terrier“ p. 197.

370) Die Richtung irgend einer Seite des Zugs folgt aus der Richtung der vorhergehenden Seite durch Drehung um einen Rechten in positivem oder negativem Sinn, je nachdem die zugehörigen Koeffizienten gleiches oder ungleiches Vorzeichen haben. Fig. 28 entspricht dem Falle $f(x) = x^3 + 4x^2 + 3x - 2$, $x = 0,5$.

371) Ferner ist $op_1p_2\dots p_n$ ein darstellender Linienzug der Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades $(f(\xi) - f(x)) : (\xi - x)$ von ξ , s. „Cremona“ p. 65; allgemeinere Eigenschaften ebenda p. 63.

372) Ein auflösender Linienzug stellt zufolge Anm. 371 die neue Gleichung dar, deren linke Seite durch Division von $f(x)$ mit dem betreffenden Wurzelfaktor erhalten wird. Auch der gleichzeitigen Division mit zwei Wurzelfaktoren steht ein geometrisches Verfahren zur Seite, s. *Lill*³⁶⁹) p. 857, „Cremona“ p. 66.

373) Von „E. J.“ mitgeteilt Nouv. Ann. math. (2) 7 (1868), p. 363.

Die reellen Wurzeln einer gegebenen reellen Gleichung $f(x) = 0$ können graphisch bestimmt werden, indem man die Kurve zur Gleichung $z = f(x)$ zeichnet, unter x, z etwa Cartesische Koordinaten eines veränderlichen Punktes verstanden; die Abscissen der Schnittpunkte dieser Kurve mit der x -Axe sind die gesuchten Wurzeln³⁷⁴). Allgemeiner können zwei Kurven benützt werden, die so gewählt sind, dass die Elimination von z aus ihren Gleichungen $\varphi(x, z) = 0$ und $\psi(x, z) = 0$ die aufzulösende Gleichung $f(x) = 0$ ergibt³⁷⁵). Was die algebraischen Gleichungen der ersten Grade betrifft, so werden die quadratischen vielleicht am besten nach *Lill's Methode*³⁷⁶) graphisch gelöst; für die kubischen und biquadratischen Gleichungen genügt eine im voraus gezeichnete Parabel³⁷⁷). Vgl. auch Nr. 48 (Methoden von *Reuschle* u. s. w.).

374) An Stelle der x -Axe nimmt *A. Siebel*, Arch. Math. Phys. 56 (1874), p. 422 eine beliebige Kurve $z = F(x)$, die er mit der Kurve $z = F(x) - \kappa f(x)$ schneidet, wobei er $F(x)$ und die willkürliche Konstante κ so zu bestimmen sucht, dass beide Kurven von einer beliebigen Stelle an in der z -Richtung konvex ausfallen; p. 434 Kennzeichen dafür, dass zwei in derselben Richtung konvexe Kurvenbögen in gegebenem Zwischenraum sich schneiden.

375) Dies der ältere Gedanke, auf dem die geometrische Auflösung (die „Konstruktion“) der Gleichungen bis zur Zeit *v. Segner's* beruhte (vgl. etwa *L. Matthiessen*, Grundzüge der antiken und modernen Algebra, 2. Ausg. Leipzig 1896, p. 921 ff.; *A. Favaro*, Notizie storico-critiche sulla costruzione delle equazioni, Modena 1878, Appendice Modena 1880). Beim Fortschreiten von quadratischen zu höheren Gleichungen legte man zuerst Wert darauf, mit Kegelschnitten oder Kurven möglichst niedriger Ordnung auszukommen (*Descartes*), oder mit Kurven von einfacher mechanischer Erzeugung (*Newton*); nach der heutigen, durch die Entwicklung der darstellenden Geometrie und der graphischen Methoden überhaupt bedingten Auffassung ist es an sich gleichgültig, ob die verwendeten Kurven mit einem Mechanismus beschrieben, oder durch stetiges Verbinden einzelner Punkte mit einem von freier Hand (nach Massgabe der, von dem geübten Auge vorausgeschauten Form der Kurve) geführten Zeichenstift erhalten worden sind, wobei diese Punkte selbst entweder durch geometrische Konstruktion (bei algebraischen Gleichungen etwa nach *v. Segner* oder *Lill*) oder durch Rechnung bestimmt worden sein können.

376) *Lill*³⁶⁹) p. 857, „Cremona“ p. 67, „Favaro-Terrier“ p. 203; andere Methoden bei *Matthiessen*³⁷⁵) p. 926 ff., „Favaro-Terrier“ p. 232, 234.

377) Die von *Descartes* zuerst angegebene Lösung mittelst einer festen Parabel und eines in jedem Falle zu zeichnenden Kreises wurde u. a. wieder von *R. Hoppe*, Arch. Math. Phys. 56 (1874), p. 110, durchgeführt und von letzterem auf die Bestimmung der komplexen Wurzeln ausgedehnt Arch. Math. Phys. 69 (1883), p. 216; von *A. Adler* dagegen, Österr. Ingen. Archit.-Ver. Zeitschr. 42 (1890), p. 146, technisch durchgebildet. Wegen der Lösungen mittelst Hyperbel und Kreis oder Conchoide und Kreis s. *Matthiessen* a. a. O. — Vorläufig nur für die geometrische Erkenntnis von Wert ist die Lösung im Sinne der projektiven

Ein brauchbares allgemeines Verfahren, komplexe Wurzeln, auch von Gleichungen mit komplexen Koeffizienten, durch Zeichnung zu bestimmen, haben wir von *H. Scheffler*³⁷⁸⁾. Setzt man $x = y + iz$, $f(x) = Y + iZ$, und trägt man (Fig. 29) vom Punkt x eine Strecke von der Länge und Richtung des zugehörigen Y ab, deren Endpunkt x_1 heißen möge, lässt man hierauf den Punkt x irgend eine Linie, z. B. eine Gerade parallel mit der z -Axe beschreiben, so wird diese von der Linie, die gleichzeitig der Punkt x_1 beschreibt, in einem Punkt geschnitten, für welchen $Y = 0$ ist.

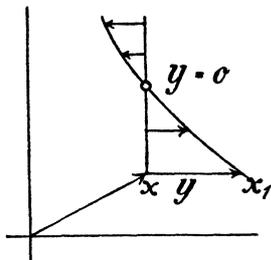


Fig. 29.

Durch Wiederholung der Konstruktion für eine Reihe von Linien erhält man punktweise die Kurve $Y = 0$. Konstruiert man auf entsprechende Art die Kurve $Z = 0$, so stellen die Schnittpunkte beider Kurven die Wurzeln von $f(x) = 0$ dar³⁷⁹⁾.

39. Systeme linearer Gleichungen. Das Bedürfnis der Ingenieure nach graphischen Methoden zur Auflösung von Systemen linearer

Geometrie mittelst eines beliebig gegebenen und eines punktweise zu zeichnenden Kegelschnittes von *M. Chasles*, Par. C. R. 41 (1855), p. 677 (Ausdehnung auf komplexe Wurzeln, *A. Adler*, Progr. Oberrealsch. Klagenfurt 1891, p. 19); vgl. noch *B. Klein*, Theorie der trilinear-symmetrischen Elementargebilde, Marburg 1881, p. 67 (nur kubische Gleichungen). — *Descartes' Lösung* der Gleichungen 5. und 6. Grades mittelst einer festen „parabolischen Conchoide“ (einer Kurve 3. Ordnung) und eines Kreises hat *J. A. Grunert*, Arch. Math. Phys. 27 (1856), p. 245 wieder dargestellt. *A. Ameseder* löst Wien. Ber. 93 (1886), 2. Abt. p. 380 die Gleichungen 4. und 5. Grades mittelst einer Kurve 4. Ordnung mit dreifachem Punkt und eines Kreises oder einer Hyperbel.

378) Die Auflösung der algebraischen und transcendenten Gleichungen . . ., Braunschweig 1859, p. 100; ein vorher von *Scheffler* angegebenes, Arch. Math. Phys. 15 (1850), p. 375, hat den Mangel, auf reelle Wurzeln nicht anwendbar zu sein.

379) Dieselben Kurven will *A. Raabe*, Wien. Ber. 63 (1871), 2. Abt., p. 733, benützen (die Arbeit enthält keinen Fortschritt). — Manchmal ist es besser (*Scheffler* p. 103), X in Komponenten senkrecht und parallel zur Strecke ox zu zerlegen und die beiden Kurven zu konstruieren, für die je eine dieser Komponenten verschwindet, wobei man den Punkt x in Strahlen durch den Nullpunkt sowie in Kreisen um den Nullpunkt sich bewegen lassen wird. — Geometrisch handelt es sich darum, bei der durch die Gleichung $X = f(x)$ definierten konformen Abbildung (III D 6 a) der Ebene der x auf die Ebene der X in der ersten Ebene die Punkte zu bestimmen, welche sich in den Nullpunkt der zweiten Ebene abbilden; offenbar kann *Scheffler's* Gedanke auch bei beliebigen (nicht konformen) Abbildungen Verwendung finden, während andererseits bei der Auflösung komplexer Gleichungen die Eigenschaften der konformen Abbildungen ausgenutzt werden können.

Gleichungen hat in neuerer Zeit mehrere solcher hervorgerufen. In graphischer Elimination besteht eine Methode von *F. J. Van den Berg*³⁸⁰). Man stellt die n gegebenen Gleichungen, deren i^{te}

$$a_i x + b_i y + c_i z + \dots = l_i$$

sei, durch Punktreihen auf n parallelen Geraden mit beliebigen Abständen dar, indem man (Fig. 30) die Koeffizienten $a_i, b_i, c_i, \dots, l_i$ (unter Beachtung des Vorzeichens) als Strecken in beliebigem Massstab auf der i^{ten} Geraden von einem willkürlichen Nullpunkt o_i abträgt. Um nun etwa aus der i^{ten} und k^{ten} Gleichung die Unbekannte z zu eliminieren, zieht man durch den Schnittpunkt o' von $o_i o_k$ mit $c_i c_k$ eine Parallele mit den früheren Geraden, dann wird auf dieser durch

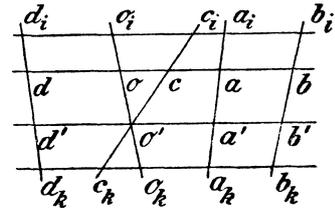


Fig. 30.

die Linien $a_i a_k, b_i b_k, d_i d_k, \dots$ eine Punktreihe a', b', d', \dots ausgeschnitten, die mit Bezug auf den Nullpunkt o' die gewünschte neue Gleichung ohne z darstellt³⁸¹). Das gewöhnliche Verfahren der Algebra nachahmend, gelangt man so durch allmähliche Elimination zu den Darstellungen von n Gleichungen, die je nur noch eine Unbekannte enthalten³⁸²). Figur 31 zeigt den Fall $n = 2$.³⁸³) *J. Massau*

380) Amst. Akad. Versl. en Meded. (3) 4 (1887), p. 204.

381) Beruht darauf, dass jede Parallele mit den Trägern der Punktreihen von den Linien $o_i o_k, a_i a_k, b_i b_k, \dots$ in einer Punktreihe a, b, \dots geschnitten wird, welche eine lineare Kombination der i^{ten} und k^{ten} Gleichung darstellt. *Van den Berg* braucht eigentlich doppelt soviel Linien, weil er die neue Punktreihe auf den Träger einer der alten central zurückprojiziert; obige Vereinfachung von *R. Mehmke*, Mosk. Math. Sammlung (Матем. Сборникъ) 16 (1892), p. 342. Weit umständlicher verfährt *F. J. Vaes*, Engineering 66 (1898), p. 867, Nieuw Archief voor Wiskunde (2) 4 (1899), p. 42, Nouv. Ann. math. (3) 18 (1899), p. 74.

382) Die Rückkehr von den Strecken zu den Zahlenwerten geschieht erst am Schluss. Es empfiehlt sich, die gegebenen und die daraus abgeleiteten Gleichungen auf beweglichen Papierstreifen darzustellen, vgl. auch Anm. 383.

383) Man erhält $x = \frac{o' l'}{a' a'}$, $y = \frac{o' l'}{o' b'}$. Sind nacheinander mehrere Systeme mit denselben Koeffizienten a, b , aber verschiedenen Werten l aufzulösen, so ist jedesmal nur eine neue Linie, $l_1 l_2$, zu ziehen. — Ist $n = 3$, so kann man sich die drei parallelen Geraden, auf denen die Gleichungen dargestellt werden sollen, im Raume denken. Es werden dann y und z gleichzeitig eliminiert, wenn man eine Parallele zu jenen Geraden durch den Schnittpunkt o' der Ebenen $b_1 b_2 b_3$ und $c_1 c_2 c_3$ mit der Verbindungsebene der Nullpunkte $o_1 o_2 o_3$

kommt durch die Methode der „falschen Lage“ zum Ziel³⁸⁴). Die Koeffizienten der Unbekannten einer jeden Gleichung werden als Strecken in einer Geraden aneinander gefügt (s. Fig. 32, wo $n = 3$); durch die Endpunkte der Strecken zieht man Senkrechte zur Geraden. Wählt man zunächst x, y, z, \dots beliebig, setzt $x = \operatorname{tg} \alpha$, $y = \operatorname{tg} \beta$, $z = \operatorname{tg} \gamma$ u. s. w. und konstruiert für jede Gleichung einen in o beginnenden Linienzug, dessen Seiten der Reihe nach die

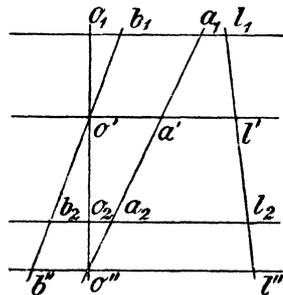


Fig. 31.

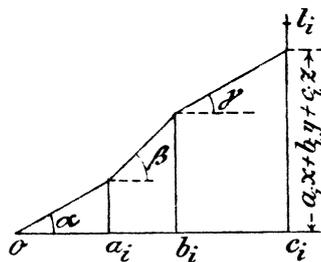


Fig. 32.

Neigungswinkel $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ haben und dessen Ecken auf jenen Senkrechten liegen, so wird beim i^{ten} Linienzug auf der letzten Senkrechten offenbar eine Strecke gleich $a_i x + b_i y + c_i z + \dots$ abgeschnitten. Wären die für x, y, z, \dots angenommenen Werte die richtigen, so müsste letztere Strecke gleich l_i sein. Es werden nun die Richtungen der Seiten verändert, bis diese Bedingung bei allen Gleichungen erfüllt ist, wobei der Satz zur Verwendung kommt, dass wenn man, die Endpunkte der $(n - 1)$ ersten Linienzüge festhaltend, die Richtung der ersten Seite ändert, die Seiten aller Linienzüge sich um bestimmte Punkte drehen, deren Abscissen überdies von den

zieht; schneidet dieselbe die Ebenen $a_1 a_2 a_3$ und $l_1 l_2 l_3$ in a' bzw. l' , so ist $x = \frac{\overline{o'l'}}{\overline{o'a'}}$. Die Ausführung geschieht nach den Methoden der darstellenden

Geometrie. Die gleichzeitige Elimination von mehr als 2 Unbekannten gelingt mittelst der Ausdehnung der gewöhnlichen darstellenden Geometrie auf Räume von höheren Dimensionen, vgl. Anm. 385 und 387.

384) Assoc. Ingén. sortis des écoles spéciales de Gand Ann. 11 (1887/1888), p. 91. — Die „méthode de fausse position“ verwendet auch *G. Fourret*, Par. C. R. 80 (1875), p. 550; Ass. franç. Bull. Nantes 3 (1875), p. 93; „Favaro-Terrier“ p. 224, aber nur für eine besondere, durch Rechnung herzustellende Form der Gleichungen, ebenso *J. C. Dyxhoorn*, Instituut van Ingen. Tijdschr. 1885/86, 2, p. 124, dessen für $n = 4$ gegebene Methode *Van den Berg*³⁸⁰) p. 251 verallgemeinert.

Werten der l_i unabhängig sind. Bei einer anderen Methode, die *Van den Berg* ³⁸⁰⁾ p. 205 in den Fällen $n = 2$ und $n = 3$ entwickelt hat, betrachtet man die Koeffizienten einer und derselben Unbekannten in den gegebenen Gleichungen je als Cartesische Koordinaten eines Punktes. Für $n = 2$ z. B. seien die Gleichungen geschrieben

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = a, \quad b_1 x_1 + b_2 x_2 = b$$

und die Punkte mit den Koordinaten a_1, b_1 bzw. a_2, b_2 und a, b durch p_1, p_2, p bezeichnet. Dann ist, wenn (Fig. 33) die Gerade pp_1 von op_2 in s_1 , pp_2 von op_1 in s_2 geschnitten wird,

$$x_1 = \frac{p s_1}{p_1 s_1}, \quad x_2 = \frac{p s_2}{p_2 s_2} \quad . \quad 385)$$

Im Falle $n = 2$, wo jetzt wieder

$$a_1 x + b_1 y = l_1, \quad a_2 x + b_2 y = l_2$$

geschrieben werden möge, ist es ein sehr naheliegender und oft ausgeführter Gedanke, die Unbekannten x, y als Koordinaten eines Punktes, d. h. die gegebenen Gleichungen als die zweier Geraden aufzufassen, um in den Koordinaten ihres Schnittpunktes die gesuchten Werte der Unbekannten zu erhalten; auch bei drei Gleichungen macht die Konstruktion des Schnittpunktes der zugehörigen Ebenen nach axonometrischer Methode keine Schwierigkeit ³⁸⁶⁾. *Van den Berg* hat ³⁸⁰⁾ p. 207 gezeigt, wie mittelst eines, durch n von einem Punkt ausgehende Axen in einer Ebene gebildeten Koordinatensystems der allgemeinste Fall sich durchführen lässt ³⁸⁷⁾. *A. Klingatsch* hat mit Erfolg die Methoden der graphischen Statik angewendet ³⁸⁸⁾.

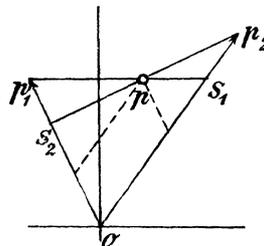


Fig. 33.

385) x_1 und x_2 sind auch die Koordinaten von p in dem System, von welchem op_1 und op_2 nach Lage und Grösse die Einheitsstrecken der Axenmassstäbe sind. Im Falle $n = 3$ erhält man vier Punkte p_1, p_2, p_3, p im Raum und es wird z. B. $x_1 = \frac{p s_1}{p_1 s_1}$, wo s_1 den Schnittpunkt von pp_1 mit der Ebene $op_2 p_3$ bezeichnet; die Durchführung nach den Methoden der Axonometrie (III A 6) ist leicht. Im Falle $n > 3$ bedarf es einer Verallgemeinerung der axonometrischen Methode, vgl. Anm. 387.

386) Ein Nachteil gegenüber den vorher besprochenen Methoden ist es, dass die Abschnitte der Geraden bzw. Ebenen von den Axen (graphisch oder arithmetisch) berechnet werden müssen.

387) Wiederholt von *J. v. d. Griend jr.*, Nieuw Archief voor Wiskunde (2) 4 (1899), p. 22, 39, der sich des Begriffs von Räumen höherer Dimensionen bedient, was *Van den Berg* vermeidet. Über die Auffassung als graphische Eli-

b. Grundmassstab logarithmisch geteilt.

40. Gewöhnliche arithmetische Operationen. Bei einem logarithmischen Massstabe ist (Fig. 34) allgemein die, mit der zu Grunde liegenden Einheit gemessene Entfernung von dem Anfangspunkte —



Fig. 34.

zu welchem die Zahl Eins gehört — bis zu dem Punkte, an dem die Zahl x steht, gleich $\log x$.³⁸⁹⁾ Im folgenden ist vorausgesetzt, dass die (positiven reellen) Zahlen, mit denen irgend welche Rechnungen ausgeführt werden sollen, schon als Strecken in einem logarithmischen Massstabe mit bestimmter Längeneinheit, dem Grundmassstabe, abgetragen sind und dass auch die Ergebnisse vorläufig nur in Gestalt solcher Strecken verlangt werden³⁹⁰⁾. Dass dann die

mination s. *Van den Berg*³⁸⁹⁾, p. 244. — Graphische Lösung von Systemen nicht-linearer Gleichungen auf derselben Grundlage möglich, aber umständlich (s. dagegen Nr. 42).

388) Monatshefte Math. Phys. 3 (1892), p. 169. Die Koeffizienten der Unbekannten werden als die Grössen von in einer Ebene wirkenden parallelen Kräften betrachtet, von denen die zu derselben Gleichung gehörigen jedesmal dieselbe Wirkungslinie haben, die Unbekannten selbst als die Hebelarme der Kräfte in Bezug auf einen festen Punkt der Ebene, die rechten Seiten der Gleichungen als statische Momente in Bezug auf diesen Punkt.

389) Der Gedanke, die Logarithmen als Strecken abzutragen, welcher sich für das graphische und mechanische Rechnen (vgl. Nr. 44, 48, 50—52) äusserst fruchtbar gezeigt hat, rührt von *E. Gunter* her („line of numbers“, mit den logarithmischen Skalen der \sin und \tan nach dem Dictionary of National Biography, 23, p. 350 zuerst in dem Canon Triangulorum, London 1620, beschrieben, nach *Hutton*⁵²⁹⁾ erst 1623 erfunden). — Die Längeneinheit ist, wenn man von gemeinen Logarithmen ausgeht, gleich der Strecke zwischen den Punkten 1 und 10 (der Übergang zu einem andern Logarithmensystem würde eine blosse Änderung der Längeneinheit bedeuten); der Massstab setzt sich aus lauter kongruenten Stücken zusammen, welche von 1—10, 10—100, 100—1000, . . . und auf der andern Seite des Anfangspunktes von 0,1—1, von 0,01—0,1 u. s. w. reichen. — Prismatische Zeichenmassstäbe mit logarithmischer Teilung kann man z. B. von der Firma *Dennert & Pape* in Altona (für die Längeneinheiten 125 mm und 250 mm) beziehen, Zeichenpapier mit aufgedrucktem logarithmischem Liniennetz von *Van Campenhout frères & soeur*, Bruxelles (Längeneinheit 500 mm).

390) Es handelt sich hier darum, die Lösung der schwierigeren Aufgaben in Nr. 41 und 42 vorzubereiten; bei nur aus Multiplikation und Division zusammengesetzten Rechnungen, beim Potenzieren und Wurzelausziehen führen mechanische Hilfsmittel, die logarithmischen Rechentafeln (Nr. 44) und Rechenschieber (Nr. 50) schneller zum Ziele als die Zeichnung.

dem Produkt mehrerer Zahlen entsprechende Strecke durch Zusammenfügen der den Faktoren entsprechenden Strecken erhalten wird und auf ähnliche Weise Division, Potenzierung und Radizierung sich graphisch ausführen lassen, ist ohne weiteres klar. Ein besonderes Hilfsmittel erfordern dagegen Addition und Subtraktion. Sind (Fig. 35) die Strecken $oa = \log \alpha$ und $ob = \log \beta$ gegeben, die Zahlen α und β selbst dagegen nicht bekannt, und ist $oc = \log(\alpha + \beta)$ gesucht, so zeigt es sich, dass die Lage von c gegen a und b nur von der Entfernung ab abhängt, nämlich

$$bc = \log\left(1 + \frac{1}{t}\right)$$

Fig. 35.

ist, wenn $ab = \log t$ gesetzt wird. Benützt man daher eine für die Längeneinheit des Grundmassstabes im voraus gezeichnete „Additions-

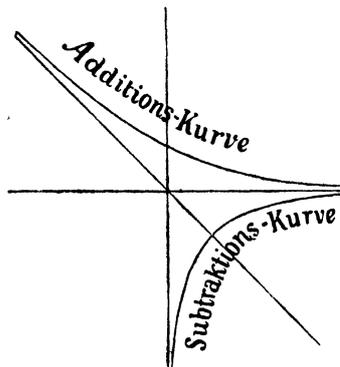


Fig. 36.

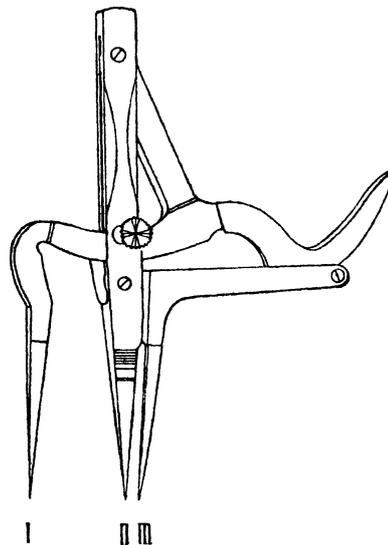


Fig. 37. E. Brauer's logarithmischer Zirkel.

kurve“ (Fig. 36)³⁹¹⁾, deren Punkte durch Auftragen zusammengehöriger Werte von $\log t$ und $\log(1 + 1 : t)$ als Abscisse und Ordinate er-

391) R. Mehmke, Civilingenieur 35 (1889), p. 617. Sie nähert sich der positiven Abscissenaxe und der Halbierenden des Winkels zwischen positiver Ordinaten- und negativer Abscissenaxe asymptotisch (eine weitere Eigenschaft folgt aus der Vertauschbarkeit der Punkte a und b); sie ist das logarithmische Bild (Nr. 41) der Funktion $z = 1 + 1 : x$ und lässt sich als graphische Darstellung der Additionslogarithmen in der ursprünglichen Leonelli'schen Gestalt (s. Nr. 30) betrachten.

halten worden sind, so hat man, um den Punkt c zu finden, bloß die Strecke ab mit dem Zirkel auf der Abscissenaxe der Additionskurve abzutragen, die zugehörige Ordinate dieser Kurve abzugreifen und die Strecke bc gleich derselben zu machen. Noch bequemer ist die Anwendung des „logarithmischen Zirkels“ (Fig. 37) von *E. A. Brauer*³⁹²: Man setzt die erste seiner drei Spitzen auf den Punkt a , öffnet bis die zweite Spitze auf b kommt, dann giebt die dritte Spitze den gesuchten Punkt c . Auf die umgekehrte Weise läßt sich mittelst der Additionskurve oder des logarithmischen Zirkels „logarithmisch subtrahieren“, d. h. der Punkt a (oder b) bestimmen, wenn c und b (bezw. a) gegeben sind; mit Hülfe der „Subtraktionskurve“ (Fig. 36)³⁹³ ist es ebenfalls möglich.

41. Berechnung von Funktionen und Auflösung von Gleichungen mit einer Unbekannten. Man denke sich, wenn $z = f(x)$ eine beliebige Funktion ist, je zwei zusammengehörige Werte von x und z

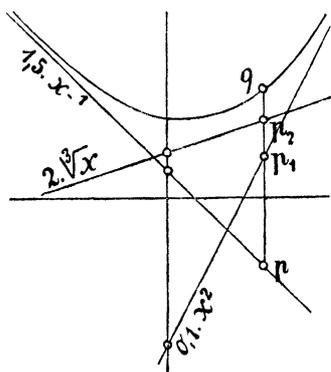


Fig. 38.

mit einem logarithmischen Massstab als Cartesische Koordinaten eines Punktes aufgetragen; die sich ergebenden Punkte erfüllen das „logarithmische Bild“ der Funktion³⁹⁴. Für $z = ax^n$ erhält man eine gerade Linie, welche durch den Punkt a des in der z -Axe angebrachten logarithmischen Massstabes geht und die Steigung $n : 1$ besitzt³⁹⁵. Ist $z = ax^n + a_1 x^{n_1} + a_2 x^{n_2} + \dots$, so zeichnet man zuerst (Fig. 38) die Geraden, welche nach dem vorigen den Gliedern $ax^n, a_1 x^{n_1}, \dots$ entsprechen; schneidet

392) *W. Dyck's Katalog mathem. Instrumente, Nachtrag, München 1893, p. 40.*

393) *Mehmke, Zeitschr. Math. Phys. 35 (1890), p. 178*; die Subtraktionskurve liefert zur Abscisse $\log t$ die (negative) Ordinate $\log(1 - 1 : t)$ oder sie ist das logarithmische Bild der Funktion $z = 1 - 1 : x$; sie nähert sich der positiven Abscissen- und der negativen Ordinatenaxe asymptotisch und ist symmetrisch zur Halbierenden des Winkels zwischen letzteren.

394) *Mehmke*³⁹¹) p. 619; Konstruktion und Eigenschaften der logarithmischen Bilder ebenda p. 620 f. Die logarithmische Transformation ist, wie es scheint, zuerst von *L. Lalanne*⁴⁸¹) zur Vereinfachung graphischer Tafeln (s. Nr. 44) benützt worden; englische Physiker bedienen sich seit etwa zwei Jahrzehnten der logarithmischen Koordinaten zur graphischen Darstellung empirischer Funktionen u. dergl., s. den Bericht von *J. H. Vincent*, British Assoc. Report of the 68. meeting at Bristol 1898 (London 1899), p. 159.

395) Wegen $\log z = \log a + n \log x$; n darf negativ, gebrochen und irrational sein.

man diese Geraden mit irgend einer Parallelen zur z -Axe, so ergibt sich aus den Schnittpunkten p, p_1, \dots durch Anwendung der in Nr. 40 gezeigten logarithmischen Addition der in dieser Parallelen befindliche Punkt q des logarithmischen Bildes der gegebenen Funktion³⁹⁶). Wenn z aus Gliedern der Form $a_i x^{n_i}$ mit verschiedenen Vorzeichen besteht, so kann man die positiven und negativen Glieder je für sich zusammenfassen, also etwa $z = f_1(x) - f_2(x)$

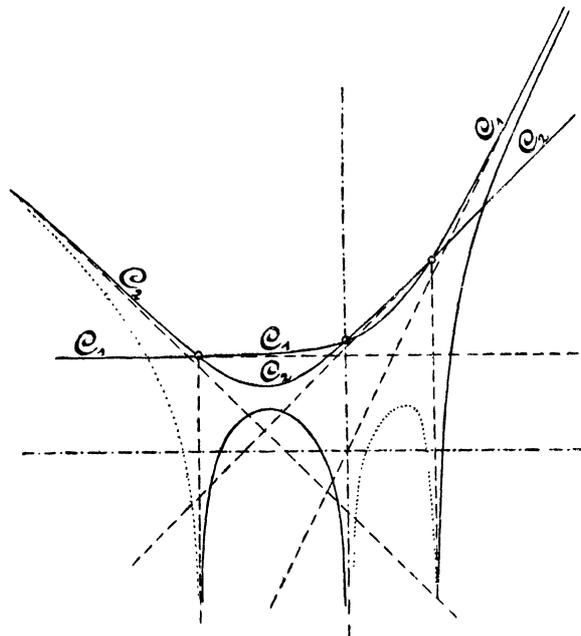


Fig. 39.

schreiben, wo f_1 und f_2 nur positive Glieder enthalten, und zunächst die logarithmischen Bilder C_1 und C_2 der letzteren Funktionen konstruieren, um aus diesen punktweise durch logarithmische Subtraktion das logarithmische Bild C von z zu erhalten³⁹⁷). Ähnlich ist zu ver-

396) Die Kurve hat die Geraden zu den Gliedern mit niedrigstem und mit höchstem Exponenten zu Asymptoten; sie ist frei von Wendepunkten und nach oben konkav. Fig. 38 entspricht dem Beispiel $z = 0,1 \cdot x^2 + 2 \cdot \sqrt[3]{x} + 1,5 \cdot x^{-1}$.

397) C nähert sich nach unten asymptotisch den Parallelen zur z -Axe durch die Schnittpunkte von C_1 und C_2 (Hilfskonstruktion zur genaueren Bestimmung von Punkten in der Nähe dieser Asymptoten³⁹¹) p. 629). In den Räumen zwischen benachbarten Asymptoten, wo $f_1(x) < f_2(x)$ ist, also C keine reellen Zweige hat, befinden sich die (in Fig. 39 punktierten) Zweige des

fahren, wenn die Glieder von z nicht obige Gestalt haben, sondern beliebige (z. B. transzendente) Funktionen von x , also die logarithmischen Bilder der einzelnen Glieder keine Geraden sind.

Um eine gegebene Gleichung $f(x) = 0$ aufzulösen, zerlegt man auf passende Weise³⁹⁸) die Funktion $f(x)$ in eine Differenz $f_1(x) - f_2(x)$, oder man bringt die Gleichung auf die Form $f_1(x) = f_2(x)$ und konstruiert die logarithmischen Bilder der Funktionen $z = f_1(x)$ und $z = f_2(x)$; die Abscissen der Schnittpunkte, mit dem der Zeichnung zu Grunde liegenden logarithmischen Massstab gemessen, geben die positiven reellen Wurzeln der Gleichung³⁹⁹). Die absoluten Werte der negativen Wurzeln erhält man durch Bestimmung der positiven Wurzeln der Gleichung $f(-x) = 0$.⁴⁰⁰)

Sei noch die Erweiterung der vorbeschriebenen Methode für komplexe Wurzeln und Gleichungen mit komplexen Koeffizienten angedeutet⁴⁰¹). Ist

$$x = r e^{i\varphi}, \quad z = \rho e^{i\vartheta},$$

so betrachte man zuerst $\log r, \varphi, \log \rho$, dann $\log r, \varphi, \vartheta$ als Cartesische Koordinaten eines Raumpunktes, und man wird jedesmal vermöge der Gleichung $z = f_1(x)$ eine Fläche erhalten⁴⁰²), von welchen

dieselben Asymptoten besitzenden logarithmischen Bildes C' der Funktion $-z = f_2(x) - f_1(x)$. C und C' , als eine Kurve aufgefasst, haben die steilste unter den die Glieder von z vorstellenden Geraden und die am wenigsten steile zu Asymptoten, oder es findet auf der $x > 1$ entsprechenden Seite asymptotische Annäherung an die zuletzt steilste, auf der anderen Seite an die zuletzt am wenigsten steile der beiden Kurven C_1 und C_2 statt.

398) Am einfachsten durch Trennung der positiven Glieder von den negativen; manchmal andere Zerlegungen vorteilhafter, vgl. das Beispiel³⁹¹) p. 626, Nr. 6.

399) Haben f_1 und f_2 nicht lauter positive Glieder, so können auch die logarithmischen Bilder von $z = -f_1(x)$ und $z = -f_2(x)$ Wurzeln liefern und sind deshalb ebenfalls zu konstruieren. Oft ist es ratsam, die Gleichung zuerst mit einer Potenz von x zu dividieren, wodurch steile Kurven in weniger steile und somit ungünstige Schnitte in bessere verwandelt werden können.

400) Die Hilfslinien — im Falle $f(x)$ die Form $\pm ax^n \pm a_1 x^{n_1} \pm \dots$ hat, die den einzelnen Gliedern entsprechenden Geraden — sind bei der zweiten Gleichung dieselben wie bei der ersten.

401) Bis jetzt nicht veröffentlichte Methode des Verfassers.

402) Ist $z = ax^n$, a reell oder komplex, dann bestehen die beiden Flächen in Ebenen. Wenn z aus mehreren Gliedern dieser Form zusammengesetzt ist, so können die zugehörigen Flächen aus den zu den einzelnen Gliedern gehörigen Ebenen auf ähnliche Weise wie die bei der logarithmographischen Auflösung zweier reellen Gleichungen mit zwei reellen Unbekannten vorkommenden Flächen (Nr. 42) mittelst einzelner Schnitte parallel zur Aufriss- oder Seitenriss-Ebene konstruiert werden, nur dass an Stelle der Additions- (bezw. Subtraktions-)Kurve

die erste mit P_1 , die zweite mit \mathcal{O}_1 bezeichnet sei. Die Gleichung $z = f_2(x)$ liefert zwei neue Flächen P_2 und \mathcal{O}_2 . Konstruiert man die Schnittkurve der Flächen P_1 und P_2 und diejenige der Flächen \mathcal{O}_1 und \mathcal{O}_2 beide im Grundriss, dann geben die Koordinaten $\log r, \varphi$ eines jeden Schnittpunktes beider Kurven eine Wurzel $re^{i\varphi}$ der vorgelegten Gleichung.

42. Systeme von Gleichungen. Ein System von zwei reellen Gleichungen

$$f(x, y) = 0, \quad g(x, y) = 0$$

mit den beiden reellen Unbekannten x und y lässt sich logarithmographisch in folgender Art auflösen⁴⁰³). Man schreibe die Gleichungen zuerst in der Form⁴⁰⁴):

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= f_2(x, y), \\ g_1(x, y) &= g_2(x, y) \end{aligned}$$

und spalte dann in die beiden Systeme von je zwei Gleichungen mit den Veränderlichen x, y, z :

$$\begin{aligned} z &= f_1(x, y), & z &= f_2(x, y), \\ z &= g_1(x, y), & z &= g_2(x, y). \end{aligned}$$

Fasst man $\log x, \log y, \log z$ als Cartesische Koordinaten eines Punktes im Raume auf, so stellt jedes der beiden Systeme eine Raumkurve dar, nämlich den Schnitt der „logarithmischen Bilder“⁴⁰⁵) der Funktionen f_1 und f_2 bzw. g_1 und g_2 . Nach den Methoden der darstellenden Geometrie konstruiert man die Grundrisse (d. h. xy -Projektionen) dieser beiden Kurven; die Koordinaten der Schnittpunkte,

Schnitte der beiden Flächen treten, welche die „Additionslogarithmen für komplexe Größen“ [s. *Dyck's* Katalog, Nachtrag p. 31, sowie *Zeitschr. Math. Phys.* 40 (1895) die Figuren p. 18 u. 21] darstellen.

403) *Mehmke*, *Zeitschr. Math. Phys.* 35 (1890), p. 174.

404) Wird für gewöhnlich am besten durch Trennung der positiven und negativen Glieder hergestellt, vgl. Anm. 398. Es kann sich empfehlen, beiderseits mit einer Potenz von x und einer solchen von y zu dividieren, vgl. Anm. 399.

405) Das logarithmische Bild von $z = ax^m y^n$ ist die Ebene, die durch den Punkt a des logarithmischen Massstabes der z -Axe geht, deren xz -Spur die Steigung m und deren yz -Spur die Steigung n hat. Besteht die Funktion z aus mehreren Gliedern dieser Form, so sind die den einzelnen Gliedern entsprechenden Ebenen zu konstruieren, aus welchen sich mittelst der Additions- und Subtraktionskurve jeder zur xy -Ebene senkrechte Schnitt der krummen Fläche, die das logarithmische Bild der Funktion ist, leicht ableiten lässt. Über die einfachsten Eigenschaften dieser Flächen, ihre Asymptoten-Ebenen und -Cylinder s. ⁴⁰³) p. 180.

mit dem logarithmischen Massstabe der Zeichnung gemessen, sind die positiven reellen Wurzeln der gegebenen Gleichungen⁴⁰⁶). Man könnte auch mit *A. A. Nijland*⁴⁰⁷) auf die Hilfe der darstellenden Geometrie verzichten⁴⁰⁸) und zum Zweck der Auflösung des Systems

$$f(x, y) = 0, \quad g(x, y) = 0$$

das logarithmische Bild einer jeden dieser Gleichungen in der xy -Ebene selbst konstruieren⁴⁰⁹).

IV. Graphische Tafeln (Nomographie).

Monographien und Lehrbücher: Ch. A. Vogler, Anleitung zum Entwerfen graphischer Tafeln . . . , Berlin 1877. — *M. d'Ocagne*, Nomographie. Les calculs usuels effectués au moyen des abaques, Paris 1891 („d'Ocagne 1891“). — *M. d'Ocagne*, Le calcul simplifié au moyen des procédés mécaniques et graphiques [extrait des Annales du Conservatoire des Arts et Métiers (2) 5, 6, 1893—1894], Paris 1894. — *M. d'Ocagne*, Conférences sur la Nomographie, faites aux élèves de l'École polytechnique (Autographie), Paris 1894. — *M. d'Ocagne*, Traité de Nomographie, Paris 1899 („d'Ocagne“). — *G. Pesci*, Cenni di Nomografia (Sonderabdruck aus der Rivista Marittima, August und September 1899, Februar 1900), 2^a ed. Livorno 1901. — *Fr. Schilling*, Über die Nomographie von M. d'Ocagne. Eine Einführung in dieses Gebiet, Leipzig 1900. — *R. Soreau*, Contribution à la théorie et aux applications de la Nomographie (extrait des Mémoires de la Société des Ingénieurs Civils de France, Bulletin d'août 1901, p. 191), Paris 1901. — Unter den in der Einleitung zu Abschnitt III genannten Schriften kommen die von *Culman*, *Favaro-Terrier* und *Bürklen* in Betracht.

Sind mehrere veränderliche Zahlgrößen durch irgend ein Gesetz (das nicht notwendig durch eine analytische Gleichung ausgedrückt

406) Die Wertepaare x, y , die den Gleichungen genügen und für die z. B. x negativ, y positiv ist, wird man durch Auflösung des Systems $f(-x, y) = 0$, $g(-x, y) = 0$ nach dem obigen Verfahren erhalten.

407) Nieuw Archief voor Wiskunde 19 (1891), p. 35.

408) Zweckmässig ist dies allerdings nicht, denn die fraglichen logarithmischen Bilder, welche mit den bei der ersten Methode benützten Kurven identisch sind, werden am bequemsten gerade in der angegebenen Weise als Grundrisse der Schnittkurven je zweier Flächen durch Schnitte parallel zur yz - oder xz -Ebene erhalten; auch ist der Verzicht nur ein scheinbarer, da die von *Nijland* benützten Hilfsgeraden und Hilfskurven die Grundrisse wagerechter Schnitte der bei der ersten Methode vorkommenden ebenen und krummen Flächen sind.

409) Die Auflösung von 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten mit Hilfe der Schnittpunkte der logarithmischen Bilder dieser Gleichungen ist auch noch durchführbar; ein Fortschreiten in dieser Richtung würde die Ausbildung der darstellenden Geometrie von Gebilden beliebiger Dimensionenzahl verlangen vgl. Anm. 383, 385, 387.

sein muss) mit einander verbunden und ordnet man den Werten einer jeden Veränderlichen eine Reihe geometrischer Elemente (Punkte oder Linien), neben welche man die betreffenden Werte schreibt⁴¹⁰), in der Weise zu, dass jenes Gesetz durch eine einfache Beziehung zwischen den Lagen der fraglichen Elemente zum Ausdruck kommt, die es möglich macht, den Wert irgend einer dieser Veränderlichen mechanisch durch Ablesen⁴¹¹) zu finden, wenn die Werte der übrigen Veränderlichen gegeben sind, so entsteht eine graphische Rechentafel oder graphische Tafel⁴¹²). Für alle Gebiete, in welche die rechnende Mathematik zu dringen vermag, von einer früher nicht geahnten Wichtigkeit geworden, zeichnen sich die graphischen Tafeln (zu denen auch die Rechenschieber, Nr. 50—52, gezählt werden können) vor allen andern Hilfsmitteln des Zahlenrechnens durch die grosse Schnelligkeit, mit der sie die Ergebnisse liefern, sowie dadurch aus, dass sie den verschiedensten Bedürfnissen angepasst werden können und sich oft noch anwenden lassen, wo numerische Tafeln ausgeschlossen sind⁴¹³). Die im Altertum und Mittelalter vorherrschende graphische Behandlung von Aufgaben der Astronomie, Nautik u. s. w.⁴¹⁴) hat früh zur Erfindung einzelner graphischer Tafeln geführt⁴¹⁵), aber

410) Die Elemente heissen dann beziffert oder kotiert (*d'Ocagne* benützte bis 1896 das Wort *isopleth*, vgl. Anm. 424).

411) Zum Unterschied gegen das eigentliche graphische Rechnen (s. Abschnitt III) sind, nachdem die Vorrichtung ein für allemal gezeichnet ist, geometrische Konstruktionen im allgemeinen ausgeschlossen, jedoch können Lineal, Zirkel und ähnliche Hilfsmittel beim Ablesen benützt werden.

412) Frz. „table (tableau) graphique“ (so z. B. *L. Lalanne* und *Favaro-Terrier*), neuerdings durch „abaque“ verdrängt („*d'Ocagne* 1891“, p. 2), welches Wort *Lalanne* ursprünglich bloß für eine bestimmte Tafel, seine logarithmische Rechentafel⁴³⁷) gebrauchte, *Cauchy*⁴⁴⁰), *Blum*⁴⁵³), *Lallemand*⁴⁵⁶) dagegen abwechselnd mit *table graphique*. „*Pesci*“ p. 5 unterscheidet *abbaco* und *diagrammo*, je nachdem für das fragliche Gesetz ein analytischer Ausdruck vorhanden ist oder nicht.

413) Z. B. wegen zu grosser Zahl der Veränderlichen. Die Genauigkeit ist nicht immer die beschränkte des graphischen Rechnens, sondern lässt sich manchmal beliebig steigern.

414) Vgl. *A. v. Braunmühl*, *Geschichte der Trigonometrie* 1, Leipzig 1900, p. 3, 10, 85, 191.

415) *E. Gelcich* bespricht, *Central-Zeitung Optik Mechanik* 5 (1884), p. 242, 254, 268, 277, zahlreiche „Diagramme“ und „Diagramminstrumente“ zum Gebrauch der Seeleute, die vom 16. Jahrhundert an bis zur Gegenwart konstruiert worden sind; s. auch *v. Braunmühl*⁴¹⁴), p. 138 und Fig. 35 (Instrument von *Peter Apian* zur Bestimmung des Sinus und Sinus versus eines gegebenen Winkels, 1534), ferner p. 228 (*Adriaen Metius'* graphisch-mechanische Lösung sphärischer Dreiecke). Mangels genügender Beschreibungen der älteren graphi-

zur Entwicklung einer allgemeinen Theorie der geometrischen Darstellung gesetzmässiger Abhängigkeiten veränderlicher Zahlgrössen, die man nach *M. d'Ocagne* jetzt Nomographie⁴¹⁶⁾ nennt, ist es erst in den letzten Jahrzehnten gekommen.

43. Tafeln für Funktionen einer Veränderlichen. Werden auf einer (geraden oder krummen, ebenen oder unebenen) Linie die zu einzelnen Werten x_1, x_2, x_3, \dots einer Veränderlichen x gehörigen Werte $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots$ einer gegebenen Funktion $f(x)$ von irgend einem Punkte jener Linie als Anfangspunkt in bestimmtem Sinn als Längen (bei beliebiger Längeneinheit) abgetragen, die erhaltenen Endpunkte durch Striche markiert und an diese Striche die betreffenden Werte von x geschrieben, so entsteht eine *Skala* (französisch *échelle*) der Funktion $f(x)$.⁴¹⁷⁾ Die wichtigsten besonderen Arten sind 1) die gewöhnliche oder gemeine Skala⁴¹⁸⁾, zur Funktion $f(x) = x$ gehörig, 2) die logarithmische Skala mit $f(x) = \log x$ ³⁸⁹⁾

schen Tafeln lässt sich vorderhand nicht sagen, welche der jetzt bekannten allgemeinen Methoden darin schon zu erkennen sein mögen.

416) „d'Ocagne 1891“, p. 6; von *νόμος* = Gesetz.

417) Der Urheber dieses wichtigen Begriffs, auf dem das im 17. und 18. Jahrhundert sehr verbreitete mechanische Rechnen mit Proportionalzirkeln und Rechenstäben (s. Nr. 50) beruhte, ist nicht bekannt. Jedoch brachte schon Ende des 16. Jahrhunderts *Galilei* auf seinem Proportionalzirkel verschiedene Funktionsskalen an (der vorher veröffentlichte von *Bürgi* scheint bloss zu geometrischen Konstruktionen, nicht zum mechanischen Rechnen gedient zu haben); statt „Scala“ wurde damals häufiger das Wort „Linea“ gebraucht, z. B. *Linea quadrata*, *L. cubica* im Falle $f(x) = \sqrt{x}$ bzw. $\sqrt[3]{x}$, *L. arithmetica* ursprünglich für die gemeine Skala (s. oben), später für die logarithmische Skala, u. s. w., s. etwa *J. Leupold*, *Theatrum arithmetico-geometricum*, Leipzig 1727, Kap. XII bis XVIII. — In der Regel bilden die an den Teilstrichen stehenden Zahlen x_1, x_2, x_3, \dots eine arithmetische Reihe und schreiten nach runden Anzahlen irgend einer dezimalen Einheit fort („*échelle normale*“, „d'Ocagne“, p. 2; bei der weniger bequemen „*échelle isograde*“, ebenda p. 16, die Zwischenräume der Teilstriche gleich gross, also die Bezifferung, ausser bei der gemeinen Skala, unregelmässig). Die Skala der zusammengesetzten Funktion $f(\varphi(x))$ lässt sich aus der von $f(x)$ ableiten, indem man letztere als Massstab („*étalon*“) statt des gewöhnlichen benützt („d'Ocagne“, p. 13). Über das Ablesen bei Skalen und die zweckmässigste Wahl des kleinsten Abstandes zwischen benachbarten Teilstrichen s. „Vogler“, p. 20, „d'Ocagne“, p. 8, über die graphisch-mechanische Einschaltung neuer Teilstriche bei geradlinigen Skalen *Mehmke*, *Zeitschr. Ver. deutscher Ingen.* 33 (1889), p. 583 (beruht auf dem Satze, dass jedes nicht zu grosse Stück einer beliebigen Skala sich näherungsweise als Teil einer projektiven Skala, s. oben, betrachten lässt).

418) So *A. Adler*, *Wien. Ber.* 94² (1886), p. 406; „*échelle régulière*“ bei „d'Ocagne“, p. 9.

und 3) die projektive Skala⁴¹⁹⁾, bei welcher der Träger eine Gerade und $f(x)$ eine gebrochene lineare Funktion von x ist.

Ist nun mit einer Skala von $f(x)$ die zu Grunde liegende gemeine Skala auf derselben Linie gezeichnet⁴²⁰⁾, so kann man gegenüber der Stelle der ersten Skala, an welcher irgend ein gegebener

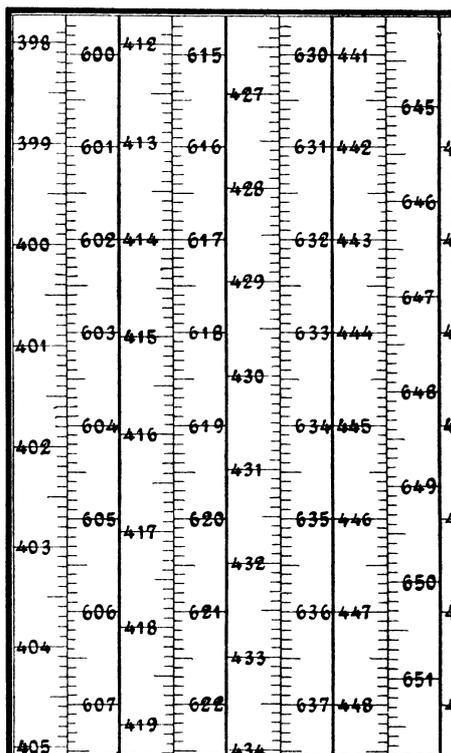


Fig. 40. Bruchstück der graphischen Logarithmentafel von Tichy.

Wert x steht, den Wert von $y = f(x)$ ablesen und auf dem umgekehrten Wege auch zu jedem gegebenen Wert von $f(x)$ den Wert

419) Adler⁴¹⁸⁾, p. 416, „échelle linéaire générale“ bei „d'Ocagne“, p. 14; ist eine beliebige Centralprojektion einer geradlinigen gemeinen Skala, in der Perspektive bekannt als „perspektivischer Massstab“, hier nach Chr. Wiener, Darstellende Geometrie 1, Leipzig 1884, p. 18 von Alleaume 1628 eingeführt.

420) Die Teilstriche der beiden Skalen lässt man nach verschiedenen Seiten der tragenden Linie gehen. Die Skalen können auch z. B. auf parallelen Geraden oder konzentrischen Kreisen untergebracht sein, in welchem Falle ein System von Hilfslinien oder ein beweglicher Zeiger den Zusammenhang zwischen beiden Skalen herstellen muss. Wegen anderer möglicher Anordnungen s. „d'Ocagne“, p. 24—31.

des Argumentes x finden⁴²¹⁾. Fig. 40 zeigt als Beispiel⁴²²⁾ ein Stück der graphischen Logarithmentafel von *A. Tichy*⁴²³⁾.

44. Cartesische Tafeln. Eine Tafel der Funktion $z = f(x, y)$ von zwei Veränderlichen x und y ergibt sich, wenn man letztere als

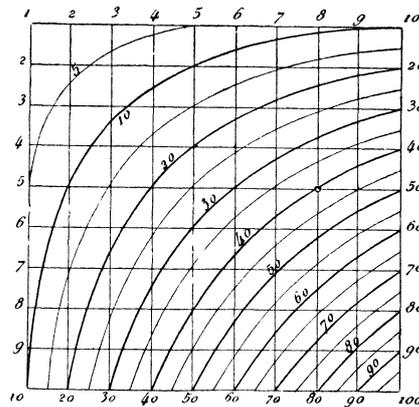


Fig. 41.

Cartesische Koordinaten eines Punktes betrachtet, dem z einzelne Werte z_1, z_2, z_3, \dots erteilt, die zu den Gleichungen $f(x, y) = z_1, f(x, y) = z_2, \dots$ gehörigen Kurven zeichnet — *Vogler* nennt sie *Isoplethen*⁴²⁴⁾ — und neben jede von ihnen den betreffenden Wert von z schiebt⁴²⁵⁾. Mittelst der fertigen Tafel⁴²⁶⁾, die als eine Darstellung der zur Gleichung $z = f(x, y)$ gehörigen Fläche durch Niveaulinien angesehen wer-

421) Allgemeiner kann man eine etwa durch $F(x, y) = \dot{0}$ ausgedrückte Abhängigkeit zwischen x und y durch Vereinigung zweier Skalen — sie mögen zu den Funktionen $f(x)$ und $g(y)$ gehören — darstellen, die so gewählt sind, dass $f(x) - g(y) = 0$ gleichwertig mit der gegebenen Gleichung ist. — *D'Ocagne* nennt solche Tafeln „abaques à échelles accolées“, *Schilling* „Rechentafeln mit vereinigten Skalen“.

422) Wegen anderer s. „*Vogler*“, Taf. II, „*d'Ocagne*“, p. 18 ff.; einfache in grosser Zahl schon bei *M. R. Pressler* (Der Messknecht . . . , Braunschweig 1852, 2. Aufl. 1854; Zeitmessknecht 1856; Ingenieur-Messknecht, 3. Aufl. 1862).

423) Graphische Logarithmentafeln, Wien 1897, Beilage zur Zeitschr. des Österr. Ingen.- u. Arch.-Ver.; die gemeinen Logarithmen 4-stellig auf 1 Seite, 5-stellig auf 10 S., ferner Tafeln der Log. der trigonom. Funktionen u. andere. — *A. Schülke* giebt (Vierstellige Logarithmentafeln . . . , Leipzig 1895, p. 18) eine graphische Tafel der Antilogarithmen (s. Nr. 29); *J. Schoeckel* benützt (Zeitschr. Vermessungsw. 29 (1900), p. 413) eine antilogarithmische Skala, um bei Flächenberechnungen Multiplikation in Addition zu verwandeln.

424) Von *ισοπληθής*, an Zahl gleich oder gleichwertig, „*Vogler*“, p. 7. *Lalanne* hat sich 1878 *Vogler* angeschlossen (vorher „courbe d'égal élément“), *d'Ocagne* sagt seit 1896 „courbe cotée“. Über die Konstruktion der Isoplethen mit Hilfe der darstellenden Geometrie, namentlich im Fall einer empirischen Funktion, s. *Lalanne*⁴²⁵⁾, p. 18.

425) Nach *Lalanne*⁴²⁵⁾, p. 63 findet sich das erste Beispiel — mit $z = xy$, s. Fig. 41 — bei *L. E. Pouchet* 1797 (genauere Angaben „*Favaro-Terrier*“ 1, p. XX u. XXI), vgl. aber Anm. 415. Die nächsten Beispiele sind nach „*Pesci*“, p. 7 fünf Tafeln zur Reduktion von Mondsdistanzen von *J. Luyando*, Madrid 1806; wegen anderer aus der Zeit vor *Lalanne* s. *Lalanne*⁴²⁵⁾, p. 63 ff.

426) Bei „*d'Ocagne*“, p. 34 heisst diese Art von Tafeln „abaques carté-

den kann⁴²⁷), lässt sich zu jedem gegebenen Wertepaar $x = a$, $y = b$ der Funktionswert $f(a, b)$ durch Ablesen an der durch den Punkt (a, b) gehenden Isoplethe⁴²⁸) finden⁴²⁹). Im Falle $z = xy$ z. B. erhält man die Multiplikationstafel von *L. E. Pouchet*⁴²⁵), Fig. 41, mit gleichseitigen Hyperbeln als Isoplethen⁴³⁰). Die Tafeln zur Auflösung trinomischer Gleichungen von *L. Lalanne*⁴³¹)⁴³²), von welchen Fig. 42 den einfachsten Fall zeigt⁴³³), bilden ein anderes klassisches Beispiel: In der aufzulösenden Gleichung $z^m + az^n + b = 0$ setzt *Lalanne* $a = x$, $b = y$, dann gehört zur Gleichung $z^m + xz^n + y = 0$ eine (für jedes Wertepaar m, n besonders zu zeichnende) Tafel, deren

siens“, weil sie unmittelbar der Anwendung Cartesischer Koordinaten entspringen; s. auch Anm. 427.

427) Nach *Lalanne*⁴³¹), p. 63, 64 hat zuerst *G. Piobert* 1825 die Darstellung topographischer Flächen durch Niveaulinien zur Umwandlung numerischer Tafeln mit zwei Eingängen in graphische Tafeln benützt, *Olry Terquem* 1830 (*Mémorial de l'artillerie* 3) das allgemeine Prinzip klar ausgesprochen. *Lalanne* geht auch hiervon aus und spricht deshalb anfänglich (*Par. C. R.* 16 (1843), p. 1162) von „tables (plans) topographiques“; ähnlich *Vogler*: Schichtentafel, Schichtennetz (neben Isoplethentafel).

428) Geht keine der gezeichneten Isoplethen durch den Punkt (a, b) , so muss zwischen den zu den benachbarten Isoplethen gehörigen Werten von z durch Schätzung nach Augenmass interpoliert werden (etwa mittelst der gedachten durch den Punkt gehenden senkrechten Trajektorie der Isoplethen) vgl., auch wegen der Schätzungsfehler, „*Vogler*“, p. 63 ff. Zum Aufsuchen des Punktes (a, b) dienen im voraus gezeichnete Parallelen zu jeder Axe durch die Teilpunkte der in der andern Axe angebrachten Skala, seltener eine parallel einer Axe verschiebbare Skala.

429) Ähnlich bestimmt man, mit Hilfe der Parallelen zu den Axen, x oder y , wenn die Werte von y und z oder x und z gegeben sind. Die Beziehung zwischen den Veränderlichen kann allgemeiner in der Form $F(x, y, z) = 0$ gegeben sein. Die Tafel nimmt andere Formen an, wenn man x oder y , statt z , als abhängige Veränderliche ansieht.

430) Figur 41 ist *Lalanne*⁴³¹) entlehnt (pl. 98, fig. 1). Die Tafeln „*Vogler*“, p. 10, Fig. 5 und p. 12, Fig. 6 enthalten besondere Leitlinien für Quadrate, Wurzeln u. s. w., wie sich ähnlicher *Pouchet* bedient zu haben scheint (vgl. „*Favaro-Terrier*“ 1, p. XXI).

431) *Annales ponts chaussées* (2) 11 (1846), p. 27, 40.

432) *Par. C. R.* 81 (1875), p. 1186, 1243; 82 (1876), p. 1487; 87 (1878), p. 157.

433) Tafel zur Auflösung reduzierter kubischer Gleichungen *Lalanne*⁴³¹), pl. 99, fig. 1, auch *J. de la Gournerie*, *Traité de Géométrie descriptive* 3, Paris 1864, pl. 46, fig. 455, verkleinert „*Favaro-Terrier*“ 2, p. 247, fig. 115, vereinfacht „*d'Ocagne*“, p. 44, fig. 24. — *Lalanne* bestimmt p. 29 geometrisch an Hand der Tafel die Wahrscheinlichkeit, dass eine Gleichung, deren Koeffizienten unter gegebenen Grenzen liegen, drei reelle Wurzeln hat.

Isoplethen in Geraden bestehen, da die Gleichung in x und y linear ist⁴³⁴).

Jede punktweise Transformation einer Cartesischen Tafel, die *Lalanne* als Anamorphose bezeichnet⁴³⁵), führt zu einer neuen, gleich-

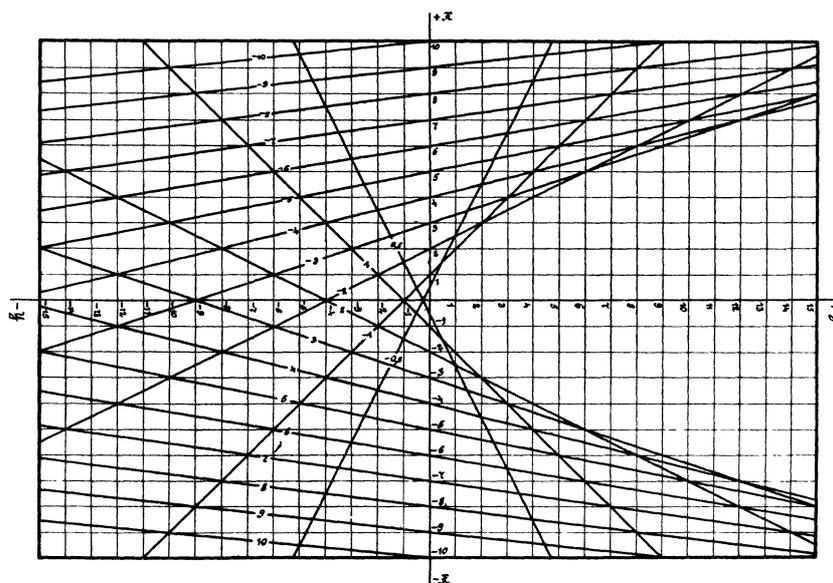


Fig. 42. Tafel zur Auflösung quadratischer Gleichungen nach *Lalanne*.

wertigen Tafel, die auf dieselbe Art wie die ursprüngliche zu gebrauchen ist, wenn die Gleichungen der Transformation die Form

$$x' = \varphi(x), \quad y' = \psi(y)$$

haben, also die Parallelen zu den Koordinatenachsen in ebensolche übergehen⁴³⁶). So verwandelt sich die hyperbolische Multiplikationstafel Fig. 41 durch die logarithmische Transformation

$$x' = \log x, \quad y' = \log y$$

in *Lalanne's* „abaque ou compteur universel“⁴³⁷) (in Fig. 43 ungefähr

434) Man liest an den durch den Punkt (a, b) gehenden Geraden die Wurzeln der Gleichung ab. Die Hüllkurve der Geraden, in Fig. 42 eine Parabel, ist der Ort der Punkte (a, b) , für welche die Gleichung eine Doppelwurzel hat, s. *Lalanne* ⁴³¹), p. 28.

435) Unter Hinweis auf die Bedeutung dieses Wortes in der Physik ⁴³¹), p. 13.

436) In der neuen Tafel sind die Axen gemäss den Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(y)$ zu teilen oder zu „graduieren“, d. h. an Stelle der gemeinen Skalen treten die zu jenen Funktionen gehörigen.

437) Schon erwähnt ⁴³⁸), ausführlich beschrieben ⁴³¹), p. 43 ff. (dazu pl. 100,

in halber Grösse dargestellt); wegen der aus $xy = z$ folgenden linearen Gleichung:

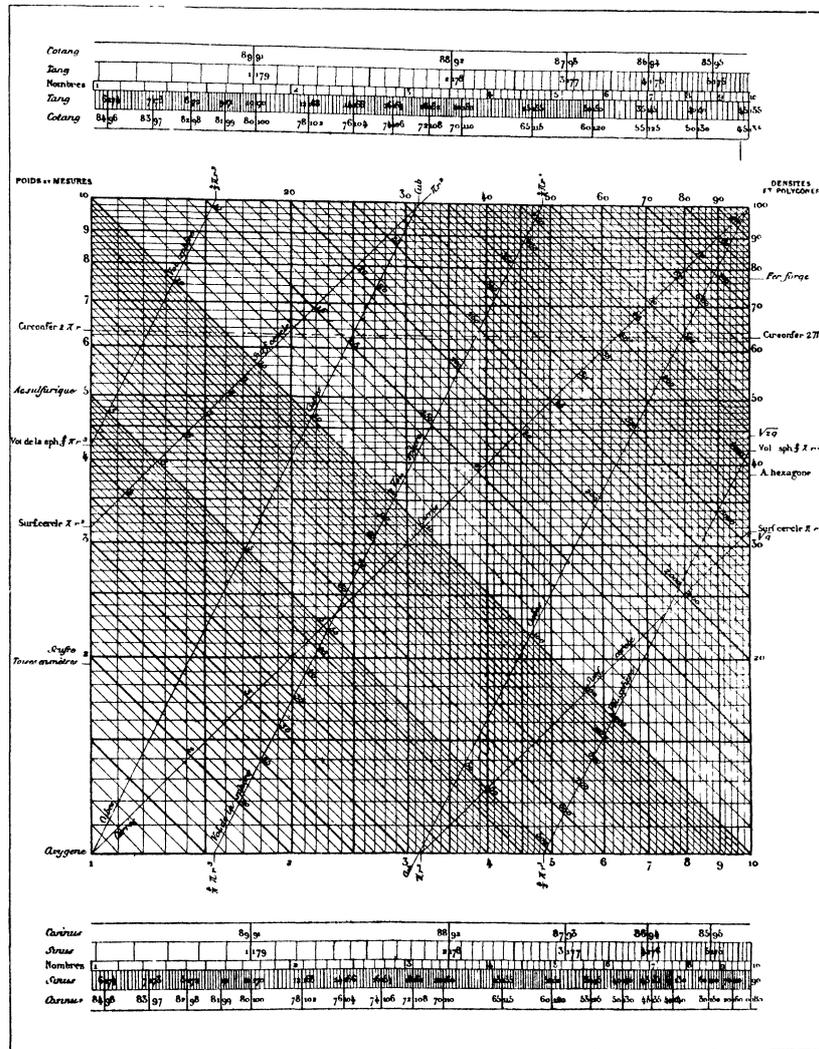


Fig. 43. „Abaque ou compteur universel“ von Lalanne.

$$x' + y' = \log z$$

sind hier die Isolethen gerade Linien und es dient auch die von

fig. 2), Name von $\alpha\beta\alpha\xi = \text{compteur}$ hergeleitet; hat besondere Hülfslinien für die Multiplikation mit häufigen Konstanten, für Quadrate, Wurzeln u. s. w., ist von ähnlicher Vielseitigkeit wie der logarithmische Rechenschieber (Nr. 50), in

Lalanne eingeführte⁴³⁸⁾ Anamorphose hauptsächlich zum Geradestrecken krummliniger Isoplethen⁴³⁹⁾. Damit sich letzterer Zweck erreichen lässt, muss die darzustellende Beziehung zwischen den Veränderlichen x, y, z , welche $F(x, y, z) = 0$ sei, auf die Form:

$$ax' + by' = c$$

gebracht werden können, wo wieder $x' = \varphi(x)$, $y' = \psi(y)$ ist und a, b, c Funktionen von z allein sind⁴⁴⁰⁾. Notwendige und ausreichende Bedingungen hierfür haben *J. Massau*⁴⁴¹⁾ und *L. Lecornu*⁴⁴²⁾ in Form

mancher Hinsicht vielleicht letzterem vorzuziehen (z. B. höhere Potenzen und Wurzeln leichter zu bestimmen, Verziehen des Papiers ohne Einfluss, Preis geringer). S. auch *Lalanne*, Description et usage de l'abaque... , Paris 1845, 3^e éd. 1863, deutsche und englische Übersetzung, Leipzig bezw. London 1846; *Th. Olivier*, Soc. d'enc. Bull. 1846, p. 153; „Culmann“, p. 78 und Taf. 2, Fig. 1; „Favaro-Terrier“ 2, p. 102. Von *G. Herrmann* wurde die logarithmische Rechen-tafel wieder gefunden (Das graphische Einmaleins, Braunschweig 1875, vgl. auch „Vogler“, p. 37 u. Taf. 1), von *F. Samuelli* (Triangoli e rettangoli calcolatori, Firenze 1892) durch Anwendung schiefwinkliger Koordinaten auf kleineren Raum gebracht.

438) Vorläufige Mitteilung Par. C. R. 16 (1843), p. 1162, dann⁴³¹⁾, p. 11, 30; wieder gefunden u. a. von *A. Kapteyn*, Revue universelle des mines 40 (1876), p. 136.

439) Wenn solches unmöglich ist, gelingt es zuweilen, ungünstige Kurven in besser geeignete zu verwandeln, Beispiel „d'Ocagne“, p. 88. Über die in letzterem angewandte graphische Anamorphose („d'Ocagne“, p. 85; *Lalanne*, Exposition de Melbourne Notices, Paris 1880, p. 374), vgl. auch „Vogler“, p. 18 ff. Wegen polygonaler Isoplethen s. „Vogler“, p. 20 u. Taf. V, „d'Ocagne“, p. 53.

440) Diese Bemerkung von *Cauchy*, Par. C. R. 17 (1843), p. 494. — Die einfachsten und häufigsten Fälle sind, unter u, v, w beziehentlich Funktionen von x , von y , von z allein verstanden,

$$w = u + v \quad \text{und} \quad w = uv,$$

wo man $x' = u$, $y' = v$ bezw. $x' = \log x$, $y' = \log v$ setzt und parallele Isoplethen erhält. Im Falle $uw = v$ kann man entweder $x' = u$, $y' = v$ nehmen (Isoplethen sind Geraden durch den Ursprung, „abaques à radiantes“ nach *d'Ocagne*), oder durch Logarithmieren den ersten Fall herstellen. Dasselbe gelingt im Falle $w = u^p$ und ähnlichen durch zweimaliges Logarithmieren; Beispiel $y^z = x$, Fig. 44, „Vogler“, p. 44, mit welcher Tafel sich alle drei Operationen 3. Stufe (s. diesen Band, p. 22) ausführen lassen.

441) Mémoire sur l'Intégration graphique (Extrait de la Rev. universelle des mines (2) 16 (1884)), Liège 1885, p. 137 (hier nur die Ergebnisse, Ableitung mitgeteilt „d'Ocagne“, p. 422).

442) Par. C. R. 102 (1886), p. 816 („d'Ocagne“, p. 424). Mit den bekannten Abkürzungen:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

finden sich die Bedingungsgleichungen:

partieller Differentialgleichungen 5^{ter} Ordnung aufgestellt, nachdem *P. de Saint-Robert*⁴⁴³) einen besonderen Fall erledigt hatte.

Wenn man mit *Massau*⁴⁴¹) p. 140 die allgemeinste Punkttransformation, etwa mit den Gleichungen:

$$x' = \varphi(x, y), \quad y' = \psi(x, y)$$

zulässt, so verwandeln sich die zu den Axen parallelen Geraden

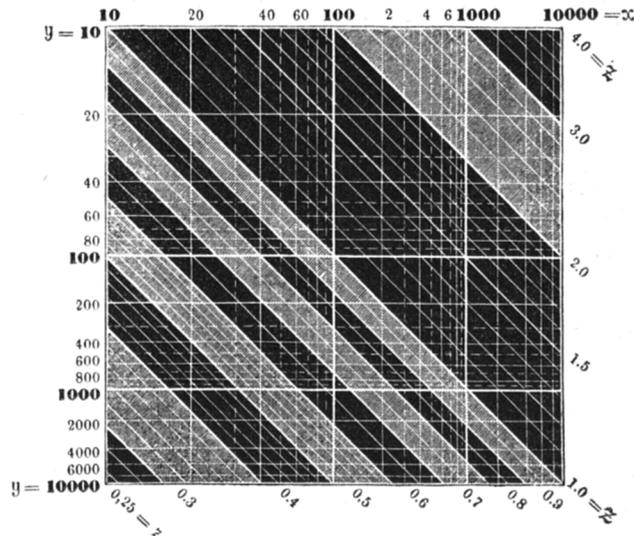


Fig. 44. *Vogler's Exponententafel, $y^z = x$.*

$x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$ je in eine Schar beliebiger Linien. Diese allgemeinere Anamorphose ermöglicht bisweilen, mit Geraden oder

$$\frac{\partial w}{\partial x} : p = \frac{\partial w}{\partial y} : q = v - uw,$$

wo:

$$u = \frac{s}{pq}, \quad v = \frac{\partial u}{\partial y} : q - \frac{\partial u}{\partial x} : p, \quad w = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial y} : q - \frac{\partial v}{\partial x} : p \right).$$

443) *Torino Ac. Sc. Memorie* (2) 25 (1871), p. 53 („d'Ocagne“, p. 418). Es ist der Fall, wo man die Veränderlichen trennen oder $F(x, y, z)$ auf die Form:

$$X + Y = Z$$

bringen, also die Isoplethen in eine Schar von Parallelen überführen kann (von *de Saint-Robert* jedoch vom Gesichtspunkt der Herstellbarkeit eines Rechenschiebers betrachtet). Es ergibt sich die Bedingung:

$$\frac{\partial^2 \log R}{\partial x \partial y} = 0,$$

wo:

$$R = \frac{\partial z}{\partial x} : \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Kreisen auszukommen, wo die oben betrachtete speziellere Anamorphose von *Lalanne* nicht anwendbar wäre. Eine andere Auffassung⁴⁴⁴) ist folgende. Sind von drei einfach unendlichen Kurvenscharen, deren Gleichungen in den laufenden Koordinaten x' , y' :

$$f_1(x', y', x) = 0, \quad f_2(x', y', y) = 0, \quad f_3(x', y', z) = 0$$

seien, einzelne Kurven gezeichnet und kotiert, d. h. mit den zugehörigen Werten des Parameters x , bzw. y oder z beziffert, so hat man eine Tafel derjenigen Gleichung:

$$F(x, y, z) = 0,$$

die sich aus den vorigen Gleichungen durch Elimination von x' und y' ergibt⁴⁴⁵). Ist die Funktion F gegeben, so können zwei der Funktionen f_1, f_2, f_3 beliebig angenommen werden⁴⁴⁶). Damit sich F durch drei Scharen von Geraden darstellen lässt, muss diese Funktion auf die Form einer Determinante:

$$\sum \pm ab'c''$$

gebracht werden können, wo a, b, c Funktionen von x allein, $a', b' c'$ Funktionen von y allein, a'', b'', c'' Funktionen von z allein sind⁴⁴⁷). Die allgemeinste, durch drei Scharen von Kreisen darstellbare Gleichung hat *d'Ocagne*⁴⁴⁸) angegeben.

Es steht nichts im Wege, von den Veränderlichen x, y, z die beiden als unabhängig betrachteten als Koordinaten eines Punktes in

444) S. *Massau*⁴⁴¹), p. 139, „d'Ocagne“, p. 90, 97.

445) Der Vorgang beim Aufsuchen des Wertes von z , der zu einem gegebenen Wertepaar $x = a, y = b$ gehört, besteht darin, dass man die Kurve der ersten Schar mit der Kote a und die Kurve der zweiten Schar mit der Kote b bis zu ihrem Schnittpunkt verfolgt und die Kote der durch diesen Punkt gehenden Kurve der dritten Schar abliest. — Zu derselben Verallgemeinerung der gewöhnlichen Tafeln kommt man durch Deutung von x und y als beliebiger Koordinaten statt Cartesischer.

446) Vorausgesetzt, dass die Gleichungen $f_1 = 0, f_2 = 0, f_3 = 0$ reelle Kurven darstellen, s. „d'Ocagne“, p. 98.

447) *Massau*⁴⁴¹), p. 140, „d'Ocagne“, p. 100; einfache Fälle *Massau*, p. 161, 163, „d'Ocagne“, p. 101; Beispiel *Massau*, fig. 141, „d'Ocagne“, p. 109, fig. 48, p. 111. S. auch Nr. 46, bes. Anm. 471.

448) „d'Ocagne“, p. 114, Beispiel (zwei Scharen in Geraden ausgeartet), p. 115, fig. 49, p. 117. Ein älteres Beispiel von *Ricour* (1873), „d'Ocagne“, p. 117, Fussn. 2 erwähnt. *R. Helmhert* bemerkt *Zeitschr. f. Verm.-W.* 1876, p. 31, dass jede nach *Lalanne*'s Methode durch parallele oder nach einem Punkt laufende Geraden darstellbare Funktion auch durch konzentrische Kreise dargestellt werden kann; Fall $z = xy$ („graphisches Einmaleins in Kreisen“, *Helmert*, Taf. 2, Fig. 6), wo die Transformation $x' = \sqrt{\log x}, y' = \sqrt{\log y}$ nötig, schon von *Lalanne*⁴⁵¹), p. 36 ausgeführt.

einem beliebigen System, statt in einem Cartesischen, zu deuten. Nimmt man Polarkoordinaten⁴⁴⁹⁾, so wird das Zeichnen einzelner Koordinatenlinien (d. h. Strahlen durch den Nullpunkt und Kreise

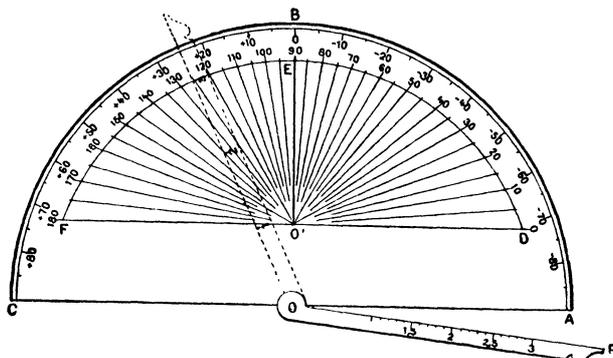


Fig. 45.

um denselben) durch Anwendung einer um den Nullpunkt drehbaren Skala, zu deren Einstellung eine feste (etwa kreisförmige) Skala dient, vgl. Fig. 45⁴⁵⁰⁾, überflüssig gemacht⁴⁵¹⁾.

45. Hexagonale Tafeln. Die einzelnen Geraden einer (einfach unendlichen) Schar kotierter Parallelen können durch eine bewegliche Gerade nach Bedarf hergestellt und brauchen deshalb nicht wirklich

449) *d'Ocagne* spricht dann im Anschluss an *Pesci* von „abaques polaires“; über deren Theorie s. „*d'Ocagne*“, p. 117 ff., „*Pesci*“, p. 19 ff.

450) Beispiel von *Pesci*, *Rivista marittima*, März 1897, „*d'Ocagne*“, p. 121; die dargestellte (in der Nautik vorkommende) Gleichung lautet, für Polarkoordinaten r, φ geschrieben:

$$r \cos(z - \varphi) = l \cos z;$$

die kotierten Linien sind gerade. Weitere Beispiele „*Pesci*“, p. 20 ff.

451) Ein System von zwei Gleichungen der Form $F(x, y, z) = 0$, $\Phi(x, y, t) = 0$ kann (statt durch zwei getrennte Tafeln) auf demselben Blatt so dargestellt werden, dass für eine der gemeinsamen Veränderlichen x, y bei beiden Gleichungen dieselbe Kurvenschar zur Anwendung kommt („abaques accouplés“, „*d'Ocagne*“, p. 247), oder sowohl für x als für y je dieselbe Kurvenschar („abaques superposés“), Beispiele „*d'Ocagne*“, p. 251, 253. — Cartesische Tafeln mit und ohne die (jetzt ziemlich eingebürgerte) Anamorphose von *Lalanne* sind in unübersichtlicher Zahl vor allem in technischen Werken und Zeitschriften veröffentlicht. Man findet solche nebst weiterer Litteratur in *Lalanne*⁴³¹⁾, „*Vogler*“ (sehr viele Beispiele im Text sowie sechs Lichtdrucktafeln, letztere auch gesondert erschienen), noch zu erwähnen *Vogler*, Graphische Barometer-tafeln . . . , Braunschweig 1880; „*Favaro-Terrier*“ 2, p. 154 Fussn., p. 208 ff.; *Massau*⁴⁴¹⁾, p. 166 ff.; „*d'Ocagne* 1891“, chap. 2; „*d'Ocagne*“ chap. 2, 4; „*Pesci*“ § 1—14; „*Soreau*“.

gezogen zu werden, wenn die durch einen Schnitt senkrecht zu den Geraden entstehende Skala gezeichnet ist⁴⁵²). Somit kann⁴⁵³) bei einer Cartesischen Tafel, die aus drei Scharen kotierter Parallelen besteht, das wirkliche Zeichnen der letzteren unterbleiben, wenn man die zugehörigen drei Skalen⁴⁵⁴) angiebt und drei vermöge der dargestellten Gleichung $F(x, y, z) = 0$ zusammengehörige, d. h. sich in einem Punkt schneidende Geraden der drei Scharen jedesmal durch Auflegen eines durchsichtigen Blattes mit drei von einem Punkt aus-

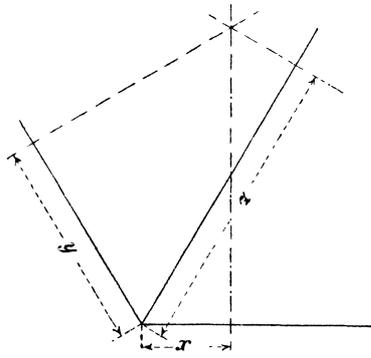


Fig. 46.

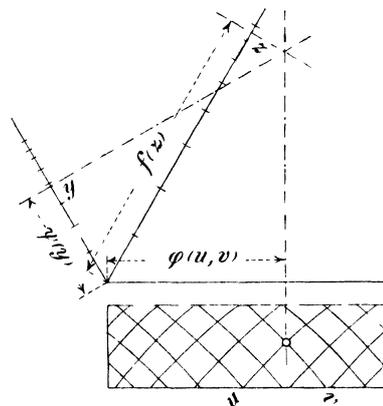


Fig. 47.

gehenden und die richtigen Winkel einschliessenden Strahlen oder Zeigern⁴⁵⁵) verwirklicht. Es ist vorteilhaft, mit *Ch. Lallemand*⁴⁵⁶) die

452) Die Punkte derselben sind mit den Knoten der hindurchgehenden Geraden zu versehen. — Es entspricht dies ganz der in der Methode der kotierten Projektionen (s. III A 6) üblichen Darstellung einer Ebene durch einen „Böschungsmassstab“ statt durch einzelne Niveaulinien. — Der Träger der Skala darf auch, wenn die Richtung der Parallelen angegeben ist, schief zu denselben, gebrochen und selbst krummlinig sein.

453) Nach einer Bemerkung von *Blum*, *Ann. ponts chaussées* (6) 1 (1881), p. 455.

454) In dem Absetzen (d. h. Teilen in Stücke und gleichzeitigen parallelen Verlegen entsprechender Stücke) der drei Skalen hat man ein Mittel, die Tafel auf möglichst kleinen Raum zu bringen, s. „d’Ocagne“, p. 76.

455) „Rapporteur“ (*Blum*), „indicateur“ (*Lallemand*, *d’Ocagne*). „Index“ nennt *d’Ocagne* jeden der 3 Zeiger, *Lallemand* nannte so ihre Gesamtheit. Behufs Orientierung der Zeiger müssen zwar auf der Tafel einzelne Parallelen einer der 3 Scharen gezeichnet, aber sie können beliebig unterbrochen und brauchen nicht kotiert zu sein. Um den zu einem Wertepaar $x = a$, $y = b$ gehörigen Wert von z zu erhalten, kann man zuerst das durchsichtige Blatt so auflegen, dass der 1. Zeiger durch den Punkt a der ersten Skala, der 2. Zeiger

Zeiger unter sich gleiche Winkel bilden zu lassen⁴⁵⁷); dann lässt sich die Erklärung unabhängig von den Cartesischen Tafeln mittelst des elementaren Satzes geben, dass (s. Fig. 46) durch die Lote von einem beliebigen Punkt auf drei durch einen Punkt gehende und Winkel gleich $\frac{\pi}{3}$ einschliessende Axen auf letzteren Stücke x, y, z abgeschnitten werden, für welche $z = x + y$ ist⁴⁵⁸). Der Fortschritt besteht hauptsächlich⁴⁵⁹) darin, dass nun auch jede Funktion von mehr als zwei Veränderlichen dargestellt werden kann, sobald sich die Veränderlichen entweder vollständig oder wenigstens nach Gruppen von je zweien trennen lassen. Der obige geometrische Satz lässt sich nämlich als ein Mittel betrachten, zwei Strecken — und durch wiederholte Anwendung beliebig viele Strecken — mit Hilfe des beschriebenen Zeigersystems zu addieren, nach Anbringung von Skalen für die Funktionen $\varphi(x), \psi(y), \chi(z), \dots$ in den Axen oder parallel zu denselben kann daher $\varphi(x) + \psi(y) + \chi(z) + \dots$ mechanisch gefunden werden; ist ein Glied selbst eine Funktion von zwei Veränderlichen, so hat man dafür eine „binäre Skala“⁴⁶⁰) zu benützen⁴⁶¹)⁴⁶²).

durch den Punkt b der zweiten Skala geht, dann das Blatt orientieren und am Schnittpunkt des 3. Zeigers mit der dritten Skala ablesen.

456) Par. C. R. 102 (1886), p. 816, ausführlicher „d'Ocagne“, p. 70, 312.

457) Sie sind dann den Durchmesser eines regelmässigen Sechsecks parallel, woher die von *Lallemand* eingeführte Bezeichnung „abaque hexagonal“.

458) Kann man $F(x, y, z) = 0$ die Gestalt $\varphi(x) + \psi(y) = f(z)$ geben (vgl. Anm. 443), so genügt es, die Axen gemäss den Gleichungen $x' = \varphi(x), y' = \psi(y), z' = f(z)$ zu graduieren. Die Skalen können dann in den Richtungen senkrecht zu den Axen beliebig verschoben und auch nach Anm. 454 behandelt werden.

459) Dem Vorteil vor den Cartesischen Tafeln, dass keine Überladung mit Linien vorhanden und niemals an blos gedachten Linien abzulesen ist, steht bei den hexagonalen Tafeln als Nachteil die etwas umständliche Einstellung der Zeiger gegenüber.

460) „Échelle diagraphique“ (*Lallemand*), „échelle binaire“ (*d'Ocagne*); die schematische Figur 47 zeigt eine solche, zur Funktion $\varphi(u, v)$ gehörig, an der x -Axe: Man sieht zwei Scharen kotierter Linien; die Senkrechte zur Axe durch den Schnittpunkt der Linien mit den Knoten u und v schneidet von der Axe das Stück $\varphi(u, v)$ ab (insgesamt bilden die Senkrechten eine zweifach unendliche Schar). Den Gedanken schreibt *Lallemand*⁴⁵⁶), p. 818, Fussn. 2 *E. Prévot* zu. Vgl. auch Nr. 47, Anm. 489. — Fig. 47 entspricht, da auf der y - und z -Axe noch Skalen der Funktionen $\psi(y)$ und $f(z)$ angebracht sind, dem Falle $f(z) = \varphi(u, v) + \psi(y)$.

461) Die ganze Methode von *Lallemand* in den Grundzügen angegeben, weiter ausgeführt „d'Ocagne 1891“ und „d'Ocagne“, p. 82, 312, 317. Über die ebenfalls schon von *Lallemand* ins Auge gefasste Ausdehnung von dem Fall

46. Methode der fluchtrechten Punkte. *A. F. Möbius* hat 1841 bemerkt⁴⁶³), man könne eine Parabel in Verbindung mit einer Geraden als „Multiplikationsmaschine“ benützen, nämlich beide so einteilen,

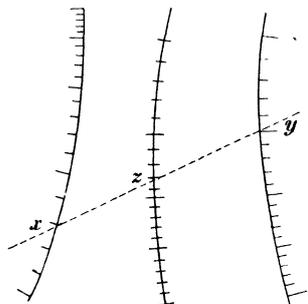


Fig. 48.

dass ein durch die den Faktoren entsprechenden Teilpunkte der Parabel gelegtes Lineal die Gerade in dem Teilpunkt des Produktes trifft⁴⁶⁴), wobei für die Parabel auch zwei Geraden, für jeden Faktor eine, genommen werden könnten. Wir sehen hier die Anfänge⁴⁶⁵) einer wichtigen Methode, bei der im allgemeinsten Fall eine Gleichung $F(x, y, z) = 0$ durch drei Skalen (s. Fig. 48) dargestellt wird, von deren Teilpunkten je drei in einer Geraden liegende zu Werten x, y, z gehören,

die jene Gleichung befriedigen⁴⁶⁶), welche Darstellung der durch eine Cartesische Tafel (s. Nr. 44) mit drei Scharen von Geraden nach dem geometrischen Prinzip der Dualität oder Reziprozität (s. III A 5, III C 1) entspricht⁴⁶⁷). *M. d'Ocagne* hat, nachdem er 1884 dieses Prinzip auf *Lalanne's* Tafeln zur Auflösung trinomischer Gleichungen (s. Nr. 44) angewandt hatte⁴⁶⁸), den allgemeinen Gedanken 1890 aus-

einer Summe auf den einer beliebigen Funktion binärer Elemente s. „d'Ocagne 1891“, p. 72, 74.

462) Beispiele hexagonaler Tafeln *Ch. Lallemant*, Nivellement de haute précision, Paris 1889, p. 31, 38; „d'Ocagne“, p. 79, 81, 86, 314, 316, 319.

463) *J. f. Math.* 22, p. 280 = Werke 4, p. 620.

464) Die Ausführung aller gewöhnlichen Rechnungsarten mittelst eines, mit Einteilung versehenen Kegelschnittes zeigt u. a. *L. Kotányi*, Zeitschr. Math. Phys. 28 (1882), p. 248.

465) Zu nennen ist auch die noch allgemeinere, weil eine Funktion dreier Veränderlicher darstellende Tafel von *Ganguillet* und *Kutter*⁴⁶⁹) aus d. J. 1869.

466) Von *d'Ocagne* seit 1898 (*Soc. Math. Bull. de France* 26, p. 31) „méthode des points alignés“ genannt (vorher „méthode des points isoplèthes“, „d'Ocagne 1891“, p. 51, bezw. „méthode des points cotés“, *Par. C. R.* 123 (1896), p. 988), vom Verfasser, *Zeitschr. Math. Phys.* 44 (1899), p. 56, übersetzt wie in der Überschrift dieser Nummer (aligné = fluchtrecht = in einer Geraden liegend). „Abaque à alignement“ könnte man durch „Fluchttafel“ wiedergeben (in der Sprache der Techniker alignement = Flucht); *Schilling's* Bezeichnung „kollineare Rechentafel“, „Schilling“, p. 24, kann missverstanden werden.

467) Die dualistische Umformung Cartesischer Tafeln mit drei Kurvenscharen giebt keine brauchbaren Tafeln, eher die von Tafeln mit zwei Geradenscharen und einer Kurvenschar; vgl. „d'Ocagne“, p. 127, ferner p. 129 über die graphische Ausführung bei gegebener Cartesischer Tafel.

468) *Ann. ponts chaussées* (6) 8, p. 531.

gesprochen⁴⁶⁹⁾, was von *A. Adler*⁴⁷⁰⁾ 1886 ebenfalls geschehen war. Trotz ihrer beschränkten Anwendbarkeit⁴⁷¹⁾ haben diese neuen Tafeln so in die Augen springende Vorzüge⁴⁷²⁾, dass man die begeisterte Aufnahme, die sie gefunden haben und den Aufschwung begreift, den mit ihrem Erscheinen die Nomographie genommen hat. Am leichtesten gelangt man zu denselben durch Anwendung von Linienanstatt Punktkoordinaten. Besonders gut eignen sich Parallelkoordinaten⁴⁷³⁾, bei denen die Lage einer Geraden durch die Abschnitte u, v bestimmt wird (s. Fig. 49), die sie auf zwei parallelen Axen bildet⁴⁷⁴⁾. Jede in u und v lineare Gleichung:

$$\lambda u + \mu v = \nu$$

stellt einen Punkt vor⁴⁷⁵⁾. Wenn deshalb $F(x, y, z) = 0$ sich auf die Form:

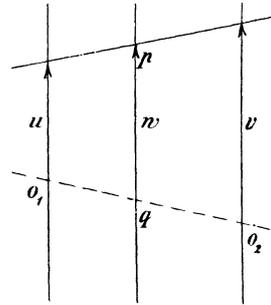


Fig. 49.

469) Génie civil 17, p. 343.

470) Wien. Ber. 94², p. 404.

471) Da $F(x, y, z) = 0$ sich durch eine Cartesische Tafel mit drei Geraden-scharen muss darstellen lassen, so gilt die in Nr. 44 erwähnte Bedingung, dass F sich auf die Form einer Determinante $\sum \pm \varphi_1(x) \psi_2(y) \chi_3(z)$ bringen lässt, in deren Reihen je nur eine Veränderliche vorkommt. Die notwendigen und ausreichenden Bedingungen dafür durch partielle Differentialgleichungen, denen F genügen müsste, auszudrücken, hat *Adler* (Zum graphischen Rechnen, Progr. deutsche Realsch. Karolinenthal 1895/96, p. 29) ohne endgiltigen Erfolg versucht, dagegen sind von *E. Duporcq* solche Bedingungen in Gestalt von Funktionalgleichungen aufgestellt worden Par. C. R. 127 (1898), p. 265, Bull. astr. math (2) 22 (1898), p. 287 („d’Ocagne“, p. 427).

472) Kein Liniengewirr, Einstellen und Ablesen (bei dem ein durchsichtiges Lineal mit eingeritzter Linie oder ein gespannter Faden benutzt wird) bequem und genau; Möglichkeit, mehr als drei Veränderliche zu berücksichtigen. Lehrreich die Gegenüberstellungen „d’Ocagne“, p. 130 u. 131, „Soreau“, p. 234 u. 235.

473) *D’Ocagne* verwendet sie ausschliesslich (*Adler*⁴⁷⁰⁾ sog. Plücker’sche Koordinaten); in die Geometrie sind dieselben (s. *F. Rudio*, Zeitschr. Math. Phys. 44 Supplem. 1899, p. 385) von *W. Unverzagt* eingeführt worden (Über ein einfaches Koordinatensystem der Geraden, Progr. Realgymn. Wiesbaden 1870/1871); den entsprechenden Begriff der Raumgeometrie (Parallelkoordinaten einer Ebene) hatte bereits *Chasles* 1829 (s. Correspondance de Quetelet 6, p. 81) gelegentlich benutzt (III B 2).

474) Für die Anwendungen ist es von Bedeutung, dass der Abstand der Axen, der Nullpunkt und die positive Richtung einer jeden Axe willkürlich sind.

475) Alle Geraden, deren Koordinaten u, v obige Gleichung befriedigen, gehen durch den Punkt p , der den Abstand der Axen im Verhältnis $\mu : \lambda$ teilt und für den (s. Fig. 49) der Abschnitt $w = qp = v : (\lambda + \mu)$ ist.

$$f_1(z) \varphi(x) + f_2(z) \psi(y) = f_3(z)$$

bringen lässt, genügt es, zu setzen:

$$u = \varphi(x), \quad v = \psi(y),$$

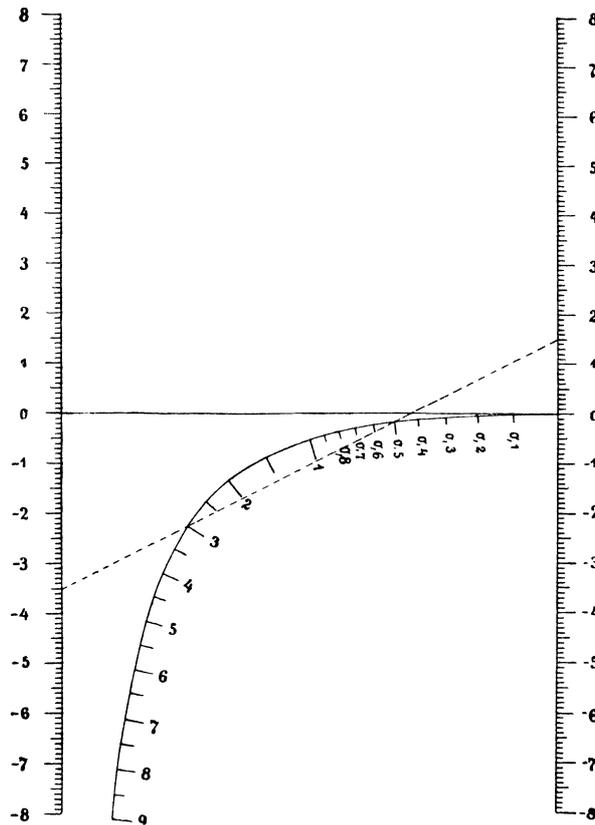


Fig. 50. Tafel zur Auflösung quadratischer Gleichungen nach *d'Ocagne*.

welche Gleichungen Skalen in den beiden Axen liefern, sowie:

$$\lambda : \mu : \nu = f_1(z) : f_2(z) : f_3(z),$$

wodurch die (im allgemeinen krummlinige) z -Skala bestimmt ist⁴⁷⁶).

So ergeben sich im Falle:

⁴⁷⁶ Im Falle $f(z) = \varphi(x) + \psi(y)$ (und bei Anwendung von Logarithmen auch $f(z) = \varphi(x) \cdot \psi(y)$) ist die z -Skala geradlinig und zu den Axen parallel, im Falle $f(z) = \varphi(x) : \psi(y)$ — ohne Logarithmen behandelt — liegt die z -Skala in der Verbindungsgeraden $o_1 o_2$ der Nullpunkte beider Axen; zu denselben Gleichungsformen gehören Tafeln mit nicht parallelen geradlinigen Skalen, weil sie durch kollineare Transformation auf erstere zurückgeführt werden können (s. „*d'Ocagne*“, p. 144, 161, 175, 180). — Über die durch drei projektive Skalen

$$z^m + az^m + b = 0$$

durch Setzen von $u = a$, $v = b$ die Tafeln zur Auflösung trinomischer Gleichungen von *d'Ocagne*⁴⁶⁸⁾ 477), von denen die für quadratische Gleichungen in Fig. 50 verkleinert wiedergegeben ist⁴⁷⁸⁾.

Wenn allgemeiner für $F(x, y, z)$ die Form $\sum \pm \varphi_1(x) \psi_2(y) \chi_3(z)$ hergestellt ist⁴⁷¹⁾, kann man die x -, y -, und z -Skala entweder, unter ξ , η Cartesische Koordinaten eines Punktes verstanden, durch die drei Paare von Gleichungen:

$$\begin{aligned} \xi &= \varphi_1(x) : \chi_1(x), & \eta &= \psi_1(x) : \chi_1(x), \\ \xi &= \varphi_2(y) : \chi_2(y), & \eta &= \psi_2(y) : \chi_2(y), \\ \xi &= \varphi_3(z) : \chi_3(z), & \eta &= \psi_3(z) : \chi_3(z) \end{aligned}$$

bestimmen⁴⁷⁹⁾, oder bei Anwendung von Linienkoordinaten u, v durch die drei Gleichungen⁴⁸⁰⁾:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) \cdot u + \psi_1(x) \cdot v &= \chi_1(x), \\ \varphi_2(y) \cdot u + \psi_2(y) \cdot v &= \chi_2(y), \\ \varphi_3(z) \cdot u + \psi_3(z) \cdot v &= \chi_3(z). \end{aligned}$$

Zur Ausdehnung des Verfahrens auf Gleichungen zwischen mehr als drei Veränderlichen bieten sich verschiedene Wege dar. Durch

darstellbaren Gleichungen s. *d'Ocagne*, Par. C. R. 123 (1896), p. 988, Acta math. 21 (1897), p. 9 („*d'Ocagne*“, p. 436); s. auch „*Soreau*“, p. 246 ff. — Die von *L. Bertrand*, Description et usage d'un abaque . . . , Paris 1895, Abdruck aus: Revue Génie militaire 8 (1894), p. 475 („*d'Ocagne*“, p. 157) gelehrte „Zusammensetzung“ paralleler Skalen gestattet, auch Gleichungen der Form $\varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_2) + \dots + \varphi_n(x_n) = 0$ zwischen n Veränderlichen nach der Methode der fluchtrechten Punkte zu behandeln, wobei zwar noch Geraden gezogen werden müssen.

477) „*d'Ocagne*“, p. 187.

478) Mit derselben können die Tafeln für dreigliedrige kubische, biquadratische u. s. w. Gleichungen auf einem Blatt vereinigt werden (vgl. „*d'Ocagne*“, p. 185, fig. 80), was bei den entsprechenden Tafeln von *Lalanne* praktisch unausführbar wäre. — Die gestrichelte Linie in Fig. 50 entspricht dem Beispiel $x^2 - 3,5x + 1,5 = 0$ (Wurzeln 3 und 0,5). Der Träger der z -Skala, eine Hyperbel, ist nur zwischen den Axen, d. h. für positive z gezeichnet; die absoluten Werte etwaiger negativer Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$ findet man durch Auflösen von $f(-z) = 0$ mittelst der Tafel. Über die Bestimmung imaginärer Wurzeln s. *A. Haas*, Mathem.-naturwiss. Mittlgn. 2 (1887—1888), p. 80.

479) *Adler*⁴⁷⁰⁾, p. 421, „*d'Ocagne*“, p. 134.

480) *d'Ocagne*⁴⁶⁹⁾, p. 344; *Pesci* und *Soreau* beschränken sich auf Punktkoordinaten. — Jede kollineare Transformation einer Tafel giebt wieder eine richtige Tafel; über die Erzielung der besten Anordnung durch eine solche Transformation s. „*d'Ocagne*“, p. 135, die Benützung der Methoden der Perspektive (nach *Lafay*), p. 137; das Abbrechen der Skalen p. 140, 150.

Vereinigung zweier Tafeln der vorhergehenden Art gelingt die Darstellung einer Gleichung $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ zwischen vier Veränderlichen, falls dieselbe durch Elimination einer Hilfsveränderlichen z aus zwei Gleichungen der Form:

$$\begin{aligned} \sum \pm \varphi_1(x_1) \psi_2(x_2) f(z) &= 0, \\ \sum \pm \varphi_3(x_3) \psi_4(x_4) f(z) &= 0 \end{aligned}$$

erhalten werden kann^{481) 482)}. Den Gedanken, als Transversale statt einer

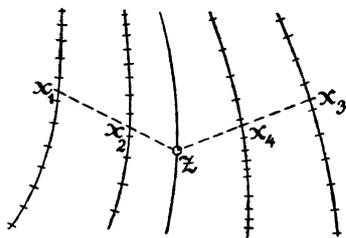


Fig. 51.

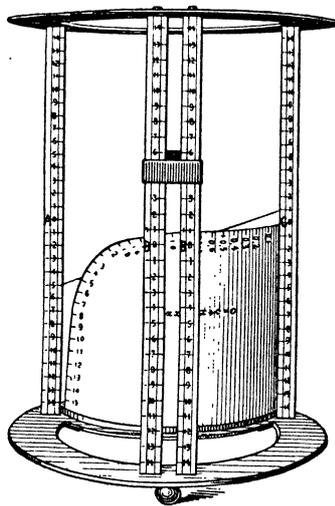


Fig. 52.

481) Die Glieder der dritten Reihe sind beiden Determinanten gemeinsam. Den Wert von x_4 zu gegebenen Werten von x_1, x_2, x_3 findet man, indem man, s. Fig. 51, die Verbindungsgerade der Punkte x_1 und x_2 der ersten beiden Skalen um ihren Schnittpunkt mit dem Träger der z -Skala (die nicht ausgeführt zu sein braucht) dreht — daher die Bezeichnung „abaque à pivotement“ von *d'Ocagne*, Ann. ponts chaussées, 1^{er} trimestre 1898, p. 307 — bis sie durch den Punkt x_3 der 3. Skala geht, und am Schnittpunkt mit der 4. Skala abliest. — Einfachste Fälle:

$$\begin{aligned} \varphi_1 + \psi_2 &= \varphi_3 + \psi_4, \\ \varphi_1 \cdot \psi_2 &= \varphi_3 \cdot \psi_4, \\ \varphi_1 \psi_2 + f_2 &= \varphi_3 \psi_4 + f_4. \end{aligned}$$

Beispiele „d'Ocagne“, p. 221, 229, 233; allgemeine Gleichungsform p. 215.

482) Betreffs der zahlreichen Anwendungen, die von der Methode der fluchtrechten Punkte schon gemacht worden sind, sei ausser auf *d'Ocagne*, *Pesci*, *Soreau* verwiesen auf *Mehmke*, Ann. Phys. Chemie (2) 41 (1890), p. 892 u. Taf. VII; Centralblatt Bauverwaltung 1890, p. 418; Dyck's Katalog, Nachtrag, München 1893, p. 9, 19; Zeitschr. Math. Phys. 44 (1899), p. 56 u. Taf. I—III; *H. Maurer*, Graphische Tafeln für meteorologische und physikalische Zwecke, Diss. Strassburg 1894, *Goedseels*⁴⁸⁴⁾; ferner auf den Bericht von *d'Ocagne*, Revue générale des sciences 9 (1898), p. 116, sowie auf *G. Pesci*, Periodico di Matematica (2) 2 (1899—1900), p. 201; *d'Ocagne*, Par. C. R. 130 (1900), p. 554; *E. Suttor*, Louvain Union Ingén. Mém. 1900, p. 223, 1901, p. 3. — Dass die Methode auch bei empirischen Funktionen gelegentlich anwendbar und nützlich ist, sieht man aus den Beispielen „d'Ocagne“, p. 203, 206, 207 (von *M. Beghin*, *Lafay*, *Rateau*).

Geraden eine krumme Linie zu nehmen, hat *Adler*⁴⁸³⁾ erwogen, *E. Goedseels*⁴⁸⁴⁾ weiter verfolgt. Von *Adler* rührt auch der Gedanke her, aus der Ebene in den Raum zu gehen⁴⁸⁵⁾, auf welchem Gedanken der Apparat von *Mehmke* zur Auflösung vier- und fünfgliedriger Gleichungen, s. Fig. 52 beruht⁴⁸⁶⁾. S. auch Nr. 47.

47. Mehrfach bezifferte Elemente. Sind zwei sich kreuzende einfach unendliche Scharen kotierter Linien gegeben, so lassen sich dem Schnittpunkt irgend einer Linie der einen Schar mit einer Linie der andern Schar die Knoten beider Linien als Doppelkote zuweisen. Führt man durch diese doppeltkotierte Punkte eine dritte Schar von Linien, so übertragen sich auf letztere die Knotenpaare der Punkte — der Begriff einer binären Skala, welcher am Schluss von Nr. 45 auftrat, gehört offenbar hierher — und es schneidet die neue Linienschar jede weitere, ihr nicht angehörige Linie in Punkten, von denen jeder als Überlagerung unendlich vieler doppeltkotierter Punkte angesehen werden kann („verdichtete Punkte“⁴⁸⁷⁾). In dem Ersetzen

483) S. 470), p. 422 u. 471), p. 37; *Adler* lässt Transversalen zu, die von Fall zu Fall gezeichnet werden müssen.

484) Les procédés pour simplifier les calculs ramenés à l'emploi de deux transversales . . . , Bruxelles 1898, Abdruck aus: Brux. Soc. scient. Ann. 23² (1898/1899), p. 1 („d'Ocagne“, p. 234, 238, 241), unabhängig von *Adler*. *Goedseels* bevorzugt Linien von unveränderlicher Form (z. B. Kreise mit konstantem Halbmesser, rechtwinklige Geradenpaare), oder aus gegenseitig beweglichen Teilen solcher zusammengesetzte Transversalen.

485) S. 470), p. 423. Ohne Beweis wird mitgeteilt: Vier Geraden durch einen Punkt, ebenso die Seiten eines windschiefen Vierecks, lassen sich mit Zahlen so belegen, dass die an vier Punkten einer Ebene stehenden Zahlen x_1, x_2, x_3, z immer der Gleichung $z = x_1 x_2 x_3$ genügen.

486) Unabhängig von *Adler*, Dyck's Katalog, München 1892, p. 158, ausführlicher Zeitschr. Math. Phys. 43 (1898), p. 338 („d'Ocagne“, p. 350). Die Wurzeln der Gleichung:

$$t^m + at^n + bt^p + c = 0$$

liest man ab an den Schnittpunkten der zur Exponentenverbindung (m, n, p) gehörigen (als Rand einer Blechschablone dargestellten) eingeteilten Kurve mit der Verbindungsebene der zu den Werten a, b, c gehörigen Punkte der drei parallelen Axen (bezw. an den scheinbaren Schnittpunkten der Kurve mit der aus dem Punkt b gesehenen, durch einen gespannten Faden dargestellten Verbindungsgeraden der Punkte a und c , vgl. Fig. 52, welche die Einstellung für das Beispiel $t^m - 5t^n + 6t^p + 1 = 0$ zeigt). Jede der auswechselbaren Schablonen entspricht dem zu positiven Werten von t gehörigen Teile der betr. Kurve; wegen der Bestimmung negativer Wurzeln vgl. Anm. 478. Bei fünfgliedrigen Gleichungen tritt eine Kurvenschar an Stelle der einzelnen Kurve.

487) „Points condensés“, „d'Ocagne“, p. 296.

einfachkotierter Elemente durch doppeltkotierte bzw. gewöhnlicher Skalen durch binäre oder durch aus verdichteten Punkten gebildete Skalen hat man ein Mittel, Tafeln so zu erweitern, dass sie Gleichungen mit bis zur doppelten Anzahl von Veränderlichen darstellen können, welches Mittel bei Cartesischen Tafeln (Nr. 44) sowohl⁴⁸⁸) wie bei Tafeln mit fluchtrechten Punkten⁴⁸⁹⁾⁴⁹⁰⁾ oder mit beliebigen Transversalen (Nr. 46) anwendbar ist⁴⁹¹⁾. Eine Tafel zur Auflösung vollständiger kubischer Gleichungen, Fig. 53, sei als Beispiel vorgeführt⁴⁹²⁾.

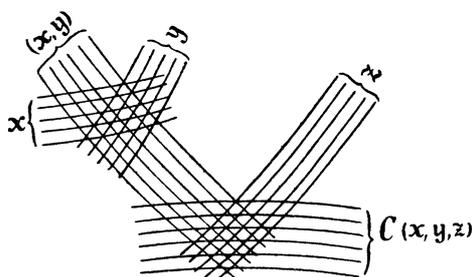


Fig. 54.

Wenn man in einem Liniennetz, das ein System doppelt kotierter Punkte bestimmt, die eine der beiden Scharen einfach kotierter Linien, die das Netz bilden, oder beide, mit doppelter Kotierung versieht (d. h. selbst von einem System doppelt kotierter Punkte herleitet), so ergibt sich ein

System von Punkten mit drei oder vier Knoten, welche letztere auf eine durch diese Punkte gehende weitere Schar von Linien über-

488) Beispiel einer Cartesischen Tafel mit binären Skalen an beiden Axen, also für fünf Veränderliche, *Ch. Lallemand*, Nivellement de haute précision, Paris 1889, p. 294 („d'Ocagne“, p. 302).

489) Wahrscheinlich ältestes Beispiel (auch für das Auftreten einer binären Skala) die Tafel von *E. Ganguillet* u. *W. R. Kutter*, Österr. Ing.- u. Arch.-Ver. Zeitschr. 21 (1869), p. 50 und Tafel Nr. 9 (die Tafel sehr verbreitet durch Abdruck im Handbuch Ingenieurwissensch. 3, Leipzig 1879, Tafel 13, und im Taschenbuch des Ingenieurs, hrsg. v. Ver. „Hütte“ [versch. Aufl.], für schiefwinklige Axen umkonstruiert und verbessert „Soreau“, p. 432).

490) Der Gedanke allgemein entwickelt von *d'Ocagne* zuerst für vier Veränderliche — eine der drei Skalen zu einer binären erweitert — Par. C. R. 112 (1891), p. 421, dann für fünf und sechs Veränderliche „d'Ocagne“ 1891“, p. 90 (doppelt kotierte Punkte hier „points doublement isoplèthes“ genannt). Beispiele und weitere Litteratur „d'Ocagne“, p. 320 ff. sowie „Pesci“ und „Soreau“.

491) Auch schon bei Tafeln mit vereinigten Skalen (s. Nr. 43 und Anm. 421), Beispiel *Lallemand*⁴⁸⁸⁾, p. 143 sowie „d'Ocagne“, p. 306, 308, 311 (von *Prérot*, *Chancel*, *Lallemand*) und „Soreau“; die Anwendung auf hexagonale Tafeln bereits in Nr. 45 gezeigt.

492) In der Gleichung $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ sind a und b zu Parallelkoordinaten u, v einer Geraden genommen, wodurch dieselbe in die eines Systems von Punkten mit der Doppelkote (z, c) , nämlich $z^2u + zv + (z^3 + c) = 0$ übergeht.

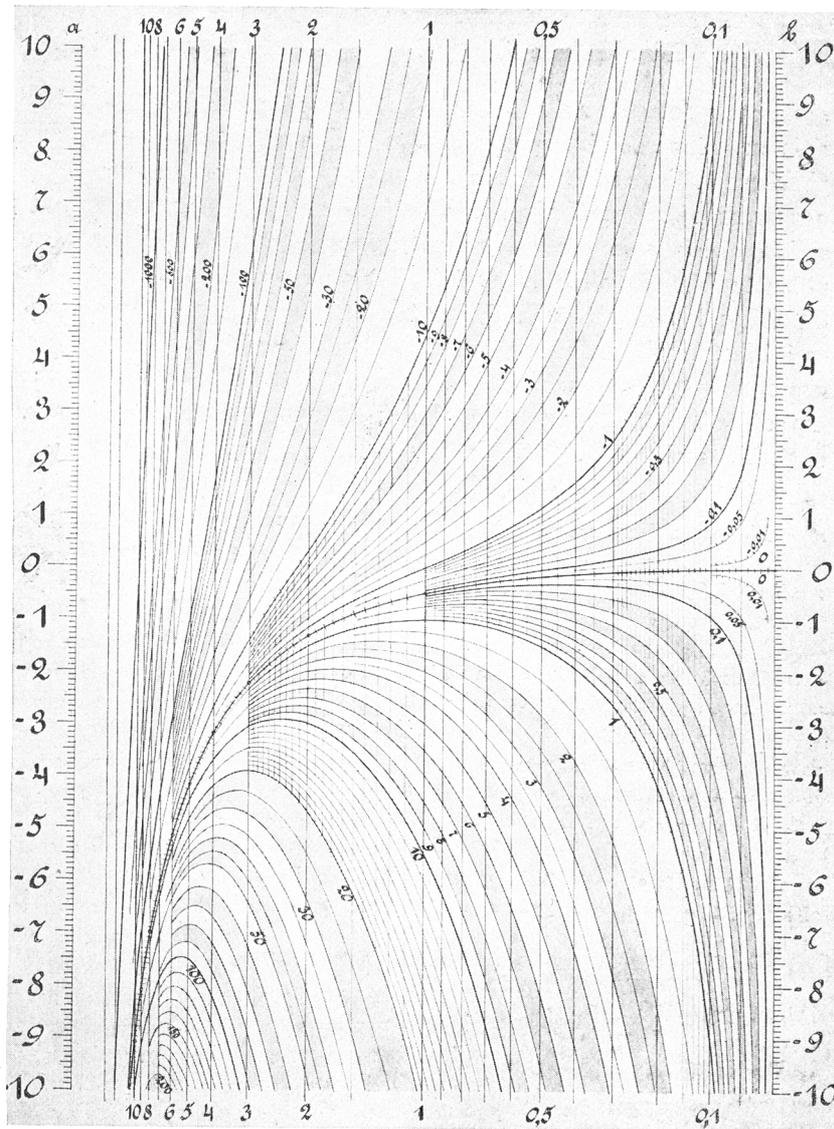


Fig. 53. Tafel zur Auflösung vollständiger kubischer Gleichungen.

tragen werden könnten (vgl. die dreifach kotierten Linien C in Fig. 54). Durch Wiederholung dieses Verfahrens gelangt man zu Elementen mit beliebig vielen Knoten und Skalen von beliebiger Vielfachheit⁴⁹³).

48. Bewegliche Systeme. Der Nomographie erschliessen sich neue Gebiete durch Anwendung von zwei oder mehr beweglichen kotierten Systemen, die zu einander in bestimmte Lagen gebracht werden⁴⁹⁴). Nimmt man bloß in einer Richtung Beweglichkeit an, so ergeben sich die Rechenschieber, die im folgenden Abschnitt besprochen werden sollen. Verschiebung in zwei Richtungen findet bei *C. Reuschle's* graphisch-mechanischen Apparaten zur Auflösung von Gleichungen statt⁴⁹⁵)⁴⁹⁶). Im Falle der kubischen Gleichung:

$$(1) \quad x^3 + bx^2 + cx = d$$

schreibt *Reuschle* zunächst:

$$x(x^2 + bx + c) = d$$

und setzt:

$$(2) \quad y = x^2 + bx + c,$$

wodurch Gleichung (1) übergeht in:

$$(3) \quad xy = d.$$

Man hat die Punkte a und b auf den parallelen Axen durch eine Gerade zu verbinden, an den Senkrechten durch die Schnittpunkte dieser Geraden mit der Kurve zum Parameter c liest man die Wurzeln ab. Diese Anordnung von *Mehmke*, s. Dyck's Katalog, Nachtrag, p. 9, Nr. 40 d, während in „d'Ocagne 1891“, p. 81 und pl. VIII, $b = u$, $c = v$ gesetzt und a zum Parameter einer Kurvenschar genommen ist. Eine ähnliche Tafel zur Auflösung biquadratischer Gleichungen der Form $z^4 + z^3 + az^2 + bz + c = 0$ „d'Ocagne“, p. 339 (Hilfsta-
fel, um eine beliebige biquadratische Gleichung auf diese Form zu bringen, ebenda p. 340); das Verfahren ist auf alle Gleichungen mit 4 bzw. 5 Gliedern anwendbar.

493) S. „d'Ocagne“, p. 351; Beispiel p. 355 (hexagonale Tafel mit ternären Skalen, nach *Lallemand*).

494) Bewegliche Linien sind als Zeiger zum Ablesen schon in Nr. 45—47 vorgekommen.

495) Graphisch-mechanische Methode zur Auflösung der numerischen Gleichungen, Stuttgart 1884.

496) Graphisch-mechanischer Apparat zur Auflösung numerischer Gleichungen, Stuttgart 1885 (auch eine französische Ausgabe). Der Apparat besteht aus einer Tafel mit einer Schar gleichseitiger Hyperbeln und einer auf Gelatine gedruckten Parabel; er dient zur Auflösung quadratischer und kubischer Gleichungen. Später hat *Reuschle* gezeigt, Zeitschr. Math. Phys. 31 (1886), p. 12, dass mit demselben Apparat auch biquadratische Gleichungen (mittelst der gemeinsamen Tangenten der Parabel und einer Hyperbel) gelöst werden können.

Es werden x und y als Cartesische Koordinaten eines Punktes betrachtet. Die Parabel (2) entsteht aus der auf einem durchsichtigen

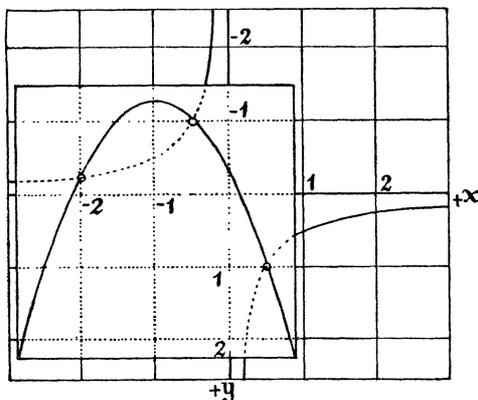


Fig. 55.

Blatt gezeichneten Parabel $y = x^2$ durch Parallelverschieben⁴⁹⁷); die Schnittpunkte der verschobenen Parabel mit der zum Wert d gehörigen Hyperbel der Schar (3), s. Fig. 55⁴⁹⁸), geben durch ihre Abscissen die reellen Wurzeln der Gleichung (1). Bei der biquadratischen Gleichung mit auf Eins gebrachttem Absolutglied:

$$(4) \quad ax^4 + bx^3 + cx^2 = dx + 1$$

dienen gemäss der Zerlegung in:

$$(5) \quad y = ax^2 + bx + c$$

und:

$$(6) \quad x^2y = dx + 1$$

zur Auflösung die durch (5) dargestellte verschobene Parabelschar $y = ax^2$ und die „trinomische Hyperbelschar 3. Ordnung“ (6)⁴⁹⁹). Auf Grund einer derartigen Absonderung eines quadratischen Faktors aus drei benachbarten Gliedern⁵⁰⁰) können noch Gleichungen 7. Grades

497) Allgemeiner die Parabel $y = ax^2 + bx + c$ aus der zum gleichen Wert von a gehörigen Parabel der Schar $y = ax^2$. Die Axe der verschobenen Parabel, welche letztere durch den Punkt c der y -Axe geht, ist $x = -\frac{b}{2a}$; zum Zweck der Einstellung kann ausserdem noch die Ordinate des Scheitels, $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$, berechnet werden.

498) Die Figur 55 entspricht dem Beispiel:

$$x^3 + 2x^2 - 0,25x = 0,5 \quad (\text{Wurzeln } 0,5, -0,5, -2).$$

499) *W. Heymann* löst, *Zeitschr. Math. Phys.* 43 (1898), histor.-litterar. Abteilung, p. 97, die zuvor in die Form $(x^2 - a)^2 = x + b$ gebrachte biquadratische Gleichung mittelst zweier Exemplare der Parabel $v = u^2$ durch Aufeinanderlegen nach Massgabe der Gleichungen:

$$x^2 = a + y, \quad y^2 = b + x.$$

500) Die Absonderung eines kubischen Faktors aus vier benachbarten Gliedern führt auch nicht weiter, diejenige eines linearen Faktors aus zwei benachbarten Gliedern einen Schritt weniger weit, s. *Reuschle* ⁴⁹⁵), p. 45, 42; ferner wegen der Absonderung aus den niedersten oder aus mittleren Gliedern, statt aus den höchsten, ebenda p. 36, 40, 44.

mit einem der Einheit gleichen Koeffizienten, denen drei Glieder fehlen, überhaupt Gleichungen mit vier willkürlichen Konstanten⁵⁰¹⁾ durch Aufeinanderlegen zweier Kurvenscharen gelöst werden⁵⁰²⁾. Weiter kommt man mit der logarithmographischen Methode (Nr. 41 und 42), da sie noch Gleichungen mit bis zu sechs Gliedern und lauter von Eins verschiedenen Koeffizienten⁵⁰³⁾, unter anderen Gleichungen 7. Grades, denen zwei beliebige Glieder fehlen, mittelst

501) Wofern eben ein quadratischer Faktor abgesondert werden kann, von welcher Beschränkung die (zwar nur bei Gleichungen mit drei Konstanten anwendbaren, aber einfacheren und leichter zu handhabenden) Tafeln von *d'Ocagne*⁴⁹²⁾, wie auch die logarithmischen Tafeln (s. oben) frei sind. Bei der 4-gliedrigen Gleichung:

$$x^m + \beta x^n + \gamma x^p = \delta$$

schlägt *Reuschle*⁴⁹⁵⁾, p. 64 die Zerlegung:

$$y = x^{m-p} + \beta x^{n-p} + \gamma, \quad x^p y = \delta$$

vor, die zwei Kurvenscharen nötig macht, während die Auflösung nach *d'Ocagne* nur eine Kurvenschar, die logarithmische Behandlung sogar nur zwei einzelne Kurven erfordert. Bei 3-gliedrigen Gleichungen der Form:

$$x^m + \beta x^n = \gamma,$$

vgl. ⁴⁹⁵⁾, p. 60, 62, zeigt sich *Reuschle's* Methode weniger günstig, als selbst die von *Lalanne* (s. Nr. 44, S. 1029).

502) *Reuschle* entwickelt⁴⁹⁵⁾, p. 48 ff. noch eine „Raumlösung“, bei der man drei gegenseitig bewegliche Kurvenscharen nötig hat und über sechs willkürliche Konstanten verfügt, also noch bis zu Gleichungen 7. Grades kommt, denen ein Glied fehlt. Die allgemeinste Gleichung 5. Grades z. B.:

$$(1) \quad ax^5 + bx^4 + cx^3 = dx^2 + ex + f,$$

wird durch Absonderung zweier quadratischer Faktoren in das gleichwertige System:

$$(2) \quad y = ax^2 + bx + c, \quad (3) \quad z = dx^2 + ex + f, \quad (4) \quad x^3 y = z$$

zerlegt. Nachdem die Fläche (4) etwa in Grund- und Aufriss durch eine Reihe wagerechter Schnitte dargestellt ist, muss man durch Versuche den Wert γ so bestimmen, dass der Schnittpunkt der Kurve $x^3 y = \gamma$ mit der durch Verschieben aus $y = ax^2$ erhaltenen Parabel (2) im Grundriss einerseits und der Schnittpunkt der Geraden $z = \gamma$ mit der durch Verschieben aus $z = dx^2$ erhaltenen Parabel (3) im Aufriss andererseits in einer Senkrechten liegen; die gemeinsame Abscisse dieser Punkte ist eine Wurzel der Gleichung.

503) Allgemeiner alle Gleichungen, die durch Elimination von y aus zwei Gleichungen der Form:

$$\begin{aligned} x^k y^l + ax^m y^n + bx^p y^q + c &= 0, \\ x^k' y^{l'} + a' x^{m'} y^{n'} + b' x^{p'} y^{q'} + c' &= 0 \end{aligned}$$

hervorgehen, wobei die Exponenten auch negative und gebrochene Zahlen sein können. — Der Gedanke von *Reuschle's* „Raumlösung“⁵⁰²⁾, auf die logarithmographische Methode angewandt, würde noch Gleichungen mit acht Konstanten, z. B. die allgemeinste Gleichung 7. Grades, zu behandeln erlauben.

zweier verschiebbaren Kurvenscharen mechanisch aufzulösen gestattet^{504) 506)}, und erstmals auch Systeme von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten^{505) 506)}. Weil nämlich das logarithmische Bild (s. Nr. 41, S. 1020) der Funktion:

$$y = \pm ax^l \pm bx^m$$

durch Parallelverschieben aus dem der Funktion:

$$y = \pm x^l \pm x^m$$

hervorgeht, dasjenige der Funktion:

$$y = \pm ax^l \pm bx^m \pm cx^n$$

durch Parallelverschieben aus einer bestimmten Kurve der Schar, die in den logarithmischen Bildern von:

$$y = \pm x^l \pm x^m \pm \lambda x^n$$

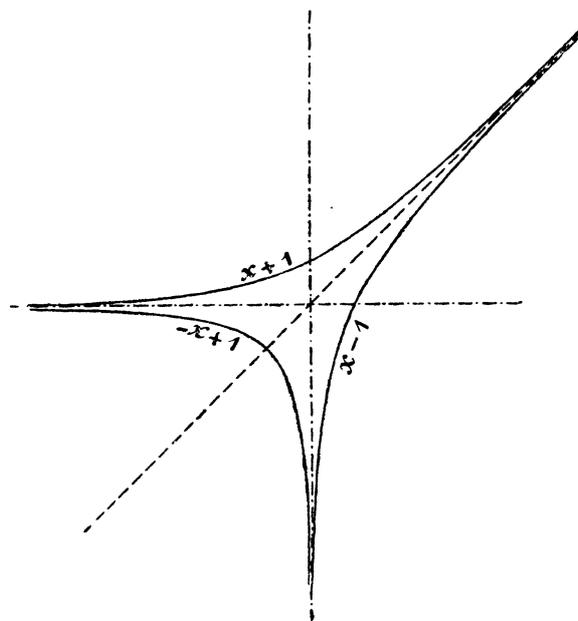


Fig. 56.

mit λ als Parameter, besteht⁵⁰⁷⁾, so kann z. B. die allgemeine trinomische Gleichung:

504) *Mehmke*, *Civilingenieur* 35 (1889), p. 629.

505) *Mehmke*, *Zeitschr. Math. Phys.* 35 (1890), p. 184.

506) Zusammenfassende Darstellung: *Mehmke*, *Dyck's Katalog*, Nachtrag, p. 10, Nr. 40 e („d'Ocagne“, p. 376).

507) S. ⁵⁰⁴⁾, p. 630, 631. Die Einstellung erfordert keine Rechnung, es genügt, das durchsichtige, die Kurve $y = \pm x^l \pm x^m$ bzw. die Kurvenschar

$$x'^m = \pm bx'^n \pm c,$$

nachdem sie durch Einsetzen von $x'^n = x$ auf die Form:

$$x^{\frac{m}{n}} = \pm bx \pm c$$

gebracht ist, mittelst der Kurve Fig. 56, dem logarithmischen Bilde von $y = \pm x \pm 1$,⁵⁰⁸⁾ zusammen mit einer Geraden, dem logarithmischen Bilde von:

$$y = x^{\frac{m}{n}},$$

gelöst werden, die allgemeinste Gleichung 3. Grades:

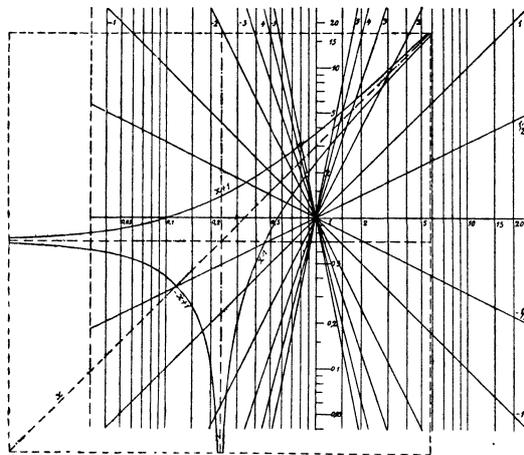


Fig. 57.

$$ax^3 \pm bx^3 \pm cx \pm d = 0$$

vermöge der Zerlegung in:

$y = \pm x^l \pm x^m \pm \lambda x^n$ tragende Blatt so zu legen, dass bei Wahrung der Axenrichtungen die darauf gezeichneten Geraden $y = x^l$ und $y = x^m$ durch den Punkt a bzw. b der logarithmisch geteilten y -Axe des festen Systems geht.

508) Das als einzige Kurve betrachtete Gebilde Fig. 56 besteht aus drei Zweigen, entsprechend den Vorzeichenverbindungen $++$, $+ -$, $- +$. Die Einstellung ist von den Vorzeichen der Glieder unabhängig; vertauscht man in der Gleichung, um die negativen Wurzeln zu erhalten, x mit $-x$, so tritt an Stelle des zuerst benützten Zweiges der der neuen Zeichenverbindung entsprechende. Diese Bemerkungen gelten allgemein.

509) Die Geraden zu verschiedenen Werten m/n sind auf der festen Tafel im voraus gezeichnet, s. Fig. 57, die dem Beispiel $x^{-5} = 3x + 0,7$ entspricht. An den Parallelen zur y -Axe können, weil sie durch die Teilpunkte einer logarithmischen Skala in der x -Axe gehen, die Wurzeln selbst (statt der Logarithmen) abgelesen werden (im vorigen Beispiel ungefähr 0,80 und $-0,88$).

$$y = \pm ax \pm b, \quad y = \pm cx^{-1} \pm dx^{-2} \quad 510)$$

mittelst derselben Kurve, zusammen mit der Kurve Fig. 58, dem logarithmischen Bilde von:

$$y = \pm x^{-1} \pm x^{-2},$$

die allgemeinste Gleichung 5. Grades auf Grund der Schreibweise:

$$ax^2 \pm bx \pm c = \pm dx^{-1} \pm ex^{-2} \pm ex^{-3} \quad 510)$$

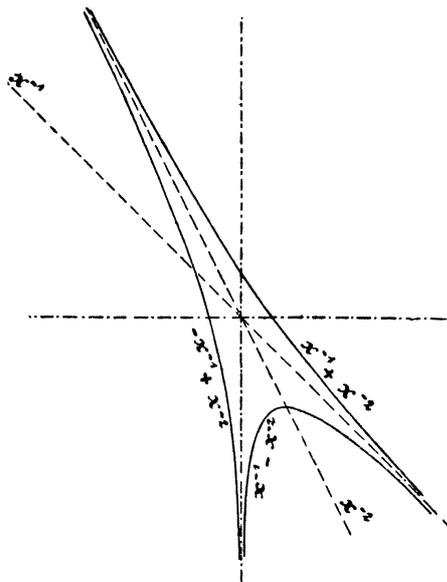


Fig. 58.

mittelst der beiden Kurvenscharen mit den Parametern λ und μ , die logarithmisch zu:

$$y = \pm x^2 \pm x \pm \lambda,$$

$$y = \pm \mu x^{-1} \pm x^{-2} \pm x^{-3}$$

gehören. Die entsprechende Auflösung zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten erfordert für die eine und die andere Gleichung je eine Kurve oder Kurvenschar, je nachdem die betreffende Gleichung drei oder vier Glieder hat⁵¹¹⁾. Die imaginären Wurzeln reeller trinomischer Gleichungen, wie auch die sämtlichen Wurzeln trinomischer Gleichungen mit komplexen Koeffizienten lassen sich durch Aufeinanderlegen

einer Kurventafel und eines geteilten Axensystems bestimmen⁵¹²⁾.

Von drehbaren kotierten Systemen haben *Lallemand*⁵¹³⁾ und *Lafay*⁵¹⁴⁾ Gebrauch gemacht.

49. Allgemeine Theorie von d'Ocagne. *M. d'Ocagne* hat mit Erfolg die Aufgabe in Angriff genommen, die möglichen Arten der

510) Die an sich nicht nötige Division mit einer Potenz von x bezweckt, günstige Schnitte für die Kurven herbeizuführen, vgl. Anm. 399.

511) Beruht darauf, dass das logarithmische Bild einer Gleichung der Form:

$$F(x, y) = \sum C_i x^{m_i} y^{n_i}$$

durch Verschieben aus einer Kurve entsteht, die zu einer Gleichung derselben Form, aber mit drei der Einheit gleichen Koeffizienten gehört, s. ⁵⁰⁶⁾, p. 11 (durch räumliche Betrachtungen abgeleitet⁵⁰⁵⁾). Über die ohne Rechnung ausführbare Einstellung s. ⁵⁰⁶⁾, p. 12, „d'Ocagne“, p. 379, 380.

512) S. *Mehmke*, Dyck's Katalog, Nachtrag, p. 16, Nr. 40 f.

513) S. ⁴⁸⁸⁾, p. 149 („d'Ocagne“, p. 371).

514) *Ann. Chimie Physique* (7) 16 (1899), p. 503 („d'Ocagne“, p. 374).

ebenen Darstellung einer Gleichung zwischen n Veränderlichen sämtlich zu bestimmen und nach zweckmässigen Gesichtspunkten zu ordnen; er hat überdies eine Zeichensprache eingeführt, die den Bau einer jeden Gattung graphischer Tafeln kurz und treffend zur Anschauung bringt⁵¹⁵). Kotierte Punkte und Linien bilden die Elemente einer jeden graphischen Tafel⁵¹⁶). Die einzige mit dem Auge sicher erkennbare Lagenbeziehung ist die Berührung zweier Elemente, die im Fall eines Punktes und einer Linie bedeutet, dass der Punkt auf der Linie liegt⁵¹⁷), und von *d'Ocagne* durch:

$$E \text{ — } E'$$

ausgedrückt wird, unter E und E' die beiden Elemente verstanden. Liegt auf einer Ebene mit den starr verbundenen Elementen E_1, E_2, \dots eine andere mit den Elementen E_1', E_2', \dots , so ist die gegenseitige Lage beider Ebenen durch drei Berührungen:

$$E_1 \text{ — } E_1', \quad E_2 \text{ — } E_2', \quad E_3 \text{ — } E_3'$$

bestimmt. Besteht ausserdem die Berührung:

$$E_4 \text{ — } E_4',$$

so müssen die Knoten dieser acht Elemente einer gewissen Gleichung genügen, von der somit eine Darstellung vorliegt⁵¹⁸). Die ersten drei Berührungen dienen zum Einstellen⁵¹⁹); mit Hilfe einer derartigen vierten Berührung kann, wenn jene Knoten bis auf einen gegeben sind, der Wert der letzten Kote durch Ablesen gefunden werden⁵¹⁹). Bei $(m + 1)$ aufeinander liegenden Ebenen kommen $3m$ Berührungen auf das Einstellen, eine weitere Berührung auf das Ablesen, und da jedes der $(6m + 2)$ Elemente, die paarweise in Berührung treten, mit beliebig vielen Knoten behaftet sein kann, erhält man auf diese Weise die denkbar allgemeinste Art von Tafeln. Um für Gleichungen mit n Veränderlichen die Anzahl \mathfrak{N}_n^{m+1} sämtlicher Arten von Tafeln mit $(m + 1)$ aufeinander zu legenden Ebenen zu finden, muss man daher

515) Par. C. R. 126 (1898), p. 397; Par. Soc. Math. France Bull. 26 (1898), p. 16; „d'Ocagne“, p. 390.

516) Es können auch einige nicht-kotierte Elemente vorkommen.

517) Das Zusammenfallen zweier Punkte oder zweier Geraden gilt für zwei Berührungen, s. „d'Ocagne“, p. 396; Zeichen \sqsupset , z. B. $P \sqsupset P'$ bedeutet, dass die Punkte P und P' zusammenfallen.

518) Kommen unter den Elementen der einen Ebene drei konzentrische Kreise oder parallele Geraden vor — sie können auch zusammenfallen — so wird eine Berührung überflüssig und kann unbestimmt bleiben, s. „d'Ocagne“, p. 395; Bezeichnung: „—“.

519) „Contact de position“ und „contact de résolution“, „d'Ocagne“, p. 393.

erstens alle Zerlegungen der Zahl n bilden und zweitens in jedem Falle die Zahlen, in die man n zerlegt hat, auf die genannten $(6m+2)$ Elemente verteilen, wobei Lösungen, die durch Vertauschungen auseinander hervorgehen, nur für eine zu rechnen sind⁵²⁰). Bei einer einzigen Ebene ist die betreffende Zahl \mathfrak{N}_n^1 gleich $n/2$ oder $(n-1)/2$, je nachdem n gerade oder ungerade⁵²¹). Im Falle zweier Ebenen hat *P. A. Mac Mahon* dieselbe bestimmen gelehrt⁵²²); z. B. ist:

$$\mathfrak{N}_2^2 = 2, \quad \mathfrak{N}_3^2 = 5, \quad \mathfrak{N}_4^2 = 16, \quad \mathfrak{N}_5^2 = 29, \quad \mathfrak{N}_6^2 = 64, \quad \mathfrak{N}_7^2 = 110^{523}).$$

Für Gleichungen mit zwei, drei und vier Veränderlichen und Tafeln mit einer oder zwei Ebenen hat *d'Ocagne* alle Fälle untersucht⁵²⁴). Als Beispiele für die Darstellung einzelner Gattungen von Tafeln durch Formeln seien die der Cartesischen Tafeln (Nr. 44):

$$P(x, y) = C(z)^{525}),$$

und die der Tafeln mit fluchtrechten Punkten (Nr. 46):

$$P_1(x) = I', \quad P_2(y) = I', \quad \text{„-“,} \quad P_3(z) = I'^{526}$$

angeführt⁵²⁷).

520) Allerdings findet man gleichzeitig alle Arten von Tafeln mit weniger als $(m+1)$ Ebenen, weil nicht-kotierte Elemente zu berücksichtigen sind und weil die gegenseitige Lage zweier Ebenen unveränderlich ist, also beide Ebenen durch eine ersetzt werden können, wenn drei nicht-kotierte Elemente der einen Ebene drei nicht-kotierte Elemente der andern berühren. Ferner ist vorausgesetzt, dass jeder Veränderlichen bloß eine Skala zugewiesen wird, vgl. die Anmerkung „d'Ocagne“, p. 401.

521) S. „d'Ocagne“, p. 400.

522) Mit Hilfe erzeugender Funktionen, Par. Soc. Math. France Bull. 26 (1898), p. 57. S. auch IC 3, Nr. 1.

523) S. „d'Ocagne“, p. 402.

524) „d'Ocagne“, p. 403, 405, 409 (Numerierung der Gattungen hier anders als in den früheren Arbeiten⁵¹⁵).

525) Bedeutet, dass der mit den Koten x, y versehene Punkt P — Schnittpunkt der Koordinatenlinie x mit der Koordinatenlinie y — auf der Isoplethe $C(z)$ liegt. Für $n > 2$ der einzige Fall, in welchem die dargestellte Funktion völlig allgemein ist, s. „d'Ocagne“, p. 406.

526) I' (Index) bedeutet die beim Ablesen benützte Gerade, als nicht-kotiertes Element einer beweglichen Ebene gedacht; die ersten drei Berührungen drücken aus, dass die Gerade auf beliebige Weise durch die Punkte P_1 und P_2 der ersten beiden Skalen mit den Koten x und y zu legen ist, die vierte besagt, dass der gesuchte Wert z am Schnittpunkt der Geraden mit der dritten Skala steht.

527) Wenn jedes, der Gleichung $F(x, y, z, \dots) = 0$ genügende Wertesystem x, y, z, \dots ein eben solches x', y', z', \dots nach sich zieht, wo $x' = \varphi(x)$, $y' = \psi(x)$, $z' = \chi(z), \dots$ und $\varphi, \psi, \chi, \dots$ bekannte Funktionen sind, so kann eine für gewisse Intervalle der Veränderlichen x, y, z, \dots konstruierte Tafel obiger

V. Stetige Rechenapparate und -Maschinen.

Mit der für diesen Abschnitt gewählten Überschrift soll ausgedrückt werden, dass die jetzt folgenden Apparate und Maschinen (ganz wie die graphischen Tafeln) mit Skalen für die gegebenen und gesuchten Grössen ausgerüstet sind, die eine stetige Veränderung dieser Grössen zulassen.

50. Logarithmischer Rechenschieber.

Litteratur: Von den zahlreichen im 19. Jahrhundert erschienenen Beschreibungen des Rechenschiebers gewöhnlicher Form sei folgende Auswahl genannt: *B. A. Bevan*, A practical treatise on the sliding rule . . . , London 1822; *Fr. W. Schneider*, Anweisung zum Gebrauch eines Rechenstabes . . . , nach dem Schwedischen, Berlin 1825; *Ph. Mouzin*, Instruction sur la manière de se servir de la règle à calcul, dite règle anglaise . . . , 3^{ème} éd. Paris 1837; *J. F. Artur*, Instruction théorique et applications de la règle logarithmique . . . , Paris 1827, 2^{ème} éd. 1845 [Auszug von *De Bois-Villette*, Ann. ponts chaussées (2) 3 (1842, 1^{er} sem.), p. 217]; *L. C. Schulz v. Strassnicki*, Anweisung zum Gebrauche des englischen Rechenschiebers . . . , Wien 1843; *C. Hoffmann*, Anleitung zum Gebrauch des Rechenschiebers . . . , Berlin 1847; *L. Lalanne*, Instruction sur les règles à calcul . . . , Paris 1851, 3^{ème} éd. 1863 („Lalanne“), auch englische, deutsche und spanische Ausg.; *F. Guy*, Instruction sur la règle à calcul, 3^{ème} éd. Paris 1855, 7^{ème} éd. 1872; *P. M. N. Benoît*, La règle à calcul expliquée, Paris 1853; *Quintino Sella*, Teorica e pratica del regolo calcolatore, Torino 1859 (auch französische Übersetzung von *G. Montefiore Levi*, Liège 1869); *K. v. Ott*, Der logarithmische Rechenschieber . . . , Prag 1874; 2. Aufl. 1891; *Ch. Hoare*, The slide rule and how to use it, London 1875; *L. Tetmajer*, Theorie und Gebrauch des logarithmischen Rechenschiebers . . . , Zürich 1875 (Sonderabdruck aus *Culmann's Graphischer Statik*, durch Beispiele vermehrt); *Gros de Perrodil*, Théorie de la règle logarithmique . . . , Paris 1885; *B. K. Esmarch*, Die Kunst des Stabrechnens . . . , Leipzig 1896; *E. Hammer*, Der logarithmische Rechenschieber und sein Gebrauch . . . , Stuttgart 1898, 2. Aufl. 1902 („Hammer“); *G. Gallice*, La règle à calcul appliquée à la navigation, Paris 1898; *C. H. Müller*, Der logarithmische Rechenstab . . . , Progr. Kaiser-Friedrichs-Gymn. Frankfurt a. M. 1899; ferner sei erwähnt *J. Farey*, A treatise on the steam engine . . . , London 1827, chap. 7. — Beschreibungen besonderer, von der gewöhnlichen stark abweichender Formen sind in den Anmerkungen zu dieser Nummer namhaft gemacht. Zu verweisen ist ferner auf die unter p. 952, 1007 und p. 1024 angeführten Schriften: *d'Ocagne*, Le calcul simplifié . . . ; *von Bohl*, Apparate und Maschinen . . .

Gleichung nach Anbringung neuer Knoten an den Elementen der Tafel auch für Werte ausserhalb dieser Intervalle benützt werden (Prinzip der „superposition des graduations“, „d'Ocagne“, p. 38). Für drei Veränderliche und die Annahmen $x' = \lambda x$, $y' = \mu y$ — μ von λ unabhängig oder aber $\mu = \lambda^m$, m konstant — sind die von *d'Ocagne* empirisch gefundenen Lösungen $z = \Delta(x^n y^p)$, bzw.

$z = \Delta\left(xf\left(xy^{-\frac{1}{m}}\right)\right)$ — Δ und f willkürliche Funktionen, n und p konstant — nach *G. Koenigs* (s. „d'Ocagne“, p. 431) die allgemeinsten ihrer Art.

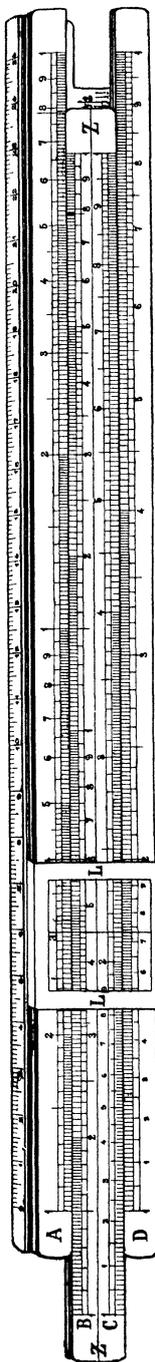


Fig. 59. Logarithmischer Rechenschieber.

sowie „Favaro-Terrier“, „Vogler“ und „d’Ocagne“. — Den Rechenschieber und andere logarithmische Rechenapparate findet man auch in technischen Lehr- und Handbüchern beschrieben, z. B. in *W. Jordan*, Handbuch der Vermessungskunde 2, 5. Aufl. Stuttgart 1897, p. 130 ff. — Die ausführlichste geschichtliche Zusammenstellung giebt *A. Favaro*, Veneto Istituto Atti (5) 5 (1878/79), p. 495 (gekürzt in „Favaro-Terrier“ 2, p. 70, 110).

Für sich allein oder mit anderen Hilfsmitteln — Tafeln, Rechenmaschinen — zusammen gebraucht ist der ebenso vielseitige als leistungsfähige Rechenstab oder Rechenschieber (englisch slide rule, französisch règle à calcul) von unschätzbarem Werte. Seine Überlegenheit über die logarithmischen und andere Zahlentafeln beruht auf dem Umstande, dass mit ihm zusammengesetzte Rechnungen verschiedenster Art mit einem Schlage, d. h. mit einer einzigen Schieberstellung oder doch ohne Beachtung von Zwischenergebnissen ausgeführt werden können. Die ursprüngliche, von *E. Gunter* (1620 oder 1623, vgl. Anm. 389) angegebene Form, die sich unter dem Namen Gunterskale oder „Gunter“ bis heute erhalten hat⁵²⁸), war die eines prismatischen Stabes oder Lineals mit mehreren, auf der Vorder- und Rückseite der Länge nach aufgetragenen logarithmischen und anderen Skalen (s. Nr. 43, bes. Anm. 417). Zur Ausführung der Multiplikation z. B. war das Abgreifen und Zusammenfügen der Logarithmen der Faktoren als Strecken mit einem Zirkel auf der „line of numbers“ nötig (vgl. Nr. 40). Um den Zirkel zu ersparen, wandte 1627 *E. Wingate*⁵²⁹) zwei gleiche, längs einander verschiebbare Stäbe an, wodurch zugleich das Verfahren abgekürzt wurde, und 1657 bildete *Seth Partridge*⁵³⁰) den zweiten Stab als

528) Bei den Seefahrern, vgl. (auch wegen einiger Abarten) *L. Jerrmann*, Die Gunterskale . . . , Hamburg 1888.

529) Nach *Ch. Hutton*, Mathem. Tables, London 1785, Introduction, p. 36. *Favaro* verweist auf *Wingate's* Schrift „Of natural and artificial arithmetic“, London 1630.

530) Ebenfalls nach *Hutton*⁵²⁹). Bei „Lalanne“, p. VI, als Quelle angeführt: *Seth Partridge*, The description and use of an instrument called the double scale of proportion . . . , London 1671.

Schieber oder „Zunge“ (französisch *réglette*, *languette*, *Z* in Fig. 59) aus, die in einer Nut („Kulisse“⁵³¹) des ersten Stabes gleitet. Bis auf die, allerdings wesentliche Anbringung eines „Läufers“ (*curseur*⁵³²), *L* in Fig. 59) durch *A. Mannheim* (gegen 1850), welcher zum Festhalten irgend eines Punkts einer Skala und zum Aufsuchen entsprechender Punkte auf parallelen Skalen⁵³³) dient, war damit in der Hauptsache die endgiltige Form erreicht⁵³⁴).

Sind zwei kongruente logarithmische Skalen gleichen Sinnes beliebig gegen einander verschoben und stehen an irgend einer Stelle (s. Fig. 60) die Zahlen *a* und *b*,

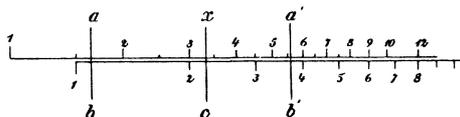


Fig. 60.

an einer anderen die Zahlen *a'* und *b'* einander gegenüber, so ist immer $a : b = a' : b'$ ⁵³⁵), womit die Ausführung von Proportionsrechnungen, insbesondere von Multiplikation und Division⁵³⁶) und daraus zusammengesetzten Operationen⁵³⁷) gegeben ist. Da von den unend-

531) In der französischen Litteratur wird nicht selten *coulisse* statt *réglette* gebraucht, was „Lalanne“ p. 1 verwirft.

532) In der älteren französischen Litteratur bezeichnet *curseur* oft den mit 1 bezifferten Anfangspunkt der Skala des oberen Zungenrandes, vgl. „Lalanne“ (der dies tadelt), p. 7.

533) Mittelst einer zur Bewegungsrichtung senkrechten Marke (*ligne de foi*), nach einigen Wandlungen jetzt meist ein feiner Strich auf der Unterseite eines Glasplättchens in Metallfassung.

534) Im einzelnen bestehen grosse Verschiedenheiten in Bezug auf Anordnung und technische Durchbildung. Nicht abgeschlossene Entwicklung; der Kontinent, früher von England abhängig, seit Mitte des 19. Jahrhunderts selbständig vorgegangen (zuerst Frankreich die Führung, dann Deutschland). Skalen früher meist auf Buchsbaumholz, jetzt weissem Zellhorn (1886 von *Dennert & Pape-Altona* eingeführt).

535) Hierauf beruhen die meisten Anwendungen des Rechenschiebers und der ihm verwandten Instrumente. — Die beiden Skalen bilden gleichsam in jeder gegenseitigen Stellung eine fertige Zahlentafel, welche (vermutlich schon *Wingate* bekannte) Eigenschaft von *J. H. Lambert*, Beschreibung und Gebrauch der logarithmischen Rechenstäbe . . . , Augsburg 1761, 2. (?) Aufl. 1772, sehr betont wird.

536) Um $x = \frac{a}{b} c$ zu finden, bringt man die Stelle *a* der einen Skala (s. Fig. 60) zur Deckung mit der Stelle *b* der andern, sucht auf der letzteren Skala die Stelle *c* und liest ihr gegenüber auf der ersten Skala ab. Bei veränderlichem *c*, aber festem *a* und *b* behalten die Skalen ihre gegenseitige Lage. Im Fall der Multiplikation oder Division ist $b = 1$ bzw. $c = 1$ (oder $a = 1$) zu nehmen.

537) Nötigenfalls den Faktor 1 im Zähler bzw. Nenner genügend oft hinzufügend stellt man die Form:

lich vielen kongruenten Abschnitten der logarithmischen Skalen (s. Anm. 389) bloß eine beschränkte Anzahl, oft nur je einer, benützt werden kann, so findet man (ähnlich wie bei den Logarithmentafeln) von dem Ergebnis im allgemeinen zunächst nur die Ziffern, während die Stellung des Dezimalkommas für sich ermittelt werden muss⁵³⁸).

Beim gewöhnlichen Rechenschieber tragen der obere und der untere Rand des Stabes und der Zunge auf der Vorderseite⁵³⁹) je eine logarithmische Skala, die man in der Reihenfolge von oben nach unten (s. Fig. 59) mit A, B, C, D zu bezeichnen pflegt⁵⁴⁰); A geht von 1 bis 100,⁵⁴¹) D von 1 bis 10; B stimmt mit A , C mit D überein⁵⁴²). Zur Ausführung der oben genannten Rechnungen können entweder die benachbarten Skalen A und B benützt werden, oder C und D .⁵⁴³)

Weil die Längeneinheit von D doppelt so gross als die von A ist, findet man senkrecht über einer jeden Zahl von D ihr Quadrat

$$x = \frac{a}{b} \frac{a_1}{b_1} \frac{a_2}{b_2} \dots \frac{a_n}{b_n} c$$

her, bringt nun dem Punkt a der 1. Skala den Punkt b der 2. Skala gegenüber, sucht auf der 2. Skala den Punkt a_1 , hält den gegenüber liegenden Punkt der 1. Skala fest (etwa mit der Marke eines Läufers), bringt ihm den Punkt b_1 der 2. Skala gegenüber u. s. w., und liest endlich dem Punkt c der 2. Skala gegenüber das Ergebnis ab.

538) Man denkt sich etwa bei jeder gegebenen Zahl das Komma vorläufig hinter die erste geltende Ziffer gesetzt („Normalwert“ bei *Schneider*, „Nombre primordial“ bei *de Perrodil* a. a. O.); die Stellung des Kommas im Ergebnis wollen manche durch rohe Schätzung seines Wertes bestimmen (s. z. B. *R. Land*, Centralblatt Bauverwaltung 13 (1893), p. 174 und „Hammer“ p. 24), andere geben mehr oder weniger ausführliche Regeln, wobei sie entweder mit den Stellenanzahlen rechnen (z. B. *Lalanne, Sella, Esmarch*), oder mit den (um Eins kleineren) Kennziffern der zu den Zahlen gehörigen Logarithmen (z. B. *v. Ott, de Perrodil*).

539) In der Regel befinden sich auf der Rückseite der Zunge logarithmische Skalen für \sin und \tan und eine gleichmässig geteilte Skala, die mit der Skala D zusammen die Logarithmen beliebiger Zahlen auf drei Stellen und umgekehrt finden lässt.

540) So schon *Bevan* a. a. O.

541) Die rechte Hälfte wird zwar gewöhnlich als Wiederholung der linken aufgefasst, also wieder von 1 bis 10 beziffert.

542) Letzteres wenigstens bei den französischen und deutschen Rechenschiebern mit Läufer („règle Mannheim“ der Firma *Tavernier-Gravet-Paris*). Bei denen ohne Läufer („règle ordinaire“ der genannten Firma) und den englischen ist auch die Skala C kongruent mit A ; die Zahl der mit einer einzigen Schieberstellung lösbaren Aufgaben ist dann geringer, trotzdem halten manche noch an der alten Form fest, vgl. *E. Erskine Scott*, A short table of logarithms and anti-logarithms to ten places of decimals . . . , London 1897, p. XV.

543) So etwas genauer, aber weniger bequem.

auf A und umgekehrt unten die Quadratwurzeln der oben aufgesuchten Zahlen. Wenn man gleichzeitig mehr als zwei der vier Skalen verwendet, lassen sich die Werte von Ausdrücken der Form $\frac{a}{b} c^2$,⁵⁴⁴⁾ $\frac{a}{b} \sqrt{c}$ und ähnlichen⁵⁴⁵⁾ je mit einer Schieberstellung bestimmen.

Werden zwei kongruente logarithmische Skalen *ungleichen* Sinnes einander beliebig gegenüber gestellt (s. Fig. 61), so erhält man statt der früheren

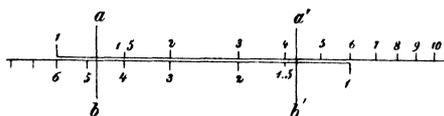


Fig. 61.

Eigenschaft die andere, dass je zwei gegenüber stehende Zahlen ein konstantes Produkt liefern, $ab = a'b'$.⁵⁴⁶⁾

Quadratische und kubische Gleichungen lassen sich mit Hilfe des gewöhnlichen Rechenschiebers auflösen⁵⁴⁷⁾.

544) Auf diese Form werden durch einen kleinen Kunstgriff die Inhalte und die Gewichte von Cylindern, Kugeln u. s. w. gebracht, mittelst Hilfszahlen, wie solche in den Anleitungen und auf der Rückseite der Stäbe zusammengestellt sind.

545) Allgemeine Form $\frac{\alpha}{\beta} \gamma$, wo beliebig viele der Zahlen α , β , γ entweder gleich den Quadraten, oder gleich den Quadratwurzeln gegebener Zahlen sein können.

546) Die Zunge des Rechenschiebers wird herausgezogen und verkehrt (rechts mit links vertauscht) in die Nut geschoben (nach *Farey* a. a. O. p. 542 zuerst von *W. Pearson*, *Nicholson's Journal* 1 (1797), p. 450 vorgeschlagen); bei der neueren Form die Skalen A und H dann getrennt und der Zusammenhang durch den Läufer herzustellen. Es giebt englische Schieber mit verkehrter Skala (bei aufrechten Ziffern) auf der Zunge (nach *Farey* a. a. O. zuerst von *Wollaston* eingerichtet, vgl. noch *Bevan*, p. 98); eine solche Skala als dritte auf der Zunge des Rechenschiebers von *A. Beghin*⁵⁴⁸⁾, so u. a. Berechnung von Produkten aus drei Faktoren auf einmal möglich (wie mit dem „logarithmischen Kubizierungsmaasstab“ von *M. Schinzel*, D. R. P. Nr. 26842 von 1883, wo zwei Skalen von der Mitte der Zunge nach beiden Seiten gehen, Gedanke allgemeiner schon bei *Vogler*⁵⁴⁹⁾). Anwendungen (auch von A mit O u. s. w.) grösstenteils naheliegend. Erwähnt sei die (näherungsweise) Bestimmung von $x = \sqrt[3]{ab^2}$: Man bringt den Punkt a von A gegenüber dem Punkte b von O und sucht die Stelle, an der gleiche Zahlen (x) einander gegenüber stehen (s. auch Anm. 547). Übrigens können dritte Wurzeln direkt bestimmt werden durch Gegenüberstellung von D mit einer weiteren Skala E , deren Längeneinheit $1/3$ so gross ist; schon von *Bevan* a. a. O. p. 53 ein Schieber mit E („line of triple radius“) auf besonderer Zunge beschrieben, vgl. *Dyck's Katalog*, Nachtrag, p. 1, Nr. 4b (in England ähnliche Schieber noch im Handel).

547) Durch ein indirektes Verfahren. *E. Bour*, *Par. C. R.* 44 (1857), p. 22, stellt die Form $y^3 \pm y^2 = y^2(y \pm 1) = a$ her; ihr entsprechend hat man bei

Die Berechnung von $\sqrt{a^2 \pm b^2}$, $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, $(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^2$ und verwandten Ausdrücken mit einer Schieberstellung hat *W. Ritter* gezeigt⁵⁴⁸).

Die gangbarste Grösse des Rechenschiebers, rund 26 cm Gesamtlänge, bei der die Längeneinheit der am meisten gebrauchten Skalen *A* und *B* 12,5 cm beträgt, gewährt eine durchschnittliche Genauigkeit⁵⁴⁹) von etwa 0,2 ‰. Der Wunsch, ohne wesentliche Einbusse an Schnelligkeit und Leichtigkeit der Handhabung⁵⁵⁰) eine grössere Genauigkeit zu erzielen⁵⁵¹), hat eine Menge neuer Konstruktionen veranlasst. Sollten die Skalen geradlinig bleiben (s. dagegen Nr. 51), so konnte man zunächst, wie *A. Mannheim*⁵⁵²) und *A. Beghin*⁵⁵³), die ganze Länge des Stabes (statt der halben) zur Grundeinheit nehmen, oder aber Skalen von beträchtlicher Länge in Stücke zerlegen und in letzterem Falle die seitherige Form des Rechenschiebers möglichst

verkehrt eingeschobener Zunge die 1 von *O* unter die Stelle *a* von *A* zu bringen, die Zahlen von *A* in Gedanken um 1 zu vermindern bzw. zu vermehren und dann die Stelle zu suchen, an der auf jenen beiden Skalen sich gleiche Zahlen finden. Fall der quadratischen Gleichung von *Bour* nicht näher ausgeführt, dagegen bei „Favaro-Terrier“ 2, p. 90 (mit *A* und *H*); damit verwandte Methode (mit *A* und *B*) von *W. Engeler* durch *E. Hammer* mitgeteilt, Zeitschr. Vermessungsw. 29 (1900), p. 495; verbesserte Regel von *H. Zimmermann*, ebenda 30 (1901), p. 58. Vgl. auch Nr. 52, Anm. 585.

548) Schweiz. Bauzeitung 23 (1894), p. 37; zwei Ablesungen und eine Addition bzw. Subtraktion von 1 nötig.

549) Untersuchungen darüber liegen vor u. a. von *Redlich*, Zeitschr. Bauwesen (Erbkam) 9 (1859), p. 596 (wahrscheinlicher Fehler (I D 2, Nr. 8) proportional dem Ergebnis, bei den Rechnungsarten $\frac{a}{b} c$ und $\frac{a}{b} c^2$ zu 0,164 ‰, bei \sqrt{a} und $\sqrt{\frac{a}{b} c^2}$ zu 0,097 ‰ ermittelt); „Vogler“ p. 71, 73 (jedes Produkt mit drei Stellen sicher zu erhalten bei Skalen von 69 cm Längeneinheit, in 999 unter 1000 Fällen bei 40 cm; graphische Darstellung der Schätzungsfehler am Rechenschieber, Vergleich mit graphischen Produktentafeln); *Jordan* a. a. O. p. 133 (Zusammenstellung von Versuchsergebnissen); „Hammer“ p. 62.

550) Lange Rechenschieber — 51 cm noch im Handel — unbequem und verhältnismässig teuer. *Lambert*⁵⁵⁵) liess vier Fuss lange Stäbe anfertigen, *Fr. Ruth* verwendet auf Karton gedruckte Skalen von 60 cm Länge (Einheit 30 cm), s. *Dingler's polyt. J.* 242 (1881), p. 149; *Dyck's* Katalog, Nachtrag, p. 2, Nr. 4 d.

551) Scharfe und genaue Teilungen vorausgesetzt, in mässigen Grenzen auch beim gewöhnlichen Schieber möglich durch Anwendung einer Lupe, s. *Jordan*, Zeitschr. Vermessungsw. 21 (1892), p. 376; Handbuch der Vermessungskunde, 2, p. 134, Fig. 6, und durch die von *O. Seyffert*, Centralblatt Bauverwaltung 8 (1888), p. 548 vorgeschlagene nonienartige Ablesung.

552) „Règle à échelles repliées“, s. etwa *Sella* a. a. O. p. 100.

553) Règle à calcul modèle spécial . . . , Paris 1898, 2^{ème} éd. 1902.

beibehalten, wie *E. Péraux*⁵⁵⁴) und *Ch. Lallemand*⁵⁵⁵), oder die Stücken reihenweise in einer Ebene anordnen, wie *I. D. Everett*⁵⁵⁶), *Hannington*⁵⁵⁷), s. Fig. 62, *Scherer*⁵⁵⁸), *R. Proell*⁵⁵⁹), oder nach den Mantellinien

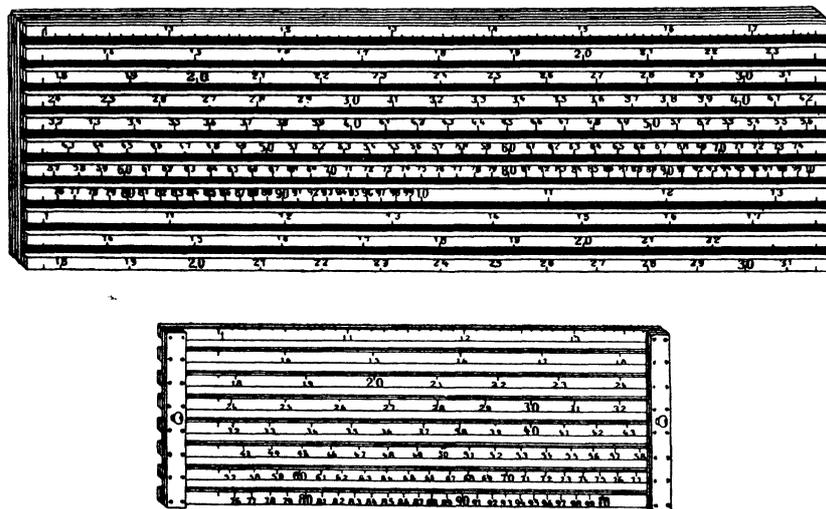


Fig. 62. Rechenschieber von *Hannington*.

554) *S. H. van Hyfte*, *Instruction sur la règle à calcul à deux réglettes de E. Péraux* . . . , Paris 1885 [erste Mitteilung von *Benoît*, *Soc. d'encouragem. Bull.* (2) 10 (1863), p. 513]. Zwei Schieber in zwei Kulissen (auf derselben Seite des Stabes), auf deren Ränder die beiden Stücke einer Skala von der doppelten Länge des Stabes, einmal wiederholt, verteilt sind.

555) *S. Zeitschr. Vermessungsw.* 29 (1900), p. 233. Ebenfalls Längeneinheit (1 m) gleich doppelter Stablänge, aber nur ein Schieber; wahrscheinlicher Fehler 0,01 %, Maximalfehler 0,04 %, deshalb statt 4-stelliger Logarithmentafeln zu gebrauchen.

556) „*Universal-Proportion-Table*“, s. *Phil. Mag.* (4) 32 (1866), p. 350; „*Favaro-Terrier*“ 2, p. 95 (mit Abb.); *Dyck's Katalog*, p. 141, Nr. 8. Stab und Zunge des Rechenschiebers je durch eine auf Karton gedruckte Tafel mit einer Anzahl paralleler Streifen ersetzt (die Streifen der beweglichen Tafel greifen in Zwischenräume der festen).

557) *S. Dyck's Katalog*, p. 141, Nr. 8. Ebenfalls Rost-förmig, s. Fig. 62, Ausführung in Holz. Drei Grössen im Handel, mit bezw. 0,75 m; 1,5 m; 3 m Längeneinheit.

558) „*Logarithmisch-graphische Rechentafel*“, Kassel 1893; s. auch *Dyck's Katalog*, p. 140, Nr. 5; *Jordan* a. a. O. Skalen von 1,5 m Längeneinheit in zehn Stücke zerlegt, Grundplatte aus Blech, Schieber, der lose aufgelegt wird, aus Glimmer; Genauigkeit im Mittel 0,02 %. Ähnlich bereits (Schieber auf Glas) ein Apparat von *M. Kloth*, *D. R. P. Nr. 26695* v. 1883, s. *Dingler's polyt. J.* 260 (1886), p. 170, sowie von *J. Billeter*, *D. R. P. Nr. 43463* v. 1887, s. *Zeitschr. Vermessungsw.* 20 (1891), p. 346.

559) „*Rechentafel System Proell*“, Berlin 1901, s. auch *Zeitschr. Math.*

eines Cylinders, wie *Everett*⁵⁶⁰), *Mannheim*⁵⁶¹) und *E. Thacher*⁵⁶²), dessen „Cylindrical slide rule“ Fig. 63 an Genauigkeit fast einer 5-stelligen Logarithmentafel gleichkommt⁵⁶³).

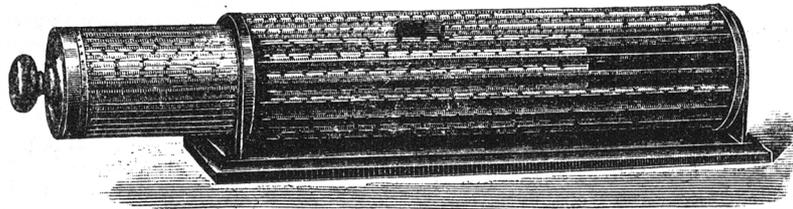


Fig. 63. *Thacher's* Cylindrical slide rule.

51. Gekrümmte Rechenschieber (Rechenscheiben u. s. w.). Sehr bald nach Erfindung der logarithmischen Skalen durch *Gunter* hat

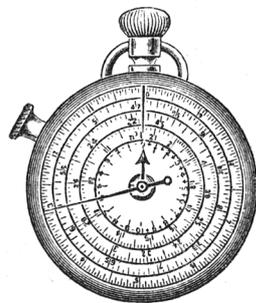


Fig. 64.

W. Oughtred solche auf konzentrischen Kreisen angebracht⁵⁶⁴), *Milburne* Spiralform gewählt⁵⁶⁵). Wir können zwei Entwicklungsreihen unterscheiden. Zur einen gehören Apparate, die sich noch auf der Stufe des Gunterstabes befinden, weil sie jede Skala nur einmal und eine dem Zirkel entsprechende Vorrichtung zum Weitertragen beliebiger Skalenabschnitte haben⁵⁶⁶). Zu nennen sind der *cercle à calcul* von *E. M. Boucher*⁵⁶⁷) in Form einer Uhr,

Phys. 46 (1901), p. 218. Grosse Raumersparnis durch Einführung der „Einspunkte“ (nur bei Multiplikation von Nutzen, Proportionsrechnungen erschwert), leichte Bestimmung von Quadrat- und Kubikwurzeln (Gedanke schon bei *Everett*⁵⁶⁰). Untertafel auf Karton, Obertafel (nach Drehung um zwei Rechte die vorige deckend) auf Glimmer gedruckt, Längeneinheit 1,2 m.

⁵⁶⁰) Litteratur s. Anm. 556. Nur Modell.

⁵⁶¹) In Metall ausgeführt (seit 1873, Holzmodell 1871). Hohlzylinder mit fünf Schlitzen parallel zur Axe, in welchem ein Vollzylinder sich drehen und verschieben lässt, Skalen (in 10 Stücke geteilt) 1,25 m lang, vgl. „Vogler“, p. 50.

⁵⁶²) Patentierte 1881, s. *Thacher's Calculating instrument* . . . , New York 1884; *Hammer*, Zeitschr. Vermessungsw. 20 (1891), p. 438 (mittlerer Fehler (I D 2, Nr. 8) aus Versuchen zu 0,0031 % gefunden); *Dyck's Katalog*, p. 140, Nr. 6. Gedanke wie bei *Everett* u. *Mannheim*; durchbrochener Hohlzylinder aus Metall mit 20 Rippen, Skalen auf Pergament gedruckt, Längeneinheit 9,144 m. Auch von *Billetter* Apparate in Walzenform, D. R. P. Nr. 71715 von 1893.

⁵⁶³) Wegen der in unübersehbarer Zahl, namentlich in England, vorhandenen Rechenschieber für die besonderen Zwecke der Chemiker, Ingenieure, Geodäten u. s. w. sei verwiesen auf „Lalanne“, p. 113, 115; „Culmann“, p. 67 ff.; *Favaro*; *v. Scheve*, Artillerist Rechenschieber, Berlin 1881 (Sonderabdruck aus

Fig. 64, und der „Rechenknecht“ von *G. Herrmann*⁵⁶⁸), beide mit verschiedenen Skalen auf konzentrischen Kreisen in einer Ebene, mit einem festen und einem beweglichen Zeiger versehen, sowie *G. Fuller's*

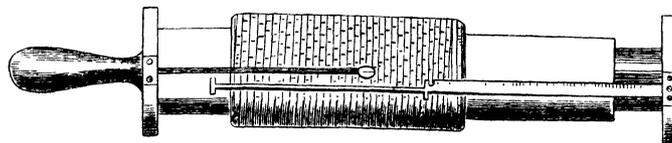


Fig. 65. *G. Fuller's* Spiral slide rule.

Spiralrechenschieber, Fig. 65, mit einer Schraubenlinie als Träger einer logarithmischen Skala⁵⁶⁹). In der andern Reihe sehen wir zahlreiche Apparate mit gegen einander drehbaren kreisförmigen Skalen, die entweder auf der ebenen Fläche einer Scheibe und einer sie umschliessenden oder in sie eingelassenen Ringfläche untergebracht sind, wie schon bei *I. M. Biler's* Instrument⁵⁷⁰), dem „cadrans logarithmique“

Arch. Artill. Ingen. Off. 88); *Dyck's* Katalog, p. 144, Nr. 15, 16—20, Nachtrag, p. 2, Nr. 10b; *Jordan*; Katalog der Firma *W. F. Stanley*-London.

564) Nach *Hutton*⁵²⁹) 1627. *Favaro* führt a. a. O (s. die Litteratur zu Nr. 50) an: *Oughtred*, The circles of proportion and the horizontal instrument, London 1632, Oxford 1660; Description of the double horizontal dial, London 1636, Oxford 1652. — Die Vorteile leuchten ein: Füllt man einen Kreisumfang durch den (hier genügenden, weil in sich zurücklaufenden) Abschnitt 1—10 einer logarithmischen Skala der Zahlen aus (was allerdings nicht immer geschehen ist, vgl. *Biler*⁵⁷⁰) und *Gatley*⁵⁷⁴), so besteht dieselbe Genauigkeit, wie bei einem gewöhnlichen Rechenschieber von der 2π -fachen Länge des Durchmessers.

565) Nach *Hutton*⁵²⁹) gegen 1650. *Favaro* vermutet, dass *Milburne* eine Schraubenlinie benutzte; eine Quelle wird nirgends angegeben.

566) Ausgangspunkt bei *Oughtred* selbst, welcher nach *Favaro* zwei um den gemeinsamen Mittelpunkt der Skalen drehbare Zeiger anwandte.

567) *S. J. Bertillon*, La Nature 6 (1878), p. 31; *Dyck's* Katalog, p. 142, Nr. 10. Bei der in Fig. 64 abgebildeten Konstruktion von *Stanley* ist für die vollen Umdrehungen des beweglichen Zeigers, d. h. für die Änderungen der Kennziffer ein besonderer Zeiger vorhanden, vgl. Anm. 572.

568) *S. Zeitschr. Ver. deutscher Ing.* 21 (1877), p. 455 und Abb. auf Taf. 23. Die hauptsächlich benutzte Skala 45,5 cm lang, ausserdem Skalen für Quadrate, Kuben, sin, tg u. s. w. Über eine Rechenscheibe von *Herrmann* mit einer 5 m langen gebrochenen (auf 10 konzentrische Kreise verteilten) Skala s. „Vogler“ p. 50. — Neuere Konstruktion ist der cercle à calcul von *P. Weiss*, s. Par. C. R. 131 (1900), p. 1289 (einzige Skala etwa 50 cm lang).

569) Länge derselben bei der grösseren Form 12,7 m, einer kleineren rund 5 m, s. *Engineering* 27 (1879), p. 257; *Hammer*, *Zeitschr. Vermessungsw.* 20 (1891), p. 434; in Deutschland unter Nr. 5860 von 1878 patentiert. — Par. C. R. 45 (1858), p. 437 wird bereits eine hélice à calcul von *Bouché* erwähnt.

570) Neu erfundenes Instrumentum Mathematicum Universale, Jena 1696

von *A. S. Leblond*⁵⁷¹), der Rechenscheibe von *E. Sonne*⁵⁷²), Fig. 66, und vielen anderen⁵⁷³), oder auf den krummen Flächen zweier cylindrischer

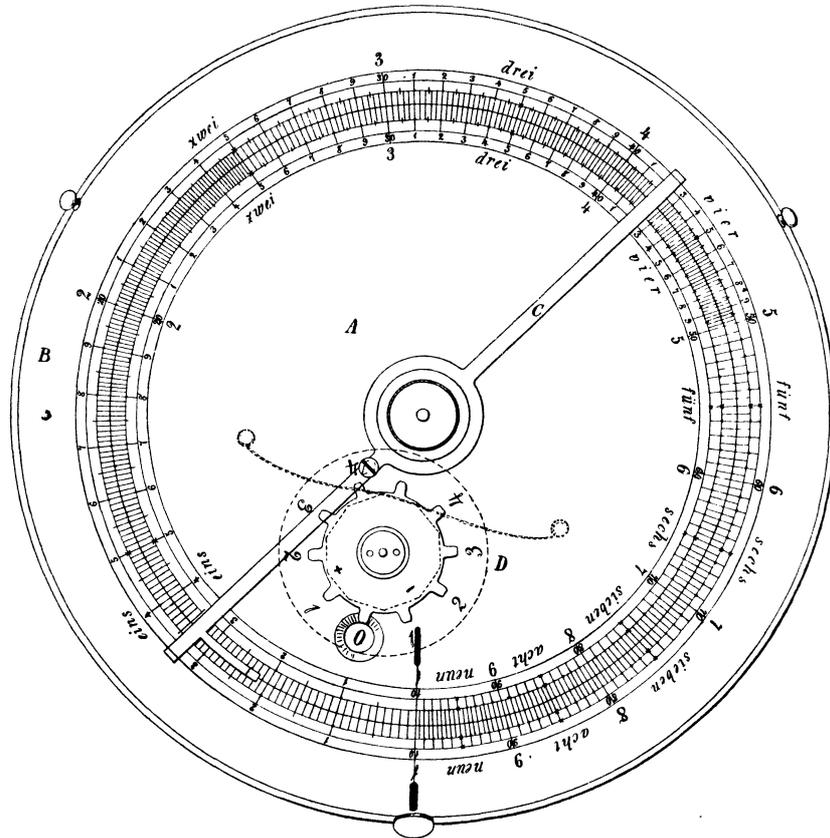


Fig. 66. Rechenscheibe von Sonne.

Beschreibung mit Abb. auch *Leupold*, *Theatrum arithmetico-geometric.*, p. 77 und Taf. 13. Der Verbindung mit einem Winkeltransporteur zu Liebe ist Halbkreisform gewählt, die logarithmischen Skalen der Zahlen gehen von 1—100; ausserdem logarithmische Skalen der sin und tg. Beim Ablesen dient ein vom Mittelpunkt ausgehender Faden.

571) *Cadrans logarithmiques*, Paris an III = 1795 (nach *Lalanne*, a. a. O. p. IX).

572) *Hannover Archit. Ingen. Ver. Zeitschr.* 10 (1864), p. 452, mit Abb. auf Blatt 301; s. etwa noch *Dyck's Katalog*, p. 142, Nr. 12 u. p. 143, Nr. 13; *Jordan*, a. a. O. Hat einen (dem Läufer beim geradlinigen Schieber entsprechenden) Zeiger und Kennzifferzählwerk, C bzw. D in Fig. 66.

573) Genannt seien von den neueren die Rechenscheibe von *F. M. Clouth* (*Anleitung zum Gebrauch der Rechenscheibe . . .*, Hamburg 1872, s. auch *Dyck's Katalog*, Nachtrag, p. 3, Nr. 11 d) mit Lupe am Zeiger, der „Proportior“ von

Scheiben, die unabhängig von einander um ihre gemeinsame Axe gedreht werden können, wie bei den „boites à calcul“ von *Gatley*⁵⁷⁴),

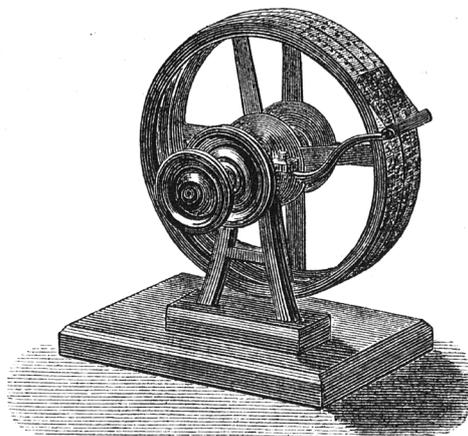


Fig. 67. Rechenrad von *Beyerlen*.

den Rechenkreisen von *R. Weber*⁵⁷⁵) und dem Rechenrad von *A. Beyerlen*⁵⁷⁶), Fig. 67⁵⁷⁷).

52. Verallgemeinerungen des Rechenschiebers. Ähnlich wie mit dem gewöhnlichen Rechenschieber Produkte und Quotienten,

W. Hart, s. *Techniker* 12 (1889/1890), p. 34, ebenfalls mit Zeiger und Mikroskop; *F. A. Meyer's* Taschenschnellrechner, s. *Mechaniker* 5 (1897), mit einfachem Kennzifferzählwerk, die Rechenscheibe mit Glasläufer und Lupe von *E. Puller*, *Zeitschr. Archit. Ingenieurw.*, Heft-Ausg. (2) 5 (1900), p. 203, *Zeitschr. Vermessungsw.* 30 (1901), p. 296. In München war 1893 eine Rechenscheibe von *A. Steinhäuser* mit zu (logarithmischen?) Spiralen erweiterten Kreisen ausgestellt (vgl. *Dyck's* Katalog, Nachtrag, p. 3, Nr. 11c), bei der vier Stellen unmittelbar abgelesen werden konnten.

574) *S. Société d'encouragem. Bull.* 15 (1816), p. 49, 50. (*Gatley* hat auch die Scheibenform, 1798 als *cadran logarithm.* veröffentlicht, 1810 als *arithmographe*; nach *J. A. Borgnis*, *Traité complet de mécanique appliquée aux arts*, 8, Paris 1820, pl. 21, fig. 2 enthält jeder Kreisumfang zweimal die Skala 1—10).

575) Anleitung zum Gebrauche des Rechenkreises, Aschaffenburg 1872; Anleitung zum Gebrauche des Kubierungskreises, Leipzig 1875 (autographiert Aschaffenburg 1872), s. auch *Dyck's* Katalog, p. 142, Nr. 11; Nachtrag, p. 2, Nr. 11a.

576) *D. R. P.* 31889 von 1884, s. *Hammer*, *Zeitschr. Vermessungsw.* 15 (1886), p. 382; *Dyck's* Katalog, p. 143, Nr. 14; *Jordan*, a. a. O. Vorteile: Die linke Hand genügt zur Bedienung, der Rechner hat beim Ablesen die Ziffern aufrecht vor sich.

577) Ein schraubenförmig gewundener Rechenschieber scheint noch nicht ausgeführt worden zu sein, jedoch hat *Leibniz* an diese Form gedacht, s. die

können mit einem Rechenschieber, der ausser logarithmischen Skalen solche der Funktion $\log \log x$ trägt, Potenzen und Wurzeln mit beliebigen Exponenten und Logarithmen zu beliebiger Basis bestimmt werden. Es haben *P. M. Roget*⁵⁷⁸), *Burdon*⁵⁷⁹), *F. Blanc*⁵⁸⁰) u. a. diesen Gedanken verwirklicht.

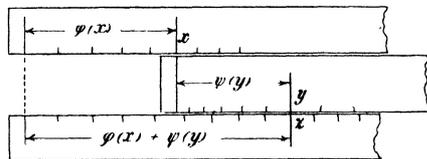


Fig. 68.

Die Anwendung allgemeinerer Skalen hat *P. de Saint-Robert* erörtert⁵⁸¹). Lässt eine Gleichung $F(x, y, z) = 0$ sich auf die Form:

$$f(z) = \varphi(x) + \psi(y)$$

bringen⁵⁸²), so kann sie durch einen Rechenschieber mit den Skalen der Funktionen f, φ, ψ , von denen etwa die letzte auf der Zunge angebracht sei (s. Fig. 68), dargestellt werden. Wie *Ch. A. Vogler* gezeigt hat⁵⁸³), lassen sich drei Glieder auf einmal addieren, wenn

Mitteilung bei *Leupold*, a. a. O. p. 37 (Abdruck eines Anhangs zur Ausgabe der *Theodicaea* von 1726); dort ist zwar von gleichmässigen Teilungen die Rede, wofür *Leupold* p. 38 vorgeschlagen hat, logarithmische Skalen zu nehmen.

578) Lond. Trans. 1815 (read Nov. 1814), p. 9.

579) S. Par. C. R. 58 (1864), p. 573. (Indirektes) Verfahren zur Lösung eines Systems zweier Gleichungen $xy^m = a, xy^n = b$, wo m, n, a, b gegebene Konstanten, vgl. Anm. 585.

580) S. Dyck's Katalog, p. 145. „Doppellogarithm.“ Rechenschieber, auf den Rändern des Stabes logarithmische, auf denen der Zunge doppellogarithm. Skalen. Finden sich bei beliebiger Stellung der Zunge den Zahlen x, x_1 eines Stabrandes die Zahlen z, z_1 gegenüber, so ist $z^{x_1} = z_1^x$, insbesondere hat man für $x_1 = 1, z_1 = y, z = y^x$. Ausserdem zwei Teilungen auf der Zunge, welche die Werte $\frac{1}{2}(y^x \pm y^{-x})$, also für $y = e$ (Grundzahl der natürlichen Logarithmen, für die ein besonderer Strich vorhanden), die hyperbolischen Funktionen $\text{Cos} x$ und $\text{Sin} x$ liefern. — *H. Fürle* betrachtet⁵⁸⁵), p. 12 auch das Potenzieren und Radizieren bei umgekehrter logarithmischer Skala. — *W. Schweth* bringt die doppellogarithmischen Skalen noch auf dem gewöhnlichen Rechenschieber an, s. *Zeitschr. Ver. deutscher Ing.* 45 (1901), p. 567, 720.

581) Torino Acc. Sci. Memorie (2) 25 (1871), p. 53. Einige Beispiele durchgeführt.

582) Notwendige und ausreichende Bedingung s. Anm. 443. Ist dieselbe nicht erfüllt, so wird man sich vielleicht mit einer angenähert richtigen Darstellung begnügen; hiermit hat sich *A. Lafay*, *Rev. d'Artillerie* 58 (1901), p. 455 beschäftigt.

583) *Zeitschr. Vermessungsw.* 10 (1881), p. 257. Fall $u = xyz$ ausdrücklich erwähnt, für welchen zwei Zungen für nötig hielt z. B. *F. A. Sheppard*, *D. R. P.* Nr. 7567 von 1878, s. Dyck's Katalog, p. 141, Nr. 7.

man auf der Zunge zwei Skalen von ungleichem Sinn anbringt, s. Fig. 69, und für $(2n + 1)$ Summanden genügen n Zungen, die unabhängig von einander in parallelen Kulissen verschoben werden können. Durch Einführung binärer Skalen wird die Darstellung einer Funktion der Form:

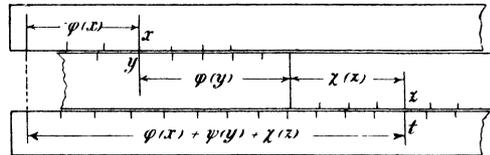


Fig. 69.

$$\varphi(x_1, x_2) + \psi(y_1, y_2) + \chi(z_1, z_2) + \dots$$

durch einen Rechenschieber möglich⁵⁸⁴).

H. Fürle hat untersucht, welche Gleichungen durch Anwendung eines Rechenschiebers mit beliebigen Skalen gelöst werden können^{585) 586}).

53. Stetige Rechenmaschinen für die gewöhnlichen arithmetischen Operationen. Will man auf logarithmische Skalen zu Gunsten

584) S. „d'Ocagne“ p. 360, 361; Beispiele p. 362; „Soreau“ p. 474.

585) Zur Theorie der Rechenschieber, Progr. 9. Realsch. Berlin 1899. Verallgemeinerung der Methoden von Bour⁵⁴⁷) und Burdon⁵⁷⁹). Ist die Skala der Funktion $\varphi(x)$ beliebig gegen die der Funktion $\psi(y)$ gelegt und stehen an irgend zwei Stellen die Zahlen x, y , bzw. x_1, y_1 einander gegenüber, so ist $\varphi(x) \mp \varphi(x_1) = \psi(y) \mp \psi(y_1)$, (die unteren Zeichen gelten bei ungleich gerichteten Skalen). Betrachtet man in dieser Gleichung zwei der Grössen x, x_1, y, y_1 als gegeben und fügt man etwa die Bedingung hinzu, dass die beiden unbekannt Grössen eine konstante Summe oder Differenz geben, so lassen sich die Unbekannten (welche insbesondere gleich gesetzt werden können) durch gegenseitiges Verschieben der Skalen finden. Fürle beschreibt einen Rechenschieber, der neben den üblichen Skalen solche der Funktionen $x, x^2, x^3, \log \log x$ hat; ausser quadratischen und kubischen Gleichungen können damit solche 4. und 5. Grades, allgemeine trinomische und gewisse transcendente Gleichungen gelöst werden. — I. Newton hat einen logarithmischen Rechenschieber mit mehreren parallelen Zungen (oder auch drehbaren konzentrischen kreisförmigen Skalen) von gleichen Zwischenräumen zum Lösen von Gleichungen benützt, s. Opera omnia 4, Londini 1782, p. 520 (Auszug aus einem Brief von Oldenburg an Leibniz vom 24. Juni 1676). Nach Einstellung der Skalen bzw. auf a, b, c, \dots liest man an jeder durch einen gewissen festen Punkt gehenden Geraden bzw. die Werte ax, bx^2, cx^3, \dots ab und muss nun die Gerade drehen, bis jene Werte die vorgeschriebene Summe geben. Ähnlich ein Instrument von L. Torres zur Lösung sämtlicher trinomischer Gleichungen (zwei auch in der Querrichtung verschiebbare logarithmische Skalen), s. „d'Ocagne“ p. 366, allgemeinere Auffassung von d'Ocagne, ebenda p. 364 (in zwei Richtungen verschiebbare beliebige Skalen).

586) Über Rechenschieber für komplexe Grössen s. Mehmke, Dyck's Katalog, Nachtrag, p. 21, Nr. 44 d.

gewöhnlicher verzichten, so können Proportionsrechnungen auch mit Apparaten ausgeführt werden, die durch Verkörperung der geraden

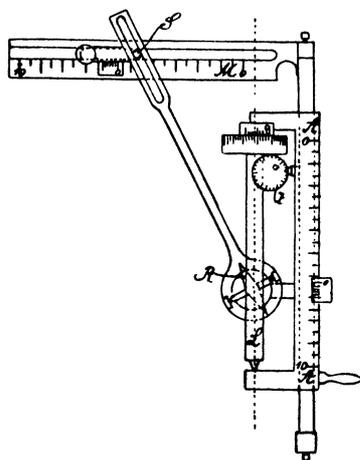


Fig. 70. Proportional-Rechenschieber von *Hamann*.

Linien entstehen, welche bei den in Fig. 23—25, p. 1009, dargestellten Konstruktionen vorkommen⁵⁸⁷). Grössere Bedeutung haben Instrumente, welche die Schnelligkeit der logarithmischen Rechenschieber mit der Fähigkeit der eigentlichen Rechenmaschinen verbinden, Ausdrücke der Form:

$$ab \pm a_1 b_1 \pm a_2 b_2 \pm \dots$$

zu bilden (vgl. Nr. 21). Ein beachtenswerter Anfang ist mit *Ch. Hamann's* „Proportional-Rechenscheibe“⁵⁸⁸) und dem „Proportional-Rechenschieber“ desselben Erfinders⁵⁸⁹), s. Fig. 70, gemacht, die auf der Verwendung scharfkantiger Rollen beruhen⁵⁹⁰).

587) Als Beispiel sei der „Rechenschieber zum Multiplizieren und Dividieren“ von *G. Oldenburger*, Zeitschr. Instrumentenkunde 5 (1885), p. 163, genannt. Mit den logarithmischen Rechenschiebern können sich derartige Apparate in keiner Beziehung messen; beliebige Potenzen und Wurzeln könnten damit nach Anbringung logarithmischer Skalen bestimmt werden; sie lassen sich auch zu Elementen eigentlicher Rechenmaschinen umbilden, vgl. *Strehl*¹⁵⁴). — Als wirkliche Multiplikationsmaschine darf die Vorrichtung von *C. Hart*, D. R. P. Nr. 57838 von 1891, bezeichnet werden (Anwendung eines schwingenden Hebels mit veränderlichem Verhältnis der Armlängen; drei gleichmässig geteilte konzentrische Kreise mit Zeigern, von welchen der dritte auf das Produkt der mit den ersten beiden eingestellten Zahlen weist).

588) *S. W. Semmler*, Zeitschr. Vermessungsw. 28 (1899), p. 304.

589) *S. H. Koller*, Zeitschr. Vermessungsw. 28 (1899), p. 660. Alle vier Spezies können in beliebiger Reihenfolge ausgeführt werden. Um z. B. das Produkt $a \cdot m$ zu einer etwa schon im Zählwerk Z stehenden Zahl zu addieren, hebt man den Cylinder L von der Rolle R ab, führt ihn auf die Ablesung 0 der Skala A zurück, stellt den Stift S auf die Zahl m der Skala M und führt den Cylinder L über die Rolle hinweg, bis der Faktor a auf der Skala A erscheint. Verallgemeinerung durch Anbringen beliebiger Skalen neben den gewöhnlichen.

590) *L. Lalanne* wollte Ausdrücke der Form:

$$(Pp + P'p' + \dots) : (P + P' + \dots)$$

mittelst einer (auch ausgeführten) „balance arithmétique“ berechnen, s. Par. C. R. 9 (1839), p. 319, 693, später Summen von Produkten aus zwei Faktoren (welche Produkte als Inhalte von Rechtecken aufgefasst werden) mittelst eines diesem Zweck angepassten Planimeters („Arithmoplanimètre“), s. Par. C. R. 9 (1839),

54. Mechanismen zur Auflösung von Gleichungen mit einer Unbekannten. Mechanismen zu erfinden, mit denen man die schwierigsten mathematischen Aufgaben mühelos bewältigen könnte, ist ein Ziel, das immer einen mächtigen Anreiz ausübt hat⁵⁹¹). Was die

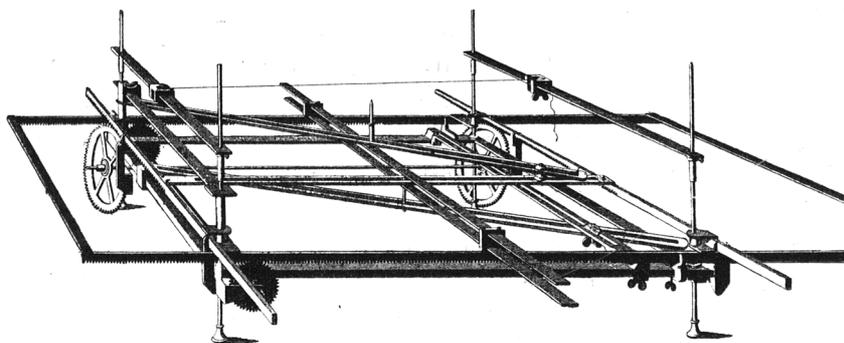


Fig. 71. Rowning's Universal constructor of equations.

mechanische Lösung von Gleichungen betrifft, so ist auch auf diesem Gebiete viel erreicht worden, ohne dass (den Fall eines Systems linearer Gleichungen etwa ausgenommen) von einem dringenden Bedürfnis gesprochen werden könnte oder von den erdachten Instrumenten vorläufig ein besonderer Nutzen zu erwarten wäre.

Auf den in Nr. 38 vorgeführten Methoden zur graphischen Berechnung rationaler ganzer Funktionen beruhen die Mechanismen, welche 1771 *J. Rowning*⁵⁹²), s. Fig. 71, und 1877 *H. Wehage*⁵⁹³) angegeben haben.

p. 800; 10 (1840), p. 679; ausführlich Ann. ponts chaussées 1840², p. 3 und fig. 1—6, pl. 192 und 193.

591) Das Altertum kannte schon eine mechanische Lösung des Delischen Problems, also einer reinen kubischen Gleichung, welche *Plato* zugeschrieben wird (s. *Cantor's Vorles. üb. Gesch. d. Mathem.* 2, 2. Aufl., p. 214, 219) und auf der Anwendung zweier beweglicher rechter Winkel beruht; sie kann mit Hilfe des *Lill'schen* Verfahrens (s. Nr. 38, p. 1011) leicht auf vollständige kubische Gleichungen ausgedehnt werden, vgl. *A. Adler*, Wien. Ber. 99² (1890), p. 859. Für beliebige algebraische Gleichungen hat *Lill* selbst einen Apparat zur leichteren Anwendung seiner Methode gegeben, s. *Nouv. Ann. math.* (2) 6 (1867), p. 361, *G. Arnoux* (der die Methode sich zuschreibt) optische und mechanische Hilfsmittel dazu vorgeschlagen, *Ass. franç.* 20², Marseille 1891, p. 241; *Soc. Math. France Bull.* 21 (1893), p. 87. Über einen auf dieselbe Methode gegründeten zwangsläufigen Mechanismus s. *Wehage*⁵⁹³), Fig. 6.

592) *Lond. Trans.* 60 [for 1770], p. 240. Die Geraden der Fig. 27, p. 1011 sind durch Stäbe ersetzt, ein Stift im Punkte q_n (in Fig. 71 nach oben stehend) beschreibt (auf einem über das Ganze gelegten Brett) bei Verschiebung des Stabes Q die Kurve $z = f(x)$, wo $f(x) = 0$ die aufzulösende Gleichung. (Der in Fig. 71 zu sehende Faden giebt die x -Axe.) Für quadratische Gleichungen

Bei einigen andern, für welche *R. Skutsch*⁵⁹⁴) die Bezeichnung Gleichungswagen vorgeschlagen hat, dienen die Gleichgewichtslagen eines

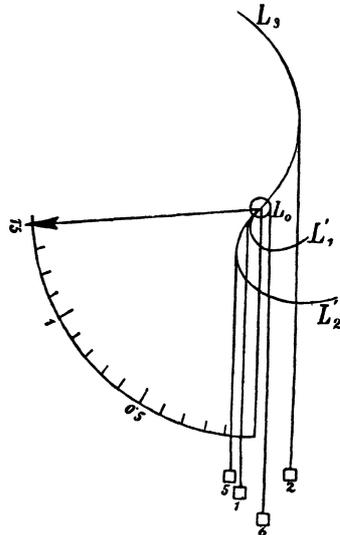


Fig. 72. Gleichungswage von Exner.

starrten Körpers oder Körpersystems von ein- oder zweifacher Beweglichkeit, an dem Gewichte proportional den Koeffizienten der gegebenen Gleichung angreifen, zur Bestimmung der reellen Wurzeln der letzteren, und zwar wird eine einzige Wage benützt⁵⁹⁵) von *L. Lalanne*⁵⁹⁶) und *C. Exner*⁵⁹⁷), s. Fig. 72, ein System solcher⁵⁹⁸) von *C. V. Boys*⁵⁹⁹),

ausgeführt. Dieselbe Maschine abgebildet in der *Encyclopédie méthodique* 1, Paris 1784, pl. 3, ferner in *J. A. Borgnis*, *Traité complet de mécanique appliquée aux arts* 8, Paris 1820, pl. 23, fig. 1 (hier *Clairaut* zugeschrieben, keine Quellenangabe).

593) *Zeitschr. Ver. deutscher Ing.* 21 (1877), p. 105, Fig. 6–8 auf Textblatt 3, verschiedene Entwürfe.

594) *Zeitschr. Math. Phys.* 47 (1902), p. 85;

dort p. 86 ff. zunächst allgemeinere Auffassung, als oben.

595) Die Hebelarme der Kräfte müssen dann proportional den verschiedenen Potenzen einer Verstellungsgrösse verändert werden können (durch Kurvenschablonen).

596) „Balance algébrique“ (für Gleichungen der ersten sieben Grade ausgeführt), Form einer Balkenwage mit in senkrechter Richtung verstellbarem Drehpunkt, s. *Par. C. R.* 11 (1840), p. 859, 959; ferner *E. Collignon*, *Traité de mécanique* 2, Paris 1873, p. 347, 401 (p. 349 Ausdehnung auf imaginäre Wurzeln: Wagbalken zu einer Ebene erweitert). *Lalanne* hat den Gedanken von *Bérard* (*Opuscules mathématiques*, 1810) übernommen, aber zweckmässiger durchgeführt.

597) Über eine Maschine zur Auflösung höherer Gleichungen, *Progr. Gymn. IX. Bezirk*, Wien 1881. Fäden, an denen die Gewichte a_0, a_1, \dots hängen, über (fest verbundene und um ihre gemeinsame wagerechte Axe drehbare) Kurvenscheiben gelegt; Kurven so beschaffen, dass nach der Drehung x auf die n^{te} Scheibe das Drehmoment $a_n x^n$ ausgeübt wird. Fig. 72 entspricht dem Falle der Gleichung $6 - x - 5x^2 + 2x^3 = 0$ und der Wurzel $x = 1,5$.

598) Soviel Wagbalken, wie die Gleichung Glieder hat; an jedem greift ein den betreffenden Koeffizienten darstellendes Gewicht in konstanter Entfernung vom Drehpunkt an, jeder spätere Wagbalken stützt sich durch ein Zwischenglied auf den vorhergehenden in einem Punkt, dessen veränderlicher Abstand vom Drehpunkt der Unbekannten x entspricht.

599) *Phil. Mag.* (5) 21 (1886), p. 241. Parallele Wagbalken in einer senkrechten Ebene, positive Richtungen abwechselnd, s. die schematische Fig. 73. Auf den unteren Balken wird das Drehmoment $a + bx + cx^2 + \dots$ ausgeübt,

54. Mechanismen zur Auflösung von Gleichungen mit einer Unbekannten. 1069

s. Fig. 73, *J. Massau*⁶⁰⁰, *G. B. Grant*⁶⁰¹ und *Skutsch*⁶⁰²). Integrierende Rollen (II A 2, E) verwenden *E. Stamm*⁶⁰³ und *F. Guarducci*⁶⁰⁴, Gelenkmechanismen u. a. *A. B. Kempe*⁶⁰⁵). Die höchsten Leistungen weisen

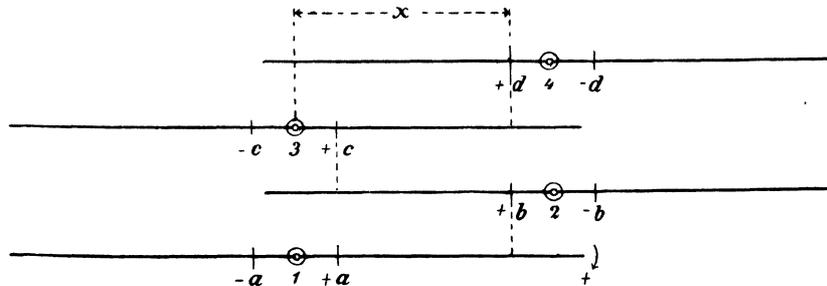


Fig. 73. Schema der Gleichungswage von *Boys*.

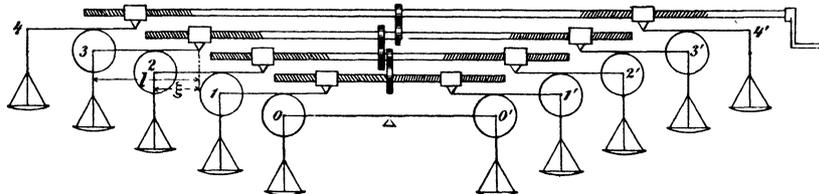


Fig. 74. Gleichungswage von *Grant*, abgeändert durch *Skutsch*.

wenn an den Balken der Reihe nach die Gewichte a, b, c, \dots je in der Entfernung 1 vom Drehpunkt hängen.

600) Note sur les intégraphes (Extrait Gand Ass. Ingén. Bull.), 1887, p. 30 und Fig. 26. Parallele Wagbalken in horizontaler Ebene, Drehpunkte in einer festen Geraden senkrecht zu denselben. Konstruktiv nicht durchgebildeter Entwurf.

601) Am. Machinist 19 (1896), p. 824. Ähnlich wie *Boys*, jedoch positive Richtungen der Wagbalken alle gleich, Anordnung deshalb weniger einfach.

602) Verschiedene Entwürfe; durch den ⁶⁰⁴), p. 95, Fig. 6, s. oben Fig. 74 ($x = \xi : l$), sind konstruktive Mängel von *Grant's* Wage beseitigt worden.

603) Essais sur l'automatique pure, Milano 1863; s. auch *Ch. Laboulaye*, Traité de cinématique . . . , 3^e éd., Paris 1878, p. 496. *Stamm* dringt tiefer in die Frage der Herstellung funktioneller Abhängigkeiten zwischen Drehungen durch kinematische Hilfsmittel ein. Die Addition geschieht durch Planetenräder. Im Grunde sind *Stamm's* Maschinen zusammengesetzte Integratoren und es könnte jeder Integrator ähnlich benützt bzw. umgestaltet werden.

604) Rom. Lincei Mem. (4) 7 anno 1890 (1892), p. 217 und Taf. 3. *Stamm's* Grundgedanke einfacher durchgeführt, Addition mittelst eines um Rollen geschlungenen Fadens.

605) Mess. of math. (2) 2 (1873), p. 51. Es wird $x = c \cos \theta$ gesetzt und die Gleichung auf die Form:

$$u \equiv c_0 + c_1 \cos \theta + c_2 \cos 2\theta + \dots + c_n \cos n\theta = 0$$

die „algebraischen Maschinen“ von *L. Torres*⁶⁰⁶) auf, mit welchen reelle und imaginäre Wurzeln von Gleichungen jeder Form bestimmt werden können.

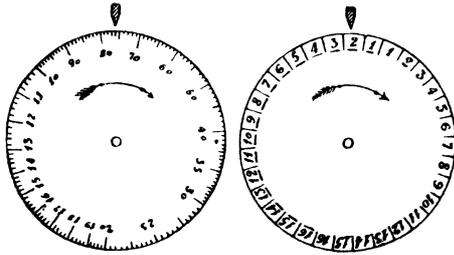


Fig. 75.

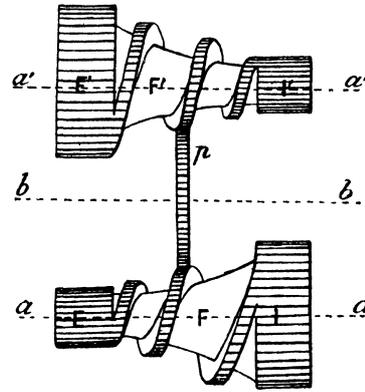


Fig. 76.

55. Mechanismen zur Auflösung von Gleichungssystemen. Für lineare Gleichungen mit beliebig vielen Unbekannten sind solche von *H. Wehage*⁶⁰⁷), *Sir W. Thomson* (jetzt *Lord Kelvin*)⁶⁰⁸) und *F. Guar-*

gebracht. Der Reihe nach durch Gelenke drehbar verbundene Glieder von den Längen c_0, c_1, c_2, \dots werden durch geeignete Vorrichtungen so bewegt, dass jedes mit dem vorhergehenden denselben Winkel θ bildet, wie das Glied c_1 mit dem festgehaltenen c_0 , also die Projektion des ganzen Linienzugs auf das erste Glied immer den betreffenden Wert von u liefert. Nach *H. S. Hele Shaw*, Second report on the development of graphic methods... (Brit. Ass. Rep.), London 1892, p. 45, hat *B. Bashforth* 1822 schon ein Instrument für die etwas allgemeinere Funktion $\sum c_n \cos(n\theta + a_n)$ beschrieben. — *Saint-Loup* zeigt Par. C. R. 79 (1874), p. 1323 die Lösung kubischer Gleichungen mit Hilfe eines Gelenkvierecks, ebenso *A. Adler*, Graphische Auflösung der Gleichungen, Progr. Oberrealsch. Klagenfurt 1891, p. 24.

606) Memoria sobre las máquinas algebraicas, Bilbao 1895, s. auch Par. C. R. 121 (1895), p. 245; Ass. franç. 24², Bordeaux 1895, p. 90; Par. C. R. 130 (1900), p. 472, 874; ferner *M. d'Ocagne*, Génie civil 27 (1895/96), p. 179. Diese Maschinen nehmen dieselbe Stellung ein, wie im graphischen Rechnen die logarithmographische Methode (Nr. 40—42), da jede Veränderliche durch einen „Arithmophor“, s. Fig. 75, dargestellt wird, dessen Drehungen den log der Werte der Veränderlichen proportional sind (die Scheibe rechts giebt die Kennziffern der Logarithmen). Alle Mechanismen zwangsläufig und „ohne Ende“. Wie bei jedem logarithmischen Verfahren Multiplikation und Potenzierung am leichtesten; zur Addition dient das Element Fig. 76, welches hier dieselbe Rolle spielt, wie im graphischen Rechnen die Additionskurve oder *Brauer's* logarithmischer Zirkel (s. p. 1019). Die Maschine Fig. 77 ist für trinomische Gleichungen bestimmt.

607) Ver. Gewerbfleiss Verh. 57 (1878), p. 154 und Taf. 10. Beruht auf der graphischen Addition von Produkten mittelst eines Seilpolygons, s. Nr. 38.

*ducci*⁶⁰⁹⁾ erfunden worden. Die algebraischen Maschinen von *L. Torres*⁶⁰⁶⁾ können auch für beliebige Systeme von Gleichungen höheren Grades eingerichtet werden.

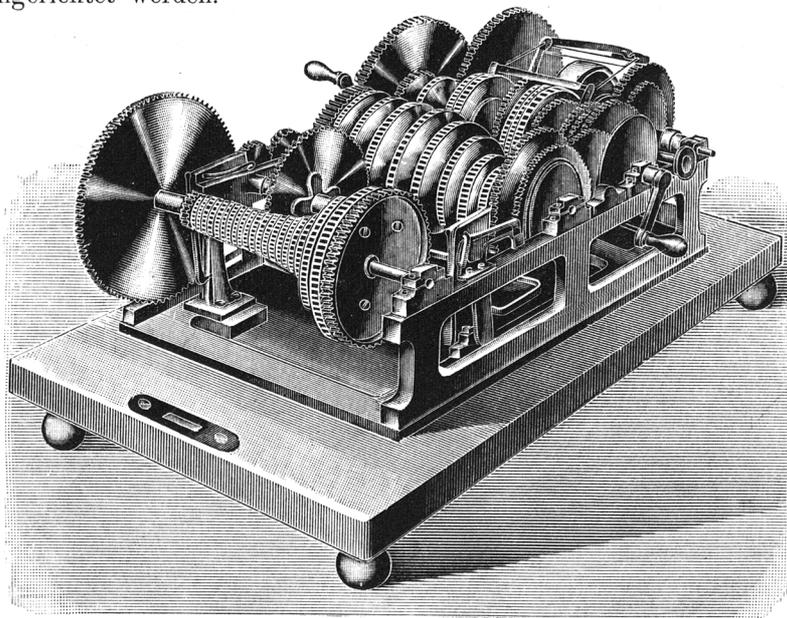


Fig. 77. Algebraische Maschine von *Torres*.

Die den n Gleichungen entsprechenden n Seilpolygone werden als bewegliche Stabverbindungen ausgeführt. Nur Entwurf.

608) Lond. R. Soc. Proc. 28 (1878), p. 111; *Thomson and Tait*, Natural Philosophy 1¹, 2^d ed. Cambridge 1879, p. 482 (hier mit Abb. einer ausgeführten Maschine für $n = 6$). An n , um feste Axen drehbaren Stäben sind je n Rollen befestigt, über welche n , durch angenommene Gewichte gespannte Schnüre gehen. Die bei bestimmten Verkürzungen der Schnüre erfolgenden Drehungen der Stäbe liefern die Wurzeln.

609) Zwei Entwürfe, s. ⁶⁰⁴⁾, p. 219, 225 und Taf. 1, 2. Der erste Apparat, mit $(n + 1)$ Reihen von Scheiben und integrierenden Rollen, führt die bei algebraischer Behandlung nötigen Eliminationen mechanisch aus. Der andere mit dem von Lord *Kelvin* verwandt, nur sind die Unbekannten durch die (bei ungeänderter Lage der Stäbe) in den Schnüren vorhandenen Spannungen dargestellt (Grundgedanke ähnlich dem von *Veltmann*⁶¹²⁾). — Die Apparate von *H. Helberger* zur mechanischen Berechnung elektrischer Leitungsnetze, D. R. P. Nr. 68918 (Klasse 21) von 1892, mit sich kreuzenden gespannten Schnüren, an welche (unter Beachtung des Durchhangs) Gewichte gehängt werden, lassen sich auch für obigen Zweck verwenden, vgl. *Schütz*, Dyck's Katalog, Nachtrag, p. 122, Nr. 298 b.

VI. Physikalische Methoden.

56. Hydrostatische Auflösung von Gleichungen und Systemen solcher. Reduzierte kubische und andere trinomische Gleichungen

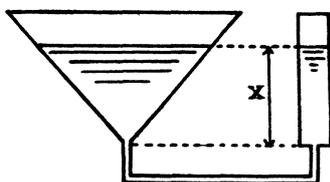


Fig. 78.

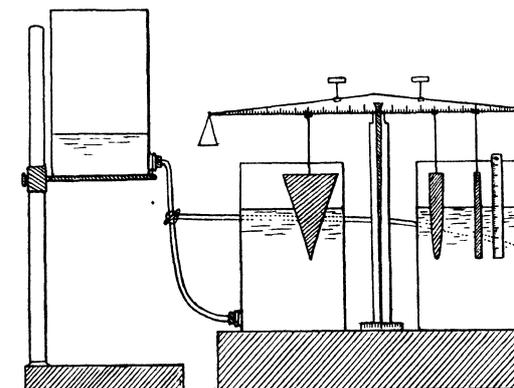


Fig. 79.

lassen sich nach *Demagnet*⁶¹⁰) durch Eingießen bestimmter Flüssigkeitsmengen in zwei kommunizierende Gefäße von bestimmter Gestalt, s. Fig. 78, auflösen. Auch für Gleichungen der Form:

$$px^n + p_1x^{n_1} + \dots = A$$

mit beliebig vielen Gliedern brauchbar ist die hydrostatische Gleichungswage von *G. Meslin*⁶¹¹), Fig. 79. *W. Veltmann* löst⁶¹²) ein

610) *Mathesis* (2) 8 (1898), p. 81. Durch Einsetzen von $z = x\sqrt{p}$ wird die Gleichung $z^3 + pz = q$ auf die Form $x^3 + x = c$ gebracht. Der Hohlzylinder Fig. 78 hat den Querschnitt 1, der Hohlkegel solche Gestalt, dass der Inhalt $= h^3$. Wird die Flüssigkeitsmenge c eingebracht, so ist die Höhe x , auf welche sich die Flüssigkeit stellt, eine Wurzel der Gleichung. Im Falle $x^3 - x = c$ muss in den Hohlkegel ein Vollezylinder gestellt werden. Ausdehnung auf beliebige trinomische Gleichungen deshalb leicht, weil solche nach Nr. 36 auf die Form $x^m \pm x^n = c$ gebracht werden können; bei Gleichungen mit mehr als einem Parameter umständlich.

611) *Par. C. R.* 130 (1900), p. 888; *J. de phys.* (3) 9 (1900), p. 339. An den Wagbalken werden einerseits im Abstand 1 vom Drehpunkt das Gewicht A , andererseits in den Abständen p, p_1, \dots vom Drehpunkt Körper von solcher Gestalt angehängt, dass beim Eintauchen in eine Flüssigkeit um die Tiefe x die verdrängten Rauminhalte bzw. x^n, \dots proportional sind. Man findet eine Wurzel, indem man Flüssigkeit einströmen lässt, bis Gleichgewicht hergestellt ist. Tritt nach weiterem Steigen der Flüssigkeit wieder Gleichgewicht ein, so ergibt sich eine zweite Wurzel u. s. w. Als Körper für x^n dient ein Drehungskörper, dessen Meridian die Gleichung $y^2 = cx^{n-1}$ hat, also für $n = 1, 2, 3$ ein Zylinder, Paraboloid, Kegel. Wie *Skutsch*⁶⁹⁴), p. 92 bemerkt, kann das Paraboloid durch

56. Hydrostatische Auflösung. 57. Elektrische Auflösung. 58. Proben. 1073

System linearer Gleichungen mittelst ebenso vieler Balkenwagen auf, wobei zur Verwirklichung der Bedingung, dass jede Unbekannte in allen Gleichungen denselben Wert haben muss, die Gewichte durch Flüssigkeitsmengen in kommunizierenden Gefässen dargestellt werden.

57. Elektrische Auflösung von Gleichungen. Wie mit Hilfe der Elektrizität sämtliche Wurzeln einer algebraischen Gleichung beliebigen Grades mit reellen Koeffizienten bestimmt werden können, hat *F. Lucas* gezeigt⁶¹³).

C. Anhang.

58. Proben. Man sucht sich beim Zahlenrechnen gegen Fehler u. a.⁶¹⁴) durch Proben zu schützen, mögen diese nun in einer Umkehrung oder einer Wiederholung der Rechnung mit anderer Anordnung, anderen Formeln oder anderen Hilfsmitteln bestehen, oder in der Untersuchung, ob gewisse im voraus bekannte Beziehungen zwischen den durch die Rechnung erhaltenen Grössen erfüllt sind, oder in sogenannten Restproben, welch' letztere wir allein ins Auge

einen ebenflächigen Keil mit wagrechter unten liegender Schneide ersetzt werden, ebenso Cylinder und Kegel durch Prisma und Pyramide, sodass man bei kubischen Gleichungen mit ebenflächigen Körpern auskommt. *A. Emch*, der *Am. Math. Monthly* 8 (1901), p. 58 dieselbe Methode beschreibt, spricht p. 12 von der Bestimmung n^{ter} Wurzeln durch die Zeit, welche zur Entleerung eines Gefässes geeigneter Form durch eine kleine Öffnung im Boden erforderlich ist.

612) *Zeitschr. Instrumentenkunde* 4 (1884), p. 338, s. auch *Dyck's Katalog*, p. 155, Nr. 40.

613) *Par. C. R.* 106 (1888), p. 645 (vorausgehende Mitteilungen p. 195, 268, 587). $F(z) = 0$ sei die gegebene Gleichung vom Grade n ; x_1, x_2, \dots seien $(n+1)$ willkürliche reelle und verschiedene Grössen, $f(z) = (z-x_1)(z-x_2)\dots(z-x_{n+1})$; es wird $F(z):f(z)$ in Partialbrüche $\sum \mu:(z-x)$ zerlegt. Lässt man in die komplexe Zahlenebene in den Punkten x_1, x_2, \dots, x_{n+1} der x -Axe Elektrizitätsmengen proportional den Grössen μ ein- (bzw. bei negativem μ aus-)strömen, so sind die Knotenpunkte der Linien gleichen Potentials die gesuchten Wurzelpunkte der Gleichung. Die nötigen Kurven kann man entweder galvanometrisch nach *Kirchhoff* bestimmen, oder von der Elektrizität selbst zeichnen lassen (elektrochemische Methode von *Guëbhard*). *A. a. O.* p. 1072 wird wegen leichter Ausführung des Versuchs für $f(z)$ ein Polynom $(n+2)^{\text{ten}}$ Grades angenommen, ferner wird *Par. C. R.* 111 (1890), p. 965 die entsprechende elektromagnetische Methode angegeben (hier die gesuchten Wurzelpunkte die neutralen Punkte eines elektromagnetischen Feldes, wobei die Kraftlinien mit Eisenfeilspänen hergestellt werden können).

614) S. auch die Bemerkungen „Lüroth“ p. 3 unten, ferner § 10, p. 19 (Prüfung numerischer Tafeln).

fassen wollen. Im Falle eines Produktes $ab = c$ z. B. muss, wenn α, β, γ beziehentlich die kleinsten Reste bezeichnen, welche bei der Division von a, b, c durch eine beliebig gewählte Zahl N bleiben, γ gleich dem kleinsten Reste sein, der sich bei der Division von $\alpha\beta$ durch N ergibt. Am leichtesten anzuwenden ist die, $N = 9$ entsprechende „Neunerprobe“⁶¹⁵), welche aus Indien stammt und im Mittelalter viel angewendet⁶¹⁶), im 19. Jahrhundert öfters wieder ans Licht gezogen und sogar als neue Erfindung ausgegeben worden ist. Ihren Gebrauch bei abgekürzter Multiplikation hat *A. Cauchy*⁶¹⁷) gezeigt, den auch anderer Restproben beim Dividieren, Potenzieren und Wurzelausziehen *Krönig*⁶¹⁸), bei verschiedenen zusammengesetzten Rechnungen *H. Anton*⁶¹⁹). Volle Sicherheit gewährt natürlich keine Restprobe⁶²⁰), am wenigsten die mit Neun⁶²¹), der die noch verhältnismässig leicht ausführbare Elfer- und Hunderteinerprobe überlegen sind⁶²²); in Vorschlag und zur Anwendung gebracht hat

615) Um den kleinsten Rest der Division einer Zahl a durch 9 zu erhalten, bildet man (unter Weglassung jeder etwa vorkommenden Ziffer 9) die Summe der Ziffern, aus denen a besteht, und wenn diese „Quersumme“ grösser als 9 ist, aus ihren Ziffern wieder die Quersumme u. s. f., bis eine Zahl kleiner als 9 sich ergibt („reduzierte Quersumme“, s. *Vermung*⁶²¹).

616) S. etwa *Cantor*, Vorles. üb. Gesch. d. Mathem. 1, p. 571 u. Register; 2, p. 9 u. Register.

617) Par. C. R. 11 (1840), p. 789, 847. *Cauchy* wendet die Neunerprobe in der Weise an, dass er die Rechnung ein zweites Mal so durchführt, als ob die Ziffern der vorkommenden Zahlen nicht Einheiten verschiedener Ordnungen, sondern derselben Ordnung bezeichneten.

618) Über Mittel zur Vermeidung und Auffindung von Rechenfehlern, Progr. Realsch. Berlin 1855. Auch abgekürzte Division. Proben mit 9, 11, 101.

619) Arch. Math. Phys. 49 (1869), p. 241. Anwendung der Restproben auf Kettenbrüche, Permutations- und Kombinationszahlen, Produkte von Wurzelfaktoren und Partialbrüche. Proben mit 9, 13, 101.

620) Je grösser N , desto grösser die Sicherheit der darauf gegründeten Proben. Nach *Krönig*⁶¹⁸) bleibt, wenn die Proben mit 11, 37, 101 stimmen, unter rund 41 000 falschen Ergebnissen durchschnittlich ein einziges unentdeckt.

621) Weglassen der Ziffer 0 oder 9, Verwechslung von 0 mit 9 und Vertauschung zweier Ziffern bleiben unentdeckt. Die Vertauschung von Ziffern kommt besonders leicht beim Lesen von Zahlen auf deutsche Art vor, weshalb schon, z. B. von *W. Förster* in dem Vorwort zu *F. Vermung*, Die reduzierten Quersummen, Eberswalde 1886, den deutschen Rechnern empfohlen worden ist, die Zehner stets vor den Einern auszusprechen. Über die Tragweite der Neunerprobe bei Kenntnis der subjektiven Genauigkeit des Rechners s. *F. Hofmann*, Zeitschr. Math. Phys. 34 (1889), p. 116.

622) Ist in einer Rechnung nur eine Ziffer falsch, so weist die 11^{er}-Probe den Fehler jedesmal nach; die 101^{er}-Probe bietet nach *Krönig*⁶¹⁸) noch 9mal so

man auch die Proben mit 998⁶²³), 49⁶²⁴) und einigen anderen Zahlen⁶²⁵).

59. Gemischte Methoden. Durch zweckmässige Verbindung zweier oder mehrerer Hilfsmittel, von denen eines auch im gewöhnlichen schulmässigen Rechnen bestehen kann, lassen sich oft grosse Vorteile erreichen. Die denkbaren und auch die wirklich vorkommenden Fälle sind so mannigfaltig, dass hier nur einige beispielshalber angeführt werden können. Wenige Rechnungen giebt es, bei denen sich der logarithmische Rechenschieber nicht nützlich zu machen vermöchte, sei es dass man bei einer längeren, auf gewöhnliche Weise ausgeführten Division die einzelnen Ziffern des Quotienten mit ihm bestimmt⁶²⁶), oder beim Rechnen mit Logarithmen- und sonstigen Tafeln die Interpolationen mit ihm bewerkstelligt⁶²⁷), oder beim Dividieren mit einer Rechenmaschine, wenn dieselbe keine Ziffer des Quotienten mehr liefern kann, mit dem Rechenschieber einige hinzufügt u. s. w. Giebt eine Logarithmentafel oder ein Rechenschieber ein Produkt zweier Faktoren mit n Ziffern, aber die letzte unsicher, so kann man diese durch Multiplikation der Endziffern der Faktoren im Kopfe bestimmen⁶²⁸). Können mit einer Produktentafel, einer

grosse Sicherheit. Für beide Proben giebt *Krönig*⁶¹⁸), p. 20—64 Hilfstabeln. — Die 11^{er}-Probe benützte nach *Cantor* 1, p. 722 schon *Alkarchi* um d. J. 1000.

623) *T. M. Perwuschin* (Первущинъ) bei der Zerlegung sehr grosser Zahlen in Faktoren, s. *A. Wassilieff*, Am. Math. Soc. Papers 1 (New York 1896), p. 277. Nach *Krönig*⁶¹⁸) ist es übrigens bei Rechnungen, in denen Divisionen vorkommen, unzweckmässig, für N eine zusammengesetzte Zahl zu nehmen.

624) *A. D. Romanoff* in einem Schriftchen über praktisches Rechnen (Приемы практическаго элементарнаго исчисления по сокращению и упрощению выкладокъ при производствѣ умноженія и дѣленія большихъ чиселъ . . .), St. Petersburg 1901.

625) *Anton*⁶¹⁹) schlägt für den seltenen Fall, dass die Probe mit 11 nicht anwendbar sei, die mit 13 vor. Im Mittelalter wurden, unzweckmässig genug, die Siebener-, Achter- und sogar Sechser-Probe angewendet, s. *Cantor* 1, p. 759; 2, p. 9, 402.

626) Die Stellung der Zunge bleibt während der ganzen Rechnung dieselbe (der Divisor wird auf der oberen Zungenteilung aufgesucht und unter die 1 der oberen Stabteilung geschoben). Auch beim Dividieren mit einer Rechenmaschine vorteilhaft.

627) In der Regel aus verschiedenen Gründen zweckmässiger, als die Anwendung besonderer Hilfstabeln (Nr. 32). Vgl. „*Hammer*“, p. 36.

628) *C. J. Hill* hat J. f. Math. 70 (1869), p. 282 gezeigt, wie mit geeigneten Tafeln der Indices (s. I C 1, Nr. 4) die letzten Ziffern von Produkten, Potenzen u. s. w. gefunden werden können (ähnlich wie die ersten Ziffern mit Logarithmen), welche Tafeln man deshalb beim Rechnen mit grossen Zahlen zur Ergänzung der Logarithmentafeln gebrauchen kann.

Rechenmaschine oder einem sonstigen Hilfsmittel nur Produkte m -ziffriger Zahlen mit n -ziffrigen genau gefunden werden, so wird man grössere Faktoren in Abschnitte von m bzw. n Ziffern zerlegen, jeden Abschnitt des einen Faktors mit jedem des andern multiplizieren und die richtig unter einander geschriebenen Teilprodukte addieren⁶²⁹).

60. Vorbereitung der Formeln und der Rechnung. Zur logarithmischen Berechnung eignen sich vorzugsweise Ausdrücke der Form:

$$\frac{a^m a_1^{m_1} (\varphi(\alpha))^p \dots}{b^n b_1^{n_1} (\psi(\beta))^q \dots},$$

wo φ, ψ, \dots Funktionen bedeuten, deren Logarithmen tabuliert sind; dagegen ist bei solchen der Form:

$$ab \pm a_1 b_1 \pm \dots \text{ oder allgemeiner } (ab \pm a_1 b_1 \pm \dots) : c$$

die Ausrechnung mit einer Rechenmaschine am bequemsten (vgl. Nr. 21). Man suchte früher allen Formeln, um sie der logarithmischen Rechnung anzupassen, die erste Gestalt zu geben⁶³⁰). Nachdem aber die Rechenmaschinen grössere Verbreitung gewonnen haben, ist es nicht mehr ungewöhnlich, dass die Maschinenrechnung und damit die zweite Form bevorzugt wird⁶³¹). Eine Umgestaltung der

629) Vgl. bezüglich der Ausführung mit Logarithmen etwa *J. C. Houzeau*, *Brux. Bull.* (2) 40 (1875), p. 74 („multiplication mixte“, s. dort auch die „multiplication sommaire“, ferner die „division mixte“, bei welcher der Quotient mit Logarithmen in einzelnen Teilen bestimmt wird), mit dem Rechenschieber *Esmarch* a. a. O. (s. Litt. zu Nr. 50), p. 121; *van Hyfte*⁵⁶⁴), p. 46; ferner über die Verbindung logarithmischer Rechnung mit Reihenentwicklung, z. B. beim Ausziehen höherer Wurzeln, *Houzeau* a. a. O., „Lüroth“, p. 162.

630) Beispiele in Menge kommen namentlich in der ebenen und sphärischen Trigonometrie vor. — Dass man übrigens hierin zu weit gehen kann und es oft nur Täuschung ist, die transformierten Formeln seien leichter zu berechnen, hat *J. Houël* ausgeführt, *Sur la généralisation successive de l'idée de quantité . . .*, Paris 1883 [Extrait Bordeaux Mém. (2) 5 (1882)], p. 61 ff.

631) Neuerdings besonders in der Geodäsie, s. etwa *G. Höckner*, Über die Einschaltung von Punkten in ein durch Koordinaten gegebenes trigonometrisches Netz mit ausgiebiger Verwendung einer Rechenmaschine, Leipzig 1891; *C. Runge*, *Zeitschr. Vermessungsw.* 23 (1894), p. 206; *H. Sossna*, *Zeitschr. Vermessungsw.* 25 (1896), p. 361; *W. Jordan*, *Opus Palatinum . . .*, Hannover 1897, Vorwort; *F. Schuster*, *Zeitschr. Vermessungsw.* 29 (1900), p. 488 (Vergleich der erforderlichen Zeiten: in einem Beispiel Logarithmen 15 Stunden, Rechenmaschine 6 Stunden); *O. Koll*, *Die Theorie der Beobachtungsfehler und die Methode der kleinsten Quadrate . . .*, 2. Aufl., Berlin 1901; *F. G. Gauss*, *Fünfstellige vollständige trigonometrische und polygonometrische Tafeln für Maschinenrechnen . . .*, Halle 1901. *E. Hammer* hat, z. B. *Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie . . .*, 2. Aufl., Stuttgart 1897, p. 561; *Zeitschr. Vermessungsw.* 31 (1902),

ursprünglichen Formeln kann auch mit Rücksicht auf die Genauigkeit geboten erscheinen⁶³²). In mehr als einer Beziehung ist es von Wichtigkeit, auch bei kleineren Rechnungen ein zweckmässig angelegtes Schema⁶³³) zu Grunde zu legen.

p. 207, davor gewarnt, in den andern Fehler zu verfallen, nämlich die Vorzüge des Maschinenrechnens gegenüber dem logarithmischen zu überschätzen, wenigstens solange die eigentlichen Multiplikationsmaschinen (s. Nr. 18 u. 53) nicht weiter ausgebildet und leichter zugänglich sind. *C. V. Boys*, *The Nature* 64 (1901), p. 268, verlangt allgemein, mit Logarithmen oder mit der Maschine zu rechnen, je nachdem die erste oder zweite der obigen Formen vorliegt bzw. leichter herzustellen ist, jedoch können die Verhältnisse gerade umgekehrt liegen, als es bei oberflächlicher Betrachtung den Anschein hat; vgl. *Hoüel*, *Arch. Math. Phys.* 3 (1872), p. 377.

632) S. z. B. „Lüroth“, p. 66.

633) In der Astronomie (wo Jahrhunderte zurück zu verfolgen) und Geodäsie längst allgemein üblich (bei häufig wiederkehrenden Rechnungen als Vordruck). Viele Beispiele und praktische Winke in *W. Jordan*, *Handbuch der Vermessungskunde*, 2, 5. Aufl. Stuttgart 1897 (p. 244 allgemeine Bemerkungen über Rechenformulare), ferner in *Hammer's* *Lehrbuch der Trigonometrie* (s. besonders p. 550, Anm. 9, 10); vgl. noch „Lüroth“, p. 3, § 4. Die Verwendung eines Papierstreifens bei wiederholt zu addierenden Zahlen (vgl. *Hammer* p. 562, Anm. 80, „Lüroth“ p. 6 unten) z. B. schon von *Sang*²⁶³), p. XIX empfohlen.

Nachträge.

p. 941, Anm. 5 und p. 942, Anm. 7. *J. B. J. Fourier*, *Analyse des équations déterminées*, ist unter dem Titel „Auflösung der bestimmten Gleichungen“ ins Deutsche übersetzt und mit Anmerkungen herausgegeben von *A. Loewy*, *Ostwald's Klassiker*, Nr. 127, Leipzig 1902. Es handelt sich um p. 182 unten und p. 180 dieser Ausgabe.

Zu II, p. 944 ff. Über einige numerische Tafeln anderen Charakters, die besonders bei den Astronomen Verwendung finden, verdankt der Verf. Herrn *H. Burkhardt* einige Mitteilungen. *G. W. Hill*, *Amer. J. of math.* 6 (1884), p. 130 giebt eine Tabelle der $\log \binom{s}{n}$ für $s = 1, 3, 5, 7, 9$ und $n = 1, 2, 3, \dots, 30$.

Bei *H. Gylden*, *Recueil de Tables* (Stockh. Astron. Jaktt. 1 (1880), XII u. 183 pp.) finden sich:

§ 2, p. 6 die Binomialkoeffizienten $B_m^n = \binom{n}{m}$ bis B_{21}^{40} ,

Tafel B, p. 101—104 ihre *Briggs'schen* Logarithmen, 7-stellig,
 Tafel D, p. 108—109 dieselben anders geordnet (vgl. p. 13),
 p. 13 die *Briggs'schen* Logarithmen der Potenzen von 4 bis 4^{20} ,
 Tafel A, p. 99/100 die *Briggs'schen* Logarithmen von n^2 , $2n(n+1)$,
 $(2n+1)(2n+2)$, n^{-1} , $n^{-1}(n+1)^{-1}$, $n(n+1)^{-1}$, $\frac{2n+1}{2n}$,
 $\frac{2n-1}{2n}$ u. a. $\left\{ \text{zuletzt } \frac{(2n+1)(2n-3)}{16n(n-1)} \right\}$ 7-stellig bis $n=40$,
 Tafel C, p. 104—107: $\log \left\{ \frac{2}{4^n} B_{n-m}^{2n} \right\}$ bis $n=40$, $m=39$,

p. 946, Anm. 29. *Cario-Schmidt*, Zahlenbuch, 2. Aufl. 1898.

p. 946, Anm. 35. *C. A. Müller*, Multiplikationstabellen, schwedische Ausgabe, Lund 1898.

p. 947, Anm. 38. *Riem*, Rechentabellen, 2. Aufl. München 1901 (auch französische Ausgabe mit dem Titel: Tables de Multiplication . . . , 2^e éd. Paris 1901).

p. 969, Anm. 145. S. auch die Kritik der „Brunsviga“ von *H. Sossna*, Zeitschr. Vermessungsw. 30 (1901), p. 636.

p. 984, Anm. 216. Über die *Oughtred'sche* Regel für abgekürzte Multiplikation gibt eingehendere Auskunft *A. Loewy* in einer demnächst erscheinenden Note, Archiv Math. Phys. (3) 3. Hiernach findet sich diese Regel im ersten Kapitel von *Oughtred's Clavis mathematicae*, Londini 1631 (das Werk *Artis analyticae praxis* ist nicht von *Oughtred*, sondern von *Th. Harriot*). Aus den von *Loewy* mitgeteilten Beispielen geht hervor, dass *Oughtred* die geordnete Multiplikation (Nr. 1) nicht anwandte.

p. 987, Anm. 231. S. noch *F. Lefort*, Nouv. ann. (2) 6 (1867), p. 308.

p. 992, Anm. 263. Von *Rea*, Fünfstellige Logarithmentafeln, giebt es auch eine französische Ausgabe.

p. 993, Anm. 272. *Neperus*, Mirifici logarithmorum canonis constructio, ed. Lugduni 1620, ist in phototypischer Reproduktion erschienen, Paris 1895.

p. 996, Anm. 293. Zur Berechnung 9-stelliger Logarithmen s. auch *S. Gundelfinger*, J. f. Math. 124 (1902), p. 91.

p. 1013, Anm. 377. Zur graphischen Lösung kubischer Gleichungen mittelst einer festen Parabel und eines Kreises s. noch *J. Šolín*, Prag. Ber. 1876, p. 6 (vollständige kubische Gleichungen, Verfahren aus dem von *Lill* abgeleitet); zu derjenigen mittelst der geraden Linie und einer festen Kurve 3. Ordnung, insbesondere einer Cissoide: *Fr. London*, Zeitschr. Math. Phys. 41 (1896), p. 147; ferner zur mechanisch-graphischen Lösung der kubischen und biquadratischen Gleichungen *C. Bartl*, Arch. Math. Phys. (2) 1 (1884), p. 1 (neben Lineal und Zirkel wird ein beweglicher rechter Winkel, ein „Axenkreuz“ auf durchsichtigem Stoff, als Zeichenwerkzeug benützt).

p. 1024. Unter den Monographien zur Lehre von den graphischen Tafeln ist noch zu nennen *H. Fürle*, Rechenblätter, Progr. 9. Realsch. Berlin 1902 („Rechenblatt“ = graphische Tafel).

p. 1025, Anm. 412. Neuerdings hat *Fr. Schilling* für graphische Tafel den Ausdruck „Nomogramm“ vorgeschlagen, der bereits von *M. d'Ocagne* (s. Par. Bull. soc. math. (2) 26 (1902), p. 68) in Gebrauch genommen worden ist.

p. 1025, Anm. 415. Über das Instrument von *Metius* s. auch *S. Haller*, Biblioth. math. (2) 13 (1899), p. 71.

• p. 1029, Anm. 433. Durch räumliche Betrachtungen zeigt *Massau* ⁴⁴¹⁾, p. 143,

wie mit Hilfe derselben Tafel und eines beweglichen rechten Winkels biquadratische Gleichungen, in denen die dritte Potenz der Unbekannten fehlt, gelöst werden können.

p. 1032, Anm. 437. *Samuelli* zeigt a. a. O. p. 93, 95 auch die Lösung kubischer Gleichungen mit Hilfe des „rettangolo calculatore“.

p. 1034, Anm. 448. S. auch „d'Ocagne“, p. 460 ff. (Darstellung quadratischer Gleichungen durch Scharen von Geraden und Kreisen).

p. 1040, Anm. 476. Wie eine beliebige Gleichung $F(x, y, z) = 0$ näherungsweise auf die Form $f_1(z)\varphi(x) + f_2(z)\psi(y) = f_3(z)$ gebracht und damit der Methode der fluchtrecten Punkte zugänglich gemacht werden kann, zeigt *A. Lafay*, *Génie civil* 40 (1901—1902), p. 298. In Betreff der durch drei projektive Skalen darstellbaren Gleichungen s. noch *d'Ocagne*, *Par. Bull. soc. math.* (2) 26 (1902), p. 71—74.

p. 1042, Schluss von Anm. 483. Zwei weitere Beispiele für die Anwendung der Methode der fluchtrecten Punkte bei empirischen Funktionen findet man in „Soreau“, p. 493 und 499.

p. 1043, Anm. 487. Den wesentlichen Unterschied zwischen verdichteten und nicht-verdichteten mehrfach kotierten Elementen hat *d'Ocagne* schärfer hervorgehoben, *Par. Bull. soc. math.* (2) 24 (1900), p. 288 ff.

p. 1055, Nr. 50. Die im Text wiedergegebene, allgemein verbreitete Ansicht, dass der Läufer beim Rechenschieber von *Mannheim* herrühre, lässt sich nicht halten. *Mouzin* hat davon 1837, a. a. O. (s. die Litteratur auf p. 1053) p. 109, eine deutliche Beschreibung gegeben und als einem Zusatz gesprochen, der manchmal angewendet werde.

p. 1059. (Rechenschieber mit gebrochenen Skalen von *Everett* u. s. w.): *E. Leder*, will, D. R. P. Nr. 104927 von 1897, die Stücke der Skala strahlenförmig anordnen, wobei eine bewegliche Skala sich um den Mittelpunkt drehen und ausziehen lassen soll.

p. 1061, Anm. 563. Rechenschieber für besondere Zwecke finden sich auch in den Katalogen der Firmen *Dennert & Pape*-Altona, und *A. Nestler*-Lahr (Baden).

Druckfehler:

p. 972, Z. 11 von unten. Lies 1898 statt 1889.

(Abgeschlossen im Juni 1902.)