

M. ROUSSELET

**MATHEMATIQUES
SUR
ZX 81
ET SPECTRUM**

Collection *POCHE-INFORMATIQUE*

dirigée par **ALAIN TAILLAR**
directeur de la rédaction de *MICRO-SYSTEMES*

35+

- 1 - Un micro
- 2 - Séries à microcessor
- 3 - Micros sous ZX 81
- 4 - Un Basic au Pascal
- 5 - Applications du Basic
- 6 - Aide sous MS BASIC
- 7 - Filtres sous ZX 81
- 8 - La micro-informatique à son Z.B.C.
- 9 - Multitasks et TOT

MATHEMATIQUES sur **ZX 81 et ZX SPECTRUM**

80 programmes

- 1 - 30 programmes pour ZX 81
- 2 - Multisujets pour ZX 81
- 3 - Passerby pour Appasoft
- 4 - Passerby pour Basic
- 5 - Multisujets pour ZX 81
- 6 - Passerby pour ZX 81
- 7 - 30 programmes pour Casio FX 205 et ZX 801 P

© 1983 - E.T.S.

ISBN 0152-6130

ISBN 5-8223-028-8

COLLECTION E.T.S.F. MICRO-SYSTEMES

- 1 – Un microprocesseur pas à pas
- 2 – Systèmes à microprocesseur
- 3 – Maîtrisez votre ZX 81
- 4 – Du Basic au Pascal
- 5 – Vous avez dit Basic ?
- 6 – Vous avez dit micro ?
- 7 – Pilotez votre ZX 81
- 8 – La micro-informatique et son A.B.C.
- 9 – Maîtrisez le TO 7

COLLECTION POCHE-INFORMATIQUE

- 1 – 50 programmes pour ZX 81
- 2 – Montages périphériques pour ZX 81
- 3 – Passeport pour Applesoft
- 4 – Passeport pour Basic
- 5 – Mathématiques sur ZX 81
- 6 – Passeport pour ZX 81
- 7 – 50 programmes pour Casio FX 702 P et FX 801 P

« La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que « les copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1^{er} de l'Art. 40). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les Art. 425 et suivants du Code pénal ».

© 1983 - E.T.S.F.

ISBN 2-85535-068-9

ISSN 0757-6730

Michel ROUSSELET

**MATHEMATIQUES
sur ZX 81
et ZX SPECTRUM
80 PROGRAMMES**

(2^e édition, revue et corrigée)

Diffusion :

ÉDITIONS TECHNIQUES ET SCIENTIFIQUES FRANÇAISES
2 à 12, rue de Bellevue, 75940 PARIS CEDEX 19

AVERTISSEMENT

Lors de la première édition de cet ouvrage, le ZX SPECTRUM n'était pas encore commercialisé dans notre pays. C'est maintenant chose faite.

Chacun des programmes du livre pourra, sans modification, fonctionner sur SPECTRUM puisque le Basic de cet appareil contient, comme sous-ensemble, les instructions du ZX 81.

Il est cependant souhaitable d'apporter quelques changements aux programmes graphiques afin de bénéficier de la meilleure définition graphique du SPECTRUM : 256 × 176 pixels contre 64 × 44 au ZX 81. Ces changements concernent donc les seuls paramètres de mise en page ; ils sont indiqués dans le tableau ci-dessous :

| Références du programme | Numéros des lignes concernées | Paramètres à modifier* dans chacune des lignes citées |
|-------------------------|--|---|
| 5.1.2 | 90, 120, 130, 220, 230, 250, 260, 290, 300 | 64, 64, 63, 64, 18, 63, 18, 43, 64 |
| 5.1.3 | 90, 120, 130, 220 230 | 64, 64, 63, 64, 18 |
| 5.2.2 | 200, 230 | 21, 31 et 21 |
| 5.3.2 | 330, 370, 400 | 31 et 30 puis 18, 43, 63 |
| 6.6.2 | 100, 110, 120, 190 210, 220 | 64, 64, 63, 64, 4 et 36, 4 et 36 |
| 11.3.2 | 230 | 63 et 43 |
| 11.4.2 11.4.3 | 370, 430, 440, 490, 500 | 40, 3, 3, 6, 5 |

* Les nouvelles valeurs à prendre dépendront évidemment des dimensions souhaitées pour le graphique à obtenir. Rappelons également que les modes SLOW et FAST sont confondus sur SPECTRUM : ces instructions doivent donc être supprimées.

SOMMAIRE

Chapitre 1 : Tris et tirages au sort

| | |
|--|----|
| 1. Génération d'entiers aléatoires | 11 |
| 2. Classement, par ordre de grandeur, d'une suite de nombres..... | 12 |

Chapitre 2 : Les entiers

| | |
|--|----|
| 1. Divisibilité et nombres premiers | 17 |
| 2. Equations diophantiennes du 1 ^{er} degré | 20 |
| 3. Calcul de x^n (pour des valeurs $> 10^{38}$)..... | 21 |
| 4. Combinaisons et factorielles | 22 |

Chapitre 3 : Suites et séries

| | |
|---|----|
| 1. Recherche de la limite d'une suite..... | 25 |
| 2. Recherche de la somme d'une série | 28 |
| 3. Calcul de constantes (e et π)..... | 30 |

Chapitre 4 : Fonctions numériques

| | |
|---|----|
| 1. Valeur en un point d'une fonction numérique | 33 |
| 2. Dérivée 1 ^{re} , dérivée seconde | 34 |
| 3. Fonctions polynomes..... | 36 |
| 4. Polynome d'interpolation de Lagrange..... | 38 |

Chapitre 5 : Représentations graphiques

| | |
|---|----|
| 1. Courbe définie par l'équation $y = f(x)$ | 41 |
| 2. Courbe définie par des coordonnées polaires | 44 |
| 3. Courbe définie paramétriquement..... | 46 |
| 4. Longueur d'un arc de courbe | 48 |

Chapitre 6 : Résolution d'une équation

| | |
|---|----|
| 1. Introduction | 51 |
| 2. Equation du 2 ^e degré | 51 |
| 3. Méthode des itérations pour résoudre $x = f(x)$ | 52 |
| 4. Méthode de Newton pour résoudre $f(x) = 0$ | 53 |
| 5. Méthode par dichotomie | 55 |
| 6. Séparation des racines d'une équation : méthode graphique et méthode numérique | 57 |

Chapitre 7 : Intégration d'une fonction numérique

| | |
|---|----|
| 1. Méthode des rectangles | 61 |
| 2. Méthode des trapèzes | 63 |
| 3. Méthode de Simpson | 64 |
| 4. Méthode de Tchebytchev | 66 |
| 5. Utilisation d'un développement en série | 68 |
| 6. Cas d'une borne infinie | 69 |

Chapitre 8 : Equations différentielles

| | |
|-------------------------------------|----|
| 1. Introduction | 71 |
| 2. Equations du premier ordre | 71 |
| 3. Equations du second ordre | 74 |

Chapitre 9 : Vecteurs et matrices

| | |
|--|----|
| 1. Produit scalaire, produit vectoriel, produit mixte, double produit vectoriel | 77 |
| 2. Addition, multiplication des matrices | 79 |
| 3. Image d'un vecteur par une matrice carrée | 81 |

Chapitre 10 : Résolution d'un système d'équations linéaires

| | |
|---|----|
| 1. Inverse d'une matrice carrée..... | 83 |
| 2. Résolution d'un système de n équations à n inconnues | 86 |

Chapitre 11 : Distributions statistiques

| | |
|---|----|
| 1. Distributions à une variable : médiane, moyenne, variance, écart-type | 89 |
| 2. Distributions à deux variables : variance, covariance, moyennes, coefficient de corrélation..... | 91 |
| 3. Ajustements linéaire, logarithmique, exponentiel, puissance..... | 93 |
| 4. Histogrammes | 97 |

Chapitre 12 : Lois de probabilité discrètes

| | |
|-------------------------|-----|
| 1. La géométrique | 101 |
| 2. Loi binomiale | 102 |
| 3. Loi de Poisson | 103 |

Chapitre 13 : Lois de probabilité continues

| | |
|--------------------------------------|-----|
| 1. Loi normale à une variable | 107 |
| 2. Loi du χ^2 | 110 |
| 3. Loi du t de Student-Fisher..... | 113 |

Annexes

| | |
|--|-----|
| 1. La série de Taylor et les principaux développements limités | 119 |
| 2. Quelques courbes classiques | 120 |
| 3. Bibliographie restreinte | 121 |

TRIS ET TIRAGES AU SORT

1. Génération d'entiers aléatoires

1.1 Tirage au sort d'entiers compris entre a et b

On utilise la fonction RND .

```

10 INPUT A
20 INPUT B
30 PRINT A+INT ((B-A)*RND)
40 GOTO 30

```

1.2 Tirage au sort d'entiers ayant tous n chiffres

Posons $a = 10^{n-1}$ et $b = 10^n$.

```

10 INPUT N
20 LET A=10**(N-1)
30 LET B=10**N
40 PRINT A+INT ((B-A)*RND)
50 GOTO 40

```

Lorsque $n = 1$, il faut prendre $a = \emptyset$ au lieu de 0 pour que \emptyset soit une valeur possible.

1.3 Tirage au sort, sans répétition, des entiers compris entre a et b

L'intervalle $[a, b]$ contient n entiers : en comptant a et b eux-mêmes, on a $n = b - a + 1$.

Soient x_1, x_2, \dots, x_n ces entiers.

Tirons au sort un indice k compris entre 1 et n et affichons l'entier x_k .

Pour un indice $i < k$, nous laissons x_i inchangé, tandis que, pour $i > k$, nous changeons le numérotage en posant $x_{i-1} = x_i$.

Il reste alors $n - 1$ nombres à tirer au sort. En recommandant le procédé, chacun des entiers est tiré au sort une fois et une seule.

```
10 INPUT A
20 INPUT B
30 LET N=B+1-A
40 DIM X(N)
50 FOR I=1 TO N
60 LET X(I)=A-1+I
70 NEXT I
80 FOR C=N TO 1 STEP -1
90 LET K=1+INT((C*RND))
100 PRINT X(K)
110 FOR I=1 TO C
120 IF I>K THEN LET X(I-1)=X(I)
130 NEXT I
140 NEXT C
```

2. Classement, par ordre de grandeur d'une série de nombres

2.1 Recherche des minima successifs

Soit x_1, x_2, \dots, x_n la série à classer par ordre de grandeur croissante.

Le plus petit nombre de cette série devient le premier élément y_1 d'une nouvelle liste. Dans la suite restante, on cherche à nouveau le nombre le plus petit et ainsi de suite.

```
10 INPUT N
20 DIM X(N)
30 DIM Y(N)
40 FOR I=1 TO N
50 PRINT "X(";I;") = ... ?"
60 INPUT X(I)
65 CLS
70 NEXT I
80 FOR J=1 TO N
85 REM "RECHERCHE DU MINIMUM"
```

```

DE LA SUITE"
90 LET M=10**38
100 FOR I=1 TO N-J+1
110 IF X(I) < M THEN LET K=I
120 IF X(I) < M THEN LET M=X(I)
130 NEXT I
135 REM "EDITION"
140 LET Y(J)=X(K)
150 PRINT "NUMERO ";J;Y(J)
155 REM "FORMATION DE LA NOU-
VELLE SUITE"
160 FOR I=1 TO N
170 IF I>K THEN LET X(I-1)=X(I)
180 NEXT I
190 NEXT J

```

Exemple :

Pour classer 50 entiers choisis au hasard entre 1 et 100, il a fallu 5 mn 06 en mode SLOW.

2.2 Tri « à bulles »

Soit x_1, x_2, \dots, x_n la série des nombres à classer. On parcourt cette liste autant de fois qu'il est nécessaire et, à chaque fois, on échange les éléments consécutifs qui ne sont pas dans le bon ordre.

Soit, par exemple, à classer la série 2, 5, 3, 4, 1 : on a successivement 2, 3, 5, 4, 1, puis 2, 3, 4, 5, 1, puis 2, 3, 4, 1, 5, etc.

```

10 INPUT N
20 DIM X(N)
30 DIM Y(N)
40 FOR I=1 TO N
50 PRINT "X(";I;")=...?"
60 INPUT X(I)
70 CLS
80 LET Y(I)=X(I)
90 NEXT I
95 REM "DEBUT DES ECHANGES ENTRE Y(I) ET Y(I+1)"
100 LET C=0
110 FOR I=1 TO N-1
120 IF Y(I)<=Y(I+1) THEN GOTO 1
130 LET D=Y(I)
140 LET Y(I)=Y(I+1)
150 LET Y(I+1)=D
160 LET C=C+1
170 NEXT I

```

```

180 IF C=1 THEN GOTO 100
185 REM "EDITION"
190 FOR I=1 TO N
200 PRINT "NUMERO ";I,Y(I)
210 NEXT I

```

(La variable C sert, dans ce programme, à savoir s'il y a eu un échange ou non).

Exemple :

Pour classer 50 entiers choisis au hasard entre 1 et 100, il a fallu 4 mn en mode SLOW.

2.3 Tri par insertion

Soit x_1, x_2, \dots, x_n la série des nombres à classer. On prend les éléments de la liste dans l'ordre où ils se présentent et on les insère parmi les éléments déjà classés. Pour faciliter le début et la fin du tri, on ajoute deux éléments fictifs -10^{38} et 10^{38} .

Les nombres classés sont désignés par y_1, y_2, \dots, y_n .

```

10 INPUT N
20 DIM X(N)
30 DIM Y(N+2)
40 LET Y(1)=-10**38
50 LET Y(2)=10**38
60 FOR J=1 TO N
70 PRINT "X(";J,") = ... ?"
80 INPUT X(J)
90 CLS
95 REM "RECHERCHE DE K TEL QUE
Y(K) <=X(J) < Y(K+1)"
100 FOR I=1 TO J
110 IF X(J)=Y(I) AND X(J)<Y(I+
1) THEN LET K=I
120 NEXT I
125 REM "NOUVEAU NUMEROTAGE DES
Y(I) POUR I>K"
130 FOR I=J+1 TO K+1 STEP -1
140 LET Y(I+1)=Y(I)
150 NEXT I
155 REM "INSERTION DE X(J)"
160 LET Y(K+1)=X(J)
170 NEXT J
175 REM "EDITION"
180 FOR I=2 TO N+1
190 PRINT "NUMERO ";I-1,Y(I)
200 NEXT I

```

Exemple :

Pour classer 50 entiers choisis au hasard entre 1 et 100, il a fallu 3 mn 20 s en mode SLOW.

D'après une des propriétés des diviseurs d'un entier n : si la fonction deux en divise n , ce nombre est divisible. Pour décomposer le nombre en facteurs premiers, il suffit de diviser par les diviseurs entiers de n :

LES ENTIERS

1. Si a ne divise pas un certain multiple de b alors a ne divise pas b .

2. Il suffit d'essayer les diviseurs premiers à l'envers : si a est divisible par b , alors b est un diviseur de a .

1. Divisibilité et nombres premiers

1.1 p.g.c.d. et p.p.c.m

Soient a et b deux entiers non nuls, avec $a \leq b$. Pour calculer le pgcd de a et de b , on utilise l'algorithme d'Euclide :

- on divise b par a : le quotient est q et le reste r ,
- si $r \neq 0$, on remplace b par a et a par r et ainsi de suite.

Le pgcd cherché est le dernier reste non nul.

Quant au p.p.c.m de a et b , il est obtenu en divisant ab par leur pgcd.

```

10 INPUT A
20 INPUT B
30 LET N=B
40 LET P=A
50 LET Q=N/P
60 LET R=N-P*INT(Q)
70 IF R=0 THEN GOTO 110
80 LET N=P
90 LET P=R
100 GOTO 50
110 PRINT "PGCD=";P
120 PRINT "PPCM=";A*B/P

```

Exemple :

Pour $a = 136$ et $b = 255$, on obtient $\text{pgcd} = 17$ et $\text{ppcm} = 2040$.

1.2 L'entier n est-il premier ?

Divisons n par chacun des entiers d inférieurs à n : si aucun d'eux ne divise n , ce nombre est premier. Pour accélérer la recherche, on peut utiliser les résultats suivants :

1° Si d ne divise pas n , aucun multiple de d ne divisera n . Par conséquent, si n n'est pas un multiple de 2, 3, 5, 7, il est inutile d'essayer les multiples de ces nombres.

2° Il suffit d'essayer les diviseurs inférieurs à \sqrt{n} . En effet, si n a deux diviseurs au moins, l'un d'eux est nécessairement inférieur ou égal à \sqrt{n} .

Le programme qui suit fonctionne pour n impair et supérieur à 12.

```
10 INPUT N
20 IF N<=12 THEN GOTO 180
30 IF N/2=INT (N/2) THEN GOTO 180
40 IF N/3=INT (N/3) THEN GOTO 180
50 IF N/5=INT (N/5) THEN GOTO 180
60 IF N/7=INT (N/7) THEN GOTO 180
70 LET D=11
80 IF N/D=INT (N/D) THEN GOTO 180
90 IF D>SQR N THEN GOTO 170
100 LET D=D+2
110 IF D/3=INT (D/3) THEN GOTO 180
120 IF D/5=INT (D/5) THEN GOTO 180
130 IF D/7=INT (D/7) THEN GOTO 180
140 GOTO 80
150 PRINT N;" N EST PAS PREMIER"
160 GOTO 180
170 PRINT N;" EST PREMIER"
180 STOP
```

Exemples :

17 383, 89 797 et 999 983 sont premiers.
89 791 ne l'est pas.

1.3 Liste de nombres premiers

Le programme qui suit donne la liste des nombres premiers compris entre les entiers a et b .

```
10 INPUT A
20 INPUT B
30 IF A/2=INT (A/2) THEN LET A=A+1
40 IF A<=2 THEN PRINT 2;" ";
50 IF A<=3 THEN PRINT 3;" ";
60 FOR N=A TO B STEP 2
70 LET D=3
80 IF N/D=INT (N/D) THEN GOTO 130
90 IF D>SQR N THEN GOTO 120
100 LET D=D+2
110 GOTO 80
120 IF N>=3 THEN PRINT N;" ";
130 NEXT N
```

1.4 Décomposition d'un entier en facteurs premiers

Soit n un entier et soient p_1, p_2, \dots, p_k des nombres premiers tels que $n = p_1^{e_1} \times \dots \times p_k^{e_k}$. Les exposants e_1, e_2, \dots, e_k sont également des entiers.

La méthode utilisée est la suivante : on divise successivement n par $d = 2, d = 3, d = 5, d = 7, d = 9$, etc.

Si d divise n , on cherche alors l'entier e le plus grand, tel que d^e divise n également : n est alors remplacé par n/d^e .

Le calcul est arrêté lorsque le produit t des facteurs déjà trouvés est égal à n .

```
10 INPUT N
20 LET A=N
30 LET T=1
35 REM "CALCUL DE D"
40 LET D=2
50 GOSUB 90
60 LET D=D+1+SGN (D-2)
```

```

70 GOSUB 90
80 GOTO 60
85 REM "DIVISION DE N PAR D",
CALCUL DE E"
90 LET E=0
100 LET Q=INT (A/D)
110 IF A/D<>Q THEN GOTO 160
120 LET E=E+1
130 LET T=T*D
140 LET A=Q
150 GOTO 100
155 REM "EDITION"
160 IF E<>0 THEN PRINT D;" PUIS
SANCE ";"E
170 IF T>=N THEN GOTO 190
180 RETURN
190 PRINT "FIN"

```

Exemples :

Si $n = 32\ 480$, $n = 2^5 \times 5 \times 7 \times 29$.

Si $n = 569\ 800$, $n = 2^3 \times 5^2 \times 7 \times 11 \times 37$.

On constate que $n = 431$ est premier.

2. Équations diophantiennes du 1^{er} degré

Soient $a \neq 0$, $b \neq 0$ et c trois entiers. Résoudre l'équation diophantienne (du nom de Diophante, III^e siècle après J.-C.), $ax + by = c$, c'est trouver tous les couples d'entiers (x, y) qui vérifient cette relation.

Il y a un seul cas où l'équation n'admet pas de solution : c'est celui où le p.g.c.d de a et b ne divise pas c .

Dans les autres cas, on peut remarquer que toute solution est de la forme $x = x_0 + bz$ et $y = y_0 - az$ obtenue à partir d'une solution particulière (x_0, y_0) et d'un entier relatif z quelconque.

Si (x_0, y_0) est une solution particulière,

$$y_0 = \frac{c - ax_0}{b}; c - ax_0$$

est divisible par b et il existe un entier k tel que :

$$x_0 = \frac{c - kb}{a}.$$

Pour trouver x_0 , il suffit de trouver k tel que a divise $c - kb$.

```

10 INPUT A
20 INPUT B
30 INPUT C
35 REM "CALCUL DU PGCD DE A & B"
40 IF ABS A>ABS B THEN GOTO 80
50 LET F=ABS B
60 LET E=ABS A
70 GOTO 100
80 LET F=ABS A
90 LET E=ABS B
100 LET R=F-E*INT (F/E)
110 IF R=0 THEN GOTO 150
120 LET F=E
130 LET E=R
140 GOTO 100
145 REM "Y A-T-IL UNE SOLUTION?
150 IF E=1 THEN GOTO 200
160 IF (ABS C)/E<>INT ((ABS C)/
E) THEN GOTO 320
170 LET A=A/E
180 LET B=B/E
190 LET C=C/E
195 REM "CALCUL D'UNE SOLUTION
PARTICULIERE"
200 LET K=0
210 LET X=(C-K*B)/A
220 IF X=SGN X*INT (ABS X) THEN
GOTO 250
230 LET K=K+1
240 GOTO 210
245 REM EDITION
250 LET S$= "+"
260 LET T$="K"
270 IF SGN B=-1 THEN LET S$=" -"
280 IF SGN A=1 THEN LET T$=" -"
290 PRINT "X=";X;S$;ABS B;"*Z";
300 PRINT "Y=";(C-A*X)/B;T$;ABS
A;"*Z"
310 GOTO 330
320 PRINT "PAS DE SOLUTION"
330 STOP

```

Exemples :

- $a = 5, b = 7$ et $c = 9$:
on obtient $x = -1 + 7z$ et $y = 2 - 5z$
- $a = 101, b = 89\ 797$ et $c = 5$:
on obtient $x = -79\ 128 + 89\ 797z$ et $y = 89 - 101z$.

3. Calcul de x^n

La capacité arithmétique du ZX-81 est limitée à 10^{38} . En utilisant les logarithmes, on peut tout de même

calculer x^n pour des valeurs qui dépassent cette limite.

Soit y le logarithme décimal de x^n : $y = n \log_{10} x$.

Si e désigne la partie entière de y et d la partie décimale de y , on a :

$$10^y = x^n = 10^{d+e} = 10^d \times 10^e.$$

Dans le programme qui suit $e = INT y$ et $d = y - INT y$; y est obtenu par la formule

$$y = \frac{n \log x}{\log 10}$$

où \log désigne le logarithme népérien.

```
10 INPUT X
20 INPUT N
30 LET Y=N*LN X/LN 10
40 IF Y<38 THEN GOTO 70
50 PRINT 10**(Y-INT Y); "E+"; IN
T Y
60 GOTO 80
70 PRINT X**N
80 STOP
```

Exemples :

$$2^{1000} = 1.071\ 508\ 7 E + 301$$

$$352^{24500} = 1.973\ 523\ 5 E + 62\ 390$$

4. Combinaisons et factorielles

4.1

Soient n et k deux entiers tels que $k \leq n$.

On a $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$ et

$$C(k,n) = \frac{n!}{k! \times (n-k)!}$$

4.2 Calcul d'une factorielle

Le programme qui suit permet le calcul de $n!$ seulement pour $n \leq 33$:

```

10 INPUT N
20 LET F=1
30 FOR I=1 TO N
40 LET F=F*I
50 NEXT I
60 PRINT F

```

On peut dépasser cette limitation en remarquant que le logarithme décimal de $n!$ est

$$y = \sum_{i=1}^{i=n} \log_{10} i.$$

Il en résulte que $n! = 10^{y-\text{int } y} \times 10^{\text{int } y}$

D'où le programme :

```

10 INPUT N
20 IF N=0 THEN PRINT 1
30 IF N=0 THEN GOTO 130
40 LET S=0
50 FOR I=1 TO N
60 LET S=S+LN I
70 NEXT I
80 LET Y=S/LN 10
90 IF Y>8 THEN GOTO 120
100 PRINT INT (10**Y)
110 GOTO 130
120 PRINT 10**((Y-INT Y); "E+"; IN
T Y
130 STOP

```

Exemples :

$$10! = 3\,628\,800$$

$$100! = 9.332\,620\,5 \times 10^{157}$$

4.3 Calcul d'une combinaison

Pour $k \geq 1$, on a :

$$C(k,n) = C(k-1,n) \times \frac{n-k+1}{k}$$

Si y désigne le logarithme décimal de $C(k,n)$, on a :

$$y = \sum_{i=1}^{i=k} \log_{10} \left(\frac{n-i+1}{i} \right)$$

d'où $C(k,n) = 10^{y-\text{int } y} \times 10^{\text{int } y}$.

```

10 INPUT N      10 INPUT N      10 INPUT N
20 INPUT K      20 INPUT K      20 INPUT K
30 IF K=0 THEN PRINT 1 30 IF K=0 THEN PRINT 1 30 IF K=0 THEN PRINT 1
40 IF K=0 THEN GOTO 140 40 IF K=0 THEN GOTO 140 40 IF K=0 THEN GOTO 140
50 LET S=0      50 LET S=0      50 LET S=0
60 FOR I=1 TO K 60 FOR I=1 TO K 60 FOR I=1 TO K
70 LET S=S+LN ((N-I+1)/I) 70 LET S=S+LN ((N-I+1)/I) 70 LET S=S+LN ((N-I+1)/I)
80 NEXT I      80 NEXT I      80 NEXT I
90 LET Y=S/LN 10 90 LET Y=S/LN 10 90 LET Y=S/LN 10
100 IF Y>G THEN GOTO 130 100 IF Y>G THEN GOTO 130 100 IF Y>G THEN GOTO 130
110 PRINT INT (10**Y) 110 PRINT INT (10**Y) 110 PRINT INT (10**Y)
120 GOTO 140    120 GOTO 140    120 GOTO 140
130 PRINT 10***(Y-INT(Y));"E+";IN
140 STOP      140 STOP      140 STOP

```

Exemples :

$$C(5,10) = 252$$

$$C(15,30) = 1.551\ 175\ 2E+8$$

```

10 INPUT N      10 INPUT N      10 INPUT N
20 IF K=0 THEN PRINT 1 20 IF K=0 THEN PRINT 1 20 IF K=0 THEN PRINT 1
30 IF N=0 THEN 30 IF N=0 THEN 30 IF N=0 THEN
40 LET S=0      40 LET S=0      40 LET S=0
50 FOR I=1 TO N 50 FOR I=1 TO N 50 FOR I=1 TO N
60 LET S=S+LN I 60 LET S=S+LN I 60 LET S=S+LN I
70 NEXT I      70 NEXT I      70 NEXT I
80 LET Y=S/LN 10 80 LET Y=S/LN 10 80 LET Y=S/LN 10
90 IF Y>G THEN GOTO 130 90 IF Y>G THEN GOTO 130 90 IF Y>G THEN GOTO 130
100 PRINT INT (10**Y) 100 PRINT INT (10**Y) 100 PRINT INT (10**Y)
110 GOTO 140    110 GOTO 140    110 GOTO 140
120 PRINT 10***(Y-INT(Y));"E+";IN
130 STOP      130 STOP      130 STOP

```

Exemples :

$$10! = 3.628\ 800$$

$$100! = 0.335\ 670\ 2 \times 10^{36}$$

4.3 Calcul d'une combinaison

Si $y \leqslant 1$, on a :

$$C(y,n) = C(y - 1, n) \times \frac{n - y + 1}{y}$$

Si y dépasse de l'ordre de magnitude de $C(y,n)$, on a :

$$y = \sum_{i=1}^{\lfloor \log_{10} \frac{1}{n} \rfloor} \left(\frac{1 + 1 - n}{i} \right)$$

$$\text{où } C(y,n) = 10^{y-n} \times 10^{y-y}$$

SUITES ET SERIES

On obtient $n = 0.23831258$, $w_{100} = 0.23831258$.
 Modifiez le programme pour obtenir le nombre de termes.
 Scrissez.

1. Suites

1.1

Pour savoir si une suite de nombres u_1, u_2, u_3, \dots , converge ou non, on peut calculer les n premiers termes de cette suite. Il faut cependant être prudent dans les conclusions qu'on peut tirer de cette méthode car la suite peut converger (ou diverger) très lentement ; elle peut sembler converger alors que, en fait, elle diverge ou sembler diverger alors qu'en fait elle converge.

1.2 Suites du type $u_n = f(n)$

1° Soit, pour $n \geq 1$, $u_n = n \sin(1/n)$. Calculons les 1 000 premiers termes de la suite :

```
10 FOR N=1 TO 1000
20 PRINT N,N*SIN (1/N)
30NEXT N
```

On obtient $u_{22} = 0.999\,655\,68$, $u_{44} = 0.999\,913\,91$, $u_{154} = 0.999\,992\,97$: la suite converge vers 1.

2° Soit, pour $n \geq 1$,

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log n$$

Calculons les 1 000 premiers termes de la suite.

```

10 FOR N=1 TO 1000
20 LET S=0
30 FOR I=1 TO N
40 LET S=S+1/I
50 NEXT I
60 PRINT N,S-LN N
70 NEXT N

```

On obtient $u_{22} = 0.599\ 770\ 8$, $u_{500} = 0.578\ 215\ 32$,
 $u_{1000} = 0.577\ 715\ 58$.

Modifions le programme pour obtenir le nombre u_n seulement.

```

10 INPUT N
20 LET S=0
30 FOR I=1 TO N
40 LET S=S+1/I
50 NEXT I
60 PRINT N,S-LN N

```

On obtient $u_{3\ 000} = 0.577\ 382\ 31$, $u_{10\ 000}$
 $= 0.577\ 715\ 58$, $u_{20\ 000} = 0.577\ 240\ 49$: la suite converge vers le nombre $\varnothing.577\ 218$ (constante d'Euler).

3° Soit, pour $n \geq 1$,

$$u_n = \frac{n^3}{e^{n/10}}$$

Calculons les premiers termes :

```

10 FOR N=1 TO 1000
20 LET U=(N**3)/EXP (N/10)
30 PRINT N,U
40 NEXT N

```

On obtient $u_1 = 0.904\ 837\ 42$, $u_{22} = 1\ 179,832$, $u_{30} = 1\ 344,250\ 9$: la suite semble diverger. En fait, à partir de $n = 30$, u_n décroît et converge vers \varnothing .

1.3 Suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$

1° Soit, pour $n \geq 1$, et $u_1 = \varnothing$, $u_{n+1} = \sqrt{5 + u_n}$.
 Calculons u_n .

```

10 LET U=0
20 LET N=2
30 LET U=SQR (5+U)
40 PRINT N,U
50 LET N=N+1
60 GOTO 30

```

On obtient, pour $n \geq 13$, $u_n = 2.791\ 287\ 9$, limite de la suite.

2^e Soit, pour $n \geq 1$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{3} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right)$$

Prenons $u_1 = 0.5$ et calculons u_n :

```

10 INPUT U
20 LET N=2
30 LET U=(U+2/U)/3
40 PRINT N,U
50 LET N=N+1
60 GOTO 30

```

La suite converge vers 1.

1.4 Suites du type $u_{n+2} = f(u_{n+1}, u_n)$

1^e Soit :

$$u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + u_n}{2} \text{ avec } u_1 = 1 \text{ et } u_2 = 2.$$

```

10 INPUT U1
20 INPUT U2
30 LET N=3
40 LET U=(U1+U2)/2
50 PRINT N,U
60 LET U1=U2
70 LET U2=U
80 LET N=N+1
90 GOTO 40

```

On obtient 1.666 666 7 comme limite.

2^e Soit $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ avec $u_1 = u_2 = 1$.

Il suffit de changer la ligne 40 du programme précédent : on obtient la suite des nombres de Fibonacci (XIII^e siècle), suite divergente.

1.5 Suites entrelacées

Soient deux suites u_n et v_n définies par les relations :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n \times v_n} \text{ et } v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n)$$

avec $u_1 = 2$ et $v_1 = 3$

```
10 INPUT U1
20 INPUT V1
30 LET N=2
40 LET U=SQR (U1*V1)
50 LET V=(U1+V1)/2
60 PRINT "U";N;"=";U,"V";N;"="
;U
70 LET U1=U
80 LET V1=V
90 LET N=N+1
100 GOTO 40
```

Les deux suites ont la même limite 2.474 680 4.

2. Séries

2.1

Soit (u_n) une suite de nombres.

La série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ peut converger ou diverger.

En calculant les n premières sommes partielles $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$, on peut tenter de déterminer s'il y a convergence ou non.

2.2

Soit : $S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$. Calculons les premières sommes partielles :

```

10 LET S=0
20 FOR N=1 TO 100
30 LET S=S+1/(2*N)
40 PRINT N,S
50 NEXT N

```

On obtient $S = 1$ à partir de $n = 28$.

2.3

Soit la série harmonique : $S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.

```

10 LET S=0
20 FOR N=1 TO 100
30 LET S=S+1/N
40 PRINT N,S
50 NEXT N

```

On obtient $S_{88} = 5.060\ 223\ 5$, $S_{1000} = 7.485\ 470\ 9$, $S_{10\ 000} = 9.787\ 606$: la série diverge, mais très lentement.

2.4

Soit : $S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

```

10 INPUT N
20 LET S=0
30 FOR K=1 TO N
40 LET S=S+1/K/(K+1)
50 NEXT K
60 PRINT S

```

On obtient $S_{22} = 0.956\ 521\ 74$, $S_{1000} = 0.999\ 001$, $S_{10\ 000} = 0.999\ 900\ 02$: la série converge vers 1.

2.5

Soit la série de Riemann (1826-1866) : $S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

```

10 INPUT N
20 LET S=0
30 FOR K=1 TO N
40 LET S=S+1/K/K
50 NEXT K
60 PRINT S

```

On obtient $S_{10\ 000} = 1.644\ 834\ 1$, $S_{20\ 000} = 1.644\ 884\ 1$, $S_{30\ 000} = 1.644\ 900\ 8$, $S_{50\ 000} = 1.644\ 913\ 8$: la série converge, assez lentement, vers :

$$\frac{\pi^2}{6} = 1.644\ 934\ 1 \quad \text{et } 1 = 2.$$

3. Calcul de constantes

3.1 Calcul du nombre e

Soit f une fonction numérique vérifiant les conditions suivantes : f est développable en série sur R tout entier, f est dérivable sur R tout entier et, pour tout nombre réel x , on a $f(x) = f'(x)$.

Posons $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$

En dérivant terme à terme, on obtient :

$$f'(x) = a_1 + 2 a_2 x + 3 a_3 x^2 + \dots + (n+1) a_{n+1} x^n + \dots$$

$$\text{d'où : } a_{n+1} = \frac{1}{n+1} a_n$$

Il en résulte que, d'une manière générale : $a_n = \frac{1}{n!}$

$$\text{Posons } f(1) = e : \text{on a : } e = \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Dans le programme qui suit, on calcule : $\frac{1}{k!}$

et on arrête pour : $\frac{1}{k!} < 10^{-10}$

```
10 LET E=1
20 FOR K=1 TO 100
30 LET F=1
40 FOR I=1 TO K
50 LET F=F*I
60 NEXT I
70 LET E=E+1/F
80 IF F>10**10 THEN GOTO 100
90 NEXT K
100 PRINT K,E
```

On obtient $e = 2.718\ 281\ 8$ à partir de $k = 14$.

3.2 Calcul du nombre π

Utilisons un résultat dû à Euler (1707-1783) :

$$\frac{\pi^4}{90} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots$$

```
10 LET S=0
20 FOR K=1 TO 10000
30 LET S=S+1/(K**4)
40 PRINT (90*S)**0.25,K
50 NEXT K
```

On obtient, à partir de $k = 131$, $\pi = 3.141\ 592\ 6$.

CHAPITRE 4

FONCTIONS NUMÉRIQUES

1. Valeur, en un point, d'une fonction numérique

1.1

Soit f une fonction numérique à une variable. Le Basic du ZX 81 ne possède pas l'instruction DEF FN permettant de définir une fonction. Pour calculer $f(x_0)$, il nous faut définir f comme chaîne de caractères puis, grâce à la fonction *VAL*, faire évaluer cette chaîne pour $x = x_0$.

```
10 PRINT "F(X) = . . . ?"
20 INPUT F$
30 INPUT X0
40 LET X=X0
50 PRINT "F(";"X";") = ";VAL F$
```

Exemple :

Pour $f(x) = x \sin x + x^2$ et $x_0 = 0.42$, on obtient $f(x_0) = 0.347\ 659\ 39$.

1.2

Si f est une fonction de plusieurs variables, la méthode reste la même. Soit, par exemple, à calculer la valeur de $f(x,y,z)$ au point (x_0, y_0, z_0) :

```
10 PRINT "F(X,Y,Z) = . . . ?"
20 INPUT F$
30 INPUT X0
40 INPUT Y0
50 INPUT Z0
```

```

60 LET X=X0
70 LET Y=Y0
80 LET Z=Z0
90 PRINT "F(";X0;",";"Y0;",";"Z0
;"")";VAL F$
```

Exemple :

$f(x,y,z) = 2x^2 - y + \sin z$; pour $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ et $z_0 = 1$, on obtient $f(x_0, y_0, z_0) = 0.841\ 470\ 99$.

1.3 Remarque

La fonction $\star\star$ (calcul d'une puissance) du ZX-81 ne permet pas d'utiliser les valeurs négatives d'une variable. On tourne cette difficulté en entrant, par exemple, $x * x * x$ ou $SGN x * (ABS x \star\star 3)$ au lieu de $x \star\star 3$.

2. Dérivées en un point

Soit f une fonction numérique définie et deux fois dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} . Soit x_0 un nombre réel appartenant à cet intervalle.

2.1 Calcul de $f'(x_0)$

Par définition, $f'(x_0)$ est la limite, quand x tend vers x_0 , de :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Soit e un nombre réel positif et « assez petit ». Si $f(x_0 - e)$ et $f(x_0 + e)$ existent, on peut assimiler $f'(x_0)$ à :

$$\frac{f(x_0 + e) - f(x_0 - e)}{2e}$$

ou, mieux encore, à : $\frac{f(x_0 + e) - f(x_0 - e)}{2e}$

En prenant $e = 0.001$, le programme est le suivant :

```

10 PRINT "F(X) = . . . ?" = (x); : INPUT F$
20 INPUT X#
30 INPUT X0
40 LET E=0.001
50 LET X=X0+E
60 LET G=VAL F$
70 LET X=X0-E
80 LET H=VAL F$
90 PRINT "DERIVEE EN X="; X0; ":" ; (G-H)/2/E

```

Exemples :

I^o $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$: pour $x_0 = 1.5$, on obtient

$$f'(x_0) = -0.118\ 343\ 16 \text{ au lieu de } -0.118\ 343\ 20.$$

II 2^o $f(x) = \sqrt{x-1}$: pour $x = 1$, le programme ne fonctionne pas car $f(1-e)$ n'est pas défini.

2.2 Calcul de $f''(x_0)$

Si $f(x_0 + 2e)$ et $f(x_0 - 2e)$ existent, on a, en appliquant la formule du paragraphe précédent à la fonction f' ,

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0 + 2e) + f(x_0 - 2e) - 2f(x_0)}{4e^2}$$

```

10 PRINT "F(X) = . . . ?" = (x); : INPUT F$
20 INPUT X#
30 CLS
40 PRINT "X0 = . . . ?"
50 INPUT X0
60 LET E=0.001
70 LET X=X0
80 LET F=VAL F$
90 LET X=X0+2*E
100 LET G=VAL F$
110 LET X=X0-2*E
120 LET H=VAL F$
130 CLS
140 PRINT "DERIVEE 2EME EN X0 = "
150 PRINT (G+H-2*F)/4/E/E

```

Exemples :

I^o Pour $f(x) = x \sin x$ et $x_0 = 0.3$, on obtient $f''(x_0) = 1.822\ 001\ 7$ au lieu de $1.822\ 016\ 9$.

2^e Pour : $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ et $x_0 = 0.5$,
on obtient $f''(x_0) = 0.012543751$ au lieu de 0.01365498 .

La précision n'est pas très grande (de l'ordre de 0.001) ; pour l'améliorer, il faut faire appel à des méthodes plus complexes.

3. Fonctions polynomes

3.1

Soit P un polynome quelconque à une variable. Il existe une méthode rapide, la méthode de Horner, pour calculer $P(x)$.

Soit, par exemple :

$$P(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

On peut écrire :

$$P(x) = (((a_4 x + a_3) x + a_2) x + a_1) x + a_0$$

Posons :

$$c_4 = a_4, c_3 = x c_4 + a_3, c_2 = x c_3 + a_2, \text{ etc.}$$

On obtient $P(x) = c_0$.

3.2

Si nous généralisons cette méthode à un polynome

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

il nous faudra tenir compte du fait que l'indice 0 ne peut pas être dimensionné avec le ZX 81 : nous poserons donc, pour $1 \leq i \leq n+1$, $b_i = a_{i-1}$.

```

10 INPUT N
20 DIM B(N+1)
30 FOR I=N+1 TO 1 STEP -1
40 PRINT "A(";I-1;")=...?""
50 INPUT B(I)
60 CLS
70 NEXT I
80 PRINT "X=?"
90 INPUT X

```

```

100 CLS
110 LET C=B(N+1)
120 FOR I=N TO 1 STEP -1
130 LET C=C*X+B(I)
140 NEXT I
150 PRINT "P(";X;"")=";C

```

(Pour calculer $P(x)$ pour une autre valeur de x , faire GOTO 80 puis NEWLINE).

Exemples :

1^o $P(x) = 2x^4 - x^3 + 5x_2 + 3x - 1$: on obtient $P(1.4) = 17.9392$.

2^o $P(x) = x^8 - x - 1$: on obtient $P(2) = 253$.

3.3

En adaptant le programme précédent, on peut calculer $P(x)$ lorsque les coefficients a_i sont exprimés en fonction de l'entier i . Soit, par exemple :

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} \text{ un polynôme de degré } n.$$

Posons, pour $1 \leq i \leq n+1$, $b_i = a_{i-1} = \frac{1}{(i-1)!}$

```

10 INPUT X
20 INPUT N
30 DIM B(N+1)
40 FOR I=N+1 TO 1 STEP -1
50 LET F=1
60 FOR J=1 TO I-1
70 LET F=F*j
80 NEXT J
90 LET B(I)=1/F
100 NEXT I
110 LET C=B(N+1)
120 FOR I=N TO 1 STEP -1
130 LET C=C*X+B(I)
140 NEXT I
150 PRINT C

```

Pour $x = 2$ et $n = 10$, on obtient $P(x) = 7.388\ 994\ 7$ (valeur approchée de $e^2 = 7.389\ 056\ 1$).

4. Polynome d'interpolation de Lagrange

4.1 Définitions

Soit f une fonction numérique définie et continue sur un intervalle I . Si x_1, x_2, \dots, x_n sont n nombres de cet intervalle, existe-t-il un polynome P de degré n au plus, tel que $P(x_i) = f(x_i)$, pour $1 \leq i \leq n$?

Posons

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{j=n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j};$$

on a $L_i(x_j) = 0$ pour $j \neq i$ et $L_i(x_i) = 1$.

$$\text{Soit } P(x) = \sum_{i=1}^{i=n} f(x_i) \times L_i(x);$$

P est un polynome de degré $\leq n-1$ qui répond donc à la question. P est appelé polynome d'interpolation de Lagrange de la fonction f .

4.2 Le problème de l'interpolation

Soit x_1, x_2, \dots, x_n une suite de n nombres : on suppose $x_1 < x_2 < \dots < x_n$.

Soit y_1, y_2, \dots, y_n une autre suite de n nombres.

Posons, pour $1 \leq i \leq n$, $y_i = f(x_i)$ où f désigne une fonction numérique supposée définie et continue sur $[x_1, x_n]$. Pour tout nombre x de l'intervalle $[x_1, x_n]$ on peut considérer que $f(x)$ est sensiblement égal à $P(x)$, valeur en x du polynome P d'interpolation de Lagrange de la fonction f . Le programme qui suit permet le calcul de $P(x)$.

```
10 PRINT "N=...?"  
20 INPUT N  
30 DIM X(N)  
40 DIM Y(N)  
50 FOR I=1 TO N  
60 PRINT "X("; I; ")=...?"  
70 INPUT X(I)  
80 PRINT "Y("; I; ")=...?"
```

```

90 INPUT Y(I)
100 CLS
110 NEXT I
120 PRINT "X=...?"
130 INPUT X
140 CLS
150 LET P=0
160 FOR I=1 TO N
170 LET L=1
180 FOR J=1 TO N
190 IF J=I THEN GOTO 210
200 LET L=L*(X-X(J))/(X(I)-X(J))
)
210 NEXT J
220 LET P=P+Y(I)*L
230 NEXT I
240 PRINT "P(";X;")=";P
250 PRINT AT 20,0;" FAIRE GOTO
120 POUR UNE AUTRE VALEUR DE X"

```

(Pour d'autres valeurs de x , faire GOTO 120 puis NEWLINE).

Exemple :

| | | | | |
|-----|---|---|---|----|
| x | 1 | 2 | 3 | 4 |
| y | 1 | 3 | 8 | 20 |

on obtient $P(2.5) = 4.875$

4.3 Calcul explicite du polynôme d'interpolation

$$\text{Posons } P(x) = \sum_0^{n-1} c_j x^j.$$

Pour $1 \leq i \leq n$, on a $P(x_i) = y_i$.

Pour trouver les coefficients c_j il faut donc résoudre le système des n équations linéaires à n inconnues :

$$c_0 + x_1 c_1 + \dots + x_1^{n-1} c_{n-1} = y_1$$

"

"

$$c_0 + x_n c_1 + \dots + x_n^{n-1} c_{n-1} = y_n$$

(Voir chapitre 10, § 2).

REPRESENTATIONS GRAPHIQUES

1. Courbe définie par une équation $y = f(x)$

1.1

Soit f une fonction numérique définie et continue sur un intervalle $[a, b]$.

Le tracé de la courbe représentative de f est obtenu de la manière suivante :

1^o Les possibilités graphiques du ZX-81 permettent d'obtenir 64×44 points : l'intervalle $[a, b]$ est donc divisé en 63 parties égales.

Pour $1 \leq i \leq 64$, on obtient alors les points de subdivision : $x = a + (i - 1)(b - a)/63$.

2^o L'axe des x est la droite d'équation $y = 18$, située à mi-hauteur de l'écran.

3^o L'échelle des ordonnées est déterminée à partir des valeurs m et p du maximum et du minimum de la fonction. Cette échelle est, en général, différente de l'échelle des abscisses.

m et p sont édités sous la courbe.

1.2 Programme

```

10 PRINT "F(X) = . . . ?"
20 INPUT Y$
30 PRINT "A = . . . ?"
40 INPUT A
50 PRINT "B = . . . ?"

```

```

66 INPUT B
70 CLS
80 FAST
90 DIM Y(64)
100 LET P=10**38
110 LET M=-P
120 FOR I=1 TO 64
130 LET X=A+(I-1)*(B-A)/63
140 LET Y(I)=VAL Y$
150 IF Y(I)>M THEN LET M=Y(I)
160 IF Y(I)<P THEN LET P=Y(I)
170 NEXT I
180 LET S=ABS M
190 IF S<ABS P THEN LET S=ABS P
200 SLOW
210 PRINT AT 0,0;A;"<=X<=";B
220 FOR I=1 TO 64
230 PLOT I-1,16+18*Y(I)/S
240 NEXT I
250 FOR I=0 TO 63 STEP 2
260 PLOT I,18
270 NEXT I
280 LET T=SGN A*SGN B
290 FOR J=1 TO 40 STEP 2
300 IF T=-1 OR T=0 THEN PLOT (6
310 *ABS B)/(ABS A+ABS B),J
320 NEXT J
330 PRINT AT 20,16;"MAX. DE F="
340 PRINT AT 20,0;"MIN. DE F="
350 PRINT AT 21,0;"AUTRE INTERVALLE ?APEZ GOTO 30"

```

Exemple :

$$f(x) = e^{-x} \sin 2\pi x ; 0.2 \leq x \leq 2.5$$



MIN. DE F=-0.47 MAX. DE F=0.78
AUTRE INTERVALLE ?APEZ GOTO 30

1.3

Si f n'est pas définie en un point x_0 de $[a,b]$, on peut tout de même utiliser le programme précédent à condition d'éliminer x_0 des valeurs prises par x .

Soit, par exemple, à représenter, $f(x) = 0.8 + \sin(\pi/x)$ non définie pour $x = 0$.

Au programme précédent, nous ajoutons la ligne 135 :

135 IF X = 0 THEN GOTO 170.

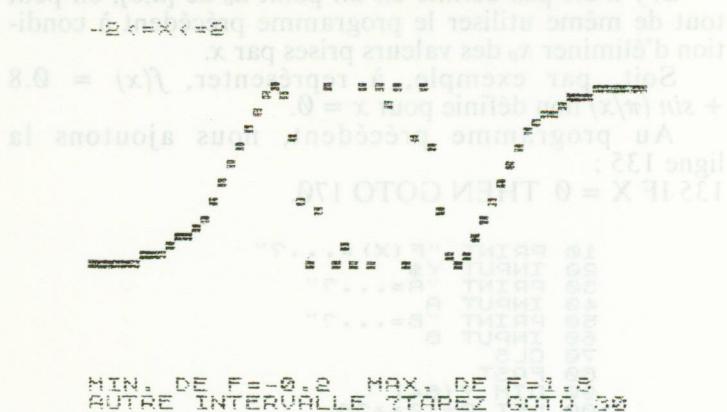
```

10 PRINT "F(X) = . . . ?"
20 INPUT Y$
30 PRINT "A = . . . ?"
40 INPUT A
50 PRINT "B = . . . ?"
60 INPUT B
70CLS
80FAST
90DIM Y(84)
100LET P=10#*38
110LET M=-P
120FOR I=1 TO 84
130LET X=A+(I-1)*(B-A)/83
135IF X=0 THEN GOTO 170
140LET Y(I)=VAL Y$
150IF Y(I)>M THEN LET M=Y(I)
160IF Y(I)<P THEN LET P=Y(I)
170NEXT I
180LET S=ABS M
190IF S<ABS P THEN LET S=ABS P
200SLOW
210PRINT AT 0,0;A;"<=X<=";B
220FOR I=1 TO 84
230PLOT I-1,18+18*Y(I)/S
240NEXT I
250PRINT AT 20,16;"MAX. DE F="
260SGN M*INT((100*ABS M)/100)
270PRINT AT 20,0;"MIN. DE F=";
280SGN P*INT((100*ABS P)/100)
290PRINT AT 21,0;"AUTRE INTERVALLE ? TAPEZ QUITTE"
300GOTO 135

```

(Le tracé des axes a été éliminé ; lignes 250 à 270)

Pour $-2 \leq x \leq 2$, on obtient le tracé suivant :



MIN. DE F=-0.8 MAX. DE F=1.8
AUTRE INTERVALLE ?TAPEZ GOTO 30

2. Courbe définie par des coordonnées polaires

2.1

Un point M de la courbe est repéré par son rayon polaire R et par son angle polaire A .

Soit $R = f(A)$: on suppose f définie et continue sur un intervalle $[A_1, A_2]$.

Le tracé de la courbe définie par l'équation $R = f(A)$ est obtenu de la manière suivante :

1^o Le point O , origine du rayon polaire OM , occupe la position (31,21) sur l'écran.

La courbe est tracée dans un cercle de rayon 21.

2^o On fait varier entre A_1 et A_2 l'angle polaire de deux degrés en deux degrés : le nombre N des points tracés est $N = \text{int}(1 + (A_2 - A_1)/2)$.

3^o On calcule, pour chaque point, ses coordonnées $x = R \cos A$ et $y = R \sin A$. La valeur maximale M du rayon R détermine l'échelle.

2.2 Programme

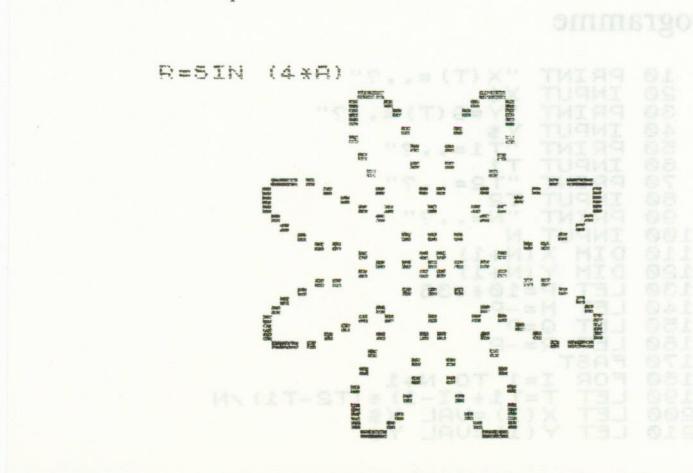
```

10 PRINT "R(A) = .. ?"
20 INPUT R$
30 PRINT "A1=.. ?(EN DEGRES)"
40 INPUT A1
50 PRINT "A2=.. ?(EN DEGRES)"
60 INPUT A2
70 CLS
80 FAST
90 LET N=INT((1+INT(A2-INT(A1
)/2))
100 DIM X(N)
110 DIM Y(N)
120 LET M=0
130 FOR I=1 TO N
140 LET A=(A1+2*(I-1))*PI/180
150 LET R=VAL R$
160 LET X(I)=R*COS A
170 LET Y(I)=R*SIN A
180 IF M<ABS R THEN LET M=ABS R
190 NEXT I
200 LET K=21/M
210 SLOW
220 FOR I=1 TO N
230 PLOT K*X(I)+31,K*Y(I)+21
240 NEXT I
250 PRINT AT 0,0;"R=";R$

```

Exemple :

$R = \sin 4A$ pour $0 \leq A \leq 360^\circ$.



3. Courbe définie paramétriquement

3.1

Un point de la courbe est défini par ses coordonnées $x = f(t)$ et $y = g(t)$; f et g sont deux fonctions numériques définies et continues sur un intervalle $[t_1, t_2]$.

Le principe de la représentation est le suivant :

1^o L'intervalle $[t_1, t_2]$ est divisé en n parties égales d'où $n + 1$ valeurs de t :
 $t_i = t_1 + (i - 1) (t_2 - t_1)/n$ pour $1 \leq i \leq n + 1$.

2^o On détermine les valeurs maximales M et R de x et de y , puis les valeurs minimales P et Q de x et y .

Ces valeurs servent à déterminer les échelles, différentes suivant les axes.

3^o L'origine est située au point (31,18), au centre de l'écran.

4^o Les axes sont tracés lorsque le cas s'y prête ; les valeurs maximum et minimum de x et y sur l'intervalle $(t_1, t_2]$ sont éditées.

3.2 Programme

```
10 PRINT "X(T)=..?" (0#) H10=0
20 INPUT X#
30 PRINT "Y=G(T)=..?" (0#)
40 INPUT Y#
50 PRINT "T1=..?"
60 INPUT T1
70 PRINT "T2=..?"
80 INPUT T2
90 PRINT "N=..?"
100 INPUT N
110 DIM X(N+1)
120 DIM Y(N+1)
130 LET P=10**38
140 LET M=-P
150 LET Q=P
160 LET R=-P
170 FAST
180 FOR I=1 TO N+1
190 LET T=T1+(I-1)*(T2-T1)/N
200 LET X(I)=VAL X#
210 LET Y(I)=VAL Y#
```

```

280 IF X(I) > M THEN LET M=X(I)
285 IF Y(I) > R THEN LET R=Y(I)
290 IF X(I) < P THEN LET P=X(I)
295 IF Y(I) < Q THEN LET Q=Y(I)
300 NEXT I
305 LET X=ABS M
310 IF ABS P>X THEN LET X=ABS P
315 LET Y=ABS R
320 IF ABS Q>Y THEN LET Y=ABS Q
325 CLS
330 SLOW
335 FOR I=1 TO N+1
340 PLOT 31+30*X(I)/X, 18+18*Y(I)
345 NEXT I
350 LET U=SGN P*SGN M
355 LET V=SGN Q*SGN R
360 FOR J=0 TO 43
365 IF U=-1 OR U=0 THEN PLOT 31
370 J
375 NEXT J
380 FOR I=0 TO 63
385 IF V=-1 OR V=0 THEN PLOT I,
390 NEXT I
395 PRINT AT 0,0; SGN P*INT (100
*ABS P)/100; "<=X<="; SGN M*INT (1
00*ABS M)/100
400 PRINT AT 1,0; SGN Q*INT (100
*ABS Q)/100; "<=Y<="; SGN R*INT (1
00*ABS R)/100

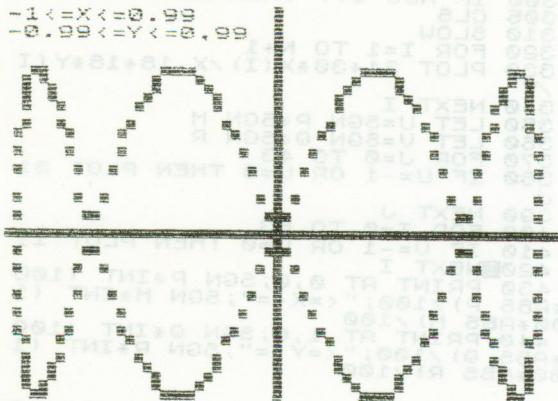
```

Pour d'autres valeurs de T , faire GOTO 50 puis NEWLINE.

Pour d'autres valeurs de N , faire GOTO 90 puis NEWLINE.

Exemple :

Courbe de Lissajous $x = \sin t$, $y = \sin 4t$; pour $0 \leq t \leq 2\pi$ on prend $N = 200$.



4. Longueur d'un arc de courbe

4.1 Courbe définie par une équation $y = f(x)$

Soit C un arc de courbe d'extrémités A et B : nous supposons cet arc simple et continu.

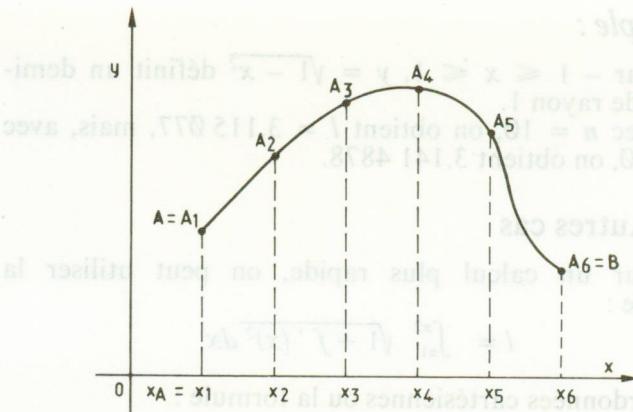
Soient x_A et x_B les abscisses respectives de A et de B . En divisant l'intervalle $[x_A, x_B]$ en n parties égales on obtient $n + 1$ points de subdivision

$$x_1 = x_A, x_2, x_3, \dots, x_{n+1} = x_B.$$

Pour $1 \leq i \leq n + 1$, on a $x_i = x_A + (i - 1)(x_B - x_A)/n$.

x_1, x_2, \dots, x_{n+1} sont les abscisses des points $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n+1}$ de la courbe ; les ordonnées de ces points sont

$$y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_{n+1} = f(x_{n+1}).$$



Si on assimile la longueur l de l'arc AB à la somme des longueurs des segments A_i, A_{i+1} , on a :

$$l = \sum_{i=1}^{i=n} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$$

Le programme est le suivant :

```

10 PRINT "Y=F(X)=...?"
20 INPUT Y$
30 PRINT "XA=...?"
40 INPUT XA
50 PRINT "XB=...?"
60 INPUT XB
70 PRINT "N=...?"
80 INPUT N
90 CLS
100 LET D=(XB-XA)/N
110 LET L=0
120 FOR I=1 TO N
130 LET X1=XA+(I-1)*D
140 LET X2=XA+I*D
150 LET X=X1
160 LET Y1=VAL Y$
170 LET X=X2
180 LET Y2=VAL Y$
190 LET L=L+SQR (D*D+(Y2-Y1)*(Y2-Y1))
200 NEXT I
210 PRINT L

```

Exemple :

Pour $-1 \leq x \leq 1$, $y = \sqrt{1 - x^2}$ définit un demi-cercle de rayon 1.

Avec $n = 10$, on obtient $l = 3.115\ 077$, mais, avec $n = 500$, on obtient 3.141 4878.

4.2 Autres cas

Pour un calcul plus rapide, on peut utiliser la formule :

$$l = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

en coordonnées cartésiennes ou la formule :

$$l = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sqrt{r^2 + r'^2} d\alpha$$

en coordonnées polaires.

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} \sum_{i=1}^{n+1} = l$$

Le programme est le suivant :

```

PRINT "X"
INPUT X
AX=X
BX=X
MX=X
N=M
N=INT(N)
DO
    EX=BX+DX=M
    LET D=0
    LET I=0
    DO I=0 TO N
        LET X=EX+DX+EI-1
        LET BX=EX
        LET DX=DX+D
        LET AX=X
        LET Y=SQR(X)
        LET K=SQR(Y)
        LET A=Y-K
        LET L=LN(SQR(D*D+(K-A)*(K-A)))
        LET M=LN(SQR(D*D+(K+B)*(K+B)))
        LET D=L-M
    LOOP
    PRINT I
END

```

CHAPITRE 6

RESOLUTION D'UNE EQUATION

1.

Les équations des 2^e, 3^e et 4^e degrés mises à part, il n'existe pas, en général, de formules algébriques donnant les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Il faut donc déterminer ces solutions en utilisant des méthodes d'approximation : trois méthodes seront étudiées dans ce chapitre, après un rappel sur les équations du second degré.

2. Equation du second degré

2.1

Soit $ax^2 + bx + C = 0$, avec $a \neq 0$, une telle équation. L'existence des solutions dépend du signe de $d = b^2 - 4ac$.

Pour $d > 0$, il y a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{d}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{d}}{2a}$$

```
10 PRINT "A=...?"  
20 INPUT A  
30 PRINT "B=...?"  
40 INPUT B  
50 PRINT "C=...?"  
60 INPUT C  
70 CLS  
80 LET D=(B*B)-4*A*C
```

```

90 IF D=0 THEN PRINT "X="; -B/
2/A
100 IF D<0 THEN PRINT "PAS DE
SOLUTION"
110 IF D>0 THEN PRINT "X1="; (-B-
+SQR D)/2/A; "X2="; (-B-SQR D)/2/A

```

(On s'est limité au calcul des solutions dans R ; il est facile d'obtenir les solutions dans le corps C des complexes).

Exemple :

$$a = 2, b = 8, c = 4:$$

on a $x_1 = -0.585\,786\,44$ et $x_2 = -3.414\,213\,6$.

2.2 Remarque

Si les coefficients a , b et c sont trop dispersés, les erreurs d'arrondi peuvent devenir très grandes et fausser complètement le résultat. Par exemple, le programme ci-dessus ne peut pas donner les solutions $x_1 = 1\,000\,000$ et $x_2 = 0.000\,1$ de l'équation $x^2 - 1\,000\,000,000\,1 + 100 = 0$. Les solutions obtenues sont complètement aberrantes.

3. Résolution de l'équation $f(x) = x$ méthode des itérations

3.1

Choisissons une valeur initiale x_1 et définissons une suite $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ par la relation de récurrence $x_n = f(x_{n-1})$. Si la suite converge vers un nombre x , ce nombre vérifie $x = f(x)$. Le programme qui suit calcule x_n : l'arrêt est obtenu lorsque $|x_n - x_{n-1}| \leq 10^{-8}$:

```

10 PRINT "F(X) = . . . ?"
20 INPUT F$
30 PRINT "X1 = . . . ?"
40 INPUT X1
50 CLS

```

```

60 LET X=X1
70 FOR I=1 TO 100
80 LET F=VAL F$
90 LET Y=X
100 LET X=F
110 IF ABS (X-Y) <=10**-8 THEN
GOTO 130
120 NEXT I
130 PRINT X

```

(Faire GOTO 30 puis NEWLINE pour une nouvelle valeur initiale x_1).

Exemples :

1^o $x = \cos x$: avec $x_1 = 0.5$, on obtient $x = 0.739\ 085\ 14$.

$$2^o x^3 + 1 - 2x = 0 : \text{on écrit } x = \frac{x^3 + 1}{2}$$

Avec $x_1 = 0$, on obtient $x = 0.618\ 033\ 99$.

3.2

La vitesse de calcul dépend du choix de x_1 : on a évidemment intérêt à prendre x_1 le plus près possible de x . Cependant, la méthode peut très bien ne pas aboutir si f ne répond pas à certaines conditions ou si x_1 est mal choisi. Ainsi la solution $x = 1$ de l'équation $x = 2^x - 1$ n'est pas trouvée à moins, justement, de choisir $x_1 = 1$.

4. Résolution de l'équation $f(x) = 0$ par la méthode de Newton

4.1

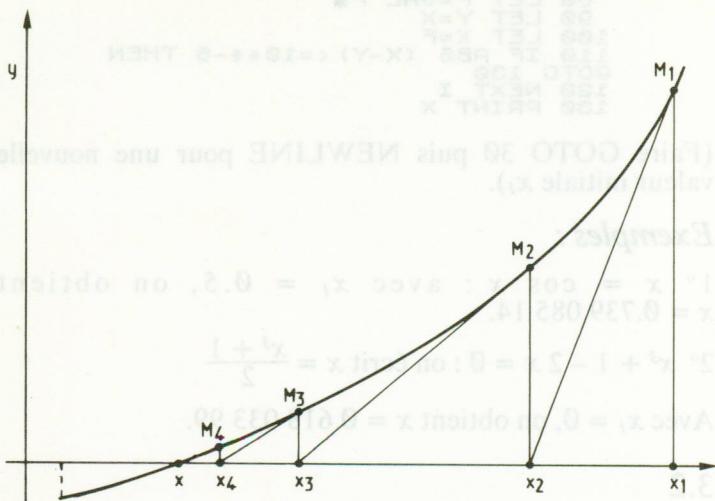
Soit f une fonction numérique définie et continue sur un intervalle $[a, b]$. On suppose également que :

1^o f s'annule une fois et une seule sur $[a, b]$.

2^o f' existe et ne s'annule pas sur $[a, b]$.

3^o f'' existe et est de signe constant sur $[a, b]$: f est donc soit convexe, soit concave sur $[a, b]$.

Représentons graphiquement f sur l'intervalle $[a, b]$:



Choisissons une valeur x_1 dans l'intervalle $[a, b]$: la tangente en M_1 à la courbe nous permet d'obtenir :

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

la tangente en M_2 à la courbe nous permet d'obtenir :

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \dots \text{etc.}$$

Si la suite x_1, x_2, \dots, x_n a une limite, cette limite est la solution de l'équation $f(x) = 0$.

Le programme qui suit permet le calcul de x_{n-1} et de x_n avec arrêt lorsque $|x_n - x_{n-1}| \leq 10^{-8}$. La vitesse de calcul dépend, s'il y a convergence, du choix de x_1 .

```
10 PRINT "F(X)=...?"
20 INPUT F#
30 PRINT "X1=...?"
40 INPUT X1
50 CLS
60 LET X=X1
```

```

70 FOR I=1 TO 100
80 LET F=VAL F$
90 IF F=0 THEN GOTO 190
95 REM CALCUL DE D=DERIVEE DE
F(XN)
100 LET X=X+0.001
110 LET G=VAL F$
120 LET X=X-0.002
130 LET H=VAL F$
140 LET D=(G-H)/0.002
150 LET Y=X+0.001
155 REM ARRET OU NOUVELLE BOUCLE
E
160 LET X=X+0.001-F/D
170 IF ABS (X-Y) <=10**-8 THEN
GOTO 190
180 NEXT I
190 PRINT X

```

(Pour essayer une autre valeur de x , faire GOTO 30 puis NEWLINE).

Exemples :

$$1^{\circ} \quad x^3 - 3x - 5 = 0:$$

pour $x_1 = 3$, on obtient $x = 2.279\ 018\ 8$

$$2^{\circ} \quad x - \log x - 2 = 0:$$

pour $x_1 = 0.1$, on obtient $x = 0.158\ 594\ 34$

$$3^{\circ} \quad \sin 2x - \cos x = 0:$$

pour $x_1 = \pi/4$, on obtient $x = 0.523\ 598\ 78$

4.2

La méthode peut ne pas aboutir si x_1 est mal choisi ou si f ne répond pas à certaines conditions.

5. Résolution de l'équation $f(x) = 0$ par dichotomie

Cette méthode, plus lente que les précédentes, a l'avantage d'aboutir dès lors qu'on a trouvé un intervalle $[a, b]$ tel que $f(a) \times f(b) < 0$.

Si nous calculons alors $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$
trois cas peuvent se produire :

1^o $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$ et la solution est trouvée.

2^o $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ a le même signe que $f(a)$:

la solution appartient alors à l'intervalle $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$.

3^o $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ a le même signe que $f(b)$:

la solution appartient alors à l'intervalle $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$,

Dans les deux derniers cas, l'intervalle de recherche est réduit de moitié : en répétant le procédé, on peut obtenir un encadrement de x aussi fin qu'on le désire. Le calcul est arrêté lorsque les valeurs absolues de deux valeurs successives de x diffèrent de moins de 10^{-8} .

```
10 PRINT "F(X)=...?"  
20 INPUT F$  
30 PRINT "A=...?"  
40 INPUT A  
50 PRINT "B=...?"  
60 INPUT B  
70 CLS  
80 LET X=A  
90 LET F=VAL F$  
100 IF F=0 THEN GOTO 240  
110 LET X=B  
120 LET G=VAL F$  
130 IF G=0 THEN GOTO 240  
140 LET Y=X  
150 LET X=0.5*(A+B)  
160 IF ABS(Y-X)<=10**-8 THEN G  
OTO 240  
170 LET H=VAL F$  
180 IF H=0 THEN GOTO 240  
190 LET W=SGN F*SGN H  
200 LET Z=SGN G*SGN H  
210 IF W=-1 THEN LET B=X  
220 IF Z=-1 THEN LET A=X  
230 GOTO 140  
240 PRINT X
```

(Faire GOTO 30, puis NEWLINE pour de nouvelles valeurs de a et b).

Exemples :

$$1^{\circ} \quad x - \frac{1}{2+x^2} = 0$$

avec $a = 0$ et $b = 1$, on obtient $x = 0.453\ 397\ 65$

$$2^{\circ} \quad 3^x - x - 5 = 0 : \text{ avec } a = 0 \text{ et } b = 2,$$

on obtient $x = 1.736\ 289\ 8$

6. Séparation des racines d'une équation

6.1

Pour utiliser la méthode dichotomique, il faut trouver deux nombres a et b vérifiant $f(a) \times f(b) < 0$.

On peut rechercher ces nombres graphiquement ou par un calcul pas à pas.

6.2 Recherche graphique

Le programme qui suit permet d'obtenir une représentation graphique de la fonction f sur un intervalle $[a, b]$ choisi à l'avance : s'il existe une solution x de l'équation $f(x) = 0$ sur cet intervalle, l'axe des x est tracé puisqu'on a alors $f(a) \times f(b) < 0$. (Ce programme est repris de celui qui figure chapitre 5, § 1.2.)

```

10 PRINT "F(X)=...?"
20 INPUT F$
30 PRINT "A=...?"
40 INPUT A
50 PRINT "B=...?"
60 INPUT B
70 CLS
80 LET P=10**38
90 LET M=-P
100 DIM F(64)
110 FOR I=1 TO 64
120 LET X=A+(I-1)*(B-A)/63
130 LET F(I)=VAL F$
140 IF F(I)>M THEN LET M=F(I)
150 IF F(I)<P THEN LET P=F(I)
160 NEXT I
170 LET H=ABS (M-P)
180 LET S=SGN M+SGN P+

```

```

190 FOR I=1 TO 64
200 LET S=SGN M*SGN P
210 IF S=-1 OR S=0 THEN PLOT I-
1,4+36*ABS (P/H)
220 PLOT I-1,4+36*(F(I)-P)/H
230 NEXT I
240 IF S=-1 OR S=0 THEN PRINT
AT 20,0;"AU MOINS UNE SOLUTION
DANS L'INTERVALLE (";A;",";B;")
250 IF S=1 THEN PRINT "PAS DE
SOLUTION DANS L'INTERVALLE"

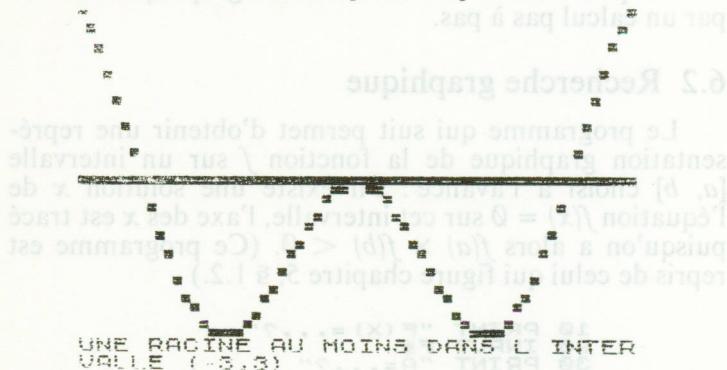
```

(Pour un autre intervalle, faire GOTO 30, puis NEWLINE).

Exemple :

Soit à résoudre $x^2 - 10 \sin^2 x = 0$.

Choisissons l'intervalle $[-3, +3]$.



On constate que f s'annule sur $[-3, 1]$, sur $[-1, +1]$ et sur $[1, 3]$. On peut donc passer au calcul effectif des racines par l'une des trois méthodes indiquées.

6.3 Recherche numérique par un calcul pas à pas

L'intervalle choisi $[a, b]$ est divisé en n parties égales, ce qui donne $n + 1$ points de subdivision : on a, pour

$$1 \leq i \leq n+1, x_i = a + (i-1)(b-a)/n.$$

Le programme recherche les intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ tels que $f(x_i) \times f(x_{i+1}) < 0$ et signale au passage les valeurs x_i telles que $f(x_i) = 0$.

(La variable C sert à faire le décompte de ces intervalles ; si elle reste à 0, c'est qu'il n'y en a pas).

```

10 PRINT "F(X)=...?"
20 INPUT F$
30 PRINT "A=...?"
40 INPUT A
50 PRINT "B=...?"
60 INPUT B
70 PRINT "N=...?"
80 INPUT N
90 CLS
100 DIM X(N+1)
110 DIM S(N+1)
120 FOR I=1 TO N+1
130 LET X(I)=A+(I-1)*(B-A)/N
140 LET X=X(I)
150 LET S(I)=SGN (VAL F$)
160 NEXT I
165 LET C=0
170 FOR I=2 TO N+1
180 IF S(I-1)=0 THEN PRINT X(I-1); "EST SOLUTION"
185 IF S(I-1)=0 THEN LET C=C+1
190 IF S(I-1)=0 THEN GOTO 240
200 IF S(I)=0 THEN GOTO 240
210 LET S=S(I-1)*S(I)
220 IF S=1 THEN GOTO 240
225 LET C=C+1
230 PRINT "L'INTERVALLE (";X(I-1);";";X(I);") CONVIENT"
240 NEXT I
250 IF S(N+1)=0 THEN PRINT B;"EST SOLUTION"
260 IF S(N+1)=0 THEN LET C=C+1
270 IF C=0 THEN PRINT "PAS DE SOLUTION SUR L'INTERVALLE"

```

(Pour un autre intervalle faire GOTO 30 puis NEW-LINE).

Exemple :

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

Pour $a = -5$, $b = 5$ et $n = 25$, on obtient le résultat suivant : 1 est solution, 3 est solution et il existe une solution dans l'intervalle $[1,8 ; 2,2]$.

INTEGRATION D'UNE FONCTION NUMERIQUE

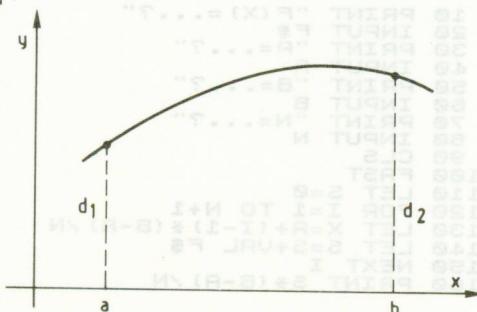
Soit f une fonction numérique, définie et continument dérivable sur une intervalle $[a, b]$. Dans ce chapitre sont exposées quelques méthodes de calcul du nombre

$$S = \int_a^b f(x) dx,$$

intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$.

1. Méthode des rectangles

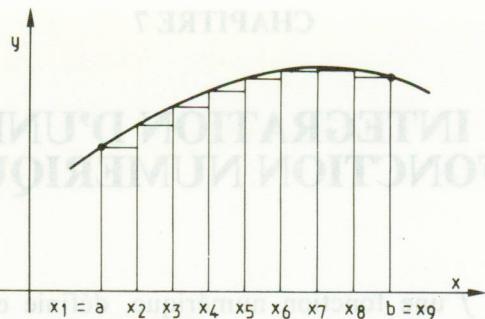
Représentons graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$:



L'aire limitée par la courbe, l'axe des x et les droites d_1 et d_2 a pour mesure

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

Si nous décomposons cette aire en n rectangles de même largeur, nous pouvons évaluer S .



Chaque rectangle a pour largeur $\frac{b-a}{n}$
et pour hauteur $f(x_i)$, avec, pour $1 \leq i \leq n+1$,

$$x_i = a + (i-1) \cdot \frac{(b-a)}{n}.$$

$$\text{On a donc } S = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{(b-a)}{n} \times f(x_i).$$

```

10 PRINT "F(X) = . . . ?"
20 INPUT F
30 PRINT "A = . . . ?"
40 INPUT A
50 PRINT "B = . . . ?"
60 INPUT B
70 PRINT "N = . . . ?"
80 INPUT N
90 CLS
100 FAST
110 LET S=0
120 FOR I=1 TO N+1
130 LET X=A+(I-1)*(B-A)/N
140 LET S=S+VAL F
150 NEXT I
160 PRINT S*(B-A)/N

```

Exemples :

1° Soit à calculer $S = \int_0^6 x^2 dx$:

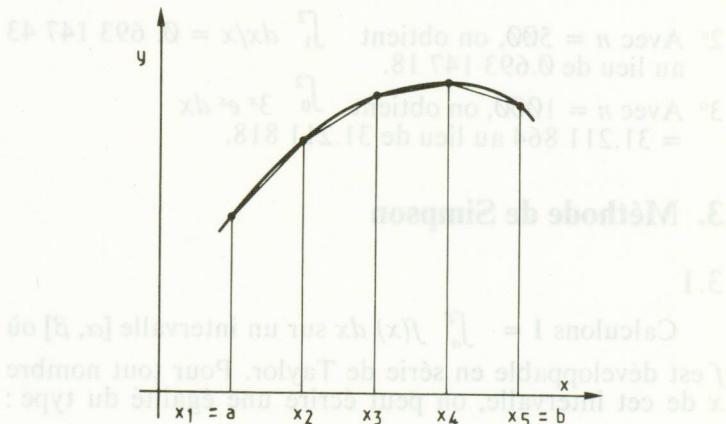
on obtient $S = 74.17$ pour $n = 50$, $S = 72.216\ 44$ pour $n = 500$ et $S = 72.108\ 036$ pour $n = 1000$ (au lieu de $S = 72$).

2° Pour $n = 2000$,

on obtient $\int_0^{\pi/2} \sin x dx = 1.000\ 392\ 7$ au lieu de 1.

2. Méthode des trapèzes

Au lieu de prendre des rectangles, on peut utiliser des trapèzes :



On obtient facilement :

$$S = \frac{b-a}{2n} \times \sum_{i=1}^{n+1} k f(x_i),$$

avec $k = 1$ si $i = 1$ ou $n + 1$ et $k = 2$ autrement.

```
10 PRINT "F(X)=...?"
20 INPUT F#
30 PRINT "A=...?"
40 INPUT A
50 PRINT "B=...?"
60 INPUT B
70 PRINT "N=...?"
80 INPUT N
90 CLS
100 FAST
110 LET S=0
120 FOR I=1 TO N+1
130 LET X=A+(I-1)*(B-A)/N
140 LET K=2
```

```

150 IF I=1 OR I=N+1 THEN LET K=
160 LET S=S+K*VAL F$
170 NEXT I
180 PRINT S*(B-A)/N/2

```

Exemples :

1^o On obtient $\int_0^6 x^2 dx = 72.0144$ avec $n = 50$.

2^o Avec $n = 500$, on obtient $\int_1^2 dx/x = 0.69314743$ au lieu de 0.69314718 .

3^o Avec $n = 1000$, on obtient $\int_0^2 3^x e^x dx = 31.211864$ au lieu de 31.211818 .

3. Méthode de Simpson

3.1

Calculons $I = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ sur un intervalle $[\alpha, \beta]$ où f est développable en série de Taylor. Pour tout nombre x de cet intervalle, on peut écrire une égalité du type :

$$f(x) = A + B(x - \alpha) + C(x - \alpha)^2 + D(x - \alpha)^3.$$

si on se limite aux quatre premiers termes de la série.
En intégrant terme à terme, on obtient :

$$I =$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} A dx + \int_{\alpha}^{\beta} B(x - \alpha) dx + \int_{\alpha}^{\beta} C(x - \alpha)^2 dx + \int_{\alpha}^{\beta} D(x - \alpha)^3 dx$$

$$\text{Soit } I = \frac{\beta - \alpha}{6} [6A + 3B(\beta - \alpha) + 2C(\beta - \alpha)^2 + \frac{3D}{2}(\beta - \alpha)^3]$$

Pour $x = \alpha$, $x = \beta$ et $x = \frac{\alpha + \beta}{2}$, la série de Taylor conduit à :

$$f(\alpha) = A, f(\beta) = A + B(\beta - \alpha) + C(\beta - \alpha)^2 + D(\beta - \alpha)^3 \text{ et}$$

$$f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = A + \frac{B}{2}(\beta - \alpha) + \frac{C}{4}(\beta - \alpha)^2 + \frac{D}{8}(\beta - \alpha)^3$$

Ces expressions permettent d'écrire :

$$I = \frac{\beta - \alpha}{6} \left[f(\alpha) + 4f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) + f(\beta) \right]$$

3.2

Soit maintenant à calculer $S = \int_a^b f(x) dx$.

Divisons $[a, b]$ en $2n$ parties égales : nous obtenons la suite de points $x_1 = a, x_2, x_3, \dots, x_{2n}, x_{2n+1} = b$, avec, pour $1 \leq i \leq 2n+1$, $x_i = a + (i-1) \frac{b-a}{2n}$.

En appliquant la formule du § 3.1 à chacun des intervalles $[x_1, x_3], [x_3, x_5], \dots, [x_{2n-1}, x_{2n+1}]$, nous obtenons :

$$S = \frac{1}{6} \times \frac{b-a}{n} [f(x_1) + 4f(x_2) + f(x_3) + 4f(x_4) + f(x_5) + \dots]$$

$$\text{d'où la formule de Simpson : } S = \frac{b-a}{6n} \times \sum_{i=1}^{2n+1} k f(x_i)$$

avec $k = 1$ pour $i = 1$ ou $2n+1$, $k = 2$ pour i impair et $k = 4$ pour i pair.

```
10 PRINT "F(X)=...?"  
20 INPUT F$  
30 PRINT "A=?"  
40 INPUT A  
50 PRINT "B=?"  
60 INPUT B  
70 PRINT "N=?"  
80 INPUT N  
90 CLS  
100 FAST  
110 LET S=0  
120 FOR I=1 TO 2*N+1  
130 LET X=A+(I-1)*(B-A)/2/N  
140 LET K=2  
150 IF I/2=INT(I/2) THEN LET K  
=4  
160 IF I=1 OR I=2*N+1 THEN LET  
K=1  
170 LET S=S+K*VAL F$  
180 NEXT I  
190 PRINT S*(B-A)/N/6
```

Exemples :

$$1^\circ \quad \int_0^6 x^2 dx = 72 \text{ pour } n = 5.$$

2^o Avec $n = 25$,

$$\text{on obtient } \int_0^1 e^{-x^2} dx = 0.746\ 824\ 14$$

3^o Avec $n = 25$,

$$\text{on obtient } \int_0^2 3^x e^x dx = 31.211\ 827$$

4. Méthode de Tchebytchev

4.1

Peut-on trouver, pour tout polynôme $P(x)$ de degré $n - 1$, un nombre k et n nombres x_1, x_2, \dots, x_n , tels que :

$$\int_{-1}^{+1} P(x) dx = k [P(x_1) + P(x_2) + \dots + P(x_n)] ?$$

Le mathématicien russe Tchebytchev (1821-1894) a donné une réponse positive à cette question pour $n = 3, 4, 5, 6, 7$ et 9 .

Pour $n = 9$, on a : $x_1 = -x_9 = 0.911\ 589\ 31$

$$x_2 = -x_8 = 0.601\ 018\ 66$$

$$x_3 = -x_7 = 0.528\ 761\ 78$$

$$x_4 = -x_6 = 0.167\ 906\ 18$$

$$x_5 = 0 \text{ et } k = 2/9$$

4.2

Ce résultat permet d'obtenir une méthode de calcul approché de $S = \int_a^b f(x) dx$.

$$\text{Posons : } x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t$$

$$\text{alors } S = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{+1} f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t\right) dt.$$

Soit g la fonction définie sur $[-1, 1]$ par :

$$g(t) = f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t\right).$$

$$\text{alors } S = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 g(t) dt.$$

Désignons par P le polynôme d'interpolation de Lagrange défini, pour $1 \leq i \leq 9$, par $P(x_i) = g(x_i)$. En remplaçant g par P sous le signe somme, on obtient :

$$S \simeq \frac{b-a}{2} \times \frac{2}{9} \times [g(x_1) + \dots + g(x_9)]$$

d'où la formule de Tchebytchev

$$S = \frac{b-a}{9} \times \sum_{i=1}^{i=9} f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} x_i\right)$$

```

10 PRINT "COMPLETEZ: F(X) = ... ?"
20 INPUT Y$
30 PRINT "A=... ?"
40 INPUT A
50 PRINT "B=... ?"
60 INPUT B
70 CLS
80 DIM X(9)
90 LET X(1)=0.91158931
100 LET X(2)=0.80101866
110 LET X(3)=0.52876178
120 LET X(4)=0.16790618
130 LET X(5)=0
140 LET X(6)=-X(4)
150 LET X(7)=-X(3)
160 LET X(8)=-X(2)
170 LET X(9)=-X(1)
180 LET S=0
190 LET C=(A+B)/2
200 LET D=(B-A)/2
210 FOR I=1 TO 9
220 LET X=C+D*I
230 LET S=S+VAL Y$
240 NEXT I
250 PRINT S*(B-A)/9

```

Exemples :

$$\int_1^4 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^3}} = 4.432\ 006\ 8 \text{ au lieu de } 4.432\ 029\ 5$$

$$\int_0^2 3^x e^x dx = 31.211\ 809 \text{ au lieu de } 31.211\ 818.$$

5. Utilisation d'un développement en série

Soit, par exemple, à calculer $S = \int_0^u e^{-x^2} dx$.

Pour tout nombre réel x , on a

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots$$

En intégrant terme à terme, on obtient :

$$S = u - \frac{u^3}{1! \times 3} + \frac{u^5}{2! \times 5} - \dots, \text{etc.}$$

Conservons seulement les n premiers termes de la série ; on peut poser $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} C_k$ avec :

$$C_k = (-1)^k \frac{u^{2k+1}}{k! \times (2k+1)} \text{ pour } k \geq 1 \text{ et } C_0 = u.$$

Si on remarque que

$$C_k = (-1)^{k-1} \frac{u^{2k-1}}{(k-1)! (2k-1)} \times \frac{-u^2}{k} \times \frac{2k-1}{2k+1}$$

pour $k > 0$, on obtient la relation de récurrence :

$$C_k = -C_{k-1} \times \frac{2k-1}{2k+1} \times \frac{u^2}{k}.$$

On a également $S_k = S_{k-1} + C_k$ (toujours pour $k > 0$).

Le nombre n étant choisi grâce à la relation $|C_n| < 10^{-8}$, le programme est le suivant :

```
10 PRINT "U=...?"  
20 INPUT U  
30 CLS  
40 LET S=U  
40 LET C=U  
50 FOR K=1 TO 1000  
60 LET C=-C*U*U*(2*K-1)/K/(2*K+1)  
70 LET S=S+C  
80 IF ABS C<10***-8 THEN GOTO 100  
90 NEXT K  
100 PRINT S
```

Exemple :

Pour $u = 1$, on obtient $S = 0.746\,824\,13$.
(Comparer avec la méthode de Simpson).

6. Cas d'une borne infinie

6.1

Soit à calculer $S = \int_0^\infty e^{-x^2/2} dx$.

Remplaçons la borne infinie par un nombre b et utilisons la méthode de Simpson. Pour $n = 5$ et $b = 5$, on obtient $S = 1.253\,314\,1$; pour $n = 20$ et $b = 10$, $S = 1.253\,314\,1$; pour $n = 50$ et $b = 20$, $S = 1.253\,314\,1$.

L'approximation est très satisfaisante : cela vient du fait que $e^{-x^2/2}$ tend rapidement vers 0 quand x augmente. (Le résultat exact est $S = \sqrt{\pi}/2$).

6.2

Dans d'autres cas, malheureusement, on ne peut pas conclure car la dispersion des résultats est trop importante. Calculons, par exemple :

$$S = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$$

qui vaut exactement : $\pi/2 = 1.570\,796\,3$. Avec la méthode de Simpson, on obtient $S = 1.520\,837\,9$ pour $n = 100$ et $b = 20$, $S = 1.511\,338\,5$ pour $n = 25$ et $b = 50$, $S = 1.558\,852$ pour $n = 100$ et $b = 100$.

EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

1.

Soit y une fonction numérique définie sur un intervalle $[x_0, x_0 + h]$ par une équation différentielle et des conditions initiales $y_0 = y(x_0)$, $y'(x_0) = y'_0, \dots$ etc.

Nous nous proposons de déterminer une valeur approchée de $y(x)$ pour toute valeur x de l'intervalle $[x_0, x_0 + h]$ en nous limitant, cependant, aux seules équations différentielles du premier ordre et à celles du second ordre.

2. Equations du premier ordre

2.1 Méthode d'Euler

Soit y une fonction numérique définie par la condition $y(x_0) = y_0$ et par l'équation $y' = f(x, y)$.

Supposons y définie et développable en série de Taylor sur l'intervalle $[x_0, x_0 + h]$. Si on conserve les deux premiers termes seulement de cette série, on obtient une valeur approchée de $y(x)$ au voisinage de x_0 :

$$y(x) = y(x_0) + (x - x_0) y'(x_0).$$

En tenant compte de l'équation différentielle, on obtient $y(x) = y(x_0) + (x - x_0) f(x_0, y_0)$.

L'intervalle $[x_0, x]$ peut être trop grand : divisons-le en n sous-intervalles $[x_j, x_{j+1})$ de même longueur l et

appliquons la formule précédente à chacun de ces sous-intervalles.

On obtient $y(x_{j+1}) = y(x_j) + l f[x_j, y(x_j)]$

avec $l = \frac{x - x_0}{n}$

Si on pose $y(x_j) = y_j$, on peut écrire

$$y_{j+1} = y_j + l f(x_j, y_j).$$

Le calcul de $y(x)$ revient donc à déterminer la suite $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n = y(x)$.

Le programme correspondant est le suivant :

```
10 PRINT "X0=..?"
20 INPUT X0
30 CLS
40 PRINT "Y0=..?"
50 INPUT Y0
60 CLS
70 PRINT "F(X,Y)=..?"
80 INPUT F$
90 CLS
100 PRINT "X=..?"
110 INPUT X
120 CLS
130 PRINT "N=..?"
140 INPUT N
150 CLS
160 LET Y=Y0
170 LET L=(X-X0)/N
180 LET X=X0
190 FOR J=0 TO N-1
200 LET F=VAL F$
210 LET Y=Y+L*F
220 LET X=X+L
230 NEXT J
240 PRINT Y
```

Soit, par exemple, l'équation $y' = 2y + 2x + 1$ avec $x_0 = 0$ et $y_0 = 0$. Calculons $y(1)$: on obtient 5.106 683 4 avec $n = 50$, 5.316 017 9 avec $n = 200$ et 5.374 312 7 avec $n = 1000$; la valeur exacte est 5.389 056 1.

La précision du résultat augmente avec n , ce qui fait que, en pratique, on peut connaître le nombre des chiffres significatifs en comparant les résultats obtenus avec deux valeurs différentes de n . Cependant la méthode est longue et on lui préfère la méthode de Runge-Kutta.

2.2 Méthode de Runge-Kutta

Sous les mêmes hypothèses que précédemment, cette méthode consiste à déterminer la suite $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n = y(x)$ à partir des formules suivantes :

$$\bullet y_{j+1} = y_j + \frac{l}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$

$$\bullet k_1 = lf(x_j, y_j), k_2 = lf\left(x_j + \frac{l}{2}, y_j + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$\bullet k_3 = lf\left(x_j + \frac{l}{2}, y_j + \frac{k_2}{2}\right), k_4 = lf(x_j + l, y_j + k_3)$$

Dans le programme, la fonction $f(x, y)$ est entrée sous forme d'une chaîne de caractères qui est évaluée grâce aux valeurs données à x et y ; x_j et y_j sont désignées respectivement par u et v .

```
10 PRINT "X0=..?"
20 INPUT X0
30 CLS
40 PRINT "Y0=..?"
50 INPUT Y0
60 CLS
70 PRINT "F(X,Y)=..?"
80 INPUT F$
90 CLS
100 PRINT "X=..?"
110 INPUT X
120 CLS
130 PRINT "N=.."
140 INPUT N
150 CLS
160 LET L=(X-X0)/N
170 LET U=X0
180 LET V=Y0
190 FOR J=0 TO N-1
200 LET X=U
210 LET Y=V
220 LET K1=L*VAL F$
230 LET X=U+L/2
240 LET Y=V+K1/2
250 LET K2=L*VAL F$
260 LET Y=V+K2/2
270 LET K3=L*VAL F$
280 LET X=U+L
290 LET Y=V+K3
300 LET K4=L*VAL F$
310 LET U=U+(K1+2*K2+2*K3+K4)
320 LET U=U+L
330 NEXT J
340 PRINT V
```

Reprendons l'exemple précédent. Avec $n = 20$, on obtient $y(1) = 5.389\ 044\ 8$; avec $n = 50$, on obtient $5.389\ 055\ 8$. L'erreur commise est de l'ordre de 10^{-5} .

3. Equations du second ordre

Soit $y'' = f(x, y, y')$ une telle équation avec, comme conditions initiales, $y_0 = y(x_0)$ et $y'_0 = y'(x_0)$.

Pour calculer $y(x)$, on détermine la suite $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n = y(x)$ grâce aux formules suivantes :

- $y_{j+1} = y_j + l [y'_j + \frac{l}{6}(k_1 + k_2 + k_3)]$
- $y'_{j+1} = y'_j + \frac{l}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$
- $k_1 = lf(x_j, y_j, y'_j)$
- $k_2 = lf(x_j + \frac{l}{2}, y_j + \frac{l}{2}y'_j, y'_j + \frac{k_1}{2})$
- $k_3 = lf(x_j + \frac{l}{2}, y_j + \frac{l}{2}y'_j + \frac{l}{4}k_1, y'_j + \frac{k_2}{2})$
- $k_4 = lf(x_j + l, y_j + l y'_j + \frac{l}{2}k_2, y'_j + k_3)$

j varie de 0 à $n - 1$ et $l = \frac{x - x_0}{n}$.

Dans le programme, la fonction $f(x, y, y')$ est évaluée grâce à la chaîne de caractères $F\$$ et aux variables x , y et z , qui désigne y' .

Les variables x_j , y_j , y'_j sont désignées respectivement par u , v et t .

```
10 PRINT "X0=..?"
20 INPUT X0
30 CLS
40 PRINT "Y0=...?"
50 INPUT Y0
60 CLS
70 PRINT " VALEUR DE Z0=DY/DX
EN X0 ?"
80 INPUT Z0
85 CLS
```

```

90 PRINT "Z DESIGNE DY/DX ."
100 ENTREZ F(X,Y,DY/DX)=F(X,Y,Z) //:
110 INPUT F$
120 CLS
130 PRINT "X=..?"
140 INPUT X
140 CLS
150 PRINT "N=..?"
160 INPUT N
170 CLS
180 LET L=(X-X0)/N
190 LET U=X0
200 LET V=Y0
210 LET T=Z0
220 FOR J=0 TO N-1
230 LET X=U
240 LET Y=V
250 LET Z=T
260 LET K1=L*VAL F$
270 LET X=U+L/2
280 LET Y=V+L*T/2
290 LET Z=T+K1/2
300 LET K2=L*VAL F$
310 LET X=U+L/2
320 LET Y=V+L*T/2+L*K1/4
330 LET Z=T+K2/2
340 LET K3=L*VAL F$
350 LET X=U+L
360 LET Y=V+L*T+L*K2/2
370 LET Z=T+K3
380 LET K4=L*VAL F$
390 LET V=V+L*(T+(K1+K2+K3)/6)
400 LET T=T+(K1+2*K2+2*K3+K4)/6
410 LET U=U+L
420 NEXT J
430 PRINT V

```

Soit, par exemple, l'équation $y'' = 3y' + 2 - 6x$, avec $x_0 = 0$, $y_0 = 2$ et $y'_0 = 3$.

Avec $n = 25$, on obtient $y(1) = 22.085\ 443$ au lieu de $22.085\ 537$.

L'erreur commise est de l'ordre de l^5 .

OPERATIONS SUR LES VECTEURS ET LES MATRICES

1. Opérations sur les vecteurs de \mathbb{R}^3

1.1 Produit scalaire et produit vectoriel

soit \vec{u} et \vec{v} désigner deux vecteurs de \mathbb{R}^3 ayant pour coordonnées respectives u_1, u_2, u_3 et v_1, v_2, v_3 relativement à une base orthonormée positive de \mathbb{R}^3 , désignée par $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est le nombre $u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$.

Le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ a pour composantes :

$(u_2v_3 - u_3v_2) \vec{i}$, $(u_3v_1 - u_1v_3) \vec{j}$ et $(u_1v_2 - u_2v_1) \vec{k}$.

```

10 DIM U(3)
20 DIM V(3)
30 FOR I=1 TO 3
40 PRINT "U(";I;") = . . . ?"
50 INPUT U(I)
60 PRINT "V(";I;") = . . . ?"
70 INPUT V(I)
80 CLS
90 NEXT I
100 PRINT "PRODUIT SCALAIRE = ";
U(1)*V(1)+U(2)*V(2)+U(3)*V(3)
110 PRINT
120 PRINT "COMPOSANTES DU PRODUIT VECTORIEL"
130 PRINT U(2)*V(3)-U(3)*V(2);
;" * I"
140 PRINT U(3)*V(1)-U(1)*V(3);
;" * J"
150 PRINT U(1)*V(2)-U(2)*V(1);
;" * K"

```

Exemple :

$$\vec{u} = 1.2\vec{i} + 4\vec{j} + 5.5\vec{k}$$

$$\vec{v} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + 4.5\vec{k}$$

On obtient :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 34.35 \text{ et } \vec{u} \wedge \vec{v} = 1.5\vec{i} - 16.4\vec{j} + 11.6\vec{k}.$$

1.2 Produit mixte et double produit vectoriel

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont trois vecteurs de R^3 de coordonnées respectives $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3$ et w_1, w_2, w_3 , relativement à la base orthonormée positive $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Le produit mixte des trois vecteurs est le nombre $\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$.

Le double produit vectoriel des trois vecteurs est le vecteur $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$.

```
10 DIM U(3)
20 DIM V(3)
30 DIM W(3)
40 FOR I=1 TO 3
50 PRINT "U("; I; ") = ... ?"
60 INPUT U(I)
70 PRINT "V("; I; ") = ... ?"
80 INPUT V(I)
90 PRINT "W("; I; ") = ... ?"
100 INPUT W(I)
110 CLS
120 NEXT I
130 LET A=U(1)*(V(2)*W(3)-V(3)*W(2))
*W(2))
140 LET B=U(2)*(V(3)*W(1)-V(1)*W(3))
*W(3))
150 LET C=U(3)*(V(1)*W(2)-V(2)*W(1))
*W(1))
160 LET D=U(1)*V(1)+U(2)*V(2)+U(3)*V(3)
170 LET E=U(1)*W(1)+U(2)*W(2)+U(3)*W(3)
180 PRINT "PRODUIT MIXTE =", A+B+C
190 PRINT AT 5,0;"COMPOSANTES DU DOUBLE PRODUIT VECTORIEL:"
200 PRINT D*V(1)-E*W(1); "*I"
210 PRINT D*V(2)-E*W(2); "*J"
220 PRINT D*V(3)-E*W(3); "*K"
```

Exemple :

$$\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}, \vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}, \vec{w} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$$

On obtient : produit mixte : -44

double produit vectoriel : $0\vec{i} - 11\vec{j} - 11\vec{k}$.

2. Opérations sur les matrices

2.1 Addition

Soient A et B deux matrices à n lignes et p colonnes chacune. Posons, pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$,

$$C(i,j) = A(i,j) + B(i,j).$$

```

10 PRINT "N=...?"
20 INPUT N
30 PRINT "P=...?"
40 INPUT P
50 DIM A(N,P)
60 DIM B(N,P)
70 FOR I=1 TO N
80 FOR J=1 TO P
90 PRINT "A(";I;",";J;") =...?"
100 INPUT A(I,J)
110 PRINT "B(";I;",";J;") =...?"
120 INPUT B(I,J)
130 CLS
140 NEXT J
150 NEXT I
160 FOR I=1 TO N
170 FOR J=1 TO P
180 PRINT "C(";I;",";J;") =";A(I,J)+B(I,J)
190 NEXT J
200 NEXT I
210 PRINT "TERMINÉ"

```

Exemple :

$$n = 3 \quad p = 2$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

2.2 Multiplication par un scalaire

```

10 PRINT "N=...?"
20 INPUT N
30 PRINT "P=...?"
40 INPUT P
50 PRINT "K=...?"

```

```

60 INPUT K
70 DIM A(N,P)
80 DIM C(N,P)
90 FOR I=1 TO N
100 FOR J=1 TO P
110 PRINT "A(";I;"/";J;") = . . . ?"
120 INPUT A(I,J)
130 CLS
140 NEXT J
150 NEXT I
160 FOR I=1 TO N
170 FOR J=1 TO P
180 PRINT "C(";I;"/";J;") = ";K*I
( I,J)
190 NEXT J
200 NEXT I
210 PRINT "TERMINÉ"

```

2.3 Multiplication de deux matrices

Soit A une matrice à n lignes et p colonnes et soit B une matrice à q lignes et r colonnes.

Le produit $A \times B$ n'existe que pour $q = p$: dans ce cas, $A \times B$ est une matrice à n lignes et r colonnes.

Désignons, pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq r$, par $C(i,j)$ le coefficient de la matrice $A \times B$ situé sur la $i^{\text{ème}}$ ligne et sur la $j^{\text{ème}}$ colonne. On a :

$$C(i,j) = \sum_{k=1}^{k=p} A(i,k) \times B(k,j).$$

Le programme est le suivant :

```

10 PRINT "N=...?"
20 INPUT N
30 PRINT "P=...?" REM PRINT
40 INPUT P
50 PRINT "Q=...?"
60 INPUT Q
70 IF Q<>P THEN PRINT "ERREUR,
IL FAUT Q=P."
80 IF Q<>P THEN GOTO 50
90 PRINT "R=...?"
100 INPUT R
110 DIM A(N,P)
120 DIM B(Q,R)
130 DIM C(N,R)
140 CLS
145 REM ENTRÉE DES COEFFICIENTS
150 FOR I=1 TO N
160 FOR J=1 TO P
170 PRINT "A(";I;"/";J;") = . . . ?"
180 INPUT A(I,J)
190 CLS
200 NEXT J

```

```

210 NEXT I
220 FOR I=1 TO Q
230 FOR J=1 TO R
240 PRINT "B(";I;",";J;") = ... ?"
250 INPUT B(I,J)
260 CLS
270 NEXT J
280 NEXT I
285 REM CALCUL DES C(I,J)
290 FOR I=1 TO N
295 FOR J=1 TO R
300 LET C(I,J)=0
305 FOR K=1 TO P
310 LET C(I,J)=C(I,J)+A(I,K)*B(K,J)
315 NEXT K
320 PRINT "C(";I;",";J;") = ";C(I,J)
325 NEXT J
330 NEXT I
340 PRINT "TERMINE"

```

Exemple :

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Image d'un vecteur par une matrice carrée

Soit A une matrice carrée à n lignes et n colonnes et soit \vec{x} un vecteur de coordonnées x_1, x_2, \dots, x_n .

L'image, par A , du vecteur \vec{x} est un vecteur \vec{y} de coordonnées y_1, y_2, \dots, y_n avec $y_i = \sum_{j=1}^{j=n} A(i,j) \times x_j$

```

10 PRINT "N=...?"
20 INPUT N
30 DIM A(N,N)
40 DIM X(N)
50 DIM Y(N)
60 FOR I=1 TO N
70 FOR J=1 TO N
80 PRINT "A(";I;",";J;") = ... ?"
90 INPUT A(I,J)
100 CLS
110 NEXT J
120 NEXT I
130 FOR I=1 TO N
140 PRINT "X(";I;") = ... ?"
150 INPUT X(I)
160 CLS
170 NEXT I

```

```

180 FOR I=1 TO N
190 LET Y(I)=0
200 FOR J=1 TO N
210 LET Y(I)=Y(I)+R(I,J)*X(J)
220 NEXT J
230 PRINT "Y(";I;")=";Y(I)
240 NEXT I

```

Exemple :

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0.5 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

RESOLUTION D'UN SYSTEME D'EQUATIONS LINEAIRES

1. Inverse d'une matrice carrée

1.1

Soit A une matrice carrée d'ordre n . Pour calculer, si elle existe, la matrice A^{-1} , nous utiliserons une méthode dite méthode du pivot.

Considérons les manipulations matricielles suivantes :

1. on échange deux lignes de A .
2. on multiplie tous les coefficients d'une ligne de A par le même nombre non nul.
3. à la $i^{\text{ème}}$ ligne de A , on ajoute la $k^{\text{ème}}$ ligne.

On démontre que chacune de ces manipulations correspond à une pré-multiplication de A par une certaine matrice M . Si A^{-1} existe, on peut transformer la matrice A en la matrice unité I grâce à une suite de manipulations M_1, M_2, \dots, M_P : on a alors $M_P \times M_{P-1} \times \dots \times M_2 \times M_1 \times A = I$.

Il en résulte, après post-multiplication par A^{-1} , $M_P \times M_{P-1} \times \dots \times M_2 \times M_1 \times I = A^{-1}$.

La même suite de manipulations matricielles faite sur I transforme cette matrice en A^{-1} .

Montrons sur un exemple le fonctionnement de cette méthode.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1^o Transformation de la première colonne :

On divise la première ligne par 2 pour obtenir 1 sur la diagonale de A .

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0.5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On retranche la première ligne de A à la troisième ligne de A pour avoir 0 en début de ligne :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0.5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2^o Transformation de la deuxième colonne :

Il y a 1 sur la diagonale, on ne change donc rien à la ligne 2 ; on retranche la ligne 2 à la ligne 1 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2.5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0.5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3^o Transformation de la troisième colonne :

On divise la ligne 3 par -0.5 pour avoir 1 sur la diagonale de A .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2.5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0.5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

A la ligne 1, on ajoute la ligne 3 multipliée par 2.5 ; à la ligne 2, on retranche trois fois la ligne 3 :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -5 \\ -3 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

1.3 Programme

$A(i,j)$ désigne le coefficient de la matrice A situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne.

$B(i,j)$ désigne d'abord les coefficients de la matrice unité, puis ceux de A^{-1} .

N est l'ordre de la matrice A : avec 16 K de mémoire, on peut prendre n entre 2 et 20 ou 30 selon les coefficients de A .

(**Remarque** : une $n + 1^{\text{ème}}$ ligne est réservée pour stocker une ligne quelconque de A en cas d'échange de lignes).

```
10 INPUT N
20 DIM A(N+1,N)
30 DIM B(N+1,N)
35 REM "ENTRÉE DES A(I,J) ET DE LA MATRICE UNITÉ"
40 FOR I=1 TO N
50 FOR J=1 TO N
60 PRINT "A(";I;",";J;") = . . . ?"
70 INPUT A(I,J)
80 CLS
90 LET B(I,J)=0
100 IF I=J THEN LET B(I,J)=1
110 NEXT J
120 NEXT I
130 FAST
140 FOR K=1 TO N
150 IF A(K,K)=0 THEN LET C=0
160 IF A(K,K)=0 THEN GOTO 370
165 REM "ON DIVISE LA K IEME LIGNE PAR A(K,K)"
170 LET D=A(K,K)
180 FOR J=1 TO N
190 LET A(K,J)=A(K,J)/D
200 LET B(K,J)=B(K,J)/D
210 NEXT J
215 REM "ON TRANSFORME A(I,K) EN 0 POUR I DIFFERENT DE K"
220 FOR I=1 TO N
230 IF I=K THEN GOTO 290
240 LET E=A(I,K)
250 FOR J=1 TO N
260 LET A(I,J)=A(I,J)-E*A(K,J)
```

```

070 LET B(I,J)=B(I,J)-E*B(K,J)
080 NEXT J
090 NEXT I
100 NEXT K
105 REM " EDITION DE LA MATRICE
INVERSE"
110 FOR I=1 TO N
120 FOR J=1 TO N
130 PRINT "B(";I;",";J;") =";B(I,J)
140 NEXT J
150 NEXT I
160 GOTO 500
165 REM "CAS OU A(K,K)=0"
170 LET C=C+1
180 FOR J=1 TO N
190 LET A(N+1,J)=A(K,J)
200 LET B(N+1,J)=B(K,J)
210 NEXT J
220 FOR L=K TO N
230 FOR J=1 TO N
240 LET A(L,J)=A(L+1,J)
250 LET B(L,J)=B(L+1,J)
260 NEXT J
270 NEXT L
280 IF C<=N-K THEN GOTO 160
290 PRINT "LA MATRICE N EST PAS
INVERSEE"
300 STOP

```

Exemples :

- 1) Reprendre la matrice du § précédent.

2)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 12 & 3 & 2 \\ -3 & 7 & 11 & 1 & -15 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & -5 \\ 2 & 2 & 29 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & 34 & 7 & 0 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 19 & -43 & 103 & -42 & 40 \\ -1 & 10 & -24 & 8 & -9 \\ 1 & -3 & 7 & -3 & 3 \\ -7 & 15 & -35 & 16 & -15 \\ -4 & 12 & -29 & 11 & -11 \end{bmatrix}$$

2. Résolution d'un système d'équations linéaires

2.1

Soit à résoudre le système de n équations linéaires à n inconnues suivant :

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1$$

"

"

"

.....

$$a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n = b_n$$

Désignons par \vec{x} le vecteur (x_1, x_2, \dots, x_n) et par \vec{b} le vecteur (b_1, b_2, \dots, b_n) . Si A désigne la matrice des coefficients a_{ij} , alors le système équivaut à $A(\vec{x}) = \vec{b}$. Le système a une solution si et seulement si A est inversible : on a alors $\vec{x} = A^{-1}(\vec{b})$.

2.2 Programme :

Il suffit de reprendre le programme du paragraphe 1.3 pour chercher l'inverse de A , puis de remplacer l'édition de A^{-1} par le calcul et l'édition de $A^{-1}(\vec{b})$.

(Dans le programme, les coefficients de matrice unité, puis ceux de A^{-1} sont désignés par $Q(i,j)$).

```
10 PRINT "N=...?"  
20 INPUT N  
30 DIM A(N+1,N)  
40 DIM Q(N+1,N)  
50 DIM X(N)  
60 DIM B(N)  
65 REM ENTREE DES A(I,J) ET  
DES B(I)  
70 FOR I=1 TO N  
80 FOR J=1 TO N  
90 PRINT "A(";I,");";J,")=...?"  
100 INPUT A(I,J)  
110 CLS  
120 LET Q(I,J)=0  
130 IF I=J THEN LET Q(I,J)=1  
140 NEXT J  
150 NEXT I  
160 FOR I=1 TO N  
170 PRINT "B(";I,")=...?"  
180 INPUT B(I)  
190 CLS  
200 NEXT I  
210 FAST  
215 REM CALCUL DE L'INVERSE DE  
LA MATRICE A  
220 FOR K=1 TO N  
230 IF A(K,K)=0 THEN LET C=0  
240 IF A(K,K)=0 THEN GOTO 400  
250 LET D=A(K,K)  
260 FOR J=1 TO N
```

```

270 LET A(K,J)=A(K,J)/D
280 LET Q(K,J)=Q(K,J)/D
290 NEXT J
300 FOR I=1 TO N
310 IF I=K THEN GOTO 370
320 LET E=A(I,K)
330 FOR J=1 TO N
340 LET A(I,J)=A(I,J)-E*A(K,J)
350 LET Q(I,J)=Q(I,J)-E*Q(K,J)
360 NEXT J
370 NEXT I
380 NEXT K
390 GOTO 540
400 LET C=C+1
410 FOR J=1 TO N
420 LET A(N+1,J)=A(K,J)
430 LET Q(N+1,J)=Q(K,J)
440 NEXT J
450 FOR L=K TO N
460 FOR J=1 TO N
470 LET A(L,J)=A(L+1,J)
480 LET Q(L,J)=Q(L+1,J)
490 NEXT J
500 NEXT L
510 IF C<=N-K THEN GOTO 240
520 PRINT "PAS DE SOLUTION"
530 GOTO 620
535 REM CALCUL ET EDITION DE LA
SOLUTION
540 FOR I=1 TO N
550 LET X(I)=0
560 FOR J=1 TO N
570 LET X(I)=X(I)+Q(I,J)*B(J)
580 NEXT J
590 PRINT "X(";I,") =";X(I)
600 NEXT I
610 PRINT
620 PRINT "TERMINÉ"

```

Exemple :

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 3 \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} x_1 &= 3.357\,142\,9 \\ x_2 &= -1.928\,571\,4 \\ x_3 &= -3.642\,857\,1 \end{aligned}$$

CHAPITRE 11

DISTRIBUTIONS STATISTIQUES

1. Distributions à une variable

1.1 Calcul de la médiane

Soit x_1, x_2, \dots, x_n une série statistique de n nombres rangés par ordre de grandeur croissant. La médiane de cette série est alors $m = x_{n+1/2}$ si n est impair

ou $m = \frac{1}{2}[x_{n/2} + x_{n+1/2}]$ si n est pair.

Dans le programme qui suit, la série x_1, x_2, \dots, x_n est d'abord classée (voir § 2.2 du chapitre 1) ; le calcul de m est fait ensuite.

```
10 INPUT N
20 DIM X(N)
30 DIM Y(N)
35 REM "RANGEMENT DES X(I)"
40 FOR I=1 TO N
50 PRINT "X("; I; ") = ... ?"
60 INPUT X(I)
70 LET Y(I)=X(I)
80 CLS
90 NEXT I
100 LET C=0
110 FOR I=1 TO N-1
120 IF Y(I)<=Y(I+1) THEN GOTO 170
130 LET D=Y(I)
140 LET Y(I)=Y(I+1)
150 LET Y(I+1)=D
160 LET C=C+1
170 NEXT I
180 IF C=1 THEN GOTO 100
```

```

185 REM "EDITION"
190 LET M=Y((N+1)/2)
200 IF N/2=INT(N/2) THEN LET N=0.5*(Y(N/2)+Y(1+N/2))
210 PRINT "MEDIANE=";M

```

Exemple :

La médiane de la série 2, 8, 5, 7, 1, 3, 9, 12, 8, 4, 10, 12 est 7.5.

1.2 Moyenne, variance, écart-type

Soit $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ une série de n nombres.

La moyenne de cette série est

$$m = \frac{1}{n} \sum x_i ; \text{ la variance de cette série est :}$$

$$v = \frac{1}{n} \sum_1^n (x_i - m)^2 = \frac{1}{n} \left(\sum_1^n x_i^2 \right) - m ;$$

l'écart-type de la série est $e = \sqrt{v}$.

```

10 INPUT N
20 LET S=0
30 LET C=0
40 FOR I=1 TO N
50 PRINT "X(";I,")=";X
60 INPUT X
70 CLS
80 LET S=S+X
90 LET C=C+X*X
100 NEXT I
110 PRINT "MOYENNE: ";S/N
120 LET V=C/N-(S/N)*(S/N)
130 PRINT "VARIANCE: ";V
140 PRINT "ECART-TYPE: ";SGR V

```

Exemple :

Série 2, 2, 5, 8, 8, 9, 12, 15

$$m = 7.625, v = 18.234\ 375 \text{ et } e = 4.270\ 172\ 7.$$

Il est fréquent de voir figurer plusieurs fois la même valeur x_i . Le programme qui suit permet d'entrer x_i en tenant compte du nombre de fois k_i où cette valeur figure dans la série.

```

10 PRINT "EFFECTIF TOTAL ?"
20 INPUT N
30 LET S=0
40 LET C=0
50 LET J=0
60 IF J<0 THEN PRINT "IERE VALEUR ?"
70 IF J>0 THEN PRINT "VALEUR SUIVANTE ?"
80 INPUT X
90 PRINT "COMBIEN DE FOIS ?"
100 INPUT F
110 CLS
120 LET S=S+F*X
130 LET C=C+F*X*X
140 LET J=J+F
150 IF J>N THEN GOTO 70
160 PRINT "MOYENNE: ";S/N
170 LET V=C/N-(S/N)*(S/N)
180 PRINT "VARIANCIE: ";V
190 PRINT "ECART-TYPE: ";SGR V

```

Exemple :

Série 3, 3, 3, 5, 7, 7, 9, 10, 10, 10, 10, 12

Moyenne : 7.416 666 7

Variance : 9.576 388 9

Ecart-type : 3.094 574 1

2. Distributions à deux variables

2.1 Définitions

Soient x_1, x_2, \dots, x_n et y_1, y_2, \dots, y_n deux séries de n nombres chacune.

Si m_x et m_y désignent les moyennes de ces deux séries, on a :

$$\begin{aligned} \text{Variance des } x = \text{Var}(x) &= \frac{1}{n} \sum (x_i - m_x)^2 \\ &= \left(\frac{1}{n} \sum x_i^2 \right) - m_x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Variance des } y = \text{Var}(y) &= \frac{1}{n} \sum (y_i - m_y)^2 \\ &= \left(\frac{1}{n} \sum y_i^2 \right) - m_y^2 \end{aligned}$$

Covariance des x et des y = Cov (x, y)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{n} \sum (x_i - m_x) (y_i - m_y) \\ &= \left(\frac{1}{n} \sum x_i y_i \right) - m_x m_y \end{aligned}$$

Le coefficient de corrélation linéaire r est le nombre :

$$\frac{\text{Cov}(x, y)}{\sqrt{\text{Var}(x) \times \text{Var}(y)}}$$

2.2 Programme

```
10 PRINT "N=...?"  
20 INPUT N  
30 LET S=0  
40 LET T=0  
50 LET U=0  
60 LET V=0  
70 LET W=0  
80 FOR I=1 TO N  
90 PRINT "X("; I; ")="; ?  
100 INPUT X  
110 PRINT "Y("; I; ")="; ?  
120 INPUT Y  
130 CLS  
140 LET S=S+X  
150 LET T=T+X*X  
160 LET U=U+Y  
170 LET V=V+Y*Y  
180 LET W=W+X*Y  
190 NEXT I  
200 PRINT "MX="; S/N  
210 PRINT "MY="; U/N  
220 LET UX=T/N-(S/N)*(S/N)  
230 LET UY=U/N-(U/N)*(S/N)  
240 LET COV=U/N-(U/N)*(S/N)  
250 PRINT "VAR(X)="; UX  
260 PRINT "VAR(Y)="; UY  
270 PRINT "COV(X,Y)="; COV  
280 PRINT "COEF. DE CORRELATION"  
"="; COV/SQR(UX*UY)
```

Exemple :

Série des x : 5, 8, 9, 10, 12, 15

Série des y : 1, 5, 7, 11, 13, 20

On obtient :

$$m_x = 9.833\ 333\ 3 \quad m_y = 9.5$$

$$\text{var}(x) = 9.805\ 555\ 6 \quad \text{var}(y) = 37.25 \quad \text{cov}(x,y) = 18.916\ 667$$

$$r = 0.989\ 795\ 26$$

3. Ajustements

3.1

Soient x_1, x_2, \dots, x_n et y_1, y_2, \dots, y_n deux séries de nombres chacune. Peut-on trouver une fonction numérique f dont la courbe représentative « s'ajuste » le mieux possible aux n points de coordonnées x_i et y_i ?

Pour répondre à cette question, on utilise la méthode des moindres carrés : les paramètres caractéristiques de f sont déterminés en cherchant le minimum de $\sum [y_i - f(x_i)]^2$.

3.2

Avant de calculer un ajustement, il peut être intéressant de visualiser le « nuage » des points (x_i, y_i) . Le programme suivant, adapté de celui du chapitre 5, § 1, permet de le faire (les axes ne sont pas dessinés).

```
10 PRINT "N=...?"
20 INPUT N
30 DIM X(N)
40 DIM Y(N)
50 LET P=10**38
60 LET M=-P
70 LET R=P
80 LET Q=-P
90 FAST
95 REM ENTREE DES X(I) ET DES
Y(I); RECHERCHE DES MAXIMA ET
DES MINIMA
100 FOR I=1 TO N
110 PRINT "X(";I;")=...?"
120 INPUT X(I)
130 PRINT "Y(";I;")=...?"
140 INPUT Y(I)
150 CLS
160 IF X(I)>M THEN LET M=X(I)
170 IF Y(I)>Q THEN LET Q=Y(I)
180 IF X(I)<P THEN LET P=X(I)
190 IF Y(I)<R THEN LET R=Y(I)
200 NEXT I
205 REM TRACE DES POINTS
210 SLOW
220 FOR I=1 TO N
230 PLOT 53*(X(I)-P)/(M-P), 43*(Y(I)-R)/(Q-R)
240 NEXT I
250 PRINT "
```

Exemple :

SERIE DES X: 2,5,12,23,36,10,8,24
,32,16

SERIE DES Y: 5, 6, 24, 45, 35, 21, 9, 10
, 22, 15

3.3 Ajustement linéaire

On cherche à ajuster une droite d'équation $y = ax + b$. La méthode des moindres carrés conduit à :

$$a = \frac{\text{cov}(x,y)}{\text{var}(x)} \text{ et } b = m_y - am_x$$

Il suffit de reprendre le programme du § 2.2 en changeant les lignes 200 à 280 :

```
10 PRINT "EFFECTIF DE CHAQUE  
SERIE ?"  
20 INPUT N  
30 LET S=0  
40 LET T=0  
50 LET U=0  
60 LET V=0  
70 LET W=0  
80 FOR I=1 TO N  
90 PRINT "X(";I;") = .. ?"
```

```

100 INPUT X
110 PRINT "Y ("; I; ") = . . . ?"
120 INPUT Y
130 CLS
140 LET S=S+X
150 LET T=T+X*X
160 LET U=U+Y
170 LET V=V+Y*Y
180 LET W=W+X*Y
190 NEXT I
200 LET MX=S/N
210 LET MY=U/N
220 LET UX=T/N-MX*MX
230 LET UY=U/N-MY*MY
240 LET COV=W/N-MX*MY
250 LET A=COV/UX
260 LET B=MY-A*MX
270 PRINT "EQUATION CHERCHEE : "
280 PRINT "Y="; A; "*X+"; B
290 PRINT AT 8,0;"COEFF. D AJUSTEMENT : "
300 PRINT INT (ABS (100*COV/SQR
(UX*UY))) / 100

```

La ligne 300 utilise, avec deux décimales seulement, la valeur absolue du coefficient de corrélation comme coefficient d'ajustement : plus ce coefficient est proche de 1, meilleur est l'ajustement.

Exemple :

Série des x : 3, 4, 6, 8, 8, 12

Série des y : 3, 6, 5, 5, 8, 11

Equation de la droite d'ajustement :

$y = 0.744\ 479\ 5 x + 1.246\ 056\ 8$

Coefficient d'ajustement : 0.86

3.4 Autres ajustements

On se ramène au cas précédent pour chacun des ajustements suivants : $y = a e^{bx}$, $y = a \log x + b$ et $y = ax^b$.

1° Pour l'ajustement $y = a e^{bx}$, on a, pour $y > 0$, $\log y = bx + \log a$ ce qui ramène à un ajustement linéaire. Au programme du § 3.3, il suffit d'apporter les modifications suivantes :

```
125 LET Y=LN Y  
280 PRINT "Y="; EXP B; "*EXP ("; A  
;"*X"
```

Exemple :

Série des x : 2, 4, 6, 10, 15

Série des y : 5, 8, 12, 22, 54

On obtient $y = 3.786\ 307\ 5 \times \exp(0.178\ 293\ 41 x)$.
Coefficient d'ajustement 0.99.

2° Pour un ajustement du type $y = a \log x + b$, on ajoute deux lignes au programme du § 3.3 :

```
105 LET X=LN X  
280 PRINT "Y="; A; "*LOGX +" ; B
```

(Ce programme suppose les $x_i > 0$).

Exemple :

Série des x : 6, 9, 16, 22, 40.

Série des y : 1, 2, 3, 4, 5.

On obtient $y = 2.118\ 029\ 3 \log x + 2.736\ 256\ 6$.
Coefficient d'ajustement : 0.99.

3° Pour un ajustement du type $y = ax^b$, on doit avoir $x_i > 0$ et $y_i > 0$. On apporte au programme du § 3.3 les modifications suivantes :

```
105 LET X=LN X  
125 LET Y=LN Y  
280 PRINT "Y="; EXP B; "* (X**"; A  
;"")"
```

Exemple

Série des x : 2, 4, 5, 10, 12

Série des y : 1, 3, 9, 20, 22

On obtient $y = 0.320\ 752\ 05 \times x^{1.777\ 652\ 9}$.
Coefficient d'ajustement : 0.97

4. Histogrammes

4.1

Soit x_1, x_2, \dots, x_k une série de k nombres : cette série peut être représentée par un histogramme de n classes ayant toutes la même amplitude.

Les deux programmes qui suivent permettent de choisir $n \leq 12$. Sous chaque rectangle figurera la fréquence de classe donnée en pourcentage arrondi à l'entier le plus proche.

L'échelle choisie donne 40 carreaux de hauteur au rectangle correspondant à la classe d'effectif maximum.

4.2

1^{er} cas : les nombres de la série sont entrés un à un au clavier.

```
10 PRINT "EFFECTIF DE LA SERIE
?"
20 INPUT K
30 DIM X(K)
35 REM "ENTREE DES X(I); RECHERCHE DU MAXIMUM ET DU
MINIMUM DES X(I)"
40 LET M=-10*#38
50 LET P=-M
60 FOR I=1 TO K
70 PRINT "X("; I; ") = . . . ?"
80 INPUT X(I)
90 IF X(I) >= M THEN LET M=X(I)
100 IF X(I) <= P THEN LET P=X(I)
110 CLS
120 NEXT I
130 FAST
135 REM CALCUL DES LIMITES L(I) ET DE L'EFFEKTIF E(I) DE CHAQUE
CLASSE
140 PRINT "COMBIEN DE CLASSES
?"
150 INPUT N
160 DIM L(N+1)
170 DIM E(N)
180 FOR I=1 TO N
190 LET L(I)=P+(I-1)*(M-P)/N
200 LET E(I)=0
210 NEXT I
220 LET L(N+1)=M+1
230 FOR J=1 TO K
```

```

240 FOR I=1 TO N
250 IF X(J)>=L(I) AND X(J)<L(I+1) THEN LET E(I)=E(I)+1
260 NEXT I
270 NEXT J
275 REM "CALCUL DES FREQUENCES
DE CLASSE F(I) ET DES HAUTEURS
H(I) DES RECTANGLES"
280 DIM F(N)
290 DIM H(N)
300 LET R=10**-6
310 FOR I=1 TO N
320 LET F(I)=100*E(I)/K
330 LET H(I)=INT(0.4*F(I)+0.5)
340 IF H(I)>=R THEN LET R=H(I)
350 NEXT I
360 FOR I=1 TO N
370 LET H(I)=H(I)*40/R
380 NEXT I
385 REM "TRACE"
390 SLOW
400 CLS
410 LET X=0
420 FOR I=1 TO N
430 FOR J=0 TO 3
440 FOR Y=3 TO H(I)
450 PLOT X+J,Y
460 NEXT Y
470 NEXT J
480 PRINT AT 21,X/2; INT(F(I)+0.5)
490 IF N<=10 THEN LET W=6
500 IF N>10 THEN LET W=5
510 LET X=X+W
520 NEXT I

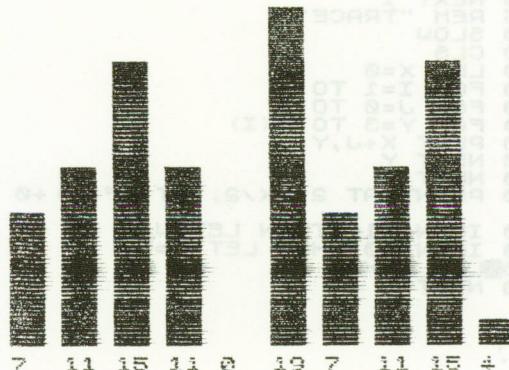
```

(Pour changer n , faire GOTO 140, puis NEWLINE).

Exemple :

SERIE: 3,5,7,8,6,4,5,3,8,7,6,5,4,
1,2,3,2,5,4,8,9,5,8,1,3,7,8 SOIT
27 NOMBRES

10 CLASSES



4.3

2^e cas : l'effectif de chaque classe est connu. On change, dans le programme précédent, les lignes 10 à 270 :

```
10 PRINT "COMBIEN DE CLASSES"
??
20 INPUT N
30 DIM E(N)
40 LET K=0
50CLS
60 FOR I=1 TO N
70 PRINT "EFFECTIF DE LA CLASSE"
E NUMERO ";I;" ?"
80 INPUT E(I)
90 REM CALCUL DE L'EFFECTIF TO
TAL K
100 LET K=K+E(I)
110CLS
```

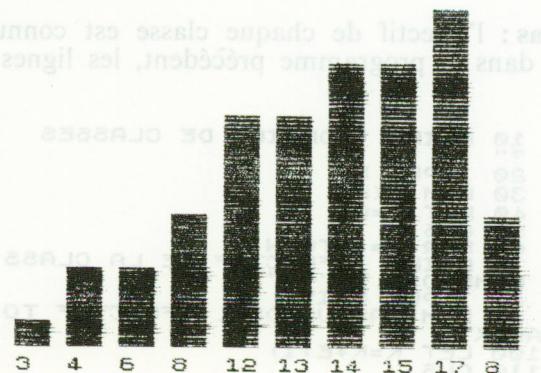
```

120 NEXT I
130 FAST
175 REM "CALCUL DES FREQUENCES
DE CLASSE F(I) ET DES HAUTEURS
H(I) DES RECTANGLES"
180 DIM F(N)
190 DIM H(N)
200 LET R=10**-5
210 FOR I=1 TO N
220 LET F(I)=100*E(I)/K
230 LET H(I)=INT (0.4*F(I)+0.5)
240 IF H(I)>=R THEN LET R=H(I)
250 NEXT I
260 FOR I=1 TO N
270 LET H(I)=H(I)*40/R
280 NEXT I
285 REM "TRACE"
290 SLOW
300 CLS
310 LET X=0
320 FOR I=1 TO N
330 FOR J=0 TO 3
340 FOR Y=3 TO H(I)
350 PLOT X+J,Y
360 NEXT Y
370 NEXT J
380 PRINT AT 21,X/2; INT (F(I)+0
.5)
390 IF N<=10 THEN LET W=6
400 IF N>10 THEN LET W=5
410 LET X=X+W
420 NEXT I

```

Exemple :

Dix classes d'effectifs 20, 30, 40, 60, 60, 90, 95, 100, 110, 120 et 60.



LOIS DE PROBABILITE (1)

1. Loi géométrique

1.1 Définitions

Un événement peut se réaliser avec une probabilité q lors d'une épreuve. La probabilité p_1 d'obtenir cet événement à la $n^{\text{ème}}$ épreuve seulement est donnée par :

$$p_1 = q (1 - q)^{n-1}.$$

La probabilité p_2 de voir se réaliser cet événement une fois en n épreuves au plus est donnée par :

$$p_2 = \sum_{i=1}^{i=n} q (1 - q)^{i-1}.$$

1.2 Calcul de $p_1 = q (1 - q)^{n-1}$

```
10 INPUT Q
20 INPUT N
30 PRINT "P="; Q * ((1-Q)**(N-1))
```

Exemple :

La probabilité d'avoir à lancer cinq fois un dé pour obtenir un 2 au cinquième essai seulement est 0.080 375 515 ($q = 1/6$).

1.3 Calcul de $p_2 = \sum_{i=1}^{i=n} q (1 - q)^{i-1}$

On reconnaît une série géométrique de somme $1 - (1 - q)^n$

```

10 INPUT Q
20 INPUT N
30 PRINT "P="; 1 - (1-Q)^N

```

Exemple :

Quelle est la probabilité de lancer dix fois un dé sans obtenir 6 ?

La probabilité d'obtenir un 6 en dix lancers au plus est 0.838 494 42. La probabilité cherchée est $1 - 0.838\ 494\ 42 = 0.161\ 505\ 58$.

2. Loi binomiale

2.1 Définitions

Un événement peut se réaliser avec une probabilité q . La probabilité p_1 de voir cet événement se réaliser k fois en n épreuves est donnée par $p_1 = C_n^k q^k (1-q)^{n-k}$ avec entier ≥ 0 , n entier ≥ 1 . C_n^k est le nombre :

$$\frac{n!}{k! \times (n-k)!}$$

La probabilité p_2 de voir cet événement se réaliser k fois au plus en n épreuves est donnée par :

$$p_2 = \sum_{i=0}^{i=k} C_n^i q^i (1-q)^{n-i}$$

2.2 Calcul de $p_1 = C_n^k (1-q)^{n-k}$

Pour $k \geq 1$, on a : $C_n^k = C_n^{k-1} \times \frac{n-k+1}{k}$

Par suite,

$$C_n^k q^k (1-q)^{n-k} =$$

$$C_n^{k-1} q^{k-1} (1-q)^{n-(k-1)} \times \frac{n-k+1}{k} \times \frac{q}{1-q}$$

pour $k \geq 1$ et $q \neq 1$.

```

10 INPUT Q
20 INPUT K
30 INPUT N
40 LET P=(1-Q)**N
50 IF K=0 THEN GOTO 90
60 FOR J=1 TO K
70 LET P=P*Q*(N-J+1)/J/(1-Q)
80 NEXT J
90 PRINT "P=";P

```

Exemple :

Pour $q = 0.2$, $k = 3$, $n = 15$, on obtient :
 $p_1 = 0.250\,138\,9.$

2.3 Calcul de $p_2 = \sum_{i=0}^{i=k} C_n q^i (1-q)^{n-i}$

On reprend le programme précédent avec une boucle
FOR/NEXT

```

10 INPUT Q
20 INPUT K
30 INPUT N
40 LET P=(1-Q)**N
50 FOR I=1 TO K
60 LET C=(1-Q)**N
70 FOR J=1 TO I
80 LET C=C*Q*(N-J+1)/J/(1-Q)
90 NEXT J
100 LET P=P+C
110 NEXT I
120 PRINT "P=";P

```

Exemple :

Pour $q = 0.4$, $k = 3$ et $n = 5$, on obtient :
 $p_2 = 0.912\,96$

3. Loi de Poisson

3.1 Définitions

Soit un événement qui, sur un intervalle de temps t , peut survenir 0, 1, 2, 3, ..., n fois.

Supposons que, en moyenne, cet événement survienne a fois dans cet intervalle de temps.

La probabilité p_1 de voir l'événement se réaliser n fois dans l'intervalle de temps t est :

$$p_1 = \frac{a^n}{n!} e^{-a}$$

La probabilité p_2 de voir l'événement se réaliser n fois au plus durant l'intervalle de temps t est :

$$p_2 = \sum_{j=0}^{j=n} \frac{a^j}{j!} e^{-a}$$

3.2 Calcul de $p_1 = \frac{a^n}{n!} e^{-a}$

On a :

$$\frac{a^n}{n!} e^{-a} = e^{-a} \times \frac{a}{1} \times \frac{a}{2} \times \dots \times \frac{a}{n} = e^{-a} \times \prod_{j=1}^{j=n} \frac{a}{j}$$

```
10 INPUT A
20 INPUT N
30 LET P=EXP(-A)
40 IF N=0 THEN GOTO 80
50 FOR J=1 TO N
60 LET P=P*A/J
70 NEXT J
80 PRINT "P=";P
```

Exemple :

Si $a = 0.9$ et $n = 1$, $p_1 = 0.365\ 912\ 69$.

3.3 Calcul de $p_2 = \sum_{j=0}^{j=n} \frac{a^j}{j!} e^{-a}$

On reprend le programme précédent avec une sommation.

```
10 INPUT A
20 INPUT N
30 LET P=EXP -A
40 LET C=P
50 IF N=0 THEN GOTO 80
60 FOR J=1 TO N
70 LET C=C*A/J
80 LET P=P+C
90 NEXT J
100 PRINT "P=";P
```

Exemple :

Pour $a = 0.7$ et $n = 3$, on obtient $p_2 = 0.994\ 246\ 54$.

LOIS DE PROBABILITE (2)

1. Loi normale à une variable

1.1 Définitions

Soit x une variable aléatoire distribuée suivant une loi normale. Si a désigne un nombre réel quelconque, la probabilité p d'avoir $x \leq a$ est donnée par :

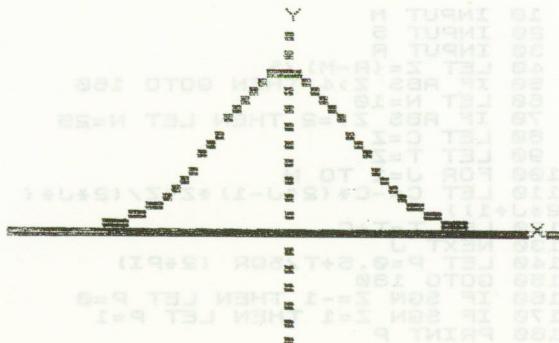
$$p = \frac{1}{s \times \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a e^{-1/2(x-m/s)^2} dx.$$

m est la moyenne de la distribution, s l'écart-type.

Si $m = 0$ et $s = 1$, la loi est dite centrée et réduite.

1.2

La courbe donnant la densité de probabilité est une courbe « en cloche ». La figure ci-dessous montre cette courbe pour $m = 0$ et $s = 1$.



1.3 Calcul de p

En posant $t = sx + m$, on obtient :

$$p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{(-t^2)/2} dt.$$

Puisque $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{(-t^2)/2} dt = 0.5$,

on obtient $p = 0.5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{a-m} e^{(-t^2)/2} dt$.

Soit $z = (a - m)/s$. Après développement en série de $e^{(-t^2)/2}$ et intégration terme à terme, on obtient :

$$p = 0.5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=0}^{j=\infty} (-1)^j \frac{z^{2j+1}}{(2j+1) \times j! \times 2^j}$$

Posons $C_j = (-1)^j \frac{z^{2j+1}}{(2j+1) \times j! \times 2^j}$:

On peut écrire, pour $j \geq 1$:

$$C_j = -C_{j-1} \times \frac{2j-1}{2j \times (2j+1)} z^2 \text{ avec } C_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} z.$$

La corrigé donnez la valeur de p lorsque z est négatif
Programme :

```

10 INPUT M
20 INPUT S
30 INPUT A
40 LET Z=(A-M)/S
50 IF ABS Z>4 THEN GOTO 160
60 LET N=10
70 IF ABS Z>=2 THEN LET N=25
80 LET C=Z
90 LET T=Z
100 FOR J=1 TO N
110 LET C=-C*(2*j-1)*Z*Z/(2*j*(2*j+1))
120 LET T=T+C
130 NEXT J
140 LET P=0.5+T/SQR(2*PI)
150 GOTO 180
160 IF SGN Z=-1 THEN LET P=0
170 IF SGN Z=1 THEN LET P=1
180 PRINT P

```

Exemples :

Si $m = 0$ et $s = 1$, $p = 0.977\ 249\ 87$ pour $a = 2$.
 Si $m = 25$, $s = 5$ et $a = 18$, $p = 0.080\ 756\ 659$.

1.4 Problème inverse

Soit p un nombre compris entre 0.0001 et 0.9999 . Pour quelle valeur de a la probabilité d'avoir $x \leq a$ vaut-elle p ?

Programme :

```

10 INPUT M
20 INPUT S
30 INPUT P
40 LET H=-4
50 LET B=4
60 FOR I=1 TO 15
65 REM CALCUL DE LA PROBABILITE Q D'AVOIR X<=Z
70 LET Z=(H+B)/2
80 LET N=10
90 IF ABS(Z)>=2 THEN LET N=25
100 LET C=Z
110 LET T=Z
120 FOR J=1 TO N
130 LET C=-C*(2*J-1)*Z*Z/(2*J*(2*J+1))
140 LET T=T+C
150 NEXT J
160 LET Q=0.5+T/SQR(2*PI)
155 REM NOUVELLE BOUCLE ?
170 IF ABS(P-Q)<=10**-6 THEN
GOTO 220
180 IF Q>P THEN LET B=Z
190 IF Q<P THEN LET H=Z
200 NEXT I
205 REM EDITION
210 LET A=Z*S+M
220 PRINT SGN A*INT(1000*ABS A)/1000

```

Ce programme est basé sur la remarque suivante : on a sensiblement $p = 0$ pour $x < m - 4 s$ et $p = 1$ pour $x > m + 4 s$. Il suffit donc de calculer a entre ces deux valeurs extrêmes par dichotomie.

Exemple :

Si $m = 2$, $s = 5$ et $p = 0.75$, on obtient $a = 5.372$.

2. Loi du χ^2

2.1 Définitions

Soit x une variable aléatoire ≥ 0 . Si cette variable est distribuée suivant une loi du χ^2 à n degrés de liberté, la probabilité p d'avoir $x \leq a$ est donnée par :

$$p = \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} \int_0^a e^{-x/2} x^{n/2-1} dx.$$

n est un entier ≥ 1 .

Γ désigne la fonction gamma définie, pour $x \geq 0$, par :

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt.$$

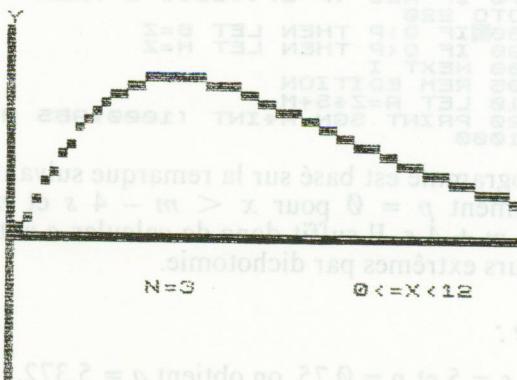
On démontre que $\Gamma(n/2) = (n/2 - 1)!$ pour n pair, tandis que

$$\Gamma(n/2) = \frac{n-2}{2} \times \frac{n-4}{2} \times \dots \times \frac{5}{2} \times \frac{3}{2} \times \Gamma(1/2)$$

pour n impair ≥ 3 , avec $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

2.2

La courbe ci-dessous est la courbe donnant la densité de probabilité pour $n = 3$.



2.3 Calcul de p

On démontre que :

$$p = \left(\frac{a}{2}\right)^{n/2} \frac{e^{-a/2}}{n/2 \Gamma(n/2)} \left[1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a^k}{(n+2)(n+4)\dots(n+2k)} \right]$$

Pour éviter d'être limité à des valeurs de n trop faibles, on utilisera les logarithmes pour calculer $\Gamma(n/2)$.

Posons $C_k = \frac{a^k}{(n+2)(n+4)\dots(n+2k)}$.

On a : $C_k = C_{k-1} \times \frac{a}{n+2k}$ pour $k \geq 2$ avec $C_1 = \frac{a}{n+2}$.

A priori, on fera varier k de 1 à 1000, mais, en fait, le programme sera arrêté dès que $C_k \leq 10^{-8}$.

Programme :

```
10 INPUT N
20 INPUT A
30 LET M=N/2
40 IF M=INT M THEN GOTO 110
45 REM CALCUL DE L=LOG GAMMA
(N/2) POUR N IMPAIR
50 LET L=(LN PI)/2
60 IF N=1 THEN GOTO 160
70 FOR I=1 TO N-2 STEP 2
80 LET L=L+LN I-LN 2
90 NEXT I
100 GOTO 160
105 REM CALCUL DE L=LOG GAMMA
(N/2) POUR N PAIR
110 LET L=0
120 IF N=2 THEN GOTO 160
130 FOR I=1 TO M-1
140 LET L=L+LN I
150 NEXT I
155 REM CALCUL DE LA SOMME S
( DE K =1 A K=...)
160 LET C=1
170 LET S=1
180 FOR K=1 TO 1000
190 LET C=C*A/(N+2*K)
200 LET S=S+C
210 IF C<=10**-6 THEN GOTO 230
220 NEXT K
225 REM EDITION DE P
230 PRINT S*EXP (M*LN (A/2)-(A/
2)-L-LN M)
```

Exemples :

Si $n = 4$ et $a = 5$, $p = 0.712\ 702\ 51$

Si $n = 100$ et $a = 82$, on obtient $p = 0.095\ 025\ 031$

2.4 Calcul inverse

Soit p un nombre compris entre 0 et 0.999 : pour quelle valeur de a la probabilité d'avoir $x \leq a$ est-elle égale à p ?

Programme :

```
10 INPUT N
20 INPUT P
30 IF P>0.999 THEN GOTO 330
40 LET H=0
50 LET B=N+8*SQR (2*N)
55 REM CALCUL DE LA PROBABILITE Q D'AVOIR X<=A
60 LET M=N/2
70 IF M=INT M THEN GOTO 140
80 LET L=(LN PI)/2
90 IF N=1 THEN GOTO 190
100 FOR I=1 TO N-2 STEP 2
110 LET L=L+LN I-LN 2
120 NEXT I
130 GOTO 190
140 LET L=0
150 IF N=2 THEN GOTO 190
160 FOR I=1 TO M-1
170 LET L=L+LN I
180 NEXT I
190 LET A=(B+H)/2
200 LET C=1
210 LET S=1
220 FOR K=1 TO 1000
230 LET C=C*A/(N+2*K)
240 LET S=S+C
250 IF C<=10**-8 THEN GOTO 270
260 NEXT K
270 LET Q=S*EXP (M*LN (A/2)-(A/2)-L-LN M)
275 REM NOUVELLE BOUCLE .....
...OU EDITION
280 IF ABS (P-Q)<=10**-6 THEN
GOTO 320
290 IF P<0 THEN LET B=A
300 IF P>0 THEN LET H=A
310 GOTO 190
320 PRINT INT (1000*A)/1000
```

Ce programme est basé sur la remarque suivante : la moyenne et l'écart-type de la distribution sont respectivement n et $\sqrt{2}n$: on a donc pratiquement $p = 1$ pour $x > n + 8\sqrt{2}n$. Comme $p = 0$ pour $a = 0$, il suffit de déterminer a par dichotomie entre 0 et $n + 8\sqrt{2}n$.

Exemples :

Si $n = 10$ et $p = 0.5$, on obtient $a = 9.341$

Si $n = 30$ et $p = 0.005$, on obtient $a = 13.786$

Si $n = 3$ et $p = 0.999$, on obtient $a = 16.265$

3. Loi du t de Student-Fischer

3.1 Définitions

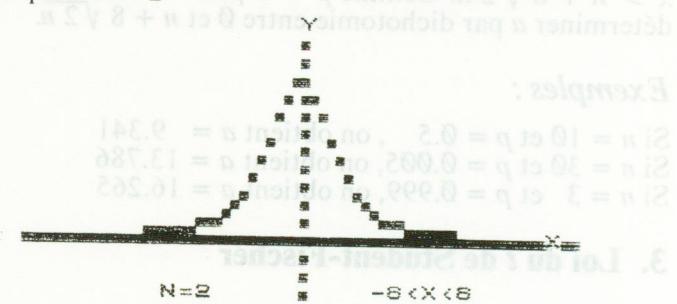
Soit x une variable aléatoire. Si a désigne un nombre réel quelconque et n un entier ≥ 1 , la probabilité p d'avoir $x \leq a$ est donnée par :

$$p = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{-\infty}^a \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dx$$

lorsque x est distribué selon une loi de Student-Fischer. (n est le nombre des degrés de liberté).

3.2

La courbe ci-dessous représente la densité de probabilité pour $n = 2$



3.3 Calcul de p

La distribution étant symétrique en x , on a :

$$p = 0.5 + \frac{1}{\sqrt{n}\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{-\infty}^0 (1 + \frac{x^2}{n})^{-(n+1/2)} dx.$$

En posant $x = \sqrt{n} \operatorname{tg} u$,

il vient $p = 0.5 + k \int_0^\varphi \cos^{n-1} u du$, avec :

$$\varphi = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{a}{\sqrt{n}} \text{ et } k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

Si J_{n-1} désigne l'intégrale $\int_0^\varphi \cos^{n-1} u du$, on a, par récurrence sur n :

$$J_{n-1} = \frac{n-2}{n-1} J_{n-3} + \frac{\cos^{n-2} \varphi \times \sin \varphi}{n-1} \text{ pour } n \geq 3.$$

Programme :

```
1000 10 INPUT N
20 INPUT A
30 LET M=N/2
40 LET F=ATN (ABS A/SQR N)
50 LET S=SIN F
60 LET C=COS F
70 LET D=1/SQR PI
80 LET E=SGN A
90 IF M<>INT M THEN GOTO 260
100 IF N=2 THEN GOTO 240
105 REM "1ER CAS: N EST PAIR"
110 LET L=0
115 REM CALCUL DE L=LOG GAMMA (N/2) ET DE R=LOG GAMMA (N+1/2)
120 FOR I=1 TO M-1
130 LET L=L+LN I
140 NEXT I
150 LET R=0.5*LN PI
160 FOR I=1 TO N-1 STEP 2
170 LET R=R+LN I-LN 2
180 NEXT I
185 REM CALCUL DE J(N-1)
190 LET J=5
200 FOR I=4 TO N STEP 2
210 LET J=((I-2)*J+5*(C***(I-2))
1)/(I-1)
220 NEXT I
230 GOTO 600
240 LET P=0.5+E*S/2
250 GOTO 610
255 REM 2EME CAS: N EST IMPAIR
260 IF N=1 THEN GOTO 400
265 REM CALCUL DE L ET R
270 LET L=0.5*LN PI
280 FOR I=1 TO N-2 STEP 2
290 LET L=L+LN I-LN 2
300 NEXT I
310 LET R=0
320 FOR I=1 TO (N-1)/2
330 LET R=R+LN I
340 NEXT I
345 REM CALCUL DE J(N-1)
350 LET J=F
360 FOR I=3 TO N STEP 2
370 LET J=((I-2)*J+5*(C***(I-2))
1)/(I-1)
380 NEXT I
390 GOTO 600
400 LET P=0.5+E*F/PI
410 GOTO 610
415 REM EDITION
600 LET P=0.5+E*D*J*EXP (R-L)
610 PRINT P
```

Exemple :

Pour $n = 6$ et $a = 3$, on obtient $p = 0.987\ 995\ 9$

3.4 Problème inverse

Si p est un nombre réel compris entre 0.0001 et 0.9999, quelle est la valeur de a pour laquelle la probabilité d'avoir $x \leq a$ est p ?

Programme :

```
1 PRINT "N=...?"
2 INPUT N
3 PRINT "P=...?"
4 INPUT P
5 IF P<0.0001 OR P>0.9999 THEN
N GOTO 3
6 CLS
7 IF N>=3 THEN LET G=-100*SQR(N/(N-2))
8 IF N>=3 THEN LET H=-G
9 IF N=1 OR N=2 THEN LET G=-10000
10 IF N=1 OR N=2 THEN LET H=-G
11 FOR K=1 TO 1000
12 LET A=(H+G)/2
30 REM CALCUL DE Q, PROBABILITE
D AVOIR X<A
30 LET M=N/2
40 LET F=ATN(ABS A/SQR N)
50 LET S=SIN F
60 LET C=COS F
70 LET D=1/SQR PI
80 LET E=SGN A
90 IF M<>INT M THEN GOTO 260
100 IF N=2 THEN GOTO 240
110 LET L=0
120 FOR I=1 TO M-1
130 LET L=L+LN I
140 NEXT I
150 LET R=0.5*LN PI
150 FOR I=1 TO N-1 STEP 2
170 LET R=R+LN I-LN 2
180 NEXT I
190 LET J=5
200 FOR I=4 TO N STEP 2
210 LET J=((I-2)*J+5*(C***(I-2)
))/ (I-1)
220 NEXT I
230 GOTO 600
240 LET Q=0.5+E*S/2
250 GOTO 610
260 IF N=1 THEN GOTO 400
270 LET L=0.5*LN PI
280 FOR I=1 TO N-2 STEP 2
290 LET L=L+LN I-LN 2
300 NEXT I
310 LET R=0
320 FOR I=1 TO (N-1)/2
330 LET R=R+LN I
```

```

340 NEXT I
350 LET J=F
360 FOR I=3 TO N STEP 2
370 LET J=((I-2)*J+S*(C**(I-2))
380 / (I-1)
390 NEXT I
390 GOTO 600
400 LET Q=0.5+E*F/PI
410 GOTO 610
600 LET Q=0.5+E*D*J*EXP (R-L)
610 REM ...EDITION DU NOUVELLE
BOUCLE
620 IF Q>P THEN LET H=A
630 IF Q<P THEN LET G=A
640 IF ABS (P-Q) <10**-6 THEN
GOTO 700
650 NEXT K
700 PRINT SGN A*INT (0.5+1000*
ABS A)/1000

```

Ce programme est basé sur la remarque suivante : la moyenne et l'écart-type de la distribution sont respectivement \bar{Q} et $\sqrt{\frac{n}{n-2}}$ pour $n \geq 3$.

On a pratiquement $p = \bar{Q}$ pour $x < -100 \sqrt{\frac{n}{n-2}}$.
et $p = 1$ pour $x > 100 \sqrt{\frac{n}{n-2}}$.

Il suffit de calculer a par dichotomie entre ces deux valeurs.

Si $n = 1$ ou si $n = 2$, on calcule a entre -10^5 et 10^5 .

Exemples :

$n = 1$, $p = 0.95$, on obtient $a = 6.314$
 $n = 2$, $p = 0.995$, on obtient $a = 9.925$
 $n = 15$, $p = 0.995$, on obtient $a = 2.947$

ANNEXES

1. Série de Taylor et développements limités

1.1

Soit f une fonction numérique définie et continûment dérivable sur un intervalle I . Soit x_0 un nombre de cet intervalle. Supposons qu'il existe des nombres $c_0, c_1, c_2, \dots, c_x, \dots$ tels que, pour $x \in I$, on ait :

$$f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots + c_n(x - x_0)^n + \dots \quad (1)$$

Peut-on déterminer la valeur de ces coefficients $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$?

Posons $x = x_0$: on obtient $c_0 = f(x_0)$.

En dérivant terme à terme l'égalité (1), on obtient :

$$f'(x) = \dots \quad (2)$$

$$c_1 + 2c_2(x - x_0) + 3c_3(x - x_0)^2 + \dots + nc_n(x - x_0)^{n-1} + \dots$$

d'où, en faisant $x = x_0$, $c_1 = f'(x_0)$.

En dérivant terme à terme l'égalité (2), on obtient :

$$f''(x) = 2c_2 + 6c_3(x - x_0) + 12c_4(x - x_0)^2 + \dots$$

d'où, en faisant $x = x_0$: $c_2 = \frac{f''(x_0)}{2}$.

En itérant le procédé, on obtient :

$$\frac{f'''(x_0)}{6} = c_3, \dots, \frac{f^n(x_0)}{n!} = c_n, \dots$$

On a donc, au voisinage de x_0 , le développement suivant pour la fonction f :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$

$$+ \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots$$

dit développement en série de Taylor.

Remarque :

Pour être acceptable comme démonstration, il reste à prouver que la dérivation terme à terme est légitime.

1.2 Principaux développements limités

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \text{ pour tout } x \in R.$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \text{ pour tout } x$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \text{ pour tout } x$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots +$$

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-p+1)}{p!} x^p + \dots \text{ pour } |x| < 1$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots +$$

$$(-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \text{ pour } |x| < 1$$

$$\operatorname{Arc tg} x =$$

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \text{ pour } |x| < 1$$

2. Équations de quelques courbes classiques

2.1 Équations de la forme $y = f(x)$

- Cubique serpentine $y = \frac{5x}{1+x^2}$ (Huygens XVII^c).
- chaînette d'égale résistance $y = \log \frac{1}{\cos x}$ (XIX^c).
- Courbe en cloche $y = e^{-x^2}$ (Gauss, XIX^c).
- Sinusoïde amortie $y = e^{-x/2} \sin x$.

2.2 Courbes définies paramétriquement

- Quartique piriforme (Wallis XVII^e) :
 $x = 2 \cos^2 t, y = \cos^3 t \sin t.$
- Hypocycloïde à 4 pointes (Jean Bernouilli XVII^e) :
 $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t.$
- Hypocycloïde à 3 pointes :
 $x = 2 \cos t + \cos 2t, y = 2 \sin t - \sin 2t.$
- Trochoïde : $x = 2t - 3 \sin t, y = 2 - 3 \cos t.$
- Cycloïde (Pascal XVII^e) :
 $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t.$
- Cercle : $x = \cos t, y = \sin t.$
- Ellipse : $x = 2 \cos t, y = \sin t.$

2.3 Courbes définies par des coordonnées polaires

- Limaçon de Pascal (XVII^e Roberval) : $r = 2 \cos t + 1.$
- Cardioïde (XVIII^e Castillon) : $r = 1 + \cos t.$
- Folium simple (XVII^e Viviani) : $r = \cos^3 t.$
- Bifolium : $r = \cos^2 t (\cos t + 4 \sin t).$
- Le scarabée (XIX^e, Laurent) : $r = 2 \cos 2t - \cos t.$
- Rosace à 4 branches (XVIII^e) : $r = \sin 2t.$
- Spirale d'Archimède (III^e av. J.-C.) : $r = t.$
- Spirale de Galilée (Fermat XVII^e) : $r = 1 - 0,013 t^2.$
- Cœchléoïde (XIX^e) : $r = \frac{\sin t}{t}$
- Courbe en 8 : $r = \sin t.$

3. Bibliographie (restreinte)

- J. Dixmier, *Mathématiques du 1^{er} cycle*. Gauthier-Villars (Paris).
- J. Dieudonné, *Eléments d'analyse*. Gauthier-Villars (Paris).
- R. Godement, *Cours d'algèbre*, Hermann (Paris).
- H. Ventsel, *Théorie des probabilités*, Editions MIR (Moscou).

- N. Piskounov. *Calcul différentiel et intégral*, Editions Mir (Moscou).
- N. Bakhvalov. *Méthodes numériques*, Editions Mir.
- V. Voïevodine. *Principes numériques d'algèbre linéaire*, Editions Mir.
- Revue du palais de la Découverte. *Courbes mathématiques*.

23. Courbes définies

- *Sur les coordonnées polaires*
- *Équation de l'ellipse*: $x = 5 \cos \vartheta$; $y = 5 \sin \vartheta$
- *Équation de l'hyperbole*: $x = 5 \cos \vartheta + 1$; $y = 5 \sin \vartheta$
- *Équation de la parabole*: $x = 5 - 3 \cos \vartheta$; $y = 5 - 3 \sin \vartheta$
- *Équation de la cycloïde (Brachistochrone)*: $x = 5 - \sin \vartheta$; $y = 1 - \cos \vartheta$
- *Équation de la cardiode*: $x = \cos \vartheta$; $y = \sin \vartheta$
- *Équation de la folium de Nicomedes*: $x = \cos^3 \vartheta + 4 \sin \vartheta$; $y = \cos^3 \vartheta - 3 \sin \vartheta$
- *Équation de la lemniscate*: $x = 5 \cos 2\vartheta$; $y = 5 \sin 2\vartheta$
- *Équation de la rosace à 4 pétalures*: $x = 5 \cos 2\vartheta$; $y = 5 \sin 2\vartheta$
- *Équation de la spirale d'Archimède (Hypotrochocorde)*: $x = 5 - 0,013\vartheta$; $y = 5 \sin \vartheta$
- *Équation de la cycloïde (Hypotrochocorde)*: $x = \frac{5(1-\cos \vartheta)}{\vartheta}$; $y = \frac{5 \sin \vartheta}{\vartheta}$
- *Courbe du 8*: $x = \sin \vartheta$; $y = \cos \vartheta$

24. Hippocrateobie (rectiligne)

- T. Dixmier. *Mathématiques au 1^{er} cycle*. Gauthier-Villars (Paris).
- T. Dixmier. *Mathématiques au 1^{er} cycle*. Gauthier-Villars (Paris).
- T. Dixmier. *Éléments d'analyse*. Gauthier-Villars (Paris).
- R. Godement. *Cours d'algèbre*. Hermann (Paris).
- H. Arnoux. *Algèbre des droites et droiguoïdes*. Éditions MIR (Moscou).

MAITRISEZ VOTRE ZX 81

Après vous avoir fait partager son apprentissage du Basic dans « Pilotez votre ZX 81 », Patrick Gueulle vous propose de découvrir la **programmation 16 K** et la **programmation en langage machine**.

L'assembleur Z 80 permet, grâce aux fonctions **PEEK**, **POKE** et **USR**, d'écrire des programmes extrêmement rapides, très peu encombrants et ouvrant la porte à des fonctions nouvelles telles que **les interfaces** auxquelles un chapitre entier est consacré.

P. GUEULLE

Principaux chapitres :

- Programmation avec le module 16 K
- Explorez la mémoire de la machine
- Les interfaces : introduction au langage machine
- Initiation au langage machine du ZX 81
- Du Basic au langage machine
- Jeu d'instructions machine du ZX 81.



Un livre de 160 pages,
format 15 X 21 cm

Edité par :

EDITIONS TECHNIQUES ET SCIENTIFIQUES FRANÇAISES

2 à 12, rue de Bellevue - 75940 PARIS CEDEX 19



Un livre de 128 pages,
format 11,7 X 16,5 cm

50 PROGRAMMES POUR ZX 81

Utiles ou divertissants, les programmes qui sont rassemblés dans cet ouvrage sont originaux et utilisent au mieux toutes les fonctions du ZX 81. Ils sont tous écrits pour la version de base avec **mémoire RAM de 1 K**. Loin d'être limités, ils constituent au contraire un **exercice très profitable** pour apprendre à ne pas dépasser la place mémoire disponible.

Votre propre imagination et quelques idées glanées dans ces lignes vous permettront de créer très rapidement des programmes personnels.

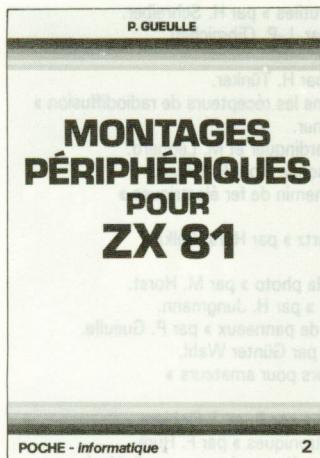
Quelques programmes :

- Aide à la programmation
- Conversion de température
- Conversion décimal en binaire
- Conversion binaire en décimal
- Calcul des intérêts
- Conjugaison
- Loto
- Billard
- Le champ de mines

Edité par :

EDITIONS TECHNIQUES ET SCIENTIFIQUES FRANÇAISES
2 à 12, rue de Bellevue - 75940 PARIS CEDEX 19

MONTAGES PERIPHERIQUES POUR ZX 81



Dans ce petit ouvrage, Patrick Gueulle vous propose de construire vous-même des accessoires et périphériques choisis pour leur utilité pratique. Il vous donne également une sélection de logiciels écrits en Basic et en langage machine qu'il vous suffira de frapper au clavier pour doter le ZX 81 de possibilités parfois insoupçonnées.

Un livre de 128 pages,
format 11,7 X 16,5 cm

Quelques exemples :

- un clavier pas comme les autres
- un écran plus grand
- problèmes d'enregistrement automatique
- lecture de cassettes empruntées ou préenregistrées
- alimentations pour toutes circonstances
- comment éviter les « trous de mémoire » du ZX 81
- une carte d'entrée-sortie par les prises cassette
- une horloge temps réel
- routine de remplissage d'écran
- sous-programme pour « bordures »
- conseils d'assemblage et de dépannage, etc.

Édité par :

EDITIONS TECHNIQUES ET SCIENTIFIQUES FRANÇAISES

2 à 12, rue de Bellevue - 75940 PARIS CEDEX 19

DANS LA COLLECTION TECHNIQUE POCHE

- N° 1. « 30 montages électroniques d'alarme » par F. Juster.
N° 3. « 20 montages expérimentaux optoélectroniques » par G. Blaise.
N° 4. « Initiation à la microinformatique : le microprocesseur » par P. Melusson.
N° 5. « Montages électroniques divertissants et utiles » par H. Schreiber.
N° 6. « Montages à capteurs photosensibles » par J.-P. Oehmichen.
N° 7. « Les égaliseurs graphiques » par F. Juster.
N° 8. « Pianos électroniques et synthétiseurs » par H. Tünker.
N° 9. « Recherches méthodiques des pannes dans les récepteurs de radiodiffusion » par Dr Adolf Renardy et Ing. Heinz Lummer.
N° 10. « Les enceintes acoustiques » par P. Hemardinquer et M. Léonard.
N° 11. « Structure et fonctionnement de l'oscilloscope » par R. Rateau.
N° 12. « La construction des petits modèles de chemin de fer électriques » par J.-C. Porterie.
N° 13. « Horloges et montres électroniques à quartz » par Horst Pelka.
N° 14. « Les cellules solaires » par F. Juster.
N° 15. « L'électronique appliquée au cinéma et à la photo » par M. Horst.
N° 16. « L'électronique dans les trains miniatures » par H. Jungmann.
N° 17. « Réalisez vos circuits imprimés et décors de panneaux » par P. Gueulle.
N° 18. « Espions électroniques microminiatures » par Günter Wahl.
N° 19. « La construction des petits transformateurs pour amateurs » par Marthe Douriau et F. Juster.
N° 20. « Réalisations à transistors - 20 montages » par B. et J. Fighiera.
N° 21. « Sécurité automobile - 25 montages électroniques » par F. Huré.
N° 22. « Performances automobiles - 25 montages électroniques » par F. Huré.
N° 24. « Présence électronique contre le vol » par H. Schreiber.
N° 25. « Utilisation pratique de l'oscilloscope » par R. Rateau.
N° 26. « Les afficheurs » par J.-P. Oehmichen.
N° 27. « Réduisez votre consommation d'électricité » par P. Gueulle.
N° 28. « Initiation pratique à la radiocommande » par F. Thobois.
N° 29. « Montages économiseurs d'essence » par P. Gueulle.
N° 30. « Soyez CiBiste - Guide pratique » par J.-M. Normand.
N° 31. « Relais électromécaniques pour amateur » par E. Löchner.
N° 32. « Antennes pour CiBistes » par P. Gueulle.
N° 33. « Le microprocesseur à la carte » par H. Schreiber.
N° 34. « DéTECTEURS de trésors » par P. Gueulle.
N° 35. « Mini-espions à réaliser soi-même » par G. Wahl.
N° 36. « Emetteurs-pilotes à synthétiseur » par G.E. Gerzelka.
N° 37. « Transistors MOS de puissance » par H. Schreiber.
N° 38. « Savoir mesurer » par D. Nührmann.
N° 39. « Kits pour enceintes » par A. Cappuccio.
N° 40. « 100 pannes TV » par P. Duranton.
N° 41. « Accessoires pour CiBistes », par R. Zierl.
N° 42. « Soyez radioamateurs », par F. Mellet et S. Faurez.

ACHEVÉ D'IMPRIMER
SUR LES PRESSES DE
MAURY-IMPRIMEUR S.A.
45330 MALESHERBES

Dépôt légal : Décembre 1983
N° éditeur : 406 – N° imprimeur : L83/14086

MATHEMATIQUES SUR ZX 81 ET ZX SPECTRUM *80 programmes*

Analyse, algèbre linéaire, statistiques, probabilités... Une gamme très complète de programmes bien conçus pour le **lycén**, l'**étudiant** ou le **mathématicien**. Pour ceux qui ne possèdent ni ZX 81 ni ZX SPECTRUM, mais un autre type d'appareil, l'auteur explique la démarche qui leur permettra de programmer facilement leurs calculs.

Principaux chapitres :

- Tirage au sort et tris.
- Calculs avec les entiers.
- Suites et séries.
- Fonctions numériques.
- Représentations graphiques.
- Résolution d'une équation.
- Intégration.
- Vecteurs et matrices.
- Distributions statistiques.
- Lois de probabilités discrètes et continues.