

A maior parte dos microcomputadores dispõe actualmente de uma resolução visual e de instruções gráficas que permitem abordar a representação tridimensional.

Esta obra propõe-se, com o concurso de numerosos exemplos concretos, familiarizar o leitor com todos os aspectos do grafismo a três dimensões. A perspectiva cavaleira, a perspectiva cónica, a representação dos prismas, pirâmides, cones, cilindros, poliedros regulares, superfícies de equação $z = f(x, y)$ são alguns dos tópicos abordados ao longo dos capítulos. Os programas, muito acessíveis, foram desenvolvidos no ZX Spectrum, mas são facilmente transponíveis para muitos outros tipos de computadores.

COLEÇÃO SISTEMAS

1. A INFORMÁTICA NA ESCOLA, Manual de Utilização do ZX Spectrum (e tc 2068), *Luís de Campos*
2. GUIA DOS MICROPROCESSADORES, *E. A. Parr*
3. INICIAÇÃO À BASE DE DADOS, *François Fargette*
4. PROGRAMAÇÃO DE COMPUTADORES EM PASCAL, *David Lightfoot*
5. OS SISTEMAS OPERATIVOS, *A. M. Lister*
6. O SISTEMA OPERATIVO DO SPECTRUM ROM DISASSEMBLY, *Ian Logan e Frank O'Hara*
7. PROGRAMAÇÃO DE COMPUTADORES EM COBOL, *Melinda Fisher*
8. PROGRAMAÇÃO DE COMPUTADORES EM BASIC, *L. R. Carter e E. Huzan*
9. PROGRAMAÇÃO EM LINGUAGEM C, *R. E. Berry e B. A. E. Meekings*
10. PROGRAMAÇÃO EM BASIC MSX, *L. R. Carter e E. Huzan*
11. PROGRAMAÇÃO EM dBASE II, *René Cohen*
12. PROGRAMAÇÃO EM FORTH, *Steve Oakey*
13. GRAFISMOS A 3 DIMENSÕES, *Michel Rousselet*

EDITORIAL  PRESENÇA

13

Michel Rousselet

GRAFISMOS A 3 DIMENSÕES

Michel Rousselet



GRAFISMOS A 3 DIMENSÕES




PRESENÇA

Michel Rousselet

GRAFISMOS A 3 DIMENSÕES

EDITORIAL  PRESENÇA

AGRADECIMENTOS

Para Micheline

Desejo agradecer à SOGITEC a sua amabilidade ao autorizar-me a utilizar e reproduzir certos documentos (fotografias do primeiro capítulo).

FICHA TÉCNICA

Título original: *Graphisme 3 D*

Autor: *Michel Rousselet*

Copyright © 1985 — ETSF

Tradução: © 1986, Lisboa, Editorial Presença, Lda.

Tradutor: *Eduardo Nogueira*

Capa: *António Marques*

Fotocomposição: *Textype — Lisboa*

Impressão e Acabamento: *Tipografia Guerra — Viseu*

1.ª edição, Lisboa, 1986

Reservados todos os direitos
para a língua portuguesa à
EDITORIAL PRESENÇA, LDA.
Rua Augusto Gil, 35-A 1000 Lisboa

Os programas apresentados nesta obra deverão permitir, espero, ao leitor não especialista iniciar-se em diferentes aspectos do grafismo a três dimensões: representação de objectos usuais em perspectiva, eliminação das partes escondidas à vista, visualização de superfícies diversas, etc.

Realizado em Basic ZX Spectrum, cada um destes programas utiliza apenas duas instruções gráficas: PLOT e DRAW.

Para traçar um segmento de extremidades $M_1 = (x_1, y_1)$ e $M_2 = (x_2, y_2)$ faz-se:

PLOT X1,Y1 : DRAW X2-X1, Y2-Y1

Para passar estes programas para outro microcomputador, bastará substituir estas duas instruções pelos seus equivalentes.

Faremos por exemplo:

- LINE (X1,Y1) — (X2,Y2) em M05 e TO 7/70
- CURSET X1,Y1 : DRAW X2-X1, Y2-Y1 em Oric-Atmos
- PLOT X1,Y1 : DRAW X2,Y2 , ou ainda
PLOT X1,Y1 : DRAWR X2-X1, Y2-Y1 no Amstrad
- HLINE (X1,Y1) TO (X2,Y2) no Apple II E.

Algumas outras alterações se tornarão sem dúvida necessárias: Escrever Sin (x) em vez de Sin x, suprimir a instrução LET, ter em conta uma resolução gráfica diferente, etc.

Como se vê, nada verdadeiramente difícil.

Os conhecimentos matemáticos necessários à leitura desta obra não são de nível elevado. As funções trigonométricas habituais, uma boa familiarização com as coordenadas cartesianas, a manipulação elementar dos vectores deverão bastar. Todas as outras noções utilizadas — produto vectorial, produto escalar, bases — são explicadas ao longo da obra.

Devido à lentidão da Basic, certos aspectos do grafismo a três dimensões não foram aqui abordados. A *animação* necessita de 24 imagens por segundo e pressupõe portanto o recurso a uma linguagem assembly.

A coloração de superfícies, o desenho de sombras, a obtenção de texturas e de transparências exigem demasiadas operações para serem consideradas num microcomputador de tipo familiar. Talvez mais tarde, quando dispusermos de 32 bits . . .

GENERALIDADES SOBRE GRAFISMOS A TRÊS DIMENSÕES

A expressão «grafismos a três dimensões» designa o conjunto de métodos que permitem criar, graças a meios informáticos, vistas em perspectiva dos objectos mais diversos.

Distinguem-se principalmente dois tipos de imagens 3D:

- As *imagens de arame* utilizadas em CAD (Concepção auxiliada por computador). O objecto a representar é esquematizado por uma superfície poliédrica de que se desenham apenas as arestas (figuras 1 e 2).

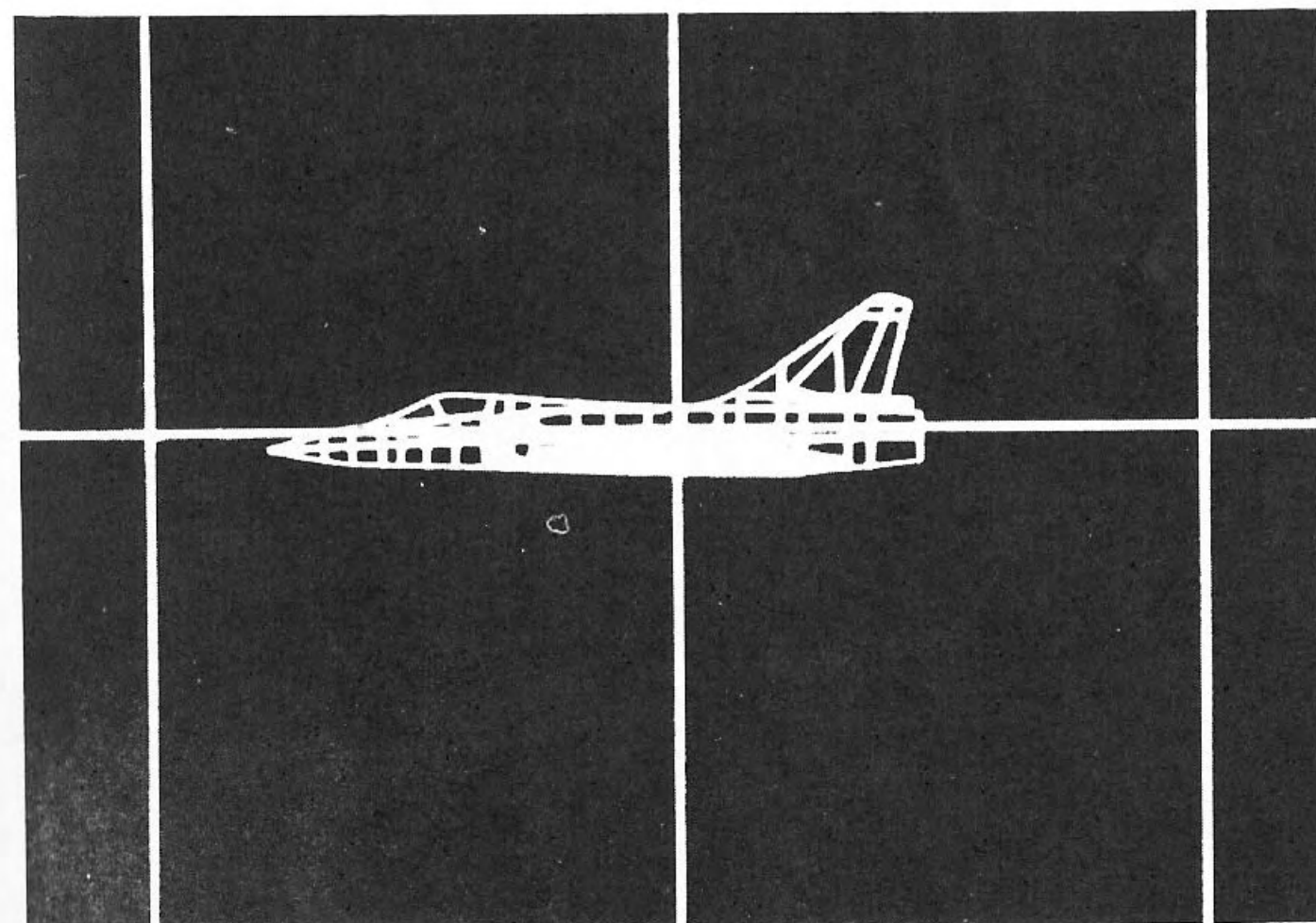


Fig. 1

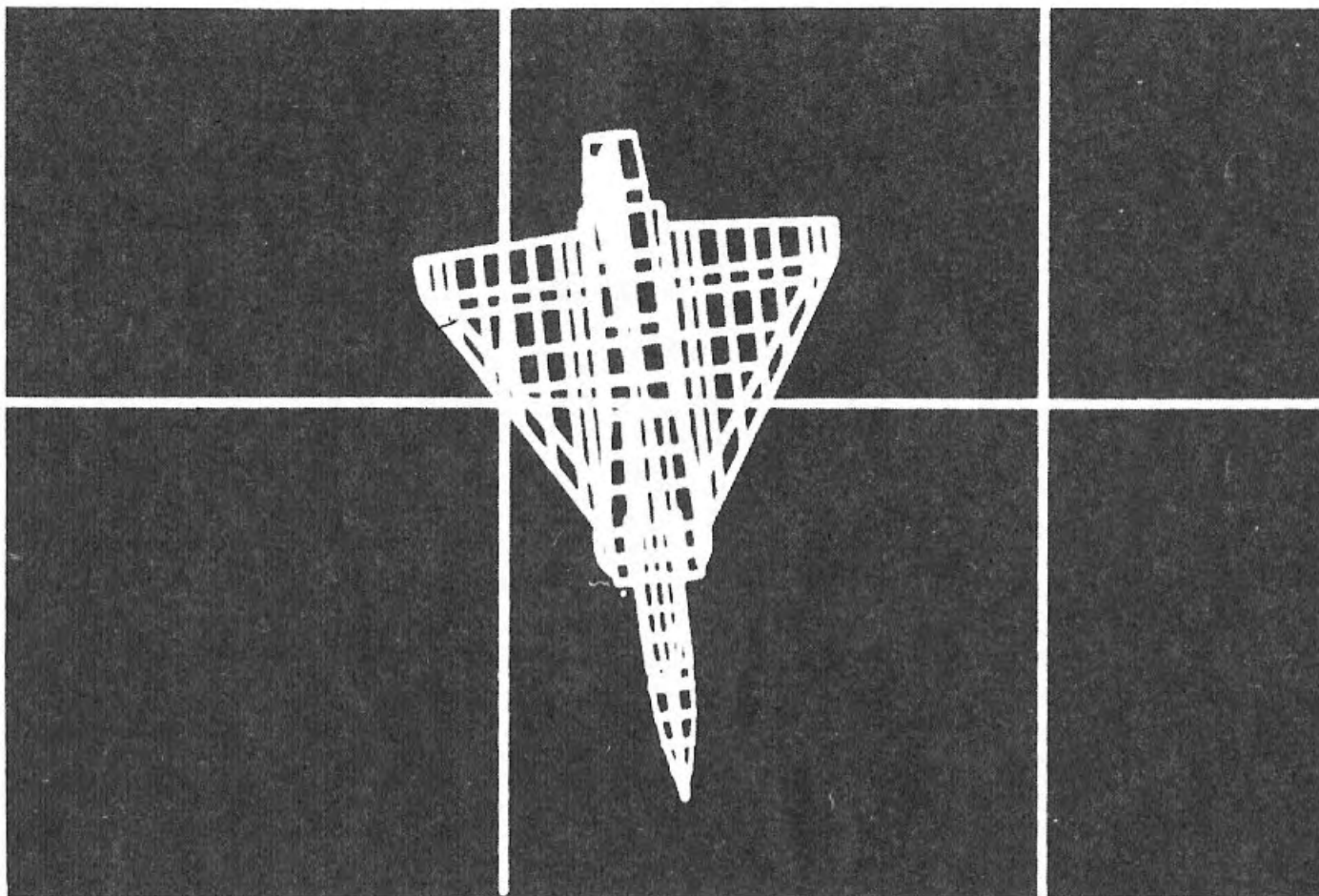


Fig. 2

A este tipo de imagem ligam-se também as representações de superfícies matemáticas (fig. 3).

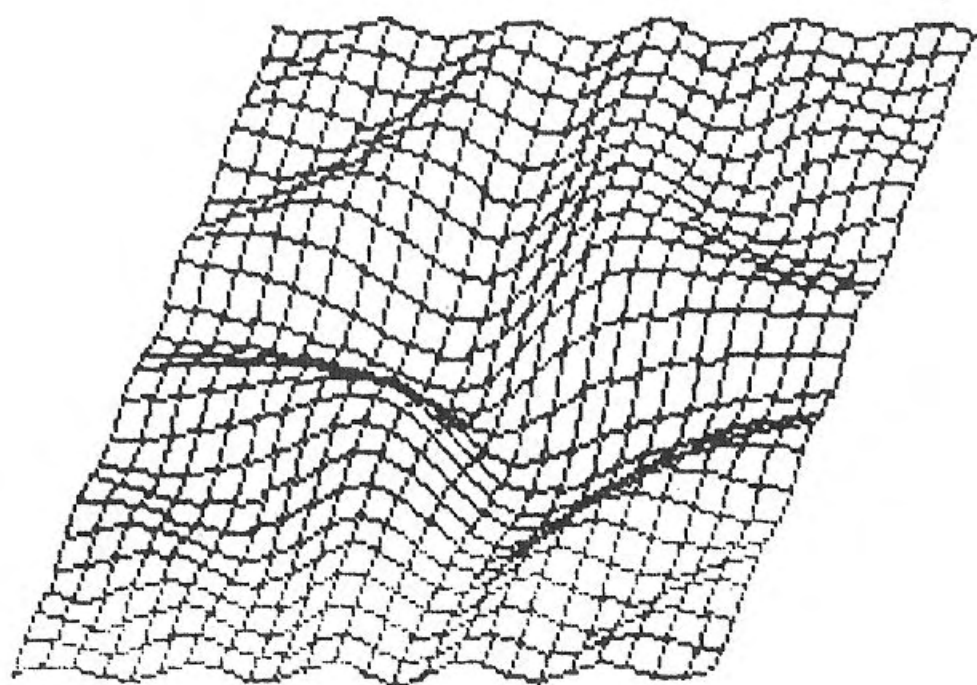


Fig. 3

— As *imagens de síntese* apresentam um carácter realista muito mais completo (figuras 4, 5, 6, 7).

A criação de uma imagem tridimensional é um processo longo e complexo que engloba três etapas:

- descrição numérica do objecto a representar;
- cálculo da imagem;
- produção dessa imagem num terminal gráfico.

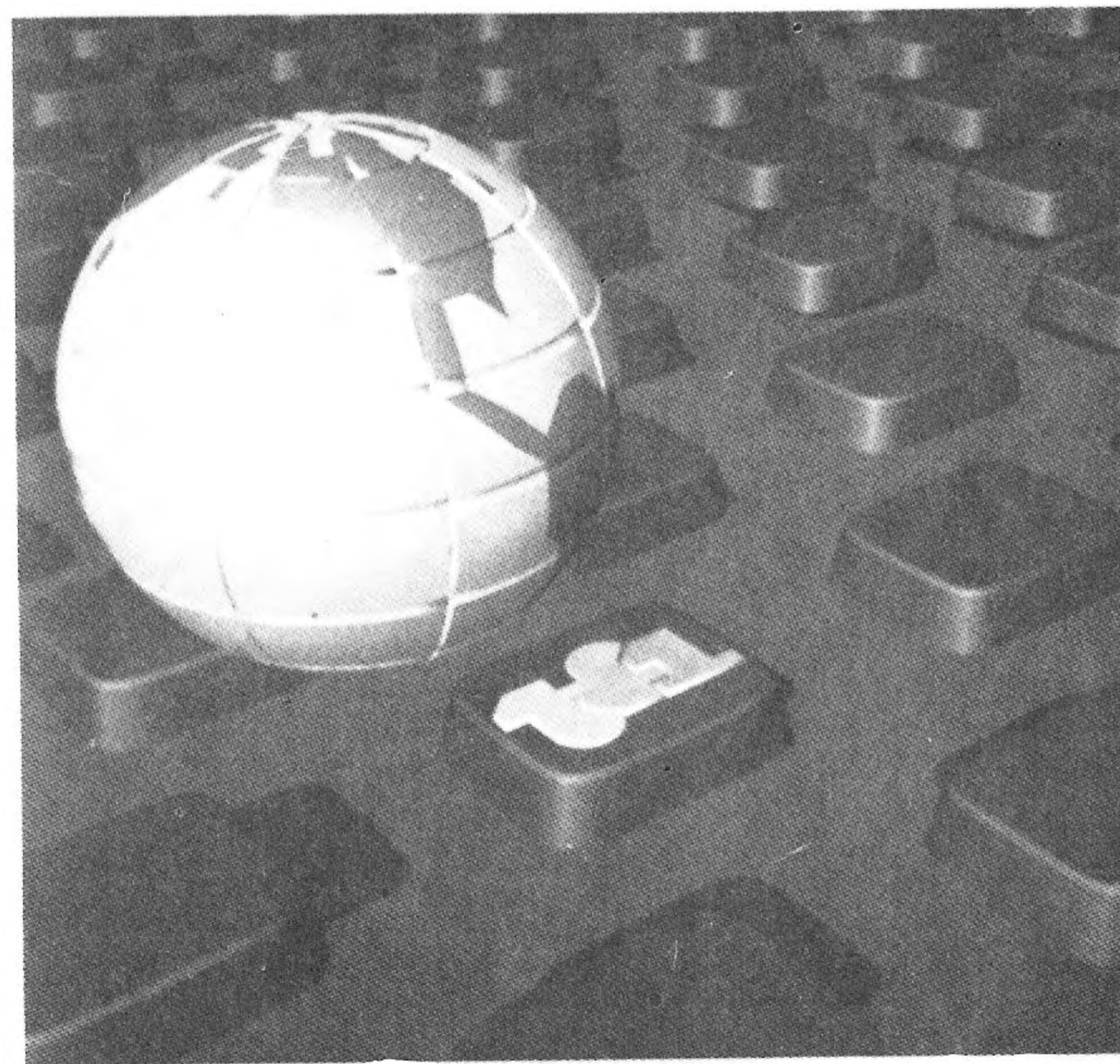


Fig. 4

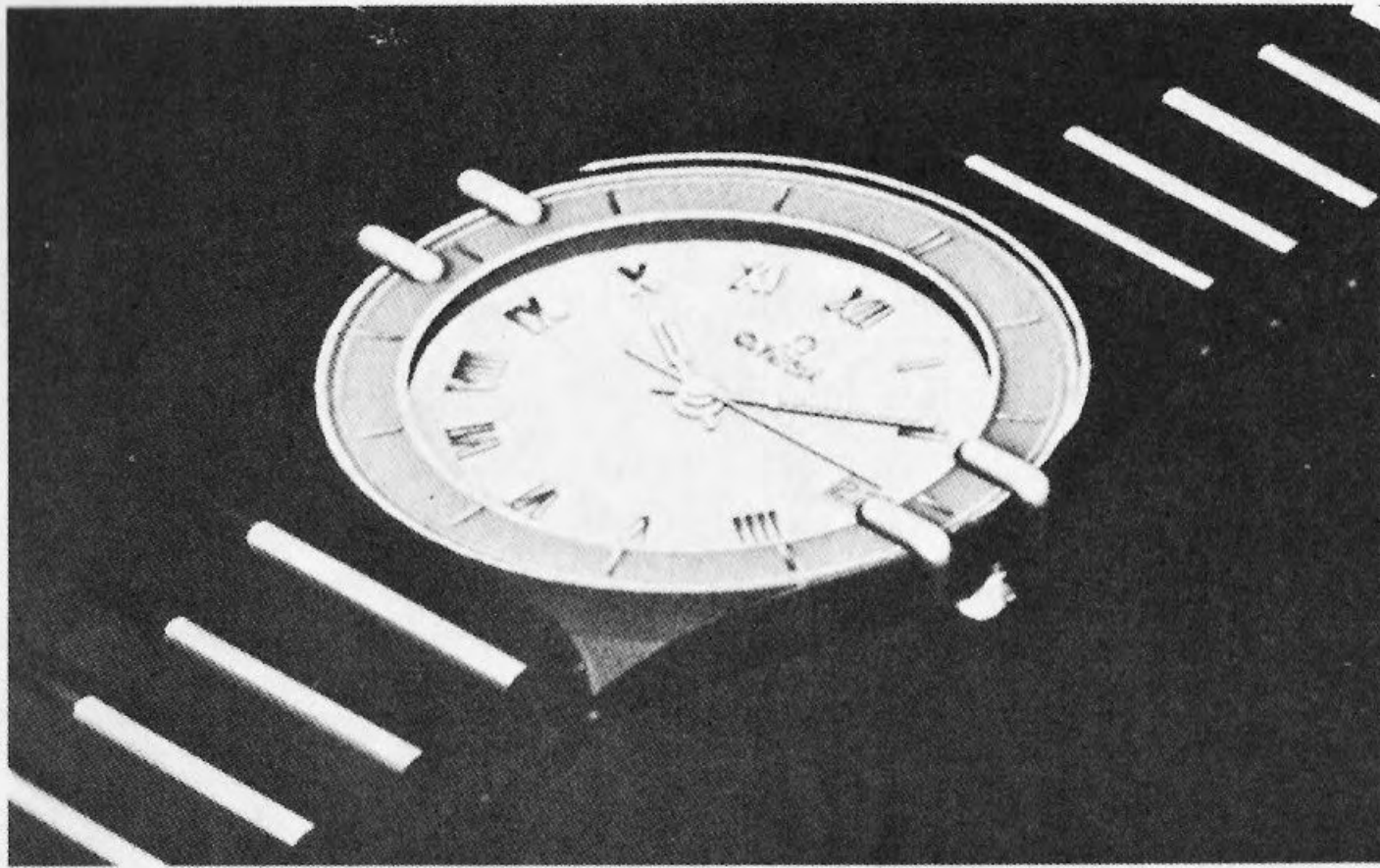


Fig. 5

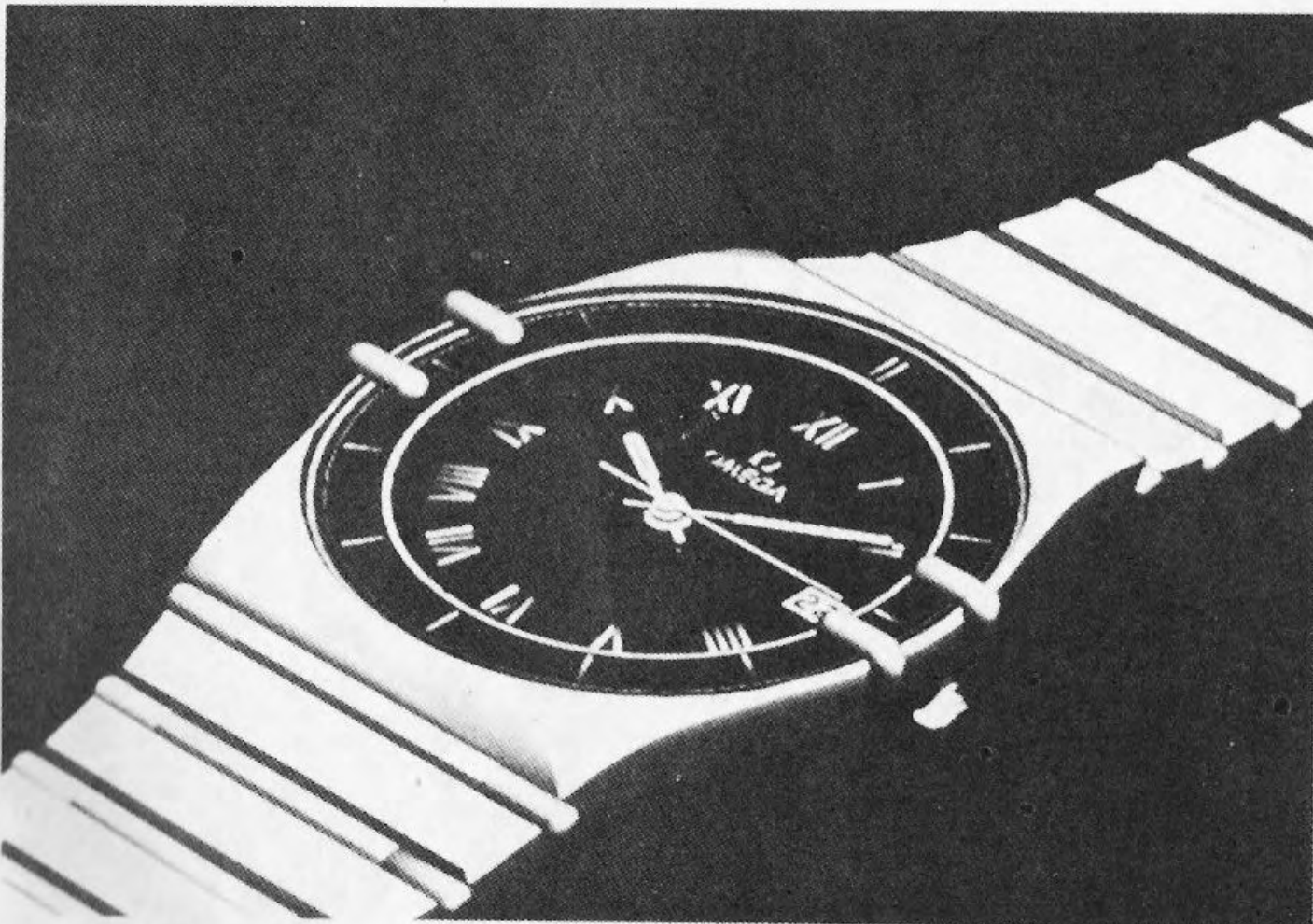


Fig. 6

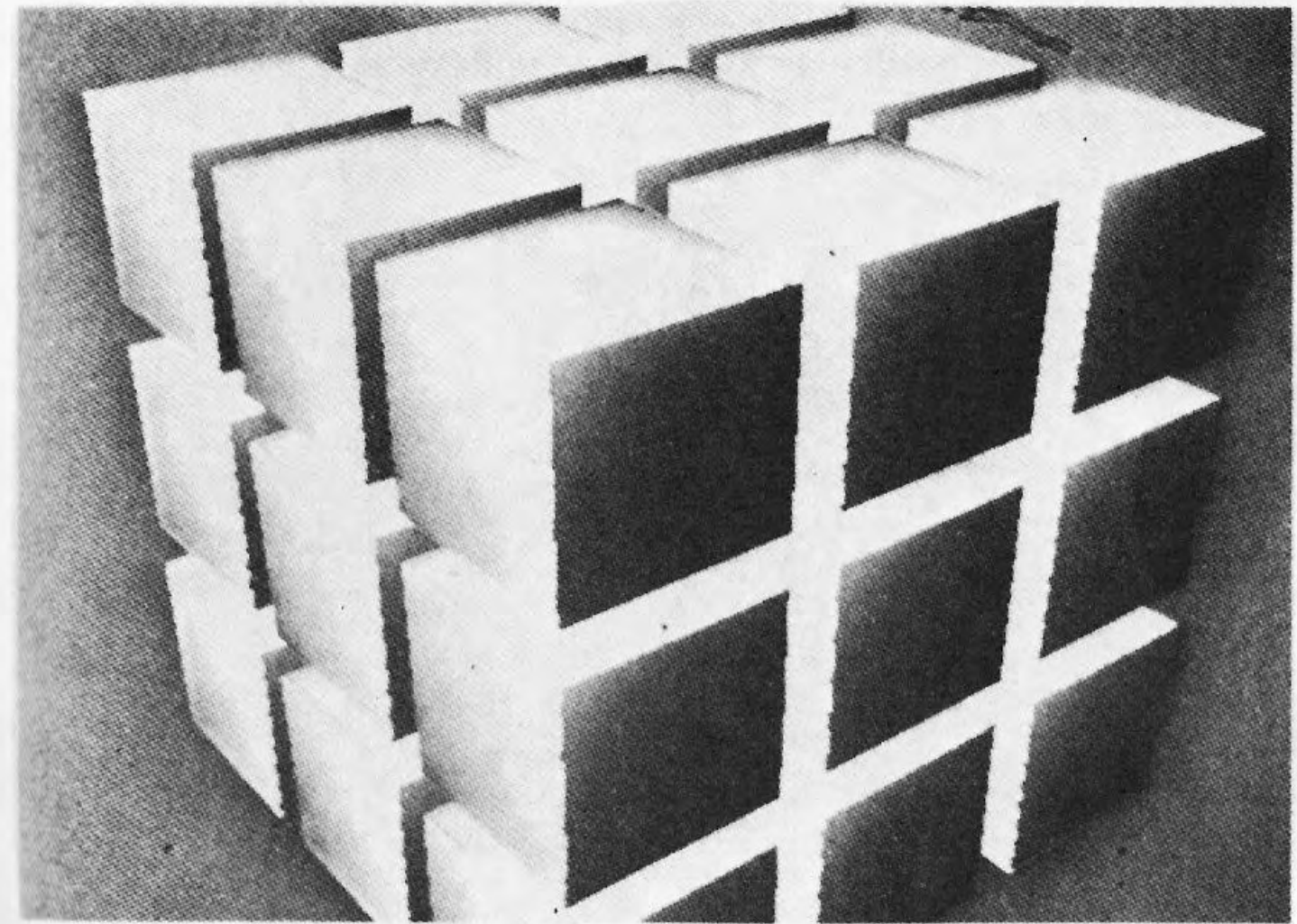


Fig. 7

1 Descrição de um objecto

Para dar uma imagem a três dimensões de um objecto qualquer, é necessário realizar uma maquete numérica desse objecto. Os dados necessários serão de dois tipos: os dados geométricos e os dados de cor.

1. Os dados geométricos

Estes dados permitem definir a forma do objecto, a posição do observador, o ângulo do campo de visão, etc.

Utiliza-se a geometria analítica: um ponto do espaço é representado por três coordenadas, uma recta por uma representação paramétrica, um plano por uma equação.

As superfícies mais complexas são decompostas em superfícies elementares, em geral triângulos ou quadriláteros (figura 8).

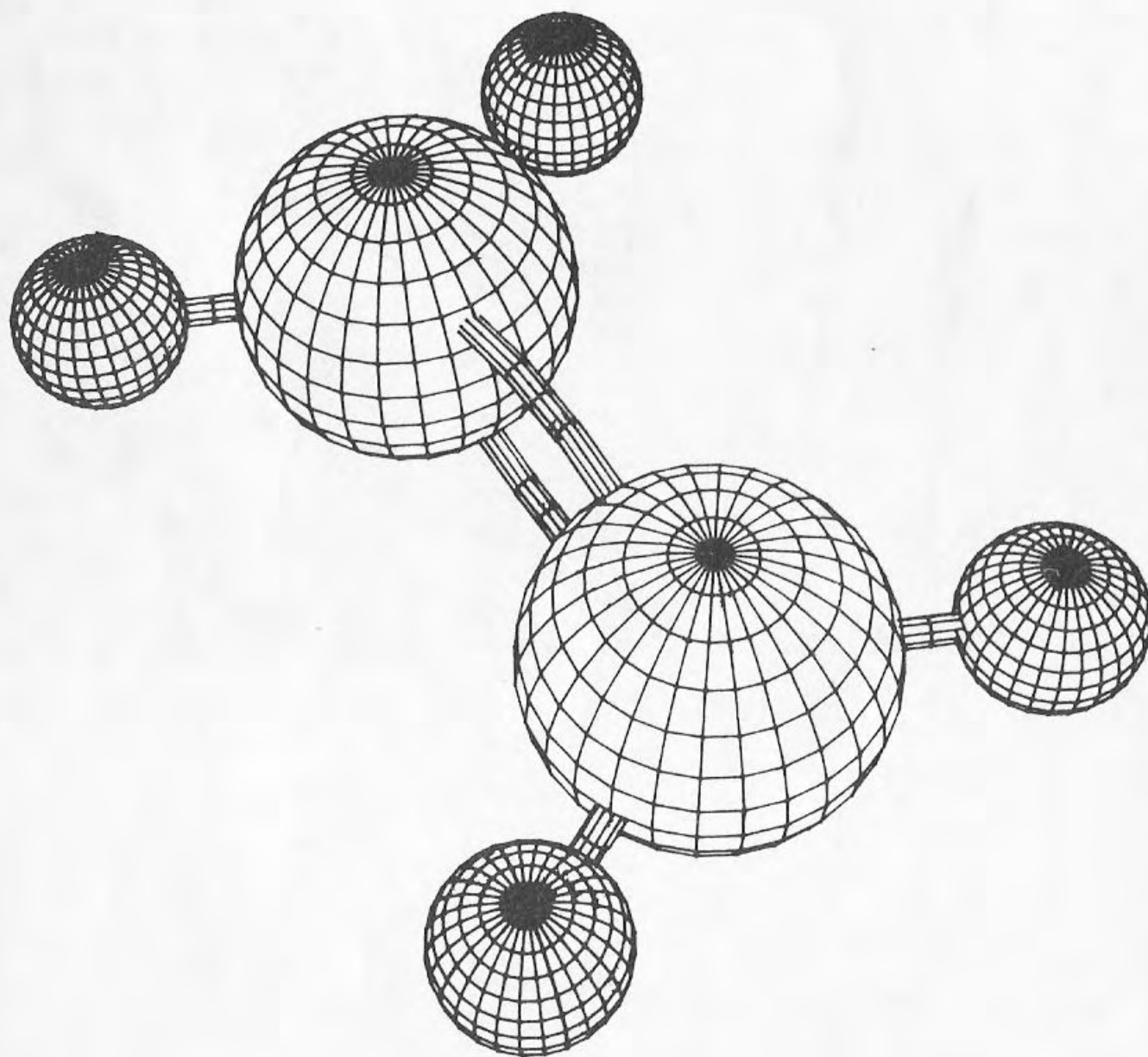


Fig. 8. — Representação «em arame» de uma molécula de etileno (C_2H_4).
(Doc. SOGITEC).

2. As coordenadas de cor

Referem-se ao aspecto das superfícies. Procura-se simular a textura dos materiais, os reflexos, as transparências, as sombras projetadas e, naturalmente, as cores propriamente ditas.

Na figura 9 mostra-se uma simulação de reflexos.

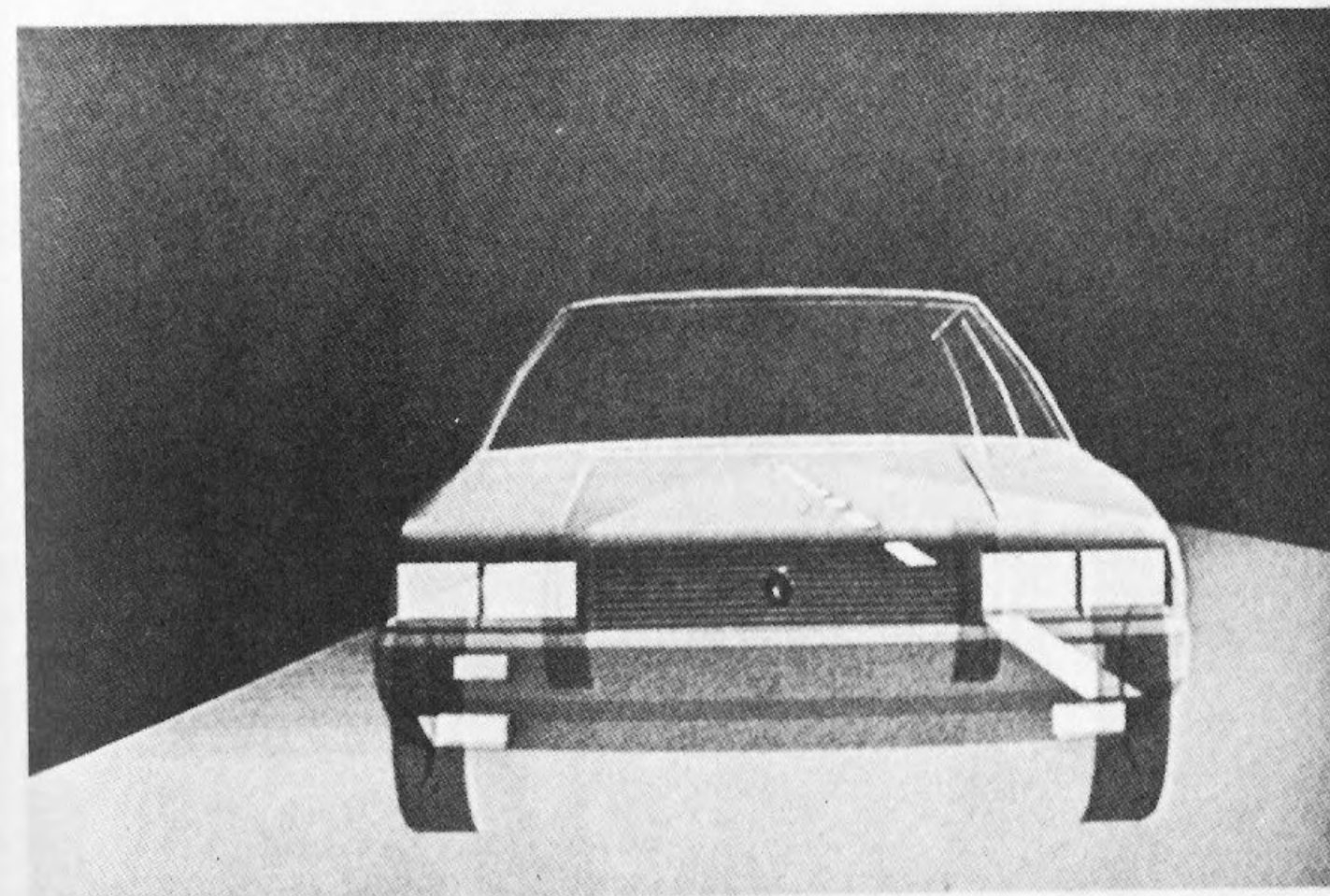


Fig. 9

2 O cálculo de uma imagem

Este cálculo é efectuado em duas etapas.

1. Primeira etapa

A primeira etapa consiste em calcular a perspectiva do objecto. Trata-se de associar a cada ponto (x, y, z) do espaço um ponto (u, v) de um plano de projecção anteriormente escolhido.

São possíveis diversas soluções. Pode-se até simular uma objectiva fotográfica de tipo «olho de peixe», ou deformações de qualquer tipo na geometria da imagem.

2. Segunda etapa

Na segunda parte do cálculo, procede-se à coloração das diferentes superfícies em função dos dados de cores, assim como à eliminação das partes escondidas do objecto.

3 Produção da imagem

Uma vez calculada a imagem, resta ainda efectuar três operações:

- Corte do objecto;
- Enquadramento;
- Traçado propriamente dito.

1. Corte da imagem

Conforme a posição do observador, certas partes do objecto encontram-se situadas fora do seu campo de visão.

Nem todas as partes calculadas se encontram portanto numa posição visível, sendo então necessário *cortar* a imagem.

2. Enquadramento

Todos os pontos do objecto são conhecidos pelas suas coordenadas no plano de projecção. Normalmente, é necessário ampliar ou reduzir as dimensões desta imagem, de modo a adaptá-la ao tamanho do visor. Esta operação será designada por «enquadramento» da imagem.

3. Desenho do objecto

A duração desta última operação pode ser extremamente variável conforme se desenha ou não ponto a ponto, ou se dê cor aos objectos ou não.

4 Acção sobre a imagem

Para que uma imagem se apresente a três dimensões, não basta que restitua de maneira conveniente a profundidade e o relevo; é também necessário poder transformá-la de maneira interactiva.

A partir do teclado, deve poder efectuar-se três tipos de manipulações:

1. Deve poder alterar-se as condições em que é visto o objecto representado: posição do observador, condições de iluminação e visibilidade, etc.
2. Deve poder modificar-se a posição do objecto utilizando diferentes tipos de deslocamentos, principalmente translações

e rotações. Assim, a figura 10 representa, após deslocamento, o mesmo objecto da figura 9.

3. Pode igualmente modificar-se a coloração das superfícies, utilizando mesmo cores «falsas».

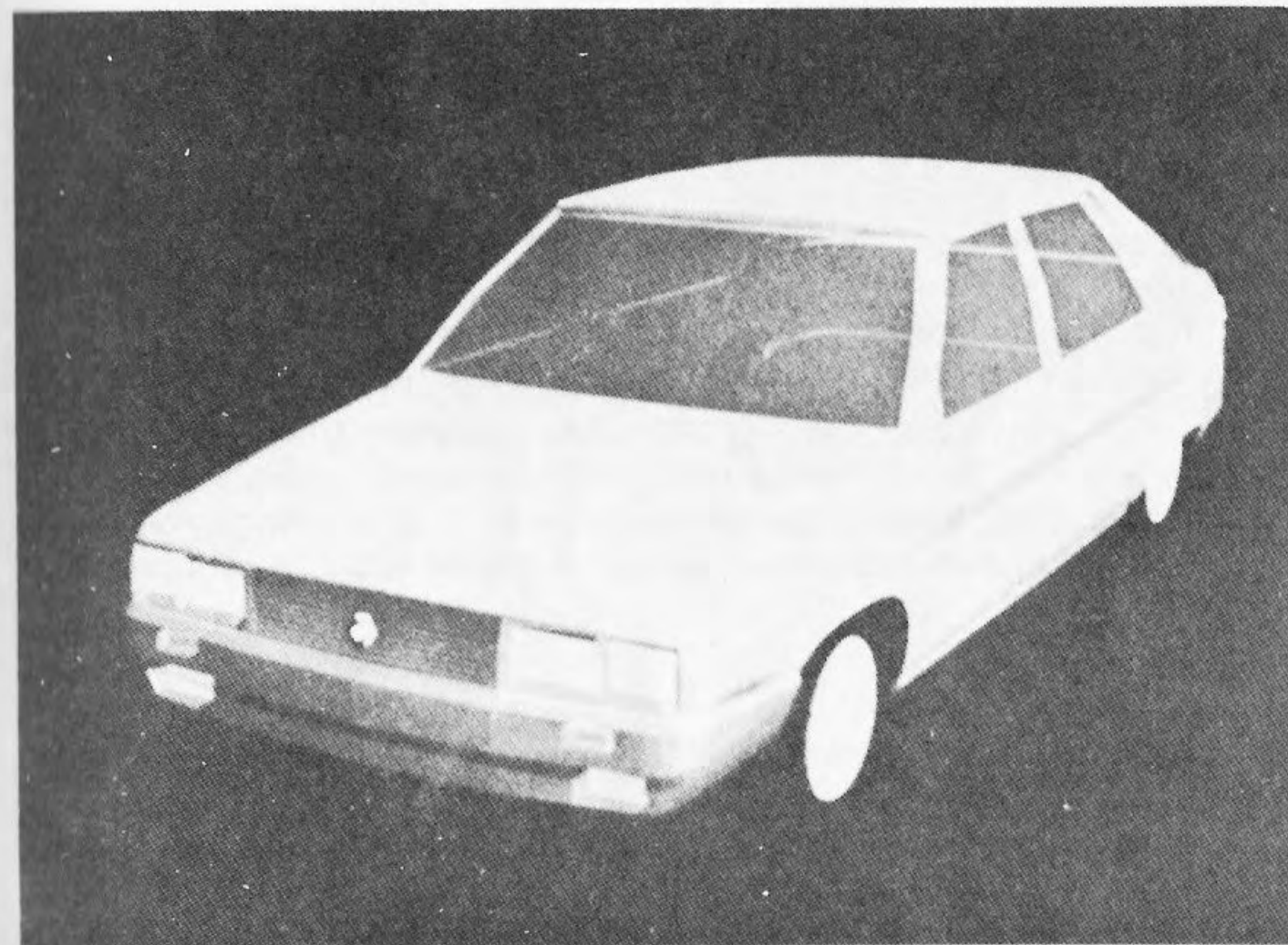


Fig. 10

5 O material

Para produzir imagens de síntese, uma empresa como a Sogitec francesa utiliza um gerador de imagens composto por dois computadores.

O primeiro é uma máquina de uso geral com 512 Kbytes de memória RAM, utilizando um disco de 80 Mbytes.

O segundo é uma máquina de cálculo rápido.

Este conjunto permite criar imagens com 16 milhões de tonalidades, ou tratar 20 000 faces para proceder à eliminação das partes escondidas. O tempo de cálculo das imagens depende da sua complexidade e varia entre alguns minutos e várias horas.

Depois de calculadas, as imagens são transferidas para uma memória numérica e restituídas à cadência de 25 imagens por segundo.

COORDENADAS CARTESIANAS — VECTORES

O espaço físico é descrito como um conjunto de pontos.

A escolha de um referencial apropriado permite definir a posição de um ponto qualquer graças a três coordenadas.

A qualquer par de pontos (A, B) pode-se sempre associar um vector que será denotado por \vec{AB} : esta possibilidade transforma o cálculo vectorial num instrumento particularmente cómodo.

Neste capítulo, vamos portanto proceder à apresentação de algumas regras fundamentais relativas à referenciais, bases e operações sobre vectores.

1 Coordenadas cartesianas

1. Consideremos, no espaço, três rectas graduadas com a mesma origem 0, perpendiculares entre si (figura 1).

Estas três rectas graduadas formam um referencial cartesiano ortogonal; o ponto 0 é a origem do referencial.

Se as graduações forem as mesmas em cada um dos eixos do referencial, este é ortonormado.

2. Qualquer ponto do espaço é caracterizado pelas suas coordenadas: a abcissa x, a profundidade y e a altitude (ou cota) z.

3. Existem duas maneiras diferentes de orientar um referencial ortonormado: pode-se escolher o sentido directo ou o sentido retrógrado.

Para diferenciar estas duas orientações possíveis, é prático recorrer a um observador colocado ao longo do eixo OZ, com os pés em O e a cabeça na direcção Z. Este observador olha na direcção OX.

Se vê o eixo OY para a sua esquerda, o referencial é considerado no sentido directo (figura 2).

Se vê o eixo OY para a sua direita, o referencial é considerado no sentido retrógrado (figura 3).

4. Ao longo deste livro utilizar-se-ão sempre referenciais no sentido directo.

Por convenção, o eixo OZ designará sempre o eixo vertical.

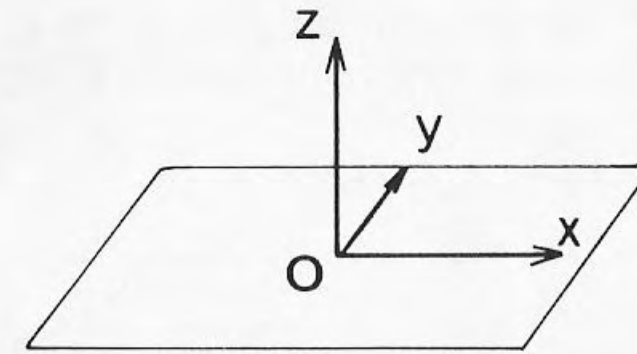


Fig. 1

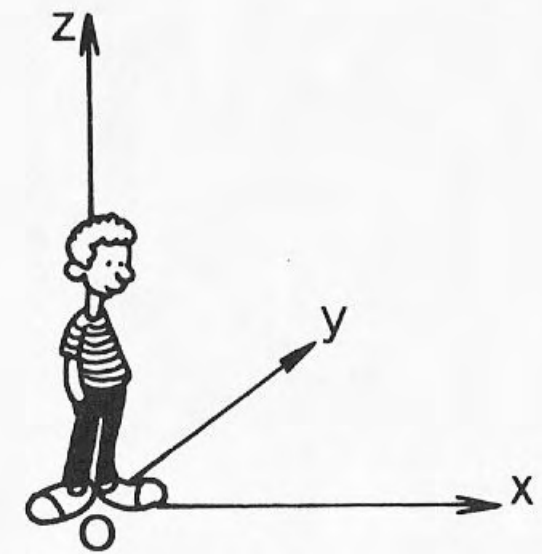


Fig. 2

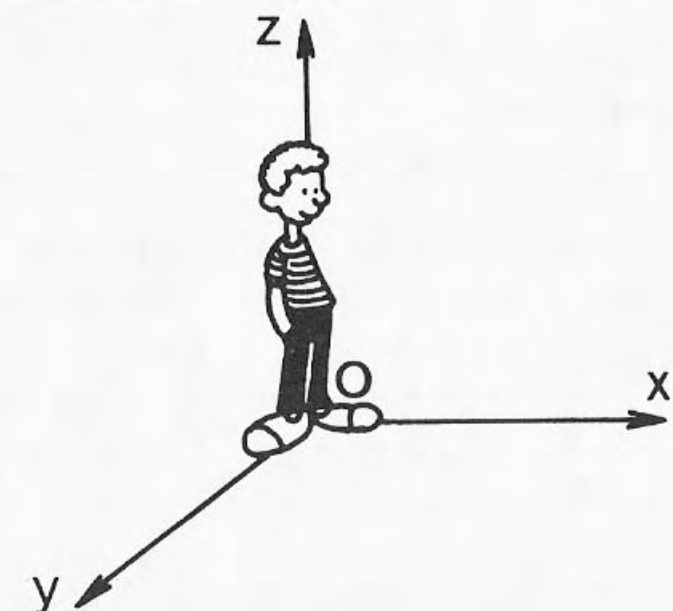


Fig. 3

2 Bases ortonormadas

1. Seja $OXYZ$ um referencial ortonormado e sejam A , B e C os pontos marcados 1 em cada um dos eixos (figura 4).

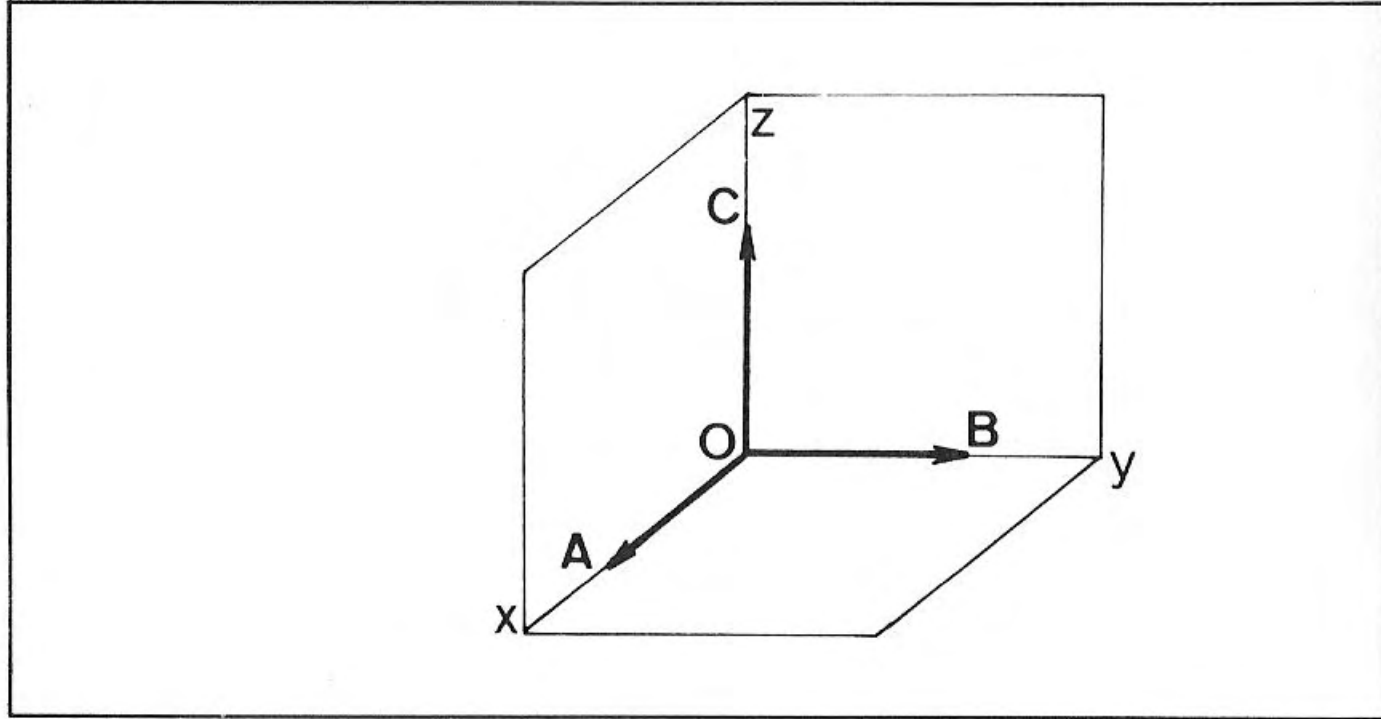


Fig. 4

Os vectores \vec{OA} , \vec{OB} e \vec{OC} têm um comprimento unitário: são vectores unitários.

Façamos $\vec{OA} = \vec{i}$, $\vec{OB} = \vec{j}$ e $\vec{OC} = \vec{k}$; diremos que os três vectores \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} formam uma base ortonormada do espaço.

2. Sendo o espaço organizado relativamente a um referencial ortonormado $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, seja $M = (x, y, z)$ um ponto qualquer. Chamemos m à projecção ortogonal de M sobre o plano OXY , H à projecção ortogonal de m sobre o eixo OX e K à projecção ortogonal de m sobre o eixo OY .

Na figura 5 vê-se facilmente que $\vec{OM} = \vec{Om} + \vec{mM} = \vec{OH} + \vec{OK} + \vec{OL}$.

Como $\vec{OH} = x\vec{i}$, $\vec{OK} = y\vec{j}$ e $\vec{OL} = z\vec{k}$, obtemos

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

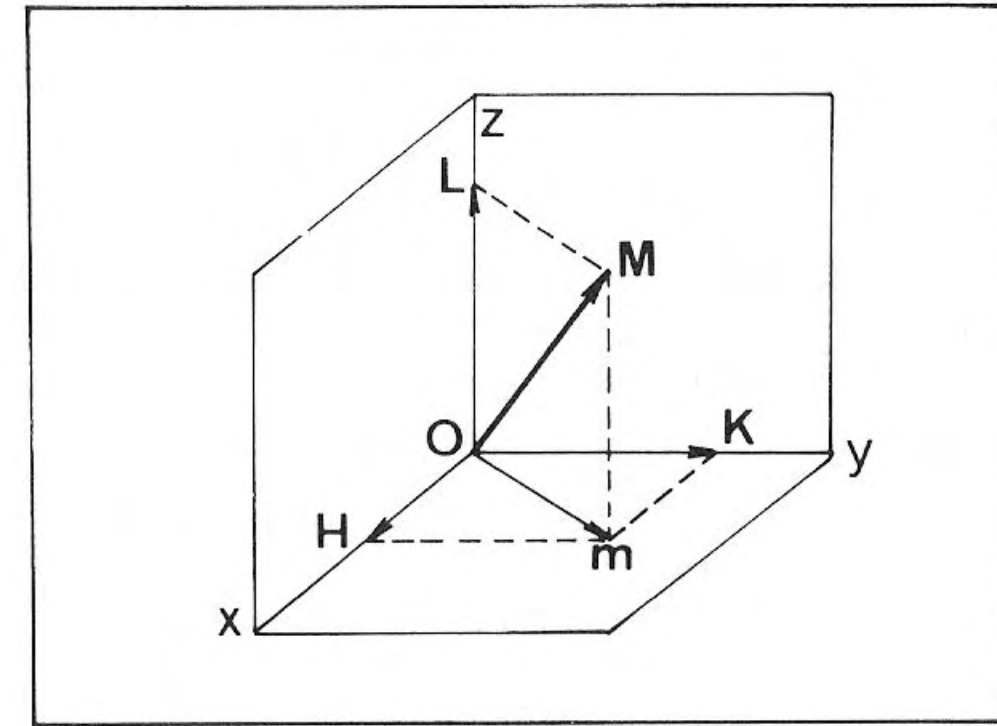


Fig. 5

3 Coordenadas e norma de um vector

1. Seja $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ um referencial ortonormado e sejam

$$A = (x_A, y_A, z_A)$$

e

$$B = (x_B, y_B, z_B)$$

dois pontos quaisquer.

Podemos escrever

$$\vec{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$$

Os três números $x_B - x_A$, $y_B - y_A$ e $z_B - z_A$ são as coordenadas do vector \vec{AB} relativamente à base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

2. A distância entre o ponto A e o ponto B é igual a

$$\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Este número representa a *norma* do vector \vec{AB} , indicada por $\|\vec{AB}\|$.

4 Produto escalar

1. Seja $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ um referencial ortonormado e sejam \vec{u} e \vec{v} dois vectores de coordenadas respectivas u_x, u_y, u_z , e v_x, v_y, v_z .

O produto escalar destes dois vectores é o número dado por

$$u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$

Este número é indicado por $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

2. Sejam \vec{u} e \vec{v} dois vectores não nulos. Sejam A, B e C três pontos tais que

$$\vec{AB} = \vec{u}$$

e

$$\vec{AC} = \vec{v}$$

Os vectores \vec{u} e \vec{v} são ortogonais se as rectas (A, B) e (A, C) forem perpendiculares.

Demonstra-se que dois vectores não nulos são ortogonais se e apenas se o seu produto escalar é nulo.

3. O produto escalar de dois vectores tem as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \vec{v} \cdot \vec{u} \\ \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \end{aligned}$$

5 Produto vectorial

1. Sejam \vec{u} e \vec{v} dois vectores quaisquer. Escolhamos três pontos A, B e C de modo que $\vec{AB} = \vec{u}$ e $\vec{AC} = \vec{v}$.

Podemos associar a \vec{u} e a \vec{v} um vector indicado por $\vec{u} \wedge \vec{v}$ e designado por produto vectorial de \vec{u} por \vec{v} .

Se um dos vectores é nulo, será $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

Se os pontos A, B e C se encontram alinhados, os vectores \vec{u} e \vec{v} são ditos colineares, considerando-se então $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

Se os vectores \vec{u} e \vec{v} não são nulos nem colineares, os pontos A, B e C determinam um plano (figura 6).

$\vec{u} \wedge \vec{v}$ é igual neste caso ao vector $\vec{W} = \vec{AD}$ definido pelas três propriedades seguintes:

- A recta (A, D) é perpendicular ao plano (A, B, C);
- Um observador colocado ao longo desta recta, com os pés em A e a cabeça em D, vê \vec{AC} à sua esquerda quando olha na direcção de \vec{AB} .
- A norma de \vec{AD} é $\|\vec{AB}\| \|\vec{AC}\| \sin \alpha$.

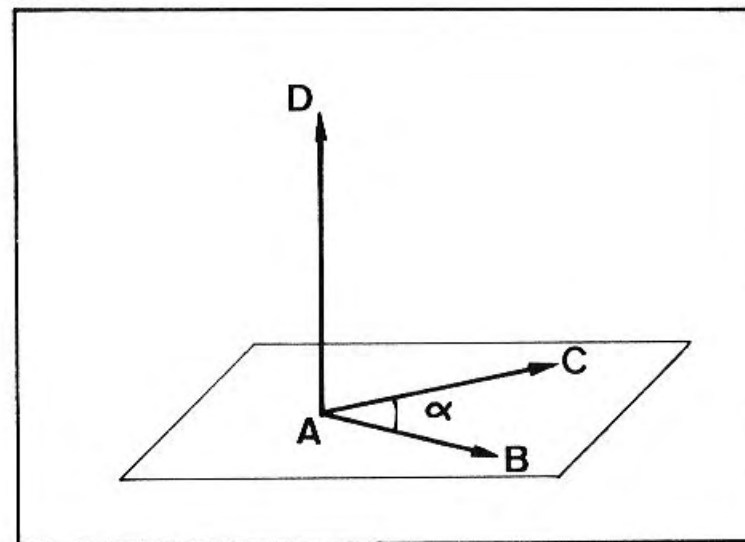


Fig. 6

2. Consideremos, relativamente a um referencial ortonormado $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$,

$$\begin{aligned} \vec{u} &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\ \vec{v} &= x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k} \end{aligned}$$

Demonstra-se que as coordenadas de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ são, respectivamente

$$yz' - y'z, \quad zx' - z'x \quad \text{e} \quad xy' - x'y$$

3. O produto vectorial tem as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge \vec{v} &= -\vec{v} \wedge \vec{u} \\ \vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) &= (\vec{u} \wedge \vec{v}) + (\vec{u} \wedge \vec{w}) \end{aligned}$$

4. O produto vectorial é particularmente útil para demonstrar que os pontos se encontram alinhados ou que as rectas são paralelas.

Servir-nos-á igualmente para resolver o problema da eliminação das partes escondidas no caso de poliedros convexos (ver o capítulo 8).

6 Mudança de referencial

Abordaremos dois aspectos desta questão:

1. Sendo o espaço organizado por um referencial ortonormado de sentido directo $(O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$, como poderemos obter um novo referencial ortonormado $(O_1, \vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$ de sentido directo utilizando um dado vector \vec{u} ?

2. Sejam x_1, y_1, z_1 as coordenadas de um ponto P relativamente a um primeiro referencial ortonormado $(O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$. Como se podem obter as coordenadas x_2, y_2 e z_2 de P relativamente a um segundo referencial ortonormado $(O_2, \vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$?

1. Obtenção de uma nova base

Seja \vec{u} um vector não nulo. Façamos $\vec{i}_2 = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$; o vector \vec{i}_2 é

unitário.

Escolhamos agora um vector unitário \vec{j}_2 tal que $\vec{i}_2 \cdot \vec{j}_2 = 0$. Diremos que os vectores \vec{i}_2 e \vec{j}_2 são ortogonais.

O sistema $(\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2 = \vec{i}_2 \wedge \vec{j}_2)$ responde à questão dado que \vec{k}_2 é unitário e ortogonal aos vectores \vec{i}_2 e \vec{j}_2 .

O referencial $(O_1, \vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$ é portanto ortonormado; além disso, tem um sentido directo.

EXEMPLO

Seja $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$$

Façamos

$$\vec{i}_2 = \frac{\vec{u}}{3}$$

\vec{i}_2 será um vector unitário.

Seja $\vec{j}_2 = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

As condições $\vec{i}_2 \cdot \vec{j}_2 = 0$ e \vec{j}_2 unitário traduzem-se pelo sistema

$$\frac{x}{3} + \frac{2y}{3} + \frac{2z}{3} = 0 \text{ e } x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Considerando $x=0$, resta verificar $y+z=0$ e $y^2+z^2=1$.
De onde

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

e

$$z = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Teremos então:

$$\vec{k}_2 = \vec{i}_2 \wedge \vec{j}_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{6}, -\frac{2\sqrt{2}}{3} \right).$$

2. Cálculo das novas coordenadas

Suponhamos conhecidas as coordenadas da nova base $(\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$ relativamente à base antiga $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$:

$$\begin{aligned} \vec{i}_2 &= \alpha_1 \vec{i}_1 + \beta_1 \vec{j}_1 + \gamma_1 \vec{k}_1 \\ \vec{j}_2 &= \alpha_2 \vec{i}_1 + \beta_2 \vec{j}_1 + \gamma_2 \vec{k}_1 \\ \vec{k}_2 &= \alpha_3 \vec{i}_1 + \beta_3 \vec{j}_1 + \gamma_3 \vec{k}_1 \end{aligned}$$

Demonstra-se que:

$$\begin{aligned} \vec{i}_1 &= \alpha_1 \vec{i}_2 + \alpha_2 \vec{j}_2 + \alpha_3 \vec{k}_2 \\ \vec{j}_1 &= \beta_1 \vec{i}_2 + \beta_2 \vec{j}_2 + \beta_3 \vec{k}_2 \\ \vec{k}_1 &= \gamma_1 \vec{i}_2 + \gamma_2 \vec{j}_2 + \gamma_3 \vec{k}_2 \end{aligned}$$

(o que se deve ao facto de as duas bases serem ortonormadas).
Deduz-se daqui facilmente as novas coordenadas x_2, y_2 e z_2 de um ponto M a partir das suas antigas coordenadas x_1, y_1, z_1 .

A igualdade

$$\vec{O_2 M} = \vec{O_2 O_1} + \vec{O_1 M} = \vec{O_1 M} - \vec{O_1 O_2}$$

permite escrever:

$$z_2 \vec{i}_2 + y_2 \vec{j}_2 + z_2 \vec{k}_2 = (x_1 - x_0) \vec{i}_1 + (y_1 - y_0) \vec{j}_1 + (z_1 - z_0) \vec{k}_1, \quad x_0, y_0, z_0$$

designando as coordenadas de O_2 no referencial $(O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$.

Tira-se daqui:

$$x_2 = \alpha_1 (x_1 - x_0) + \beta_1 (y_1 - y_0) + \gamma_1 (z_1 - z_0)$$

$$y_2 = \alpha_2 (x_1 - x_0) + \beta_2 (y_1 - y_0) + \gamma_2 (z_1 - z_0)$$

$$z_2 = \alpha_3 (x_1 - x_0) + \beta_3 (y_1 - y_0) + \gamma_3 (z_1 - z_0)$$

TRANSFORMAÇÕES PONTUAIS

Seja M um ponto qualquer do espaço. Uma transformação pontual permitirá associar um ponto M' e um só a este ponto M.

M' poderá ser escolhido em todo o espaço ou, de maneira mais restritiva, num plano, numa recta, etc.

As transformações pontuais são indispensáveis para dar uma imagem plana de um objecto, para adaptar esta imagem às dimensões do visor, para descrever os deslocamentos do objecto a representar.

1 Definição analítica de uma transformação pontual

1. Pode-se definir uma transformação pontual de modo geométrico ou analítico.

Neste último caso, exprimem-se as coordenadas x', y', z' e M' em função das coordenadas x, y e z de M.

Utilizam-se então três funções f, g e h das variáveis x, y, z tais que

$$x' = f(x, y, z)$$

$$y' = g(x, y, z)$$

$$z' = h(x, y, z)$$

2. Em geral, as funções f, g e h são definidas para qualquer ponto M (x, y, z) e pontos contínuos a este.

Por exemplo, as equações que se seguem definem uma transformação pontual afim:

$$x' = 3x + y + x + 1$$

$$y' = 2x - y + z - 2$$

$$z' = -x + 3y + 2z + 1$$

2 Visualização de um ponto no espaço

1. O espaço possui três dimensões, mas o visor ligado ao micro-computador utilizado apenas possui duas. Para ser observado, o ponto M do espaço deve ser representado por um ponto qualquer M' de um plano apropriado, o plano de projecção (figura 1).

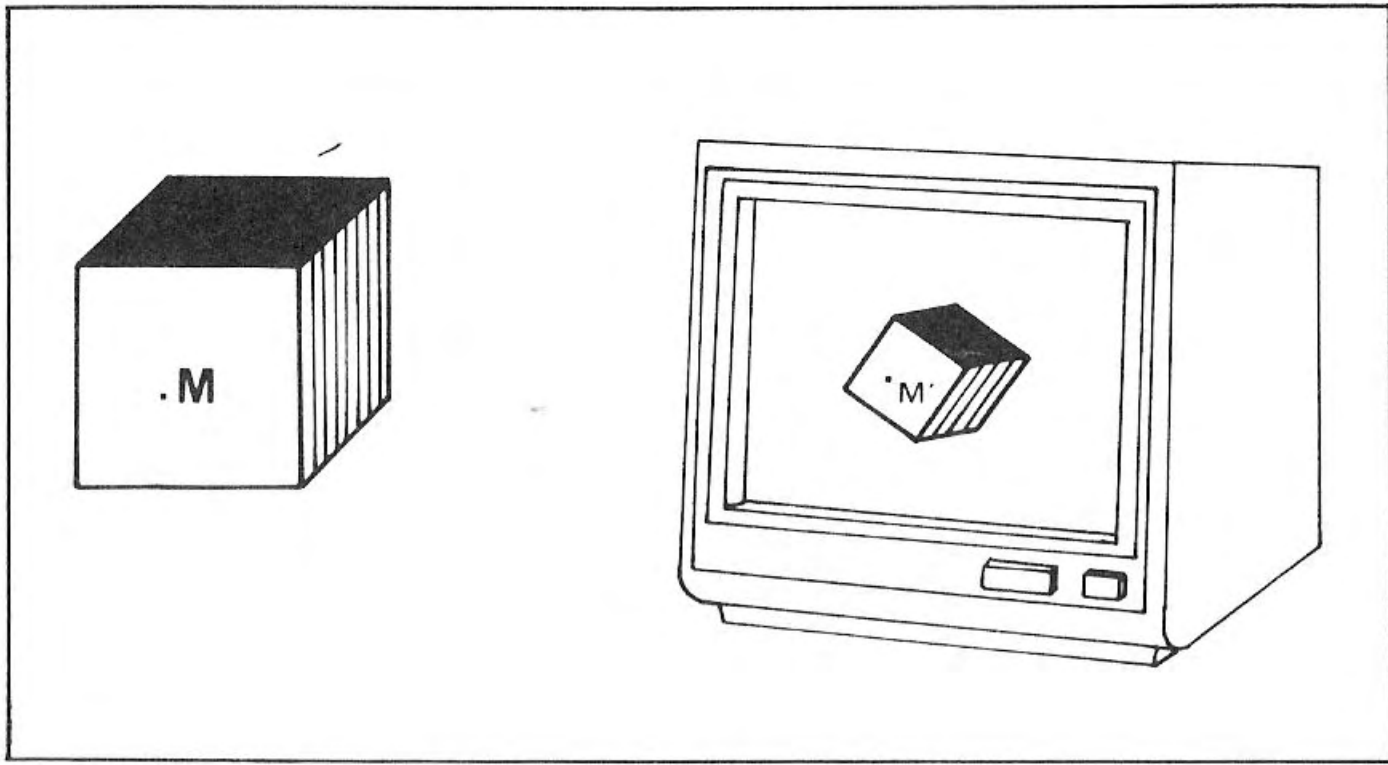


Fig. 1

Suponhamos que o espaço é organizado por um referencial ortornormado $Oxyz$ e que o plano de projecção depende do referencial $O'uv$.

Se x, y, z designam as coordenadas de M no referencial $Oxyz$ e se u e v designam as coordenadas de M' no referencial $O'uv$, existem duas funções f e g tais que $u = f(x, y, z)$ e $v = g(x, y, z)$.

Para que o relevo e a profundidade sejam correctamente traduzidos, é necessário escolher f e g de modo a respeitar certas limitações de natureza geométrica. Por exemplo, os pontos alinhados devem possuir imagens igualmente alinhadas.

2. As soluções possíveis são relativamente numerosas. Distinguem-se essencialmente:

- As *projecções cilíndricas*, com o caso particular da *perspectiva cavaleira*;
- As *projecções cónicas*.

Estes diferentes tipos de projecções serão estudados respectivamente nos Capítulos 5, 6 e 15.

3 Enquadramento da imagem

Qualquer que seja o método utilizado, perspectiva ou simples projecção, as dimensões da imagem devem ser modificadas para adaptação ao tamanho do terminal utilizado.

1. Princípio

A qualquer ponto $M = (x, y, z)$ do objecto corresponde um ponto $m = (u, v)$ da imagem.

Designemos por u_{\min} e u_{\max} os valores mínimo e máximo de u , e por v_{\min} e v_{\max} os valores mínimo e máximo de v .

A imagem do objecto encontra-se portanto inscrita num rectângulo $ABCD$ do visor (figura 2), de largura $u_{\max} - u_{\min}$ e de altura $v_{\max} - v_{\min}$.

Associemos agora a m o ponto $m' = (u', v')$ do visor (figura 2). No caso do ZX Spectrum, deveremos ter $0 \leq u' \leq 255$ e $0 \leq v' \leq 175$ (figura 3).

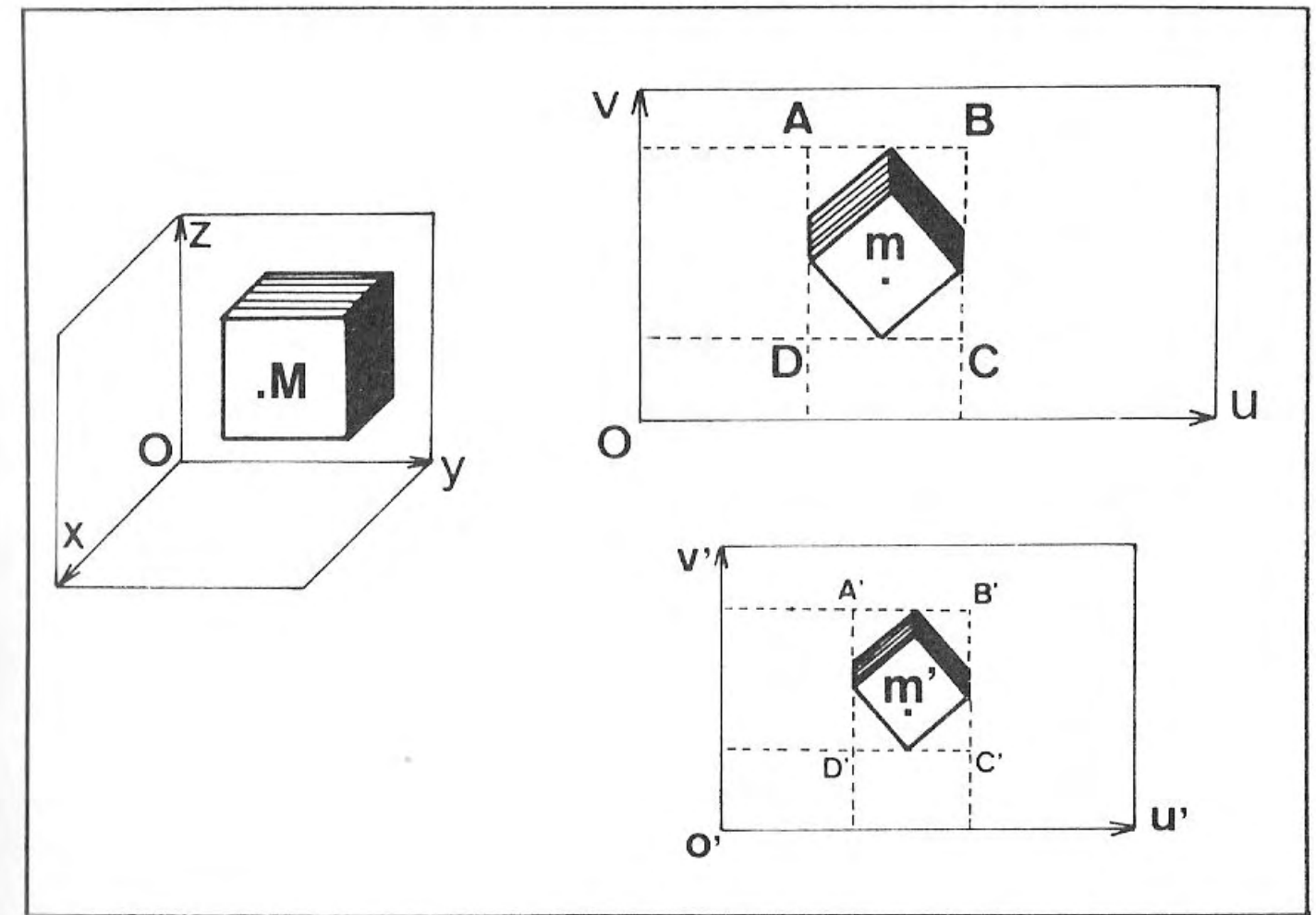


Fig. 2

Consideremos $u' = \varphi(u, v)$ e $v' = \psi(u, v)$. As duas funções φ e ψ devem ser escolhidas de tal modo que o rectângulo $ABCD$ seja transformado num rectângulo $A'B'C'D'$ inscrito no visor.

Nas duas soluções propostas, escolheremos para φ e ψ funções afins e consideraremos $u' = k_1 u + l_1$, $v' = k_2 v + l_2$, onde k_1, k_2, l_1 e l_2 designam quatro números a determinar.

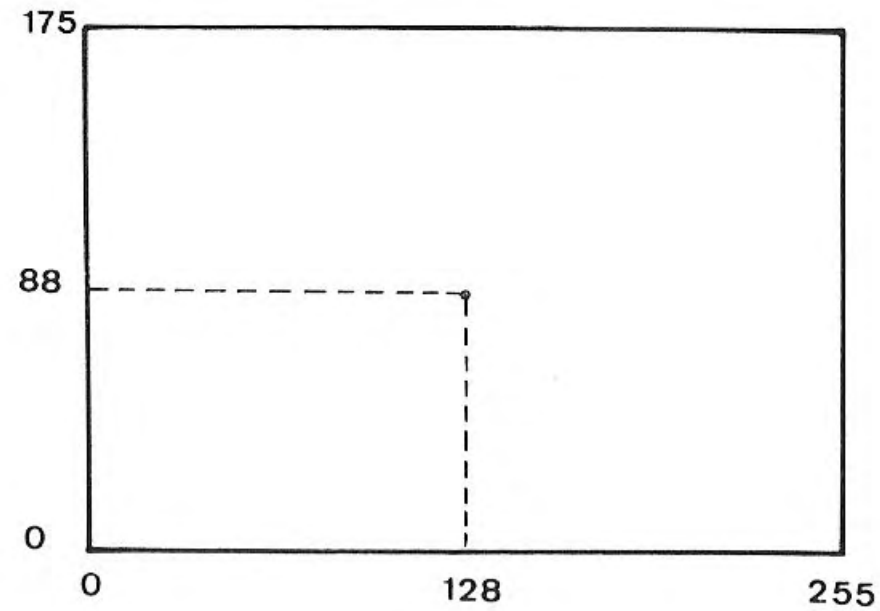


Fig. 3

2. Primeira solução

Para evitar eventuais erros de arredondamento, usaremos u' e v' de modo a obter $1 \leq u' \leq 254$ e $1 \leq v' \leq 174$.

Para não alterarmos as proporções da imagem, escolheremos k_1 , k_2 , l_1 e l_2 de modo a que aquela ocupe a maior parte do visor. Consideremos portanto:

$$\begin{aligned} 1 &= k_1 u_{\min} + l_1 \\ 254 &= k_1 u_{\max} + l_1 \\ 1 &= k_2 v_{\min} + l_2 \\ 174 &= k_2 v_{\max} + l_2 \end{aligned}$$

Teremos de resolver dois sistemas do primeiro grau, cada um com duas incógnitas.

Após resolução, obtemos:

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{253}{u_{\max} - u_{\min}} \\ l_1 &= 254 - k_1 \times u_{\max} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2 &= \frac{173}{v_{\max} - v_{\min}} \\ l_2 &= 174 - k_2 \times v_{\max} \end{aligned}$$

Consideremos então um programa no qual a imagem do objecto a representar englobe n pontos de coordenadas u_1, u_2, \dots, u_n e v_1, v_2, \dots, v_n .

O enquadramento desta imagem far-se-á nas linhas 8100 a 8170 do programa que se segue:

```

8090 REM
8100 LET k1=253/(umax-umin)
8110 LET l1=254-k1*umax
8120 LET k2=173/(vmax-vmin)
8130 LET l2=174-k2*vmax
8140 FOR i=1 TO n
8150 LET u(i)=k1*u(i)+l1
8160 LET v(i)=k2*v(i)+l2
8170 NEXT i
8180 REM

```

Note-se que as letras U e V servem para designar as variáveis u e v e as variáveis u' e v' .

3. Segunda solução

O rectângulo A'B'C'D', de altura h_a e largura l_a , deve, desta vez, verificar as duas condições seguintes:

- As suas proporções são as mesmas que as do rectângulo ABCD;
- O seu centro coincide com o centro do visor, de coordenadas 128 e 88.

Consideremos $k_a = \frac{h_a}{l_a}$.

A primeira condição traduz-se por:

$$k_a = \frac{v_{\max} - v_{\min}}{u_{\max} - u_{\min}}$$

A segunda condição será traduzida por:

$$128 = k_1 \left(\frac{u_{\max} + u_{\min}}{2} \right) + l_1$$

$$128 + \frac{l_a}{2} = k_1 u_{\max} + l_1$$

$$88 = k_2 \left(\frac{V_{\max} + V_{\min}}{2} \right) + l_2$$

$$88 + \frac{h_a}{2} = k_2 V_{\max} + l_2$$

Tira-se daqui:

$$k_1 = \frac{l_a}{U_{\max} - U_{\min}}$$

$$k_2 = \frac{h_a}{V_{\max} - V_{\min}}$$

$$l_1 = 128 + \frac{l_a}{2} - l_1 \times U_{\max}$$

$$l_2 = 88 + \frac{h_a}{2} - l_2 \times V_{\max}$$

Resta escolher l_a e h_a em função da relação $\frac{\text{altura do visor}}{\text{largura do visor}}$.

Este número será igual a $\frac{176}{256}$, ou seja, 0,6875.

Consideraremos 0,6 como valor suficientemente aproximado de $\frac{176}{256}$.

Deverão ser considerados dois casos:

1. Se $k_a > 0,6$, escolheremos $h_a = 150$.
Teremos então $\frac{150}{l_a} > 0,6$, donde $l_a < 250$.
2. Se $k_a \leq 0,6$ escolheremos $l_a = 250$.
Teremos então $\frac{h_a}{250} \leq 0,6$, donde $h_a \leq 150$.

Em todos os casos, a imagem obtida no visor estará contida num rectângulo tendo como dimensões 150×250 .

Consideremos novamente uma imagem contendo n pontos de coordenadas respectivamente u_1, u_2, \dots, u_n e v_1, v_2, \dots, v_n .

A adaptação desta imagem às dimensões do visor será feita graças ao programa seguinte, numerado arbitrariamente entre 8100 e 8230.

```

8100 REM ...
8110 LET ka = (vmax - vmin) / (umax - um
8120 IF ka > 0,6 THEN LET ha = 150
8130 IF ka > 0,6 THEN LET la = 150 / k
8140 IF ka <= 0,6 THEN LET la = 250
8150 IF ka <= 0,6 THEN LET ha = 250 *
8160 LET k1 = la / (umax - umin)
8170 LET l1 = 128 + la / 2 - k1 * umax
8180 LET k2 = ha / (vmax - vmin)
8190 LET l2 = 88 + ha / 2 - k2 * vmax
8200 FOR i = 1 TO n
8210 LET u(i) = k1 * u(i) + l1
8220 LET v(i) = k2 * v(i) + l2
8230 NEXT i
8240 REM ...

```

4 Deslocamentos do objecto a representar

O objecto a representar ocupa uma certa posição relativamente a um referencial ortonormado Oxyz, sendo portanto desejável poder deslocá-lo de modo a ser representado noutra posição.

Os deslocamentos podem consistir em translações, rotações ou mistos, compostos de translações e rotações.

Consideremos duas posições sucessivas $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$ de um mesmo ponto do objecto. Em todos os casos, existirão três funções f , g e h tais que

$$\begin{aligned} x_2 &= f(x_1, y_1, z_1) \\ y_2 &= g(x_1, y_1, z_1) \\ z_2 &= h(x_1, y_1, z_1) \end{aligned}$$

1. As translações

Seja \vec{v} um vector qualquer de coordenadas v_x, v_y e v_z . Consideremos $M_1 \xrightarrow{\vec{v}} M_2 = \vec{v}$.

Obteremos as equações seguintes:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + v_x \\ y_2 &= y_1 + v_y \\ z_2 &= z_1 + v_z \end{aligned}$$

2. As rotações

Apresentaremos aqui as fórmulas de cálculo que respeitam a uma rotação de ângulo θ em torno de cada um dos eixos do referencial Oxyz.

a) Rotação em torno do eixo Ox:

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 \\x_2 &= y_1 \cos \theta - z_1 \sin \theta \\z_2 &= y_1 \sin \theta + z_1 \cos \theta\end{aligned}$$

b) Rotação em torno a Oy:

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 \cos \theta - z_1 \sin \theta \\y_2 &= y_1 \\z_2 &= x_1 \sin \theta + z_1 \cos \theta\end{aligned}$$

c) Rotação em torno a Oz:

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta \\y_2 &= x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta \\z_2 &= z_1\end{aligned}$$

Como se pode constatar, uma das coordenadas não se altera em todos os casos.

As linhas de programa que se seguem permitem calcular as novas coordenadas de um ponto em função das antigas, numa rotação de ângulo θ em torno do eixo Oz. O facto de conservar as mesmas variáveis x, y e z para as coordenadas, antigas ou novas, obriga-nos a recorrer a duas variáveis auxiliares u e v.

```
0990 REM ...
1000 LET U=X#COS T-Y#SIN T
1010 LET V=X#SIN T+Y#COS T
1020 LET X=U
1030 LET Y=V
1040 REM ...
```

3. Deslocamentos mistos

O objecto sofre sucessivamente uma rotação e uma translação, ou uma translação e uma rotação.

Será necessário dar atenção à ordem dos deslocamentos, dado que o resultado final depende dessa ordem.

4. Deslocamentos diversos

Desloquemos um objecto da posição 1 para a posição 2. O deslocamento inverso conduz de novo o objecto para a posição 1 a partir da posição 2.

Assinalemos que o inverso de uma translação de vector \vec{v} será a translação de vector $-\vec{v}$, que o inverso de uma rotação de eixo Δ e de ângulo θ é uma rotação de eixo Δ e de ângulo igual a $-\theta$.

RECTAS E PLANOS NO ESPAÇO

Neste capítulo, indicaremos as representações analíticas mais habituais das rectas e planos do espaço, sendo este referido a um referencial ortonormado directo $Oxyz$.

1 Rectas

1. Recta definida por dois pontos

Sejam $A = (x_A, y_A, z_A)$ e $B = (x_B, y_B, z_B)$ dois pontos distintos e seja Δ a recta determinada por estes pontos (figura 1).

Se $P = (x, y, z)$ for um ponto qualquer de Δ , existe um número real único tal que $\vec{AP} = k \vec{AB}$.

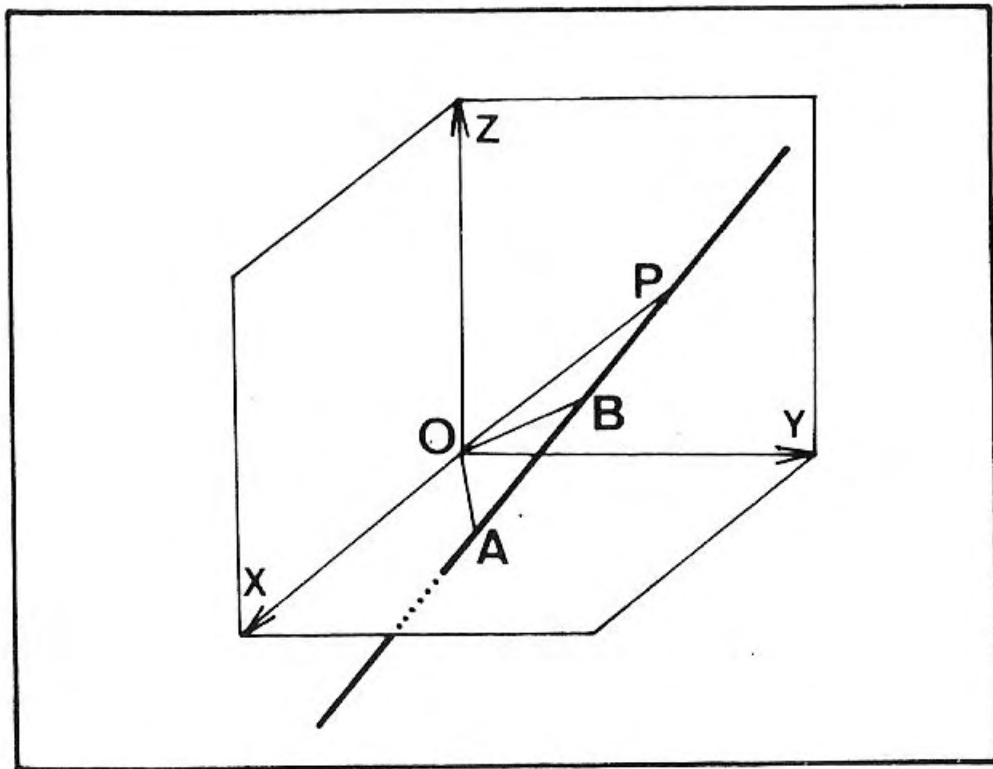


Fig. 1

Como $\vec{AP} = \vec{OP} - \vec{OA}$, obtemos

$$k \vec{AB} = \vec{OP} - \vec{OA}$$

donde

$$\vec{OP} = (1 - k) \vec{OA} + k \vec{OB}$$

Para a projecção em cada eixo, obtemos:

$$\begin{aligned} x &= (1 - k) x_A + k x_B \\ y &= (1 - k) y_A + k y_B \\ z &= (1 - k) z_A + k z_B \end{aligned}$$

Estas três equações constituem, para k variando entre $-\infty$ e $+\infty$, uma representação paramétrica da recta Δ .

2. Segmento de recta

Se se fizer variar o parâmetro k apenas entre zero e um, obtaremos uma representação paramétrica do segmento $[A, B]$.

3. Vector director de uma recta

Retomemos as mesmas notações do parágrafo 1.1. O vector \vec{AB} é designado vector director da recta Δ ; tem como coordenadas os números

$$\begin{aligned} v_x &= x_B - x_A \\ v_y &= y_B - y_A \\ v_z &= z_B - z_A \end{aligned}$$

4. Recta definida por um ponto e um vector director

Seja $A = (x_A, y_A, z_A)$ um ponto qualquer e \vec{v} um vector não nulo de coordenadas v_x, v_y, v_z .

Definamos um ponto B de coordenadas x_B, y_B e z_B , fazendo:

$$\begin{aligned} x_B &= x_A + v_x \\ y_B &= y_A + v_y \\ z_B &= z_A + v_z \end{aligned}$$

Dado que o ponto B é distinto do ponto A , estes dois pontos determinam uma recta Δ .

As equações do parágrafo 1.1 transformam-se em:

$$\begin{aligned}x &= x_A + k v_x \\ y &= y_A + k v_y \\ z &= z_A + k v_z\end{aligned}$$

Estas equações caracterizam a recta Δ definida pelo ponto A e o vector \vec{v} .

5. Rectas paralelas e rectas ortogonais

Sejam Δ e Δ' duas rectas de vectores directores respectivos \vec{u} e \vec{v} . Designemos por u_x, u_y e u_z as coordenadas de \vec{u} , e por v_x, v_y e v_z as de \vec{v} .

1. Δ e Δ' são ortogonais se e apenas se o produto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$ for nulo.

Isto equivale a

$$u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z = 0$$

2. Δ e Δ' são paralelas se e apenas se o produto vectorial $\vec{u} \wedge \vec{v}$ for nulo.

Isto equivale a

$$\begin{aligned}u_x v_y - u_y v_x &= 0 \\ u_y v_z - u_z v_y &= 0 \\ u_z v_x - u_x v_z &= 0\end{aligned}$$

Se os números v_x, v_y e v_z não são nulos, a condição anterior pode ser escrita de forma mais simples:

$$\frac{u_x}{v_x} = \frac{u_y}{v_y} = \frac{u_z}{v_z}$$

2 Planos

1. Equação cartesiana de um plano

Seja $M = (x, y, z)$ um ponto qualquer de um plano P.

Demonstra-se que as coordenadas do ponto P satisfazem uma relação do tipo $ax + by + cz + d = 0$.

Esta relação constitui a equação cartesiana do plano P.

Os números a, b, c e d podem ser interpretados facilmente.

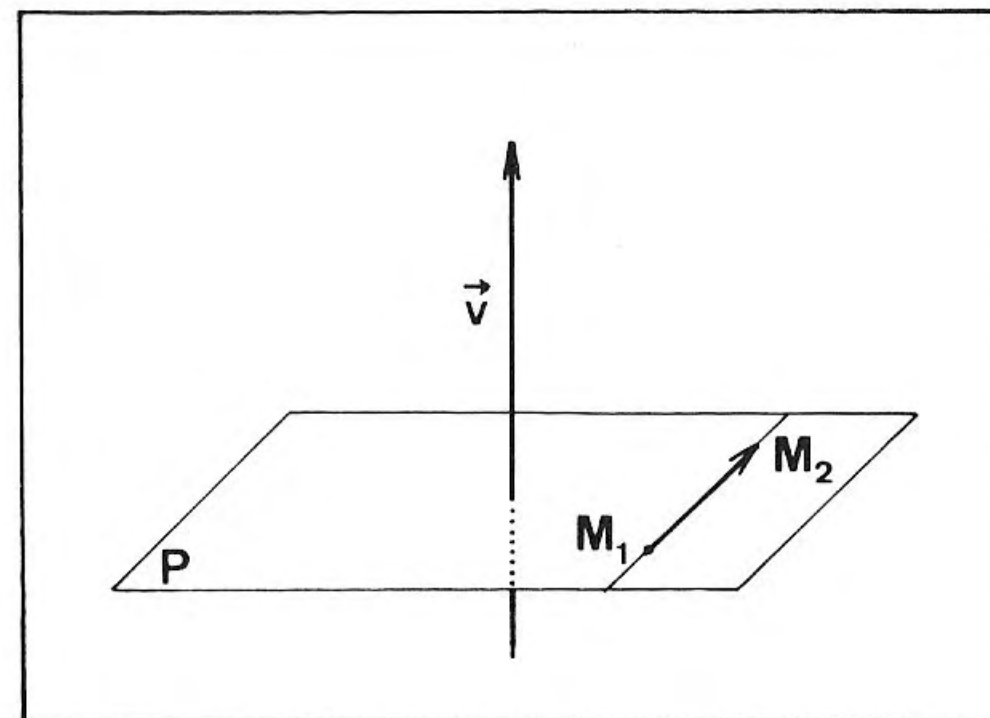


Fig. 2

1. Consideremos $\vec{v} = (a, b, c)$. O vector assim definido é perpendicular ao plano P (qualquer recta de vector director \vec{v} é perpendicular ao plano P).

De facto, sejam M_1 e M_2 dois pontos distintos do plano P (figura 2).

O vector $\vec{M_1 M_2}$ tem por coordenadas $z_2 - z_1, y_2 - y_1$ e $x_2 - x_1$.

Calculemos o produto escalar $\vec{v} \cdot \vec{M_1 M_2}$.

Obteremos

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1)$$

isto é,

$$ax_2 + by_2 + cz_2 - (ax_1 + by_1 + cz_1)$$

donde

$$(-d) - (-d)$$

ou seja, zero.

2. No que se refere ao número d, podemos notar que o plano de equação $ax + by + cz + d = 0$ é paralelo ao plano de equação $ax + by + cz = 0$, plano que contém a origem do referencial.

2. Planos especiais

Qualquer equação do tipo $ax + by + cz = 0$ define, como se acaba de referir, um plano contendo a origem do sistema de coordenadas. Para definir o plano xOy , é necessário fazer $a=b=0$ e $c=1$. Para definir o plano xOz , é necessário fazer $a=c=0$ e $b=1$. Com $a=1$ e $b=c=0$ define-se do mesmo modo o plano zOy .

3. Plano definido por duas rectas concorrentes

Sejam d e d' duas rectas distintas, intersectando-se em A . Sejam \vec{u} e \vec{v} os vectores directores respectivos destas rectas. Consideremos $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ e $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$. Para qualquer ponto $M = (x, y, z)$ do plano P definido por d e d' , existem dois números reais k_1 e k_2 tais que

$$\vec{AM} = k_1 \vec{u} + k_2 \vec{v}$$

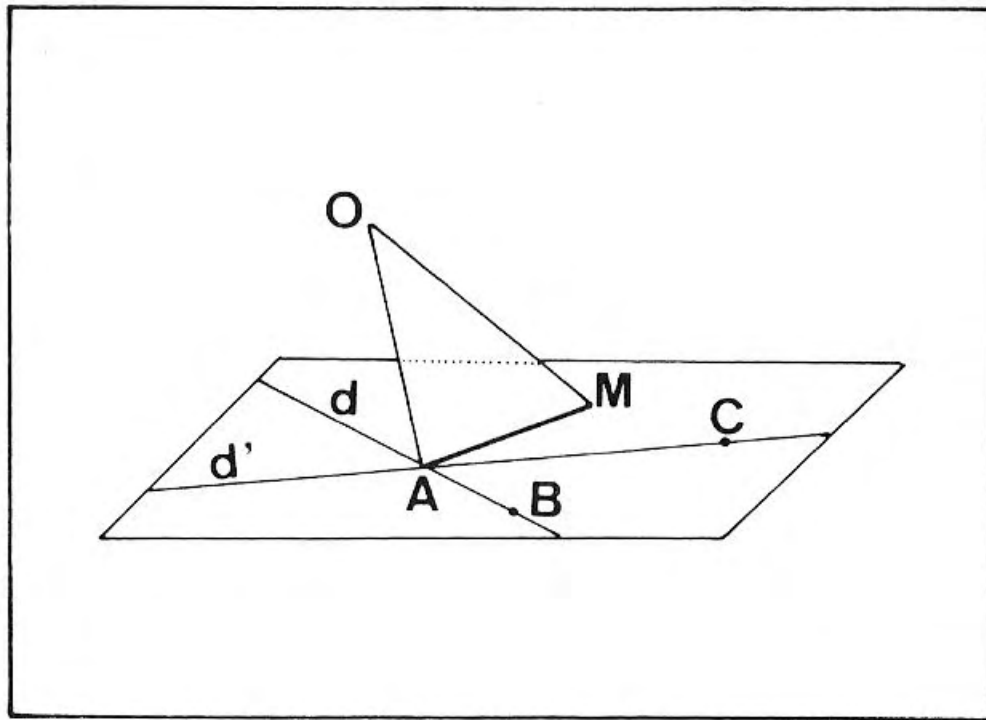


Fig. 3

Teremos $\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM}$, de onde decorrem as equações seguintes:

$$\begin{aligned} x &= x_A + k_1 u_x + k_2 v_x \\ y &= y_A + k_1 u_y + k_2 v_y \\ z &= z_A + k_1 u_z + k_2 v_z \end{aligned}$$

Estas três equações constituem uma representação paramétrica do plano P .

Seja B o ponto da recta d tal que $\vec{AB} = \vec{u}$, e seja C o ponto da recta d' tal que $\vec{AC} = \vec{v}$ (figura 3).

As equações anteriores transformam-se em:

$$\begin{aligned} x &= x_A + k_1 (x_B - x_A) + k_2 (x_C - x_A) \\ y &= y_A + k_1 (y_B - y_A) + k_2 (y_C - y_A) \\ z &= z_A + k_1 (z_B - z_A) + k_2 (z_C - z_A) \end{aligned}$$

4. Plano definido por três pontos

Sejam A, B e C três pontos diferentes e não alinhados.

Estes três pontos determinam um plano único cuja equação tem a forma

$$ax + by + cz + d = 0$$

Eliminando k_1 e k_2 nas equações do parágrafo precedente, obtemos as expressões de a, b, c e d em função das coordenadas dos pontos A, B e C .

Este cálculo é realizado no programa seguinte:

```

10 DIM X (3)
20 DIM Y (3)
30 DIM Z (3)
40 FOR I = 1 TO 3
50 PRINT HT 5, 0; "COORDENADAS D
D PONTO NO "; I; "/: "
60 INPUT "ABSCISSA? "; X (I)
70 INPUT "ORDENADA? "; Y (I)
80 INPUT "ALTITUDE? "; Z (I)
90 NEXT I
100 LET K1 = X (2) - X (1)
110 LET K2 = Y (2) - Y (1)
120 LET K3 = Z (2) - Z (1)
130 LET K4 = X (3) - X (1)
140 LET K5 = Y (3) - Y (1)
150 LET K6 = Z (3) - Z (1)
160 LET K7 = K2 * K3 - K3 * K5
170 LET K8 = K3 * K4 - K4 * K6
180 LET K9 = K4 * K5 - K5 * K7
190 LET A = K7 * K4 - K8 * K3
200 LET B = K8 * K5 - K9 * K2
210 LET C = -K9 * K1
220 PRINT HT 5, 0; "PONTOS ALINHADOS?"
230 IF A = 0 AND B = 0 AND C = 0 THEN
240 PRINT HT 5, 0; "A EQUACAO DESEJADA E
E A EQUACAO DESEJADA E
250 PRINT HT 5, 0; "AX+BY+CZ+D=0 COM:"
260 PRINT HT 5, 0; "A = "; A
270 PRINT HT 5, 0; "B = "; B
280 PRINT HT 5, 0; "C = "; C
290 PRINT HT 5, 0; "D = "; -(A * X (1) + B * Y (1)
+ C * Z (1))

```

EXEMPLOS

1. $A=(1, 1, 1)$, $B=(2, 0, -1)$, $C=(0, 2, -1)$.

Obtemos $a=4$, $b=4$, $c=0$ e $d=-8$.

2. $A=(1, 1, 1)$, $B=(2, 3, 4)$, $C=(0, -2, -5)$.

Obtemos $a=-3$, $b=3$, $c=-1$ e $d=1$.

5. Planos paralelos e planos perpendiculares

Sejam P_1 e P_2 dois planos de equações respectivas:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$$

e

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$$

Consideremos $\vec{v}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v}_2 = (a_2, b_2, c_2)$.

1. Os planos P_1 e P_2 são paralelos se e apenas se os vectores \vec{v}_1 e \vec{v}_2 o são.

Deve-se portanto ter $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = 0$, o que conduz a

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = b_1 c_2 - b_2 c_1 = c_1 a_2 - c_2 a_1 = 0$$

Se a_2 , b_2 e c_2 não forem nulos, poderemos traduzir esta condição por:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

2. Os planos P_1 e P_2 são perpendiculares se e apenas se os vectores v_1 e v_2 forem ortogonais, e portanto tiverem um produto escalar nulo.

Este facto traduz-se por:

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$$

3 Intersecções

1. Intersecção de um plano e uma recta

Seja P um plano de equação $ax+by+cz+d=0$ e seja d uma recta definida por um vector director $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ e um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ — (figura 4).

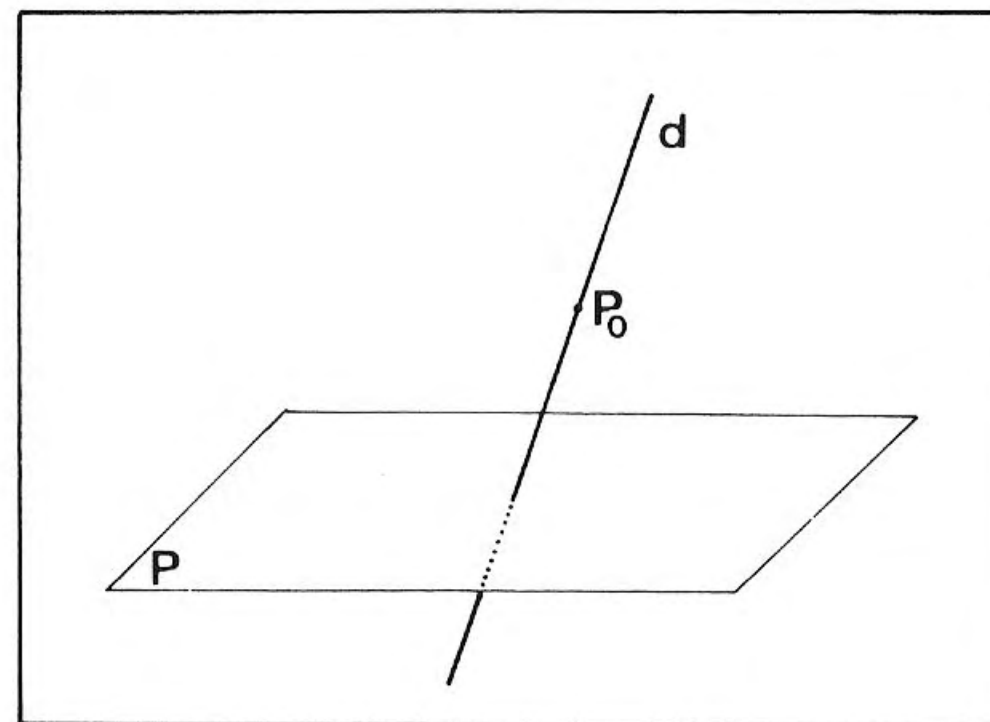


Fig. 4

Se existe um ponto de intersecção de d com P , as suas coordenadas satisfazem o sistema:

$$\begin{aligned} ax + by + cz + d &= 0 \\ x &= x_0 + k v_x \\ y &= y_0 + k v_y \\ z &= z_0 + k v_z \end{aligned}$$

Note-se que nestas equações k é um parâmetro desconhecido. O programa que se segue permite obter a solução deste sistema quando ela existe.

```

10 PRINT "O PLANO TEM POR EQUA
CAD AX+BY+CZ+D=0"
20 INPUT "INDIQUE P",a
30 INPUT "INDIQUE B",b
40 INPUT "INDIQUE C",c
50 INPUT "INDIQUE D",d
60 CLS
70 PRINT "A RECTA PASSA PELO P
ONTO P_0 DE COORDENADAS X_0, Y_0,
Z_0."
80 INPUT "INDIQUE X_0",x0
90 INPUT "INDIQUE Y_0",y0
100 INPUT "INDIQUE Z_0",z0
110 CLS
120 PRINT "SEJAM U_X, U_Y, U_Z AS
COORDENADAS DE UM VECTOR DIRECTO
R DESTA RECTA"
130 INPUT "INDIQUE U_X",vx

```

```

140 INPUT "INDIQUE UY",UY
150 INPUT "INDIQUE UZ",UZ
160 CLS
170 LET S = B*UX + B*UY + C*UZ + D
180 LET T = B*VX + B*VY + C*VZ
190 IF T = 0 AND S = 0 THEN PRINT "
A RECTA ESTA CONTIDA NO PLANO"
GO TO 1999
200 IF T = 0 AND S <> 0 THEN PRINT
"A RECTA E PARALELA AO PLANO"
GO TO 1999
210 LET K = -S/T
220 PRINT "COORDENADAS DO PONTO
DE INTERSECCAO:"
230 PRINT "X = ";K*VX+UX
240 PRINT "Y = ";K*VY+UY
250 PRINT "Z = ";K*VZ+UZ

```

EXEMPLO

P tem a equação $x + y + z + 1 = 0$.

d tem por vector director $(1, 1, 1)$ e passa pelo ponto $(0, 0, 0)$.

Obtém-se $x = y = z = -\frac{1}{3}$.

2. Intersecção de dois planos

Sejam P_1 e P_2 dois planos de equações

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$$

e

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$$

Podem ocorrer três casos:

- P_1 e P_2 são coincidentes;
- P_1 e P_2 são distintos e paralelos;
- P_1 e P_2 são distintos e intersectam-se segundo uma recta d.

Neste último caso (figura 5), é necessário procurar um vector director $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ de d e um ponto particular $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de d.

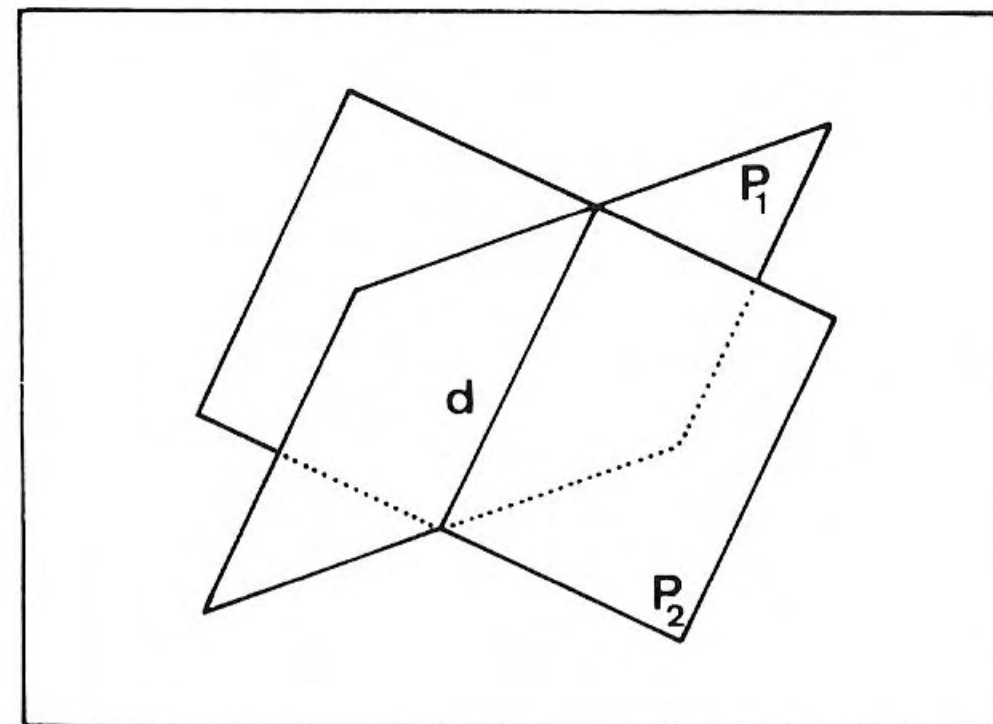


Fig. 5

É isto que faz o programa seguinte.

```

10 PRINT "INTERSECCAO DOS PLAN
OS TENDO POR EQUACOES RESPECTIVAS
      E
      E
20 INPUT "INDIQUE B1",B1
30 INPUT "INDIQUE B2",B2
40 INPUT "INDIQUE C1",C1
50 INPUT "INDIQUE C2",C2
60 INPUT "INDIQUE D1",D1
70 INPUT "INDIQUE D2",D2
80 INPUT "INDIQUE U1",U1
90 INPUT "INDIQUE U2",U2
100 LET S1 = B1*U1 + C1*U2 + D1
110 LET S2 = B2*U1 + C2*U2 + D2
120 LET T1 = B1*V1 + C1*V2 + D1
130 LET T2 = B2*V1 + C2*V2 + D2
140 LET T = T1 - T2
150 LET S = S1 - S2
160 IF T = 0 AND S = 0 THEN PRINT "
OS DOIS PLANOS
PARALELOS OU COINCIDENTES"
GO TO 1999
170 IF T = 0 AND S <> 0 THEN PRINT
"OS DOIS PLANOS
PARALELOS OU COINCIDENTES"
GO TO 1999
180 LET K = -S/T
190 PRINT "X = ";K*V1+U1
200 PRINT "Y = ";K*V2+U2
210 PRINT "Z = ";K*V3+U3

```

PROJEÇÕES CILÍNDRICAS

```

250 GO TO 1000
400 REM CASO DE K1<>0
410 LET X0=K4/K1
420 LET U0=K5/K1
430 LET Z0=0
440 RETURN
500 REM CASO DE K1=0, K2<>0
510 LET X0=K6/K2
520 LET U0=0
530 LET Z0=K5/K2
540 RETURN
600 REM CASO DE K1=0, K2=0,
    K3<>0
610 LET X0=0
620 LET U0=K6/K3
630 LET Z0=-K4/K3
640 RETURN
700 REM RESULTADOS
710 CLS
720 PRINT AT 6,0;"A INTERSECÇÃO
003 2 PLANOS E' UMA RECTA DE
VECTOR DIRECTOR "
730 PRINT AT 4,0;"UX = ";K3
740 PRINT "UY = ";K2
750 PRINT "UZ = ";K1
760 PRINT AT 12,0;"ESTA RECTA P
ASSA PELO PONTO DE COORDENADAS"
770 PRINT AT 14,0;"X = ";X0
780 PRINT "Y = ";U0
790 PRINT "Z = ";Z0
800 RETURN
1000 STOP

```

Para representar um objecto, utilizam-se habitualmente dois tipos de projecções: as projecções paralelas ou cilíndricas e as projecções centrais ou cónicas.

Neste capítulo, serão estudadas apenas as primeiras (as projecções cónicas serão objecto do capítulo 15).

1 Definições

1. Seja P um plano e d uma recta não paralela a P . A qualquer ponto M do espaço poderemos associar um ponto M' do seguinte modo: M' é o ponto de intersecção do plano P com a recta d' , que passa por M e é paralela a d (ver a figura 1).

M' é designado *projecção* do ponto M no plano P paralelamente à recta d .

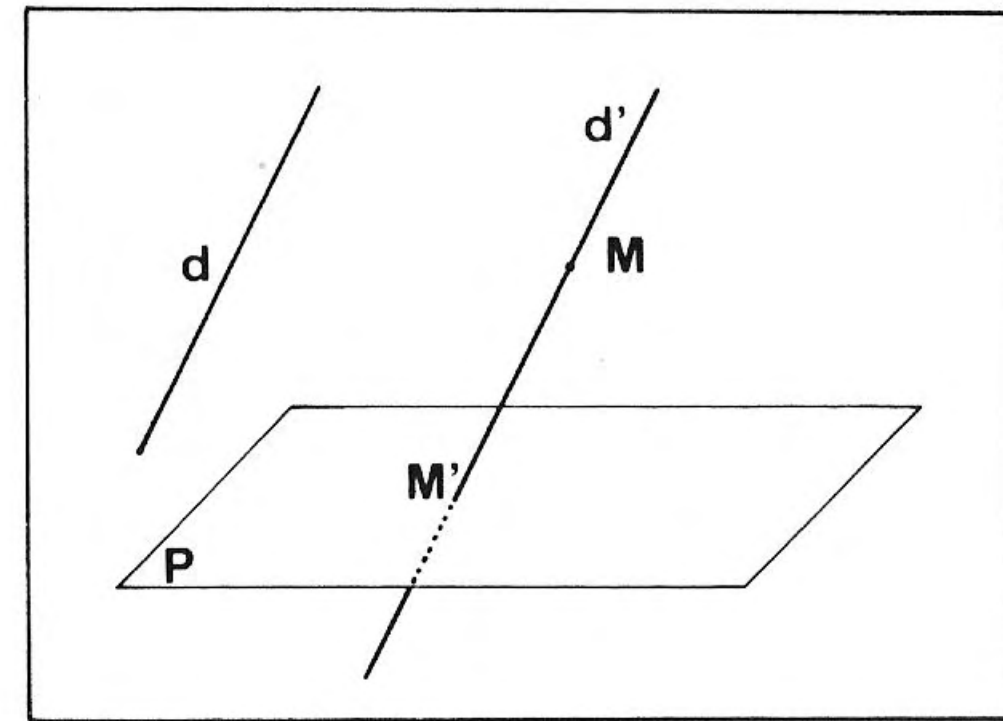


Fig. 1

2. Se d é perpendicular a P (figura 2), M' é a projecção ortogonal de M no plano P .

3. A transformação pontual que permite associar M' a M é uma projecção cilíndrica.

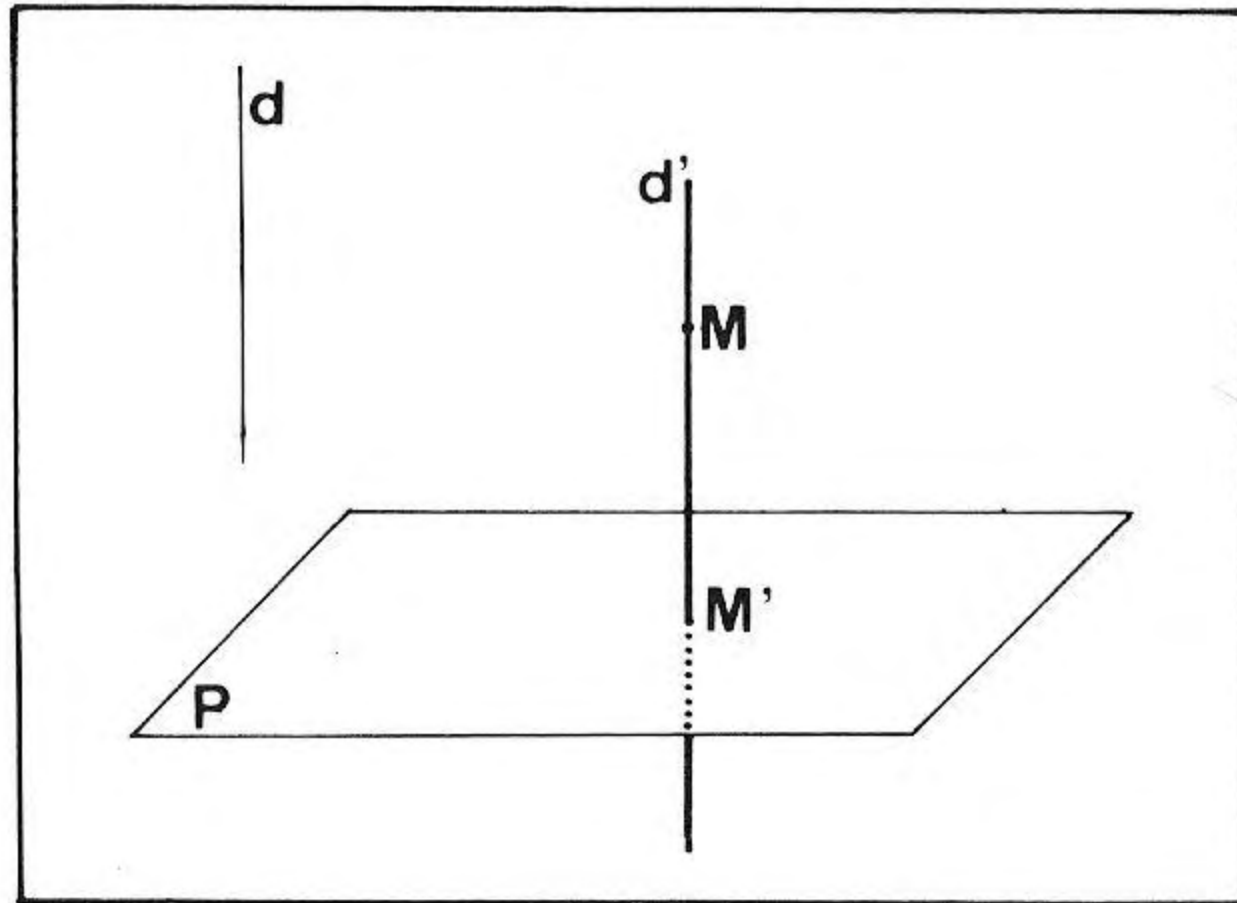


Fig. 2

2 Propriedades das projecções cilíndricas

Recordaremos aqui algumas das propriedades das projecções cilíndricas.

P designará o plano de projecção e d a recta segundo a qual se faz a projecção (d não é portanto paralela ao plano P).

1. Sejam A , B e C três pontos distintos e sejam A' , B' e C' as suas projecções no plano P paralelamente à recta d .

Se A , B e C se encontram alinhados e se a recta que contém estes pontos não é paralela a d , A' , B' e C' encontram-se igualmente alinhados (figura 3).

Se B se encontra entre A e C , B' encontra-se igualmente entre A' e C' .

Resulta daqui que a imagem de uma recta é uma recta (poderá ser excepcionalmente um ponto); a imagem de um segmento de recta é um segmento de recta (ou um ponto).

2. Sejam d' e d'' duas rectas paralelas, mas não paralelas a d . As suas projecções no plano P são rectas paralelas ou coincidentes (figura 4).

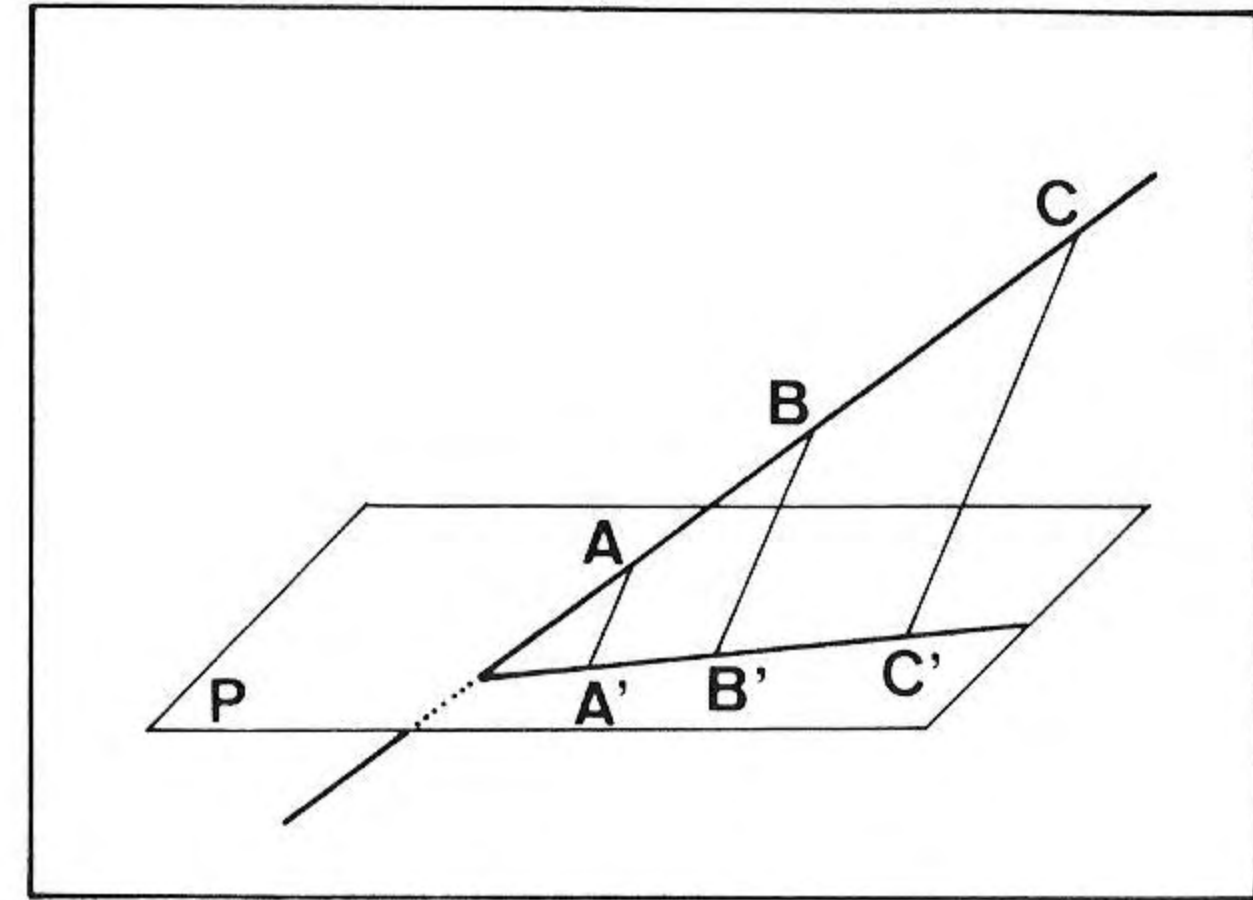


Fig. 3

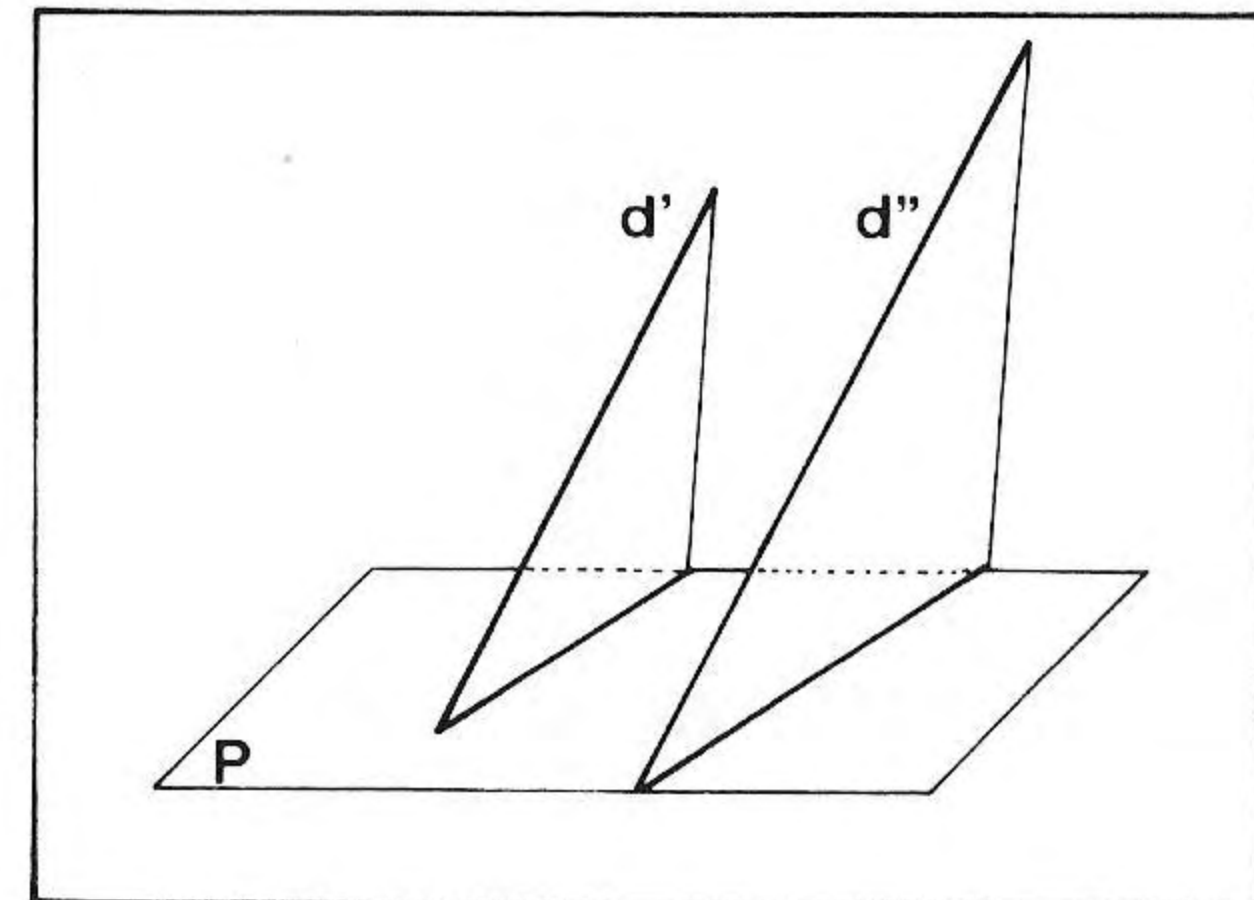


Fig. 4

3. Seja $ABCDE\dots$ um polígono plano convexo. A projecção $A'B'C'D'E'\dots$ deste polígono é igualmente um polígono convexo (figura 5).

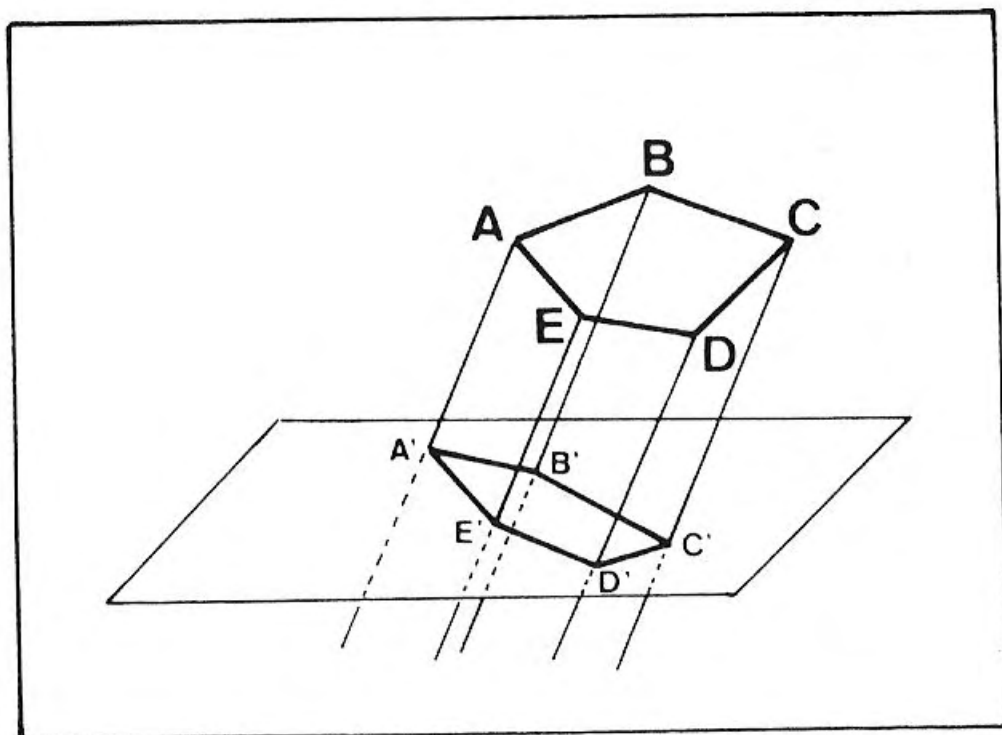


Fig. 5

4. Seja AB um segmento de recta. As projecções deste segmento em dois planos paralelos, paralelamente a uma recta d , são segmentos com o mesmo comprimento (figura 6).

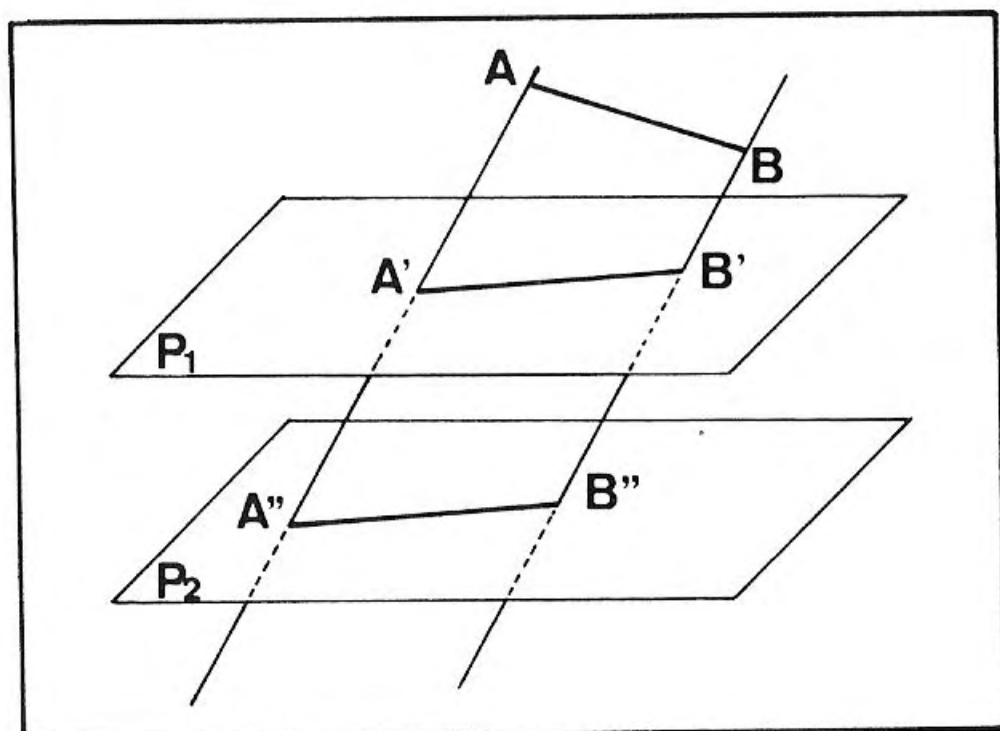


Fig. 6

3 Coordenadas da projecção de um ponto

Seja P um plano de equação $ax + by + cz + d = 0$ e seja Δ uma recta de vector director $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$.

Consideraremos que Δ não é paralela a P . Esta condição traduz-se pela relação:

$$a v_x + b v_y + c v_z \neq 0$$

Seja $M = (x_M, y_M, z_M)$ um ponto qualquer do espaço e seja $M' = (x', y', z')$ a sua projecção no plano P paralelamente a Δ . Propomo-nos calcular x' , y' e z' .

1. Caso geral

De acordo com o resultado do capítulo 4, parágrafo 1.4, existe um número k tal que:

$$\begin{aligned} x' &= x_M + k v_x \\ y' &= y_M + k v_y \end{aligned}$$

e

$$z' = z_M + k v_z$$

Dado que M' pertence ao plano P , poderemos escrever

$$ax' + by' + cz' + d = 0$$

resulta daqui que:

$$(a v_x + b v_y + c v_z) k + a x_M + b y_M + c z_M + d = 0$$

donde

$$k = - \frac{a x_M + b y_M + c z_M + d}{a v_x + b v_y + c v_z}$$

2. Caso de uma projecção ortogonal

Neste caso, Δ é perpendicular ao plano P . Podemos portanto escolher o vector (a, b, c) como vector director de Δ .

As fórmulas do parágrafo anterior transformam-se em:

$$\begin{aligned} x' &= x_M + k a \\ y' &= y_M + k b \\ z' &= z_M + k c \end{aligned}$$

$$\text{com } k = -\frac{ax_M + by_M + cz_M}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Decorre daqui o programa seguinte:

```

10 PRINT "O PONTO M TEM AS COO
RDENADAS X, Y, Z."
20 INPUT "X = "; X
30 INPUT "Y = "; Y
40 INPUT "Z = "; Z
50 CLS
60 PRINT "O PLANO P TEM A EQUA
CAO AX+BY+CZ+D=0"
70 INPUT "A = "; A
80 INPUT "B = "; B
90 INPUT "C = "; C
100 INPUT "D = "; D
110 LET H = A*X + B*Y + C*Z + D
120 LET R = A*A + B*B + C*C
130 IF R = 0 THEN GO TO 60
140 LET K = -H/R
150 REM RESULTADOS
160 CLS
170 PRINT "COORDENADAS DA PROJE
CCAO ORTOGONAL DE M SOBRE P:"
180 PRINT AT 5,0; "X = "; X+K*A
190 PRINT AT 6,0; "Y = "; Y+K*B
200 PRINT AT 7,0; "Z = "; Z+K*C
210 PRINT AT 14,0; "DISTANCIA DE
M AO PLANO P"
220 PRINT AT 15,0; "D(M,P) = "; A
BS H/ABS R

```

3. Distância de um ponto a um plano

Como a distância d do ponto M ao plano P é igual ao comprimento do segmento $[M, M']$, obtém-se:

$$d = \frac{|ax_M + by_M + cz_M|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

4 Perspectiva ortográfica

1. Para representar um objecto utilizam-se geralmente *vistas*: vista de frente, lateral, etc.

Cada uma destas vistas é uma projecção ortogonal num plano paralelo a um dos três planos xOy , xOz , zOy do sistema $Oxyz$ (figura 7).

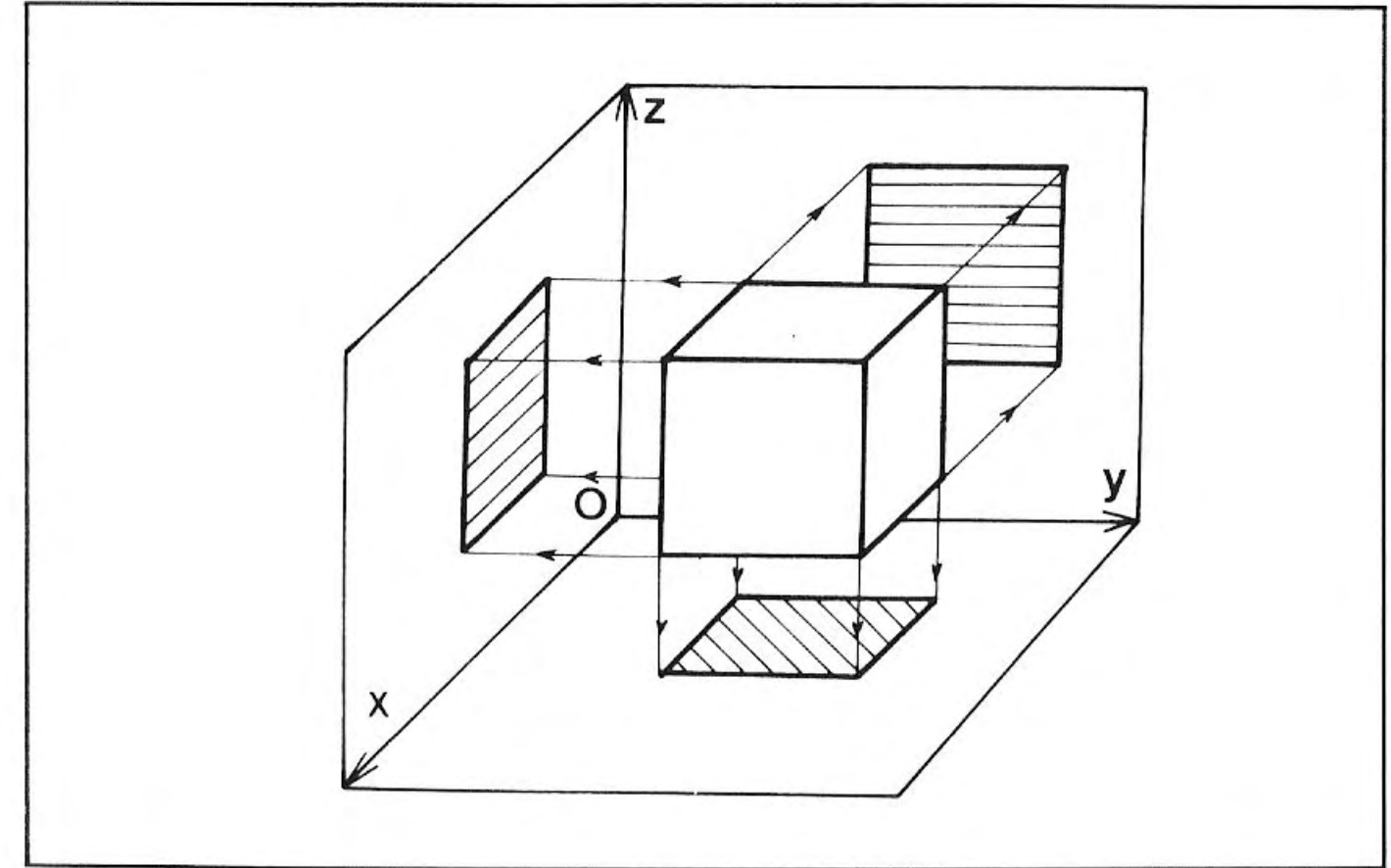


Fig. 7

2. Escolhamos como plano de projecção o plano xOy : a representação obtida é chamada *perspectiva ortográfica*.

Se $M' = (x', y', z')$ é a projecção de $M = (x, y, z)$ no plano xOy , vemos que $x' = x$, $y' = y$ e $z' = 0$.

De um modo geral, obtemos uma projecção ortográfica do ponto $M = (x, y, z)$ conservando duas coordenadas e igualando a terceira a zero.

3. A título de exemplo, representemos uma pirâmide de base quadrada $SABCD$ em projecção ortográfica. Consideraremos $A = (30, -30, 0)$, $B = (30, 30, 0)$, $C = (-30, 30, 0)$, $D = (-30, -30, 0)$ e $S = (0, 0, 90)$.

O programa é o seguinte:

```

10 DATA 30, -30, 0, 30, 30, 0, -30, 3
0, 0, -30, -30, 0, 0, 0, 90
20 DIM X(5)
30 DIM Y(5)
40 DIM Z(5)
50 FOR I=1 TO 5
60 READ X(I), Y(I), Z(I)
70 NEXT I
80 DATA 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 1, 5, 1, 5,
2, 5, 3, 5, 4

```

```

90 PRINT "USE 1, 2 OU 3 CONFOR
ME DESEJA A PROJECCAO EM XOY, XO
Z OU YOZ"
100 INPUT n
110 CLS
120 IF n=1 THEN GO SUB 200
130 IF n=2 THEN GO SUB 300
140 IF n=3 THEN GO SUB 400
150 GO TO 9999
200 FOR i=1 TO 8
210 READ a,b
220 PLOT 100+X(a),80+Y(a)
230 DRAW X(b)-X(a),Y(b)-Y(a)
240 NEXT i
250 RETURN
300 FOR i=1 TO 8
310 READ a,b
320 PLOT 100+X(a),Z(a)
330 DRAW X(b)-X(a),Z(b)-Z(a)
340 NEXT i
350 RETURN
400 FOR i=1 TO 8
410 READ a,b
420 PLOT 100+Y(a),Z(a)
430 DRAW Y(b)-Y(a),Z(b)-Z(a)
440 NEXT i
450 RETURN

```

As figuras 8 e 9 mostram-nos duas vistas desta pirâmide.

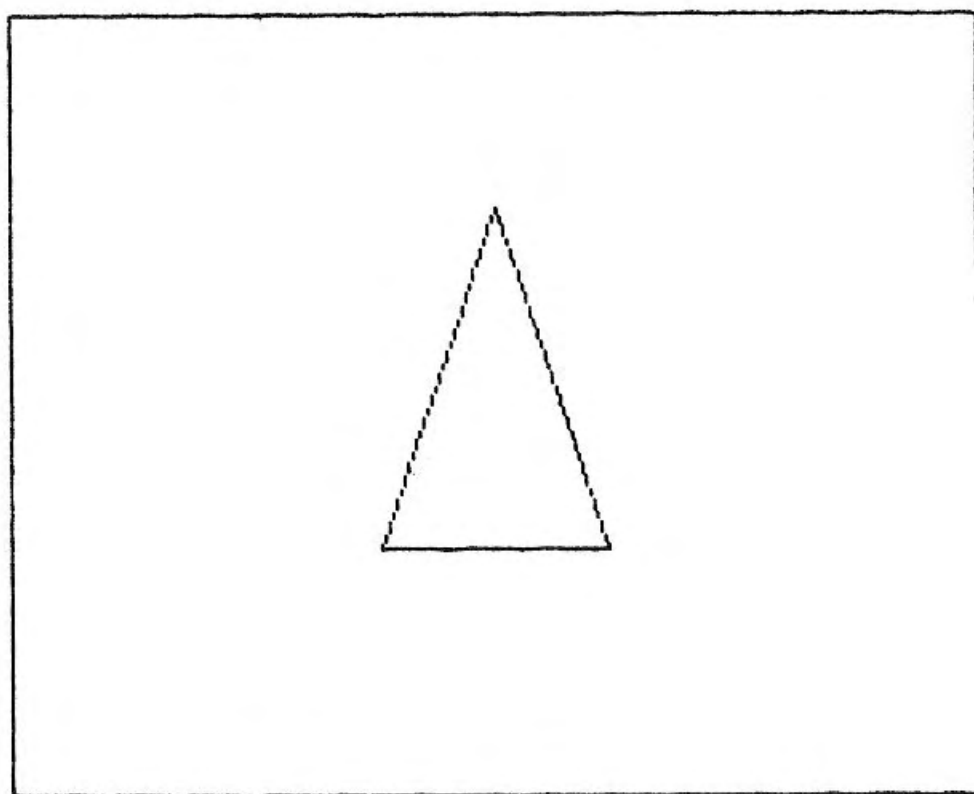


Fig. 8. — Projecção no plano ZOY.

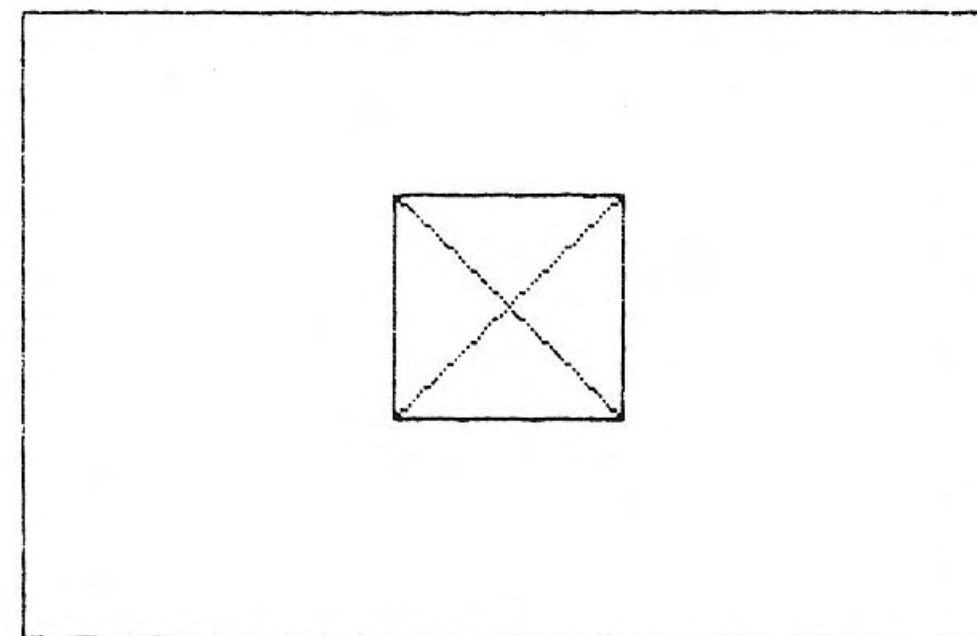


Fig. 9. — Projecção no plano XOY.

5 Perspectiva oblíqua

Seja P um plano qualquer e d uma recta não perpendicular a P. A projecção no plano P, paralelamente a d, de cada um dos pontos de um objecto constitui uma representação deste objecto designada por *perspectiva oblíqua* (figura 10).

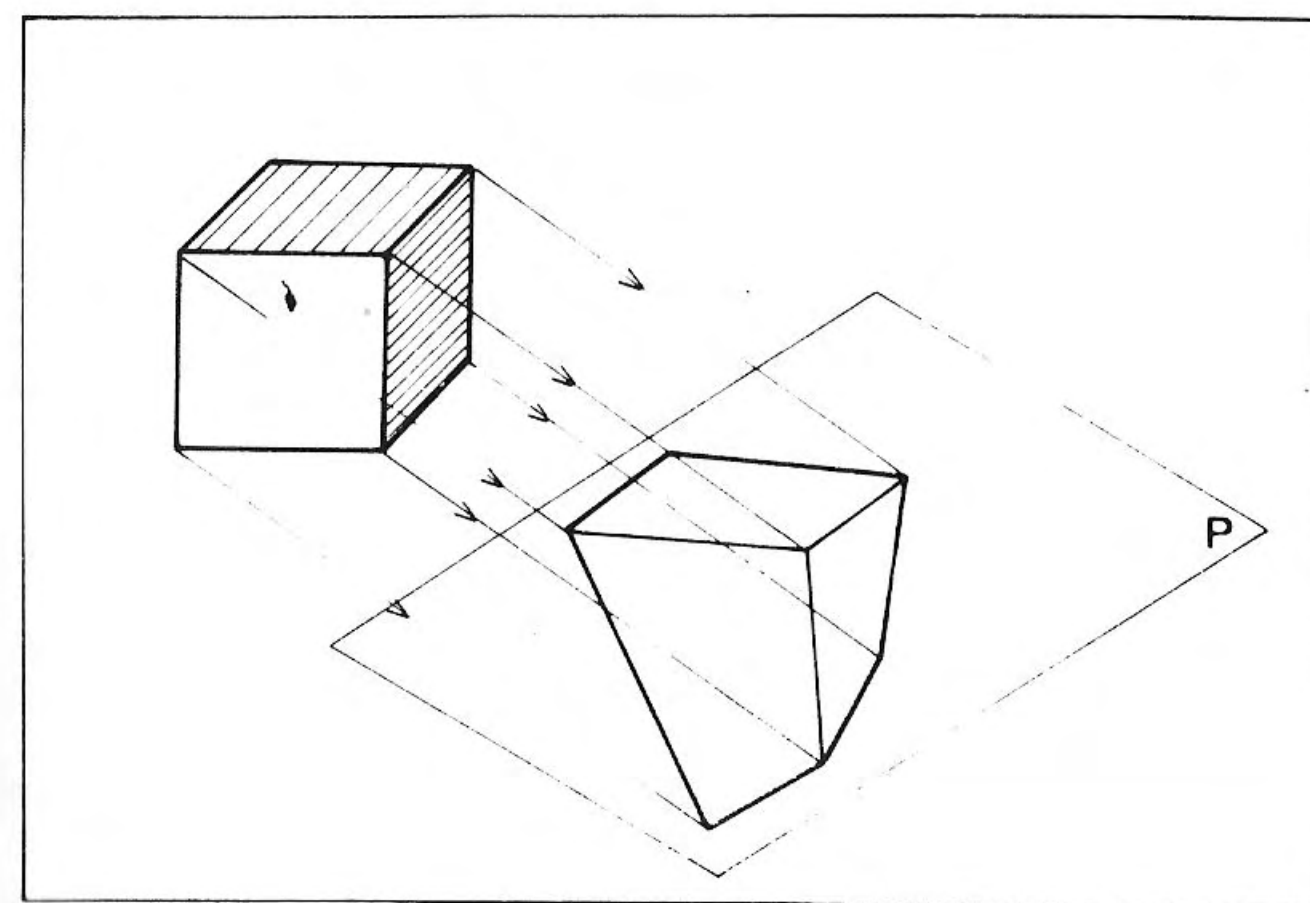


Fig. 10

1. Princípio da representação

Sendo o espaço referido a um sistema ortonormado $(O, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$, o plano P tem por equação $ax + by + cz + d = 0$, não sendo a, b e c simultaneamente nulos. De facto, podemos substituir P por um plano paralelo P' contendo o ponto O .

A equação deste plano é $ax + by + cz = 0$. Para obtermos a perspectiva oblíqua de um objecto, necessitamos de:

1. Encontrar um referencial $(O, \vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$ ortonormado e com o mesmo sentido que $(O, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$, ligado ao plano P' de tal modo que $(O, \vec{i}_2, \vec{k}_2)$ seja um referencial ortonormado directo deste plano P' .
2. Calcular, no sistema $(O, \vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$, as coordenadas da projecção sobre P' de cada um dos pontos do objecto a representar (naturalmente todas as suas coordenadas segundo \vec{j}_2 serão nulas).

2. Mudança de referencial

O vector $\vec{v} = (a, b, c)$ é normal (perpendicular) ao plano P' . Consideremos

$$d_1 = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

O vector $\vec{j}_2 = \left(\frac{a}{d_1}, \frac{b}{d_1}, \frac{c}{d_1}\right)$ é um vector unitário normal ao plano P' .

Escolhamos agora um vector no próprio plano P' , por exemplo o vector $(b, -a, 0)$.

Consideremos $d_2 = \sqrt{a^2 + b^2}$

Se a e b não forem simultaneamente nulos, o vector $\vec{i}_2 = \left(\frac{b}{d_2}, -\frac{a}{d_2}, 0\right)$ encontra-se igualmente contido em P' , unitário e ortogonal a \vec{j}_2 .

Consideremos então $\vec{k}_2 = \vec{i}_2 \wedge \vec{j}_2$.

Este vector é unitário, ortogonal a \vec{i}_2 e a \vec{j}_2 e está contido no plano P' .

O referencial $(O, \vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$ é portanto ortonormado e tem o mesmo sentido de $(O, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ (figura 11).

As coordenadas de \vec{k}_2 no primeiro sistema são:

$$-\frac{ac}{d_1 d_2}, -\frac{bc}{d_1 d_2}, \frac{a^2 + b^2}{d_1 d_2}$$

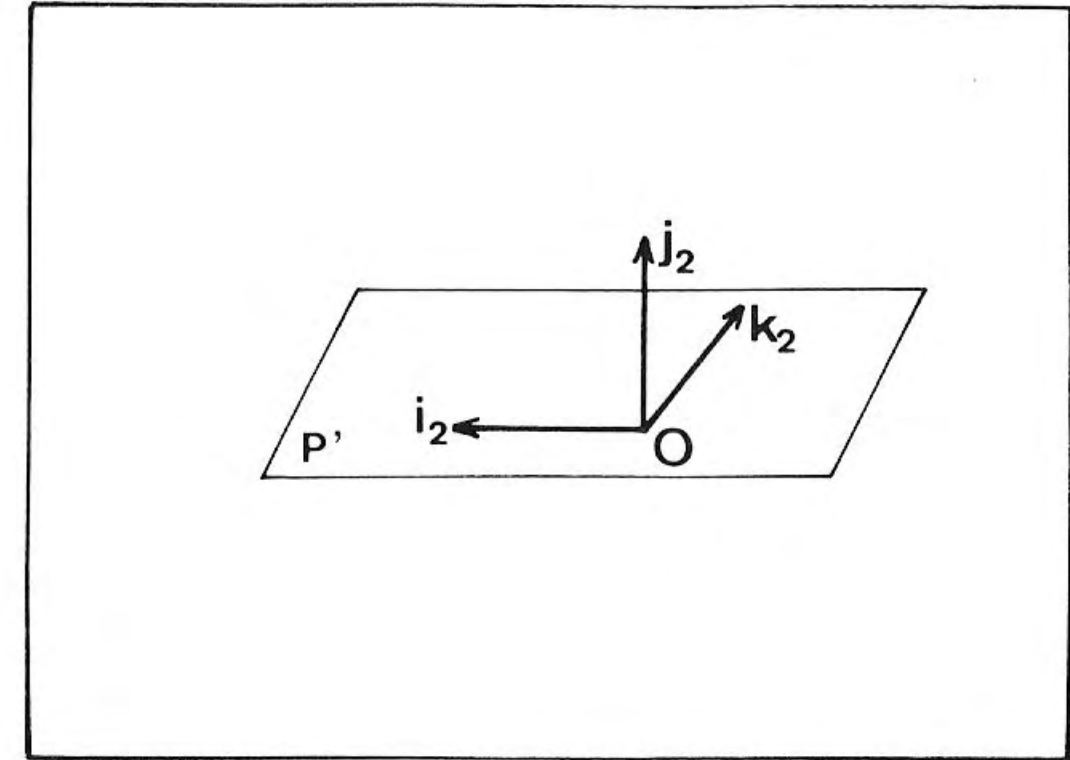


Fig. 11

3. Cálculo da imagem

Seja M' a projecção sobre P' de um ponto qualquer M do objecto a representar.

No sistema $(O, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$, M' terá as coordenadas x', y', z' , enquanto M terá as coordenadas x, y, z .

Sejam x'', y'' e z'' as coordenadas de M' relativamente ao sistema $(O, \vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$.

As fórmulas do capítulo 2, parágrafo 6.2, permitem-nos escrever:

$$x'' = \frac{b}{d_2} x' - \frac{a}{d_2} y'$$

$$y'' = \frac{a}{d_1} x' + \frac{b}{d_1} y' + \frac{c}{d_1} z' = 0$$

$$z'' = -\frac{ac}{d_1 d_2} x' - \frac{bc}{d_1 d_2} y' + \frac{a^2 + b^2}{d_1 d_2} z'$$

4. Exemplo

Retomemos o exemplo de uma pirâmide de base quadrada SABCD.

Depois de termos escolhido uma unidade de comprimento u_L , consideraremos

$$\begin{aligned} A &= (u_L, -u_L, 0) \\ B &= (u_L, u_L, 0) \\ C &= (-u_L, u_L, 0) \\ D &= (-u_L, -u_L, 0) \\ S &= (0, 0, 3u_L) \end{aligned}$$

O programa que permite obter uma perspectiva oblíqua desta pirâmide é constituído por cinco partes.

1. Descrição da pirâmide (ver capítulo 7):

```

10 REM descricao da piramide
20 INPUT "ESCOLHA UMA UNIDADE
DE COMPRIMENTO ";UL
30 DATA UL,-UL,0,UL,UL,0,-UL,U
L,0,-UL,-UL,0,0,0,3*UL
40 DIM X(5)
50 DIM Y(5)
60 DIM Z(5)
70 FOR I=1 TO 5
80 READ X,Y,Z
90 LET X(I)=X*UL
100 LET Y(I)=Y*UL
110 LET Z(I)=Z*UL
120 NEXT I
130 DATA 1,2,2,3,3,4,4,1,5,1,5,
2,5,3,5,4

```

2. Características da projecção: equação $ax + by + cz = 0$ do plano P' e vector director $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ que caracteriza a recta Δ .

```

135 REM caracteristicas da proj
eccao
140 PRINT "A EQUACAO DO PLANO D
E PROJECCAO E' AX+BY+CZ=0 (A,B,C
NAO NULOS)"
150 INPUT "INDIQUE A ";a
160 INPUT "INDIQUE B ";b
170 INPUT "INDIQUE C ";c
180 CLS
190 IF a=0 AND b=0 AND c=0 THEN
GO TO 9999
200 IF a=0 AND b=0 THEN PRINT "
CASO EXCLUIDO"; GO TO 9999

```

```

210 PRINT "A PROJECCAO E FEITA
DIRRECTA- MENTE A UMA RECTA DE
VECTOR DIRECTOR (UX,UY,UZ)"
220 INPUT "INDIQUE UX ";VX
230 INPUT "INDIQUE UY ";VY
240 INPUT "INDIQUE UZ ";VZ
250 LET q=a*VX+b*VY+c*VZ
260 IF q=0 THEN PRINT "IMPOSSIV
EL"; GO TO 9999
270 CLS

```

3. Cálculo da imagem: calculam-se primeiramente as coordenadas x' , y' e z' da projecção de cada vértice da pirâmide; x' , y' e z' são representadas pelas variáveis s , t e q .

Calculam-se em seguida as coordenadas x'' e z'' destas projecções relativamente ao novo referencial $(O, \vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$. As variáveis x'' e z'' são representadas por u e v . Determinam-se igualmente nesta parte os valores extremos de u e de v .

```

270 REM calculo da projeccao
280 DIM s(5)
290 DIM t(5)
300 DIM q(5)
310 FOR I=1 TO 5
320 LET k=-(a*X(I)+b*Y(I)+c*Z(I))/q
330 LET s(I)=X(I)+k*VX
340 LET t(I)=Y(I)+k*VY
350 LET q(I)=Z(I)+k*VZ
360 NEXT I
370 DIM u(5)
380 DIM v(5)
390 LET d1=5000 (a*a+b*b+c*c)
400 LET d2=5000 (a*a+b*b)
410 LET umin=-10000
420 LET umax=-10000
430 LET vmin=-10000
440 LET vmax=10000
450 FOR I=1 TO 5
460 LET u(I)=(b*s(I)-a*t(I))/d2
470 LET v(I)=-(a*c*s(I)+b*c*t(I)-
(a*a+b*b)*q(I))/d1/d2
480 IF u(I)<umin THEN LET umin=
u(I)
490 IF v(I)<vmin THEN LET vmin=
v(I)
500 IF v(I)>vmax THEN LET vmax=
v(I)
510 IF u(I)>umax THEN LET umax=
u(I)
520 NEXT I

```

4. A imagem obtida é adaptada às dimensões do visor (ver o capítulo 3).

```

0025 REM enquadramento da imagem
0030 LET K=(Vmax-Vmin)/(Umax-Umi
n)
0040 IF K>0.5 THEN LET a=150
0050 IF K>0.5 THEN LET b=5/5
0060 IF K<0.5 THEN LET c=200
0070 IF K<0.5 THEN LET b=1.5
0080 LET e1=1/(Umax-Umi)
0090 LET e2=5/(Vmax-Vmi)
0100 LET e3=100-1/2-51+Umi
0110 LET e4=100-5/2-51+Vmi
0120 FOR i=1 TO 5
0130 LET U(i)=e1#U(i)+e3
0140 LET V(i)=e2#V(i)+e4
0150 NEXT i

```

5. Desenha-se finalmente o objecto.

```

0055 REM tracado
0060 FOR p=1 TO 5
0070 READ i,j
0080 PLOT U(i),V(i)
0090 DRAW U(j)-U(i),V(j)-V(i)
0100 NEXT p

```

As figuras 12 e 13 mostram dois aspectos da pirâmide SABCD.

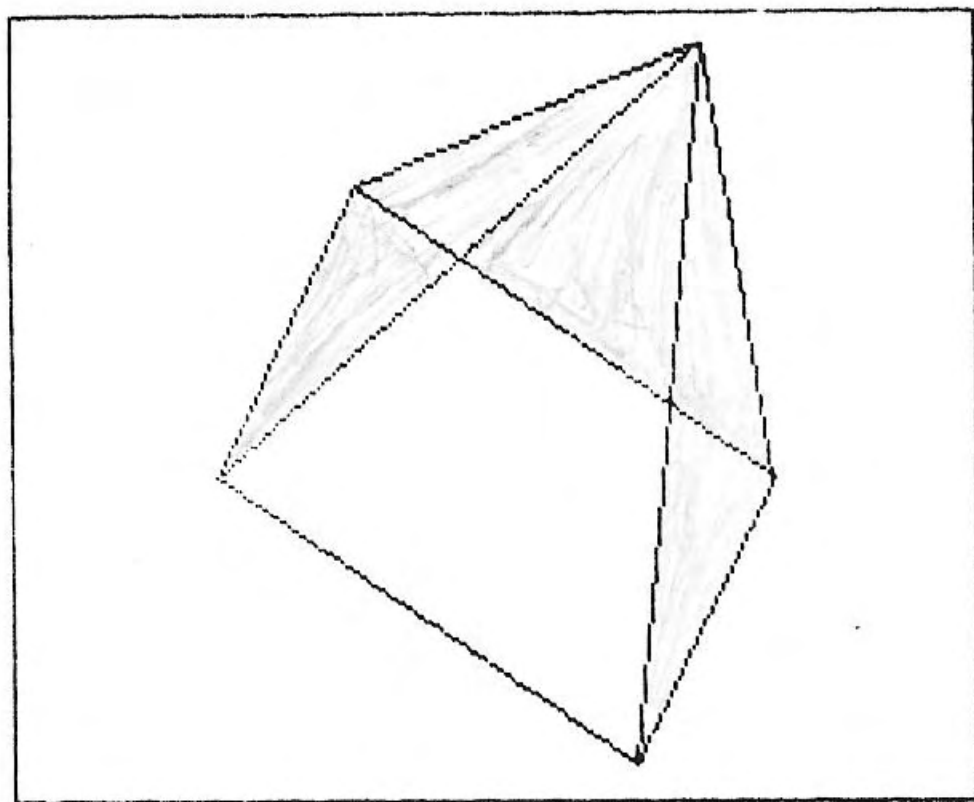


Fig. 12

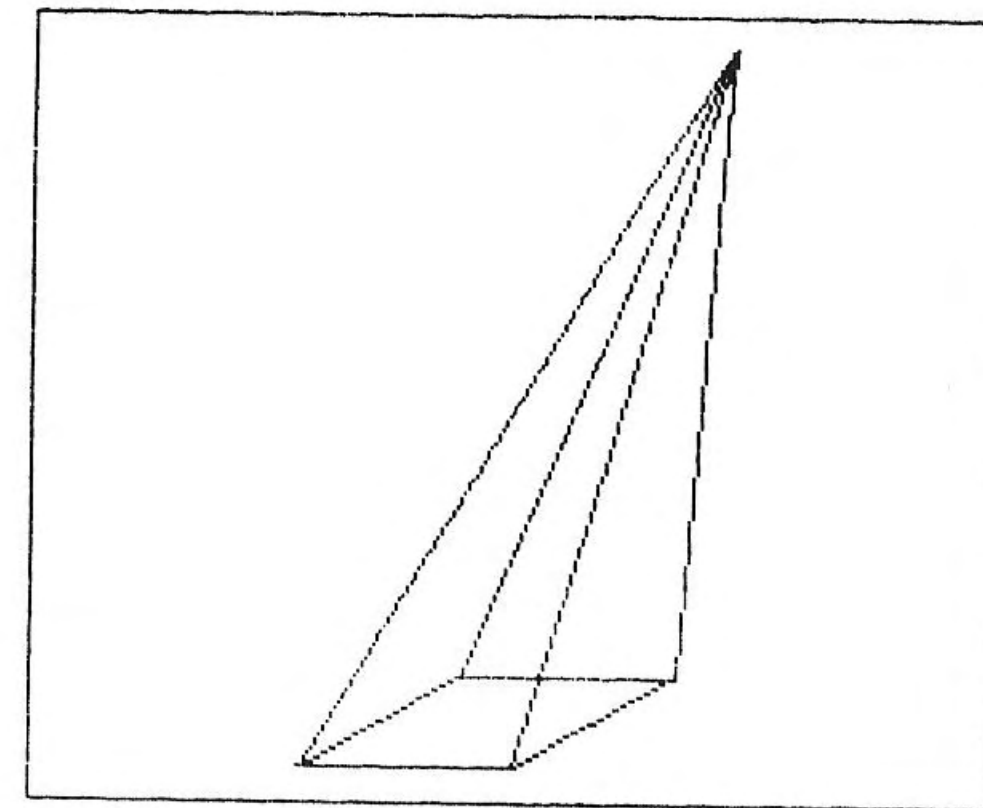


Fig. 13

6 Projecção de uma curva não contida num plano

Pode representar-se uma curva deste tipo recorrendo a projecções num plano.

1. Definição

Seja $Oxyz$ um sistema de coordenadas ortonormado e sejam f , g e h três funções da variável t .

Consideremos $x = f(t)$, $y = g(t)$ e $z = h(t)$. Os três números x , y , z assim definidos podem ser considerados como coordenadas de um ponto do espaço. Para t variando entre t_1 e t_2 , define-se assim uma curva do espaço.

2. Programa

Para obter um programa que permita desenhar uma curva $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$ em projecção num plano de equação $ax + by + cz = 0$, basta modificar ligeiramente o programa anterior.

```

5 REM definicao da curva
10 DEF FN f(t)=COS t
20 DEF FN g(t)=SIN t
30 DEF FN h(t)=t
35 REM intervalo de definicao
40 INPUT "MINIMO DE T? ";tmin
50 INPUT "MAXIMO DE T? ";tmax
60 INPUT "O INTERVALO ITMIN,ITM
AXI ESTA DIVIDIDO EM N PARTES I
SUBIS. INDIQUE N: ";n
70 DIM t(1+n): DIM x(1+n): DIM
y(1+n): DIM z(1+n)
80 FOR i=1 TO 1+n
90 LET t(i)=tmin+(i-1)*(tmax-t
min)/n
100 NEXT i
110 FOR i=1 TO 1+n
120 LET x(i)=FN f(t(i))
130 LET y(i)=FN g(t(i))
140 LET z(i)=FN h(t(i))
141 NEXT i
145 REM caracteristicas da proj
eccao
150 PRINT "A EQUACAO DO PLANO D
E PROJECCAO E' AX+BY+CZ=0 (A,B,C
NAO NULOS)"
160 INPUT "INDIQUE A ";a
170 INPUT "INDIQUE B ";b
180 INPUT "INDIQUE C ";c
190 IF a=0 AND b=0 AND c=0 THEN
GO TO 9999
200 IF a=0 AND b=0 THEN PRINT "
IMPOSSIVEL": GO TO 9999
210 PRINT "A PROJECCAO E' FEITA
PARALELA- NENTE A UMA RECTA DE
VECTOR DIRECTOR (UX,UY,UZ)"
220 INPUT "INDIQUE UX ";vx
230 INPUT "INDIQUE UY ";vy
240 INPUT "INDIQUE UZ ";vz
250 LET q=a*vx+b*vy+c*vz
260 IF q=0 THEN PRINT "IMPOSSIV
EL": GO TO 9999
270 GOTO
275 REM calculo da projeccao
280 FOR i=1 TO n+1
290 LET k=-(a*x(i)+b*y(i)+c*z(i)
)
300 LET x(i)=x(i)+k*vX
310 LET y(i)=y(i)+k*vY
320 LET z(i)=z(i)+k*vZ
330 NEXT i
340 DIM u(n+1)
350 DIM v(n+1)
360 LET d1=SQRT (a*a+b*b+c*c)
370 LET d2=SQRT (a*a+b*b)

```

```

410 LET umin=-10000
420 LET umax=-10000
430 LET vmax=-10000
440 LET vmin=10000
450 FOR i=1 TO n+1
460 LET u(i)=(b*x(i)-a*y(i))/d2
470 LET v(i)=-(a*c*x(i)+b*c*y(i)
)-(a*a+b*b)*z(i)/d1/d2
480 IF u(i)<umin THEN LET umin=
u(i)
490 IF v(i)<vmin THEN LET vmin=
v(i)
500 IF v(i)>vmax THEN LET vmax=
v(i)
510 IF u(i)>umax THEN LET umax=
u(i)
520 NEXT i
530 REM enquadramento da imagem
540 LET k=(vmax-vmin)/(umax-umi
n)
550 IF k>0.6 THEN LET h=150
560 IF k>0.6 THEN LET l=h/k
570 IF k<=0.6 THEN LET l=250
580 IF k<=0.6 THEN LET h=l*k
590 LET a1=l/(umax-umin)
600 LET a2=h/(vmax-vmin)
610 LET b1=128-l/2-a1*umin
620 LET b2=64-h/2-a2*vmin
630 FOR i=1 TO n+1
640 LET u(i)=a1*u(i)+b1
650 LET v(i)=a2*v(i)+b2
660 NEXT i
670 REM tracado
680 FOR i=1 TO n
690 PLOT u(i),v(i)
700 DRAW u(i+1)-u(i),v(i+1)-v(i)
710 NEXT i

```

Para utilizar este programa, deveremos primeiramente definir a curva nas linhas 10, 20 e 30 graças a três instruções DEF FN.

3. Exemplo

As figuras 14, 15 e 16 representam uma hélice circular que admite como representação paramétrica $x=R \cos t$, $y=R \sin t$ e $z=kt$.

A figura 14 representa uma projecção ortogonal desta hélice no plano zOy.

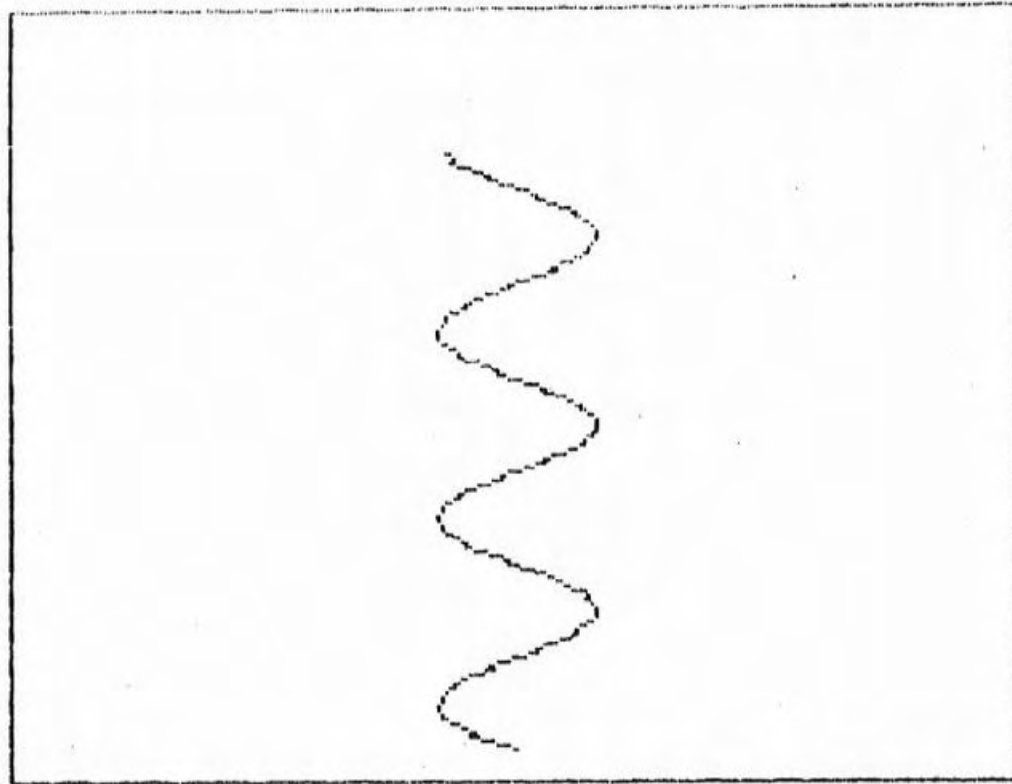


Fig. 14

No caso da figura 15, utilizou-se uma projecção no plano xOz paralelamente à recta de vector director $(1, 1, 1)$.

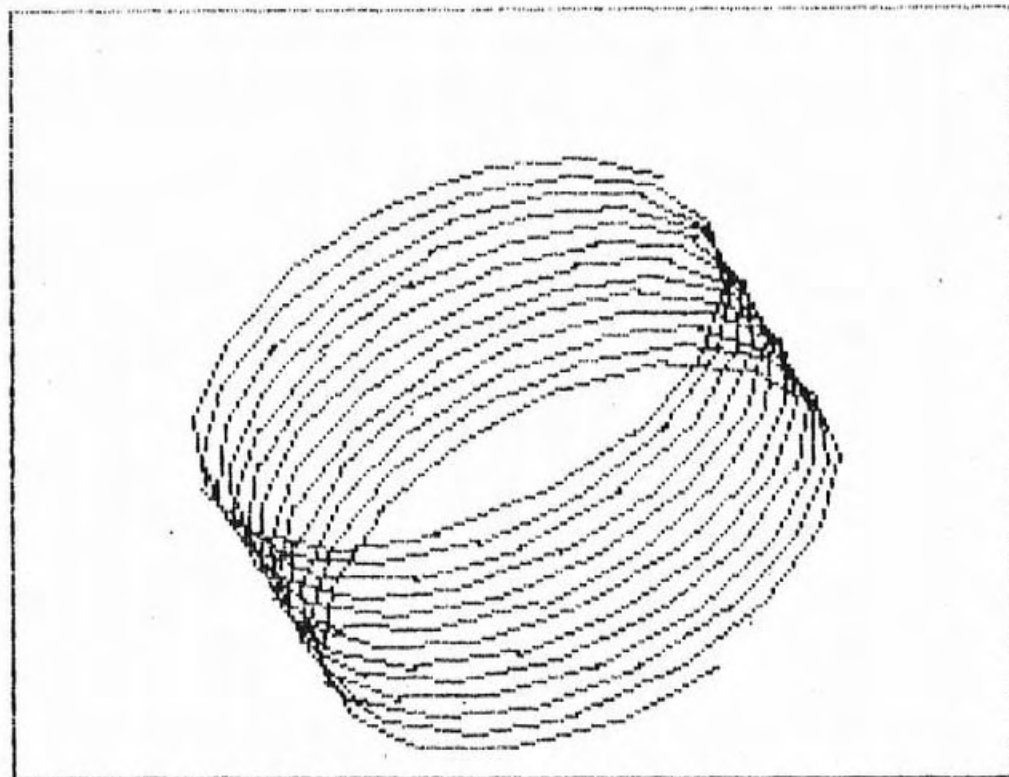


Fig. 15

A figura 16 representa finalmente uma projecção da hélice no plano $x + y + z = 0$, paralelamente à recta de vector director $(1, 0, 1)$.

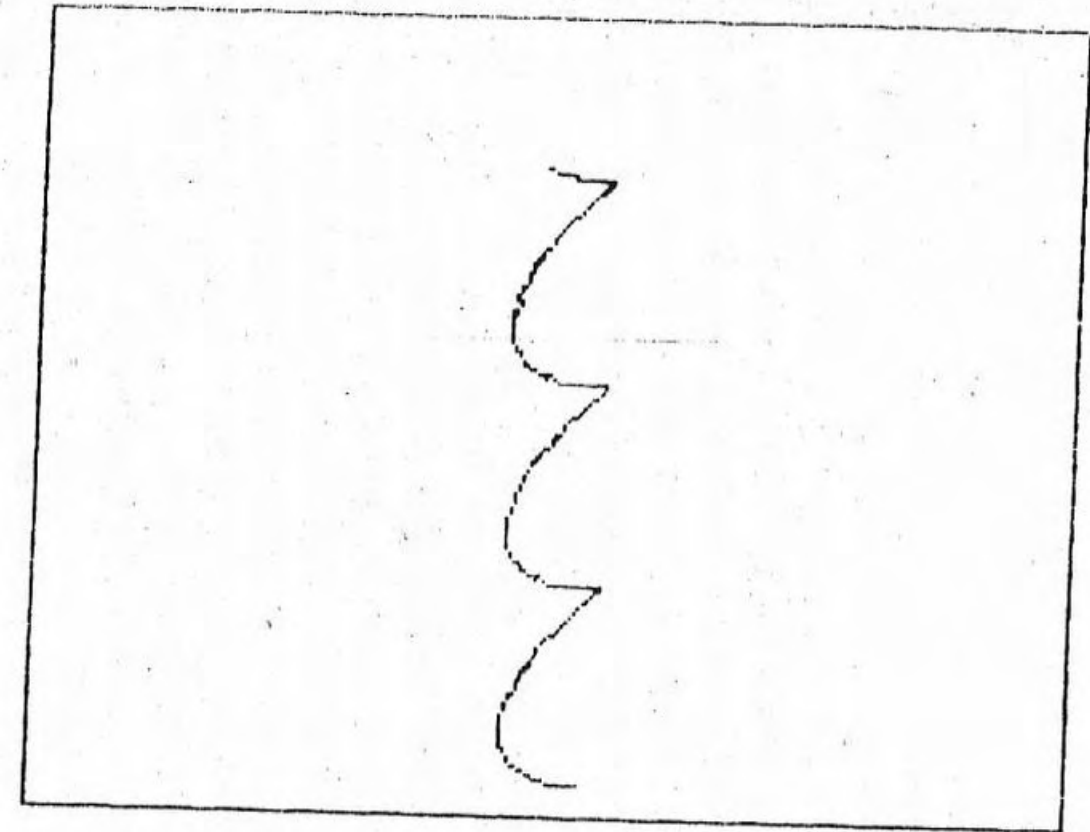


Fig. 16

A PERSPECTIVA CAVALEIRA

Utilizada em pintura desde o século XIV, a *perspectiva cavaleira* serviu, a partir do século XV, para a representação das construções fortificadas (figura 1).

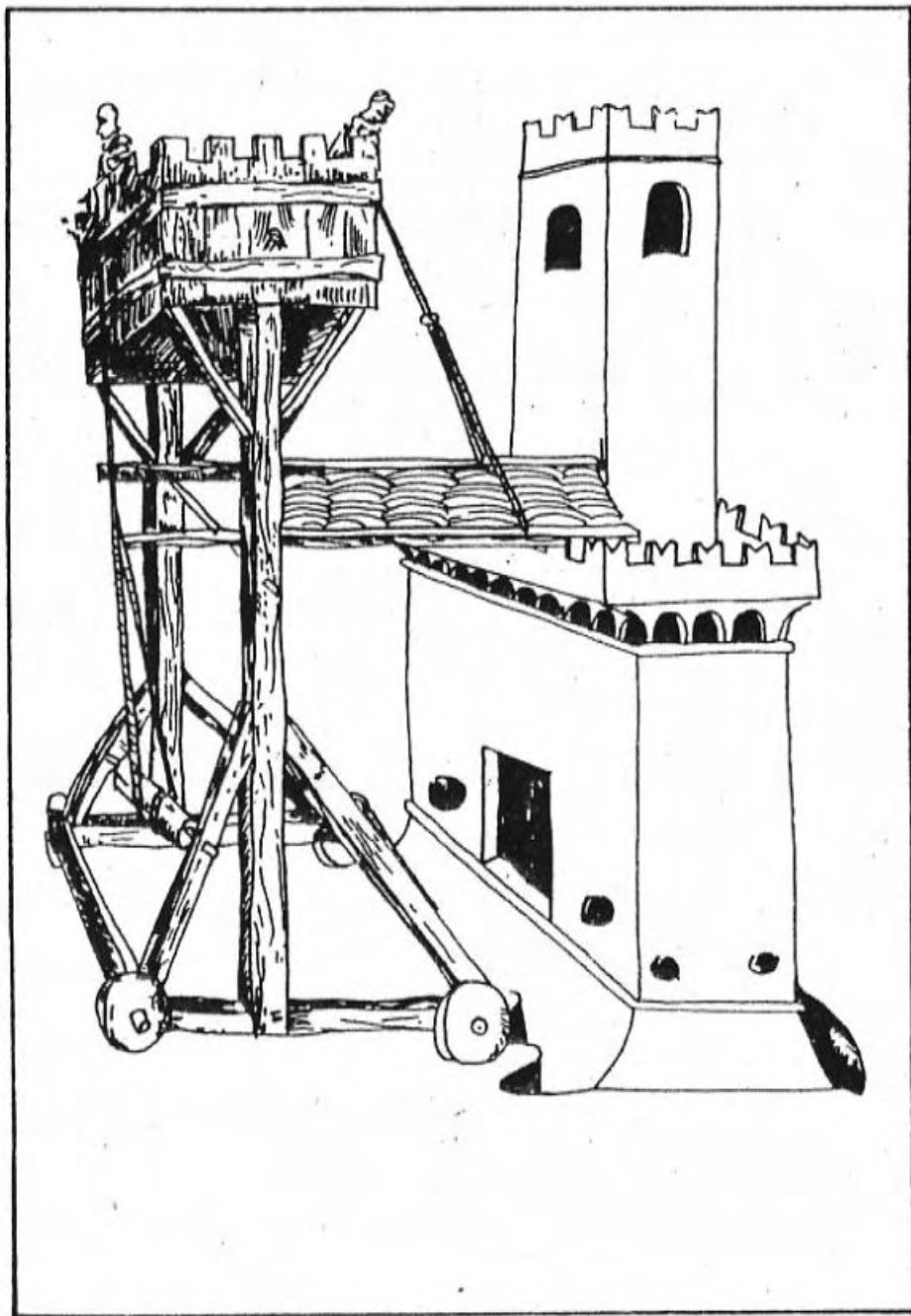


Fig. 1 — Torre de assalto a uma fortaleza. Século XIV.

No vocabulário da época usava-se por vezes o termo «cavaleiro» a propósito de uma parte fortificada situada atrás de uma obra defensiva.

Mais tarde a perspectiva cavaleira foi praticamente reservada ao uso em arquitectura e em desenho técnico.

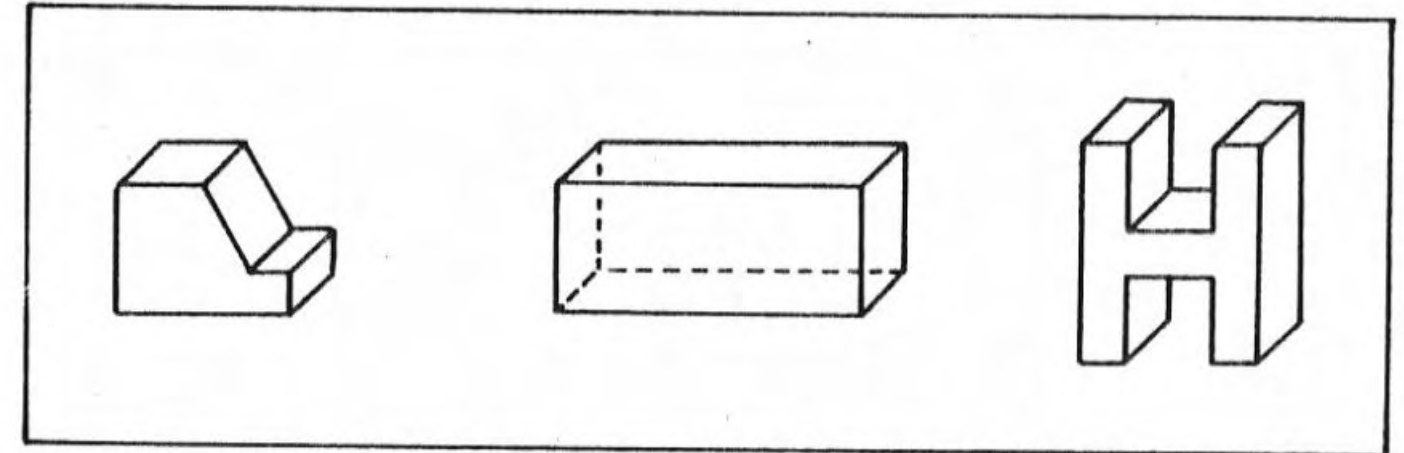


Fig. 2

Caso particular das projecções cilíndricas, a perspectiva cavaleira permite apresentar o volume e o relevo de um modo simples (figura 2).

1 Representação de um poliedro

Para obter uma perspectiva cavaleira de um objecto poliédrico, por exemplo um cubo ou um paralelepípedo, existem algumas regras bastante fáceis de usar na prática.

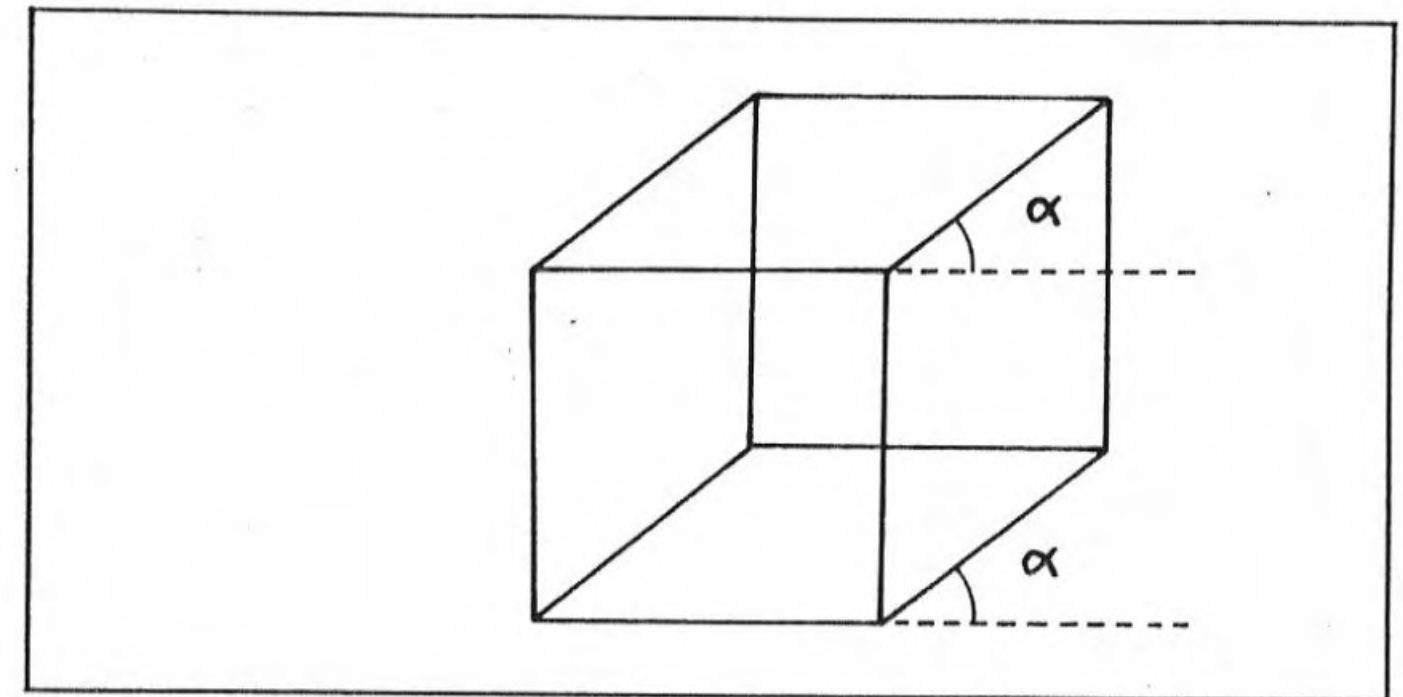


Fig. 3

1. Escolhe-se uma das faces do objecto como face principal. O plano de projecção será paralelo ao plano que contém esta face.
2. Qualquer face do objecto contida num plano paralelo ao plano de projecção é representada sem deformação, em tamanho natural.
3. Qualquer aresta perpendicular ao plano de projecção é representada por um segmento fazendo um determinado ângulo α com a horizontal. Este ângulo α , escolhido de início, é designado ângulo de fuga (figura 3).

A imagem de uma aresta perpendicular ao plano de projecção é uma recta de fuga.

4. O comprimento desta recta de fuga é obtido multiplicando o comprimento verdadeiro da aresta por um número k compreendido entre 0 e 1. k é o coeficiente de redução da perspectiva.

As regras precedentes são válidas para um desenho à escala 1. No caso de uma escala diferente, multiplicam-se os comprimentos correspondentes à escala 1 pelo número apropriado, designado factor de escala.

2 Representação de um círculo

A representação das curvas em perspectiva cavaleira não obedece a regras tão simples como as apresentadas anteriormente. Limitamo-nos geralmente aos círculos, utilizando então as duas regras seguintes:

1. Qualquer círculo contido num plano paralelo ao plano de projecção é representado em tamanho natural, sem deformações (figura 4).

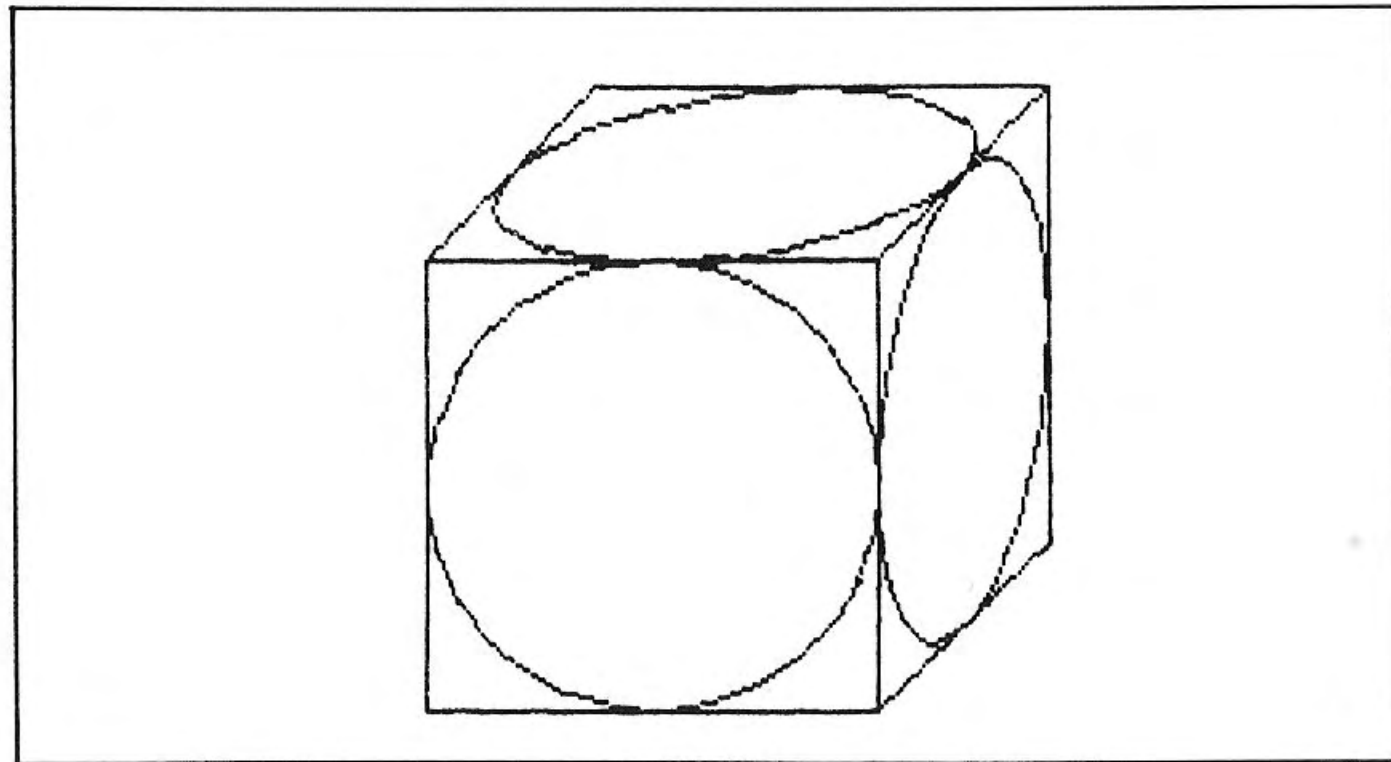


Fig. 4

2. Qualquer círculo contido num plano não paralelo ao plano de projecção é representado por uma elipse (figura 4).

3 Fórmulas de cálculo

Seja $M = (x, y, z)$ um ponto qualquer do objecto a representar em perspectiva cavaleira. Esta é definida por um ângulo de fuga α e um coeficiente de redução k .

O ponto M' , imagem de M nesta perspectiva, tem como coordenadas u e v relativamente a um sistema ortonormado $O'uv$ do plano de projecção. Propomo-nos calcular u e v em função de x , y e z .

1. Cálculos

Em vez de utilizarmos as fórmulas do capítulo 5, parágrafo 5.3, vamos recorrer às regras enunciadas no parágrafo 1 anterior.

Sejam H , C e D as projecções ortogonais do ponto M nos planos xOy , yOz e xOz . Definimos assim um paralelepípedo recto de dimensões x , y e z (figura 5).

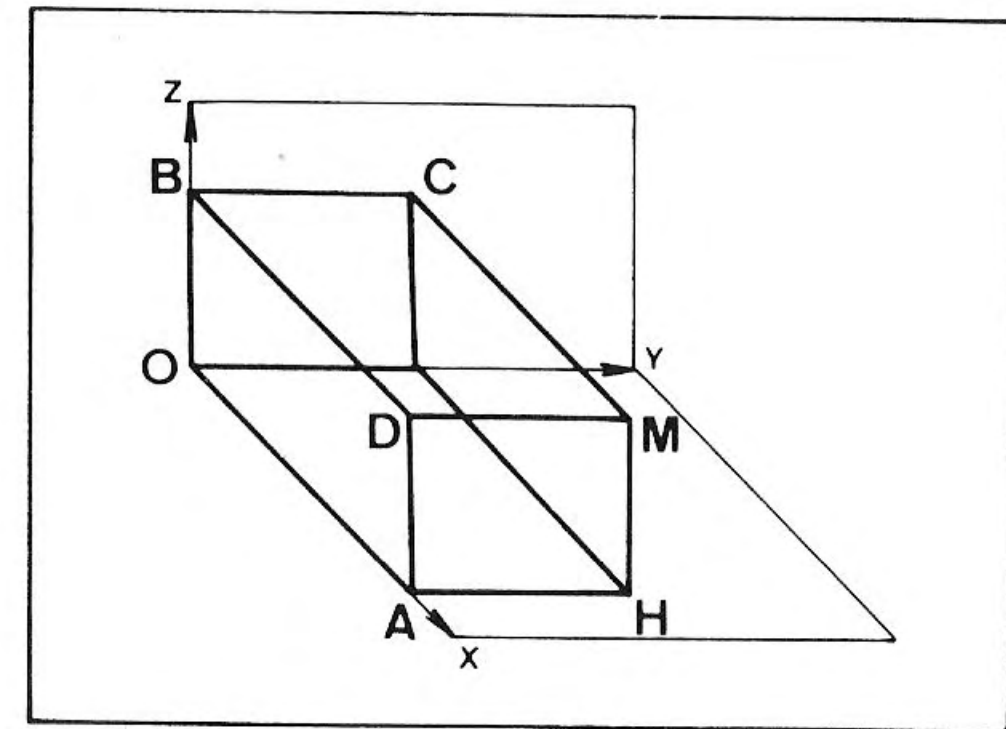


Fig. 5

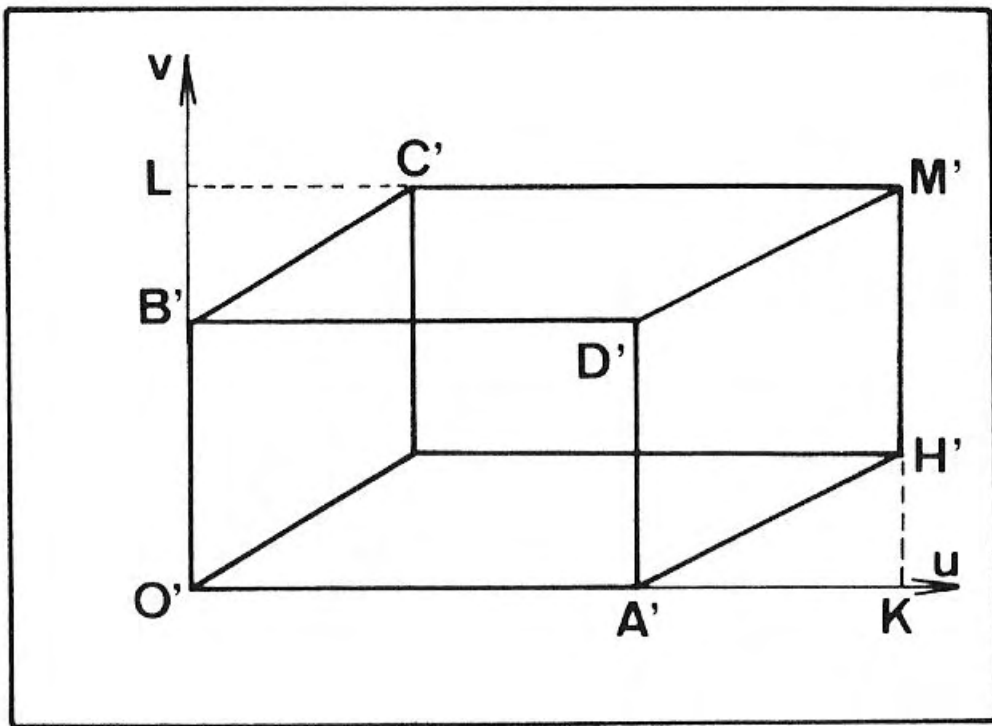


Fig. 6

A figura 6 mostra a perspectiva cavaleira deste paralelepípedo, desenhada no plano de projecção. As arestas OA e OB são vistas em tamanho natural:

$$\overline{O'A'} = \overline{OA} = x$$

e

$$\overline{O'B'} = \overline{OB} = z$$

As arestas BC e AH são representadas respectivamente pelos segmentos de fuga B'C' e A'H'.

Teremos, portanto, $\overline{B'C'} = k \overline{BC}$ e $\overline{A'H'} = k \overline{AH}$.
Resulta daqui:

$$\overline{B'C'} = \overline{A'H'} = k y$$

Como

$$\overline{O'L} = \overline{O'B} + \overline{B'L}$$

e

$$\overline{O'K} = \overline{O'A} + \overline{A'K}$$

obtemos

$$\overline{O'L} = \overline{O'B'} + \overline{B'C'} \text{ sen } \alpha$$

e

$$\overline{O'K} = \overline{O'A'} + \overline{A'H'} \text{ cos } \alpha$$

ou seja,

$$u = x + k y \text{ cos } \alpha$$

e

$$v = z + k y \text{ sen } \alpha$$

2. Fórmulas

Uma perspectiva cavaleira associa portanto o ponto $M' = (u, v)$ do plano de projecção ao ponto do espaço $M = (x, y, z)$.

Se α for o ângulo de fuga, e k o coeficiente de redução, teremos:

$$u = x + k y \text{ cos } \alpha$$

$$v = z + k y \text{ sen } \alpha$$

3. No programa, poderemos substituir $k \text{ cos } \alpha$ e $k \text{ sen } \alpha$ por coeficientes numéricos calculados previamente.

Por exemplo, para $k = 0,5$ e $\alpha = 45^\circ$, poderemos escrever $u = x + 0,353 y$ e $v = z + 0,353 y$.

4 Um exemplo detalhado: o cubo

Escolhamos um cubo cujas dimensões dependam de uma unidade de comprimento $u_L \leq 50$.

A figura 7 indica o referencial escolhido e a numeração dos vértices.

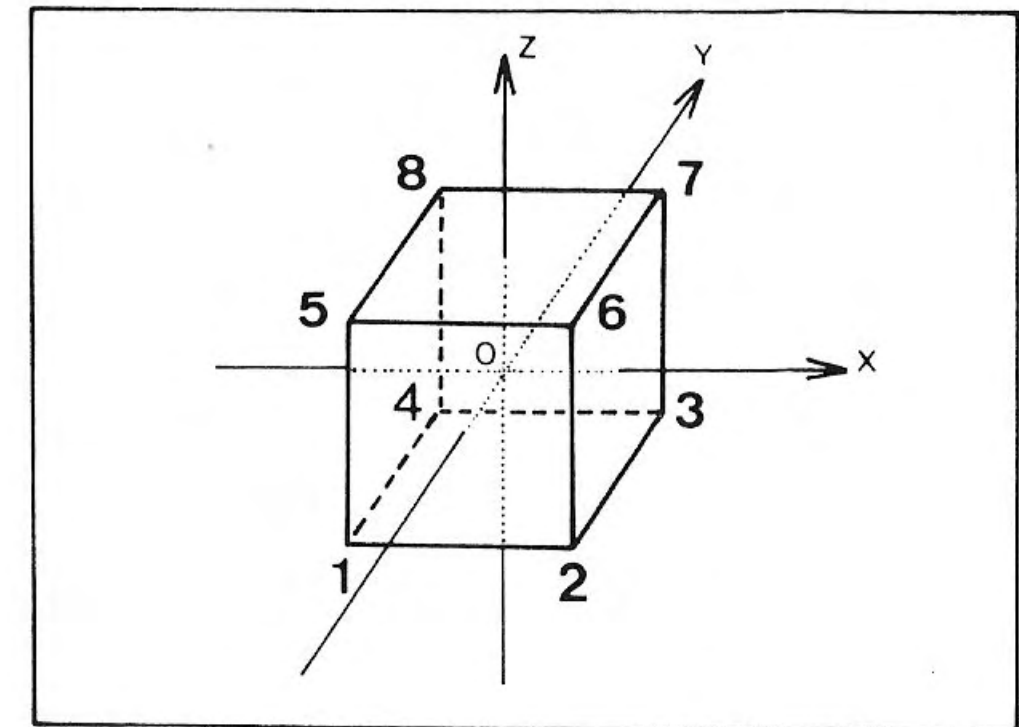


Fig. 7

1. Programa

Este programa é constituído por cinco partes.

1. Calculemos, no sistema de coordenadas escolhido, as coordenadas de cada um dos oito vértices.

Os resultados são apresentados na tabela seguinte:

| N.º do vértice | x | y | z |
|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 1 | -u _L | -u _L | -u _L |
| 2 | u _L | -u _L | -u _L |
| 3 | u _L | u _L | -u _L |
| 4 | -u _L | u _L | -u _L |
| 5 | -u _L | -u _L | u _L |
| 6 | u _L | -u _L | u _L |
| 7 | u _L | u _L | u _L |
| 8 | -u _L | u _L | u _L |

Estas coordenadas são colocadas em memória graças a uma instrução DATA:

```

10 INPUT "ESCOLHA UMA UNIDADE
DE COMPRI-    MENTO ";UL
20 DATA -1,-1,-1,1,-1,-1,1,1,-
1,-1,1,-1,-1,-1,1,1,-1,1,1,1,1,-
1,1,1
30 DIM X(8)
40 DIM Y(8)
50 DIM Z(8)
60 FOR I=1 TO 8
70 READ X,Y,Z
80 LET X(I)=X*UL
90 LET Y(I)=Y*UL
100 LET Z(I)=Z*UL
110 NEXT I

```

2. A ordem pela qual as arestas serão traçadas é igualmente colocada em memória graças a uma segunda instrução DATA.

Cada aresta é referenciada pelos números das suas extremidades.

```

120 DATA 1,2,2,3,3,4,4,1,1,5,2,
5,3,7,4,8,5,6,6,7,7,8,8,5

```

3. A perspectiva cavaleira escolhida tem como ângulo de fuga α e como coeficiente de redução k. Escolhamos α e k.

```

130 INPUT "RAZAO DE REDUCAO K?"
:K
140 INPUT "ANGULO DE FUGA A (GR
AUS)? " :A
150 LET a=a*PI/180
160 LET c1=k*COS a
170 LET c2=k*SIN a

```

4. As coordenadas das projecções de cada um dos vértices do cubo são calculadas graças às fórmulas do parágrafo 3.2.

```

180 DIM U(8)
190 DIM V(8)
200 FOR I=1 TO 8
210 LET U(I)=X(I)+c1*Y(I)
220 LET V(I)=Z(I)+c2*Y(I)
230 NEXT I

```

5. O desenho de cada uma das doze arestas do cubo é efectuado usando uma instrução READ para ler os números dos vértices a juntar.

```

240 FOR n=1 TO 12
250 READ I,J
260 PLOT 128+U(I),88+V(I)
270 DRAW U(J)-U(I),V(J)-V(I)
280 NEXT n

```

2. Representações do cubo

A figura 8 apresenta a perspectiva cavaleira obtida para $\alpha = 60^\circ$, $k = 0,5$.

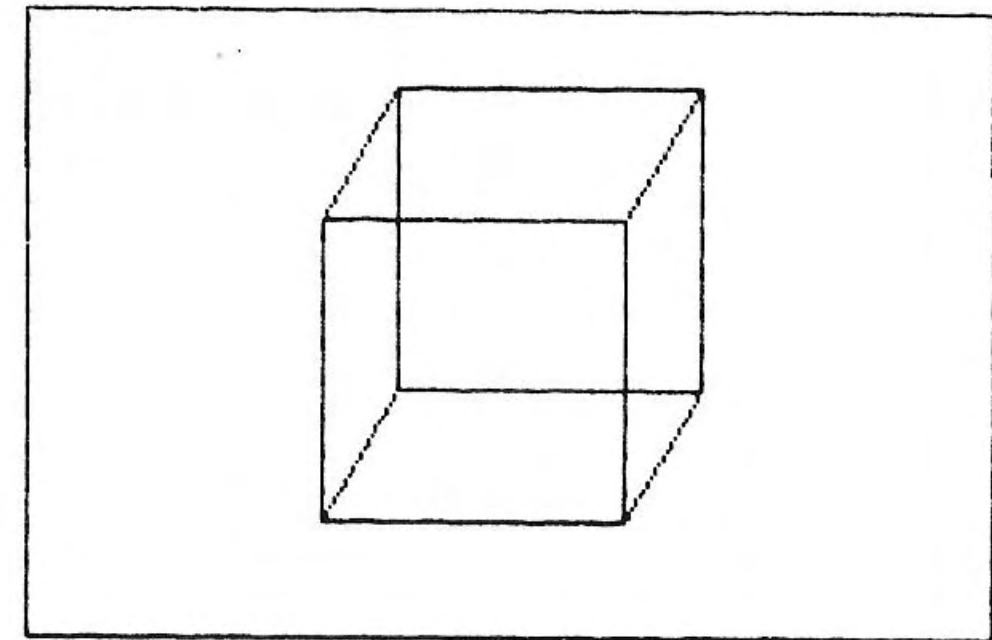


Fig. 8

Podem ser escolhidos outros valores para α e para k (ver as figuras 9 e 10).

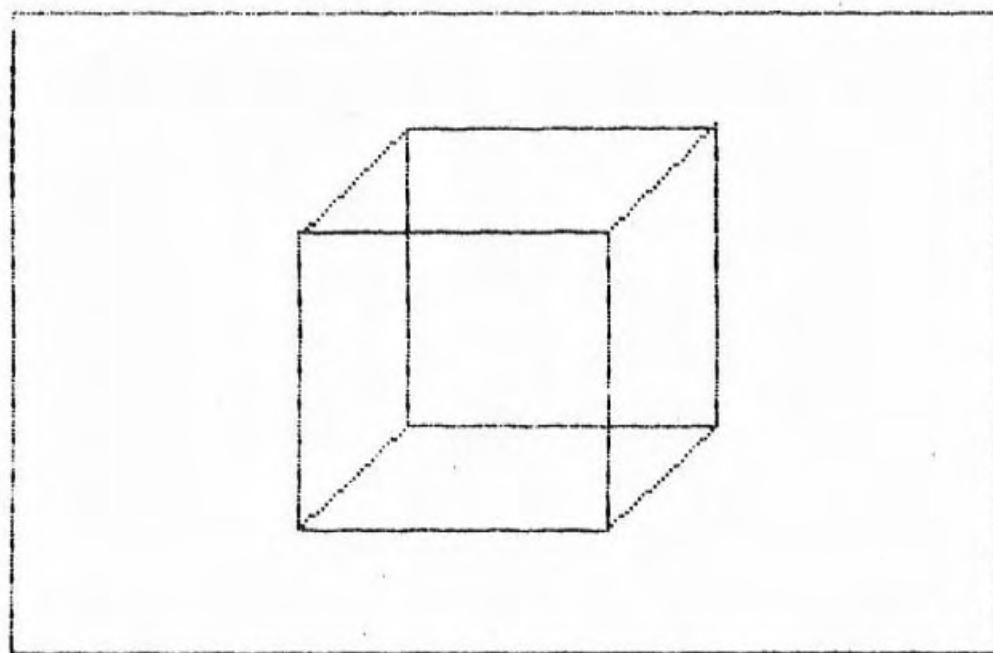


Fig. 9 — A = 45 graus

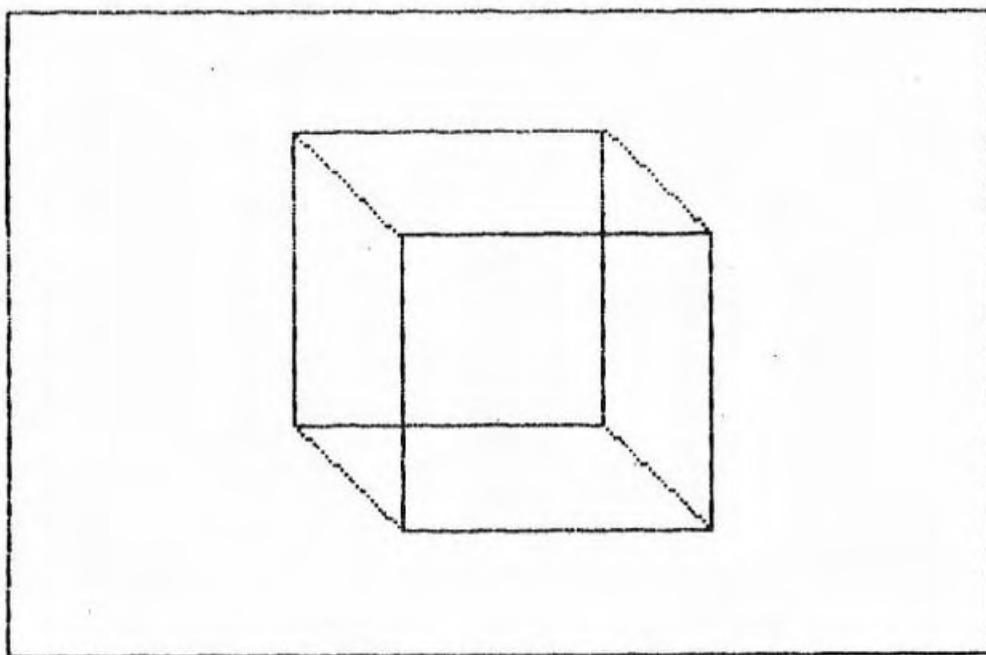


Fig. 10 — A = 135 graus

3. Deslocamentos do cubo

Antes de traçarmos a vista do cubo em perspectiva, poderemos modificar a posição deste relativamente ao referencial escolhido.

A título de exemplo, acrescentaremos ao programa anterior uma rotação de ângulo α_y em torno do eixo Oy .
O ângulo α_y , representado pela variável AY, é dado em graus.

```

10 INPUT "ESCOLHA UMA UNIDADE
DE COMPARI- MENTO ";U1
20 DATA -1,-1,-1,1,-1,-1,1,1,-
1,-1,1,-1,-1,-1,1,1,-1,1,1,1,-
1,1,1
30 DIM X(8)
40 DIM Y(8)
50 DIM Z(8)
60 FOR I=1 TO 8
70 READ X,Y,Z
80 LET X(I)=X*U1
90 LET Y(I)=Y*U1
100 LET Z(I)=Z*U1
110 NEXT I
120 DATA 1,2,2,3,3,4,4,1,1,5,2,
6,3,7,4,8,5,6,6,7,7,8,8,5
130 PRINT "O CUBO DEVE EFECTUAR
UMA ROTACAO DE EIXO OY (S/N)?"
140 INPUT B#
150 CLS
160 IF B#="N" THEN GO TO 1300
170 INPUT "ANGULO DE ROTACAO (G
RAUS) ? ";a4
180 LET a4=a4*PI/180
190 LET c=COS a4
200 LET s=SIN a4
210 FOR I=1 TO 8
220 LET r=X(I)*c-Z(I)*s
230 LET t=X(I)*s+Z(I)*c
240 LET X(I)=r
250 LET Z(I)=t
260 NEXT I
1300 INPUT "RAZAO DE REDUCAO K?"
;K
1400 INPUT "ANGULO DE FUGA (GRAU
S) ? ";a
1500 LET a=a*PI/180
1600 LET c1=K*COS a
1700 LET c2=K*SIN a
1800 DIM U(8)
1900 DIM V(8)
2000 FOR I=1 TO 8
2100 LET U(I)=X(I)+c1*Y(I)
2200 LET V(I)=Z(I)+c2*Y(I)
2300 NEXT I
2400 FOR n=1 TO 12
2500 READ I,J
2600 PLOT 128+U(I),64+V(I)
2700 DRAW U(J)-U(I),V(J)-V(I)
2800 NEXT n

```

Foram aqui usadas as fórmulas do capítulo 3, parágrafo 4.2, servindo as variáveis R e T para calcular os valores definitivos de x e y.

As linhas 1300 a 2800 do programa correspondem exactamente às linhas 130 a 280 do programa do parágrafo 4.1.

As figuras 11, 12 e 13 mostram as vistas em perspectiva obtidas para $\alpha_y = 30^\circ$, $\alpha_y = 45^\circ$ e $\alpha_y = 15^\circ$.

Fig. 11 — Rotação de 15 graus.

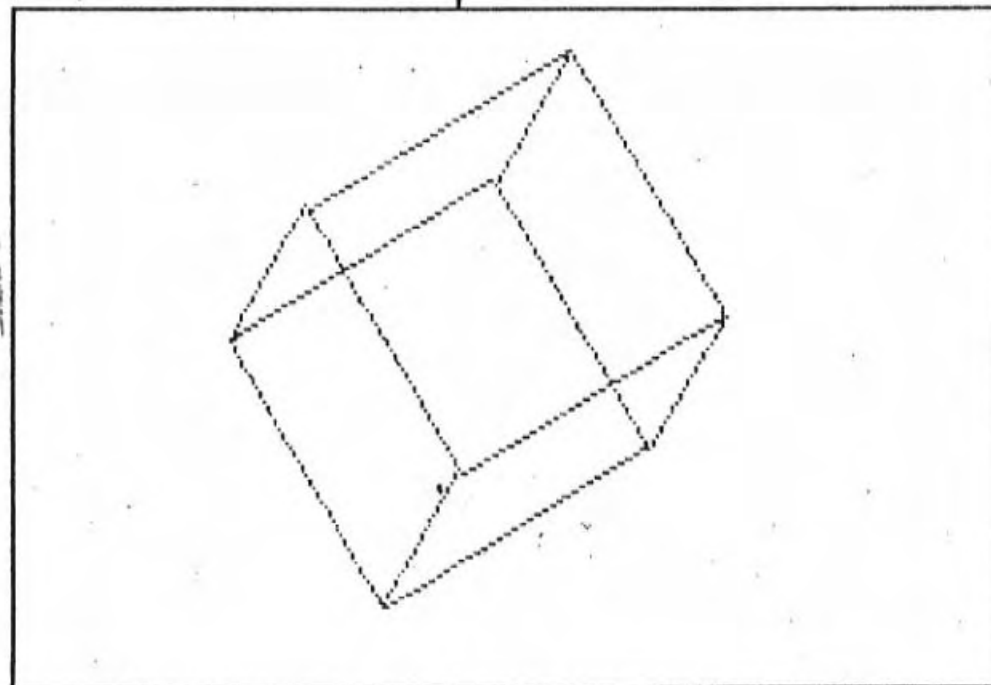
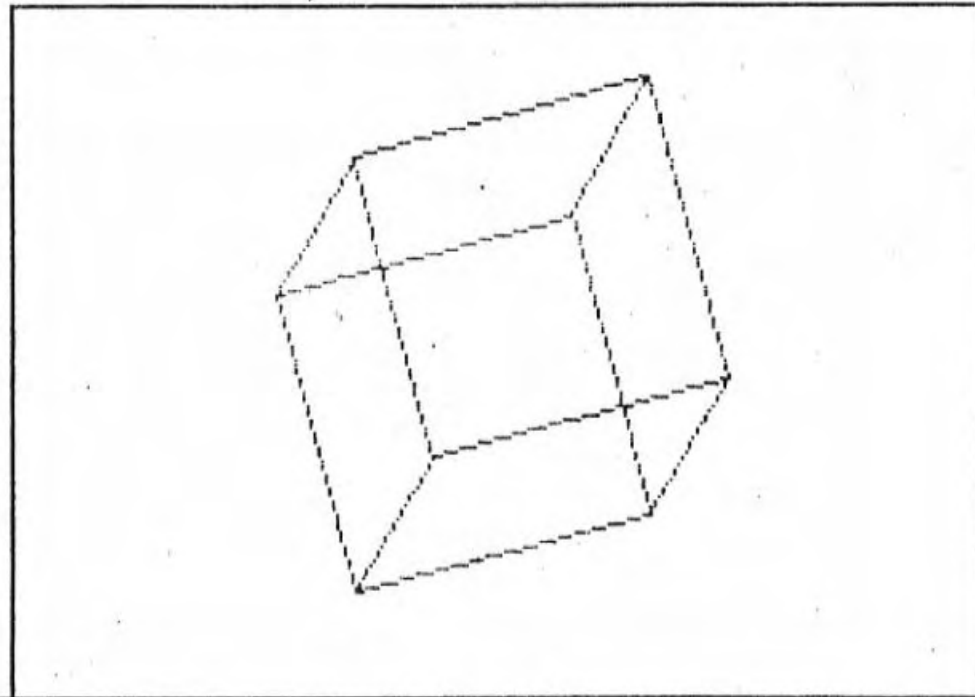


Fig. 12 — Rotação de 30 graus.

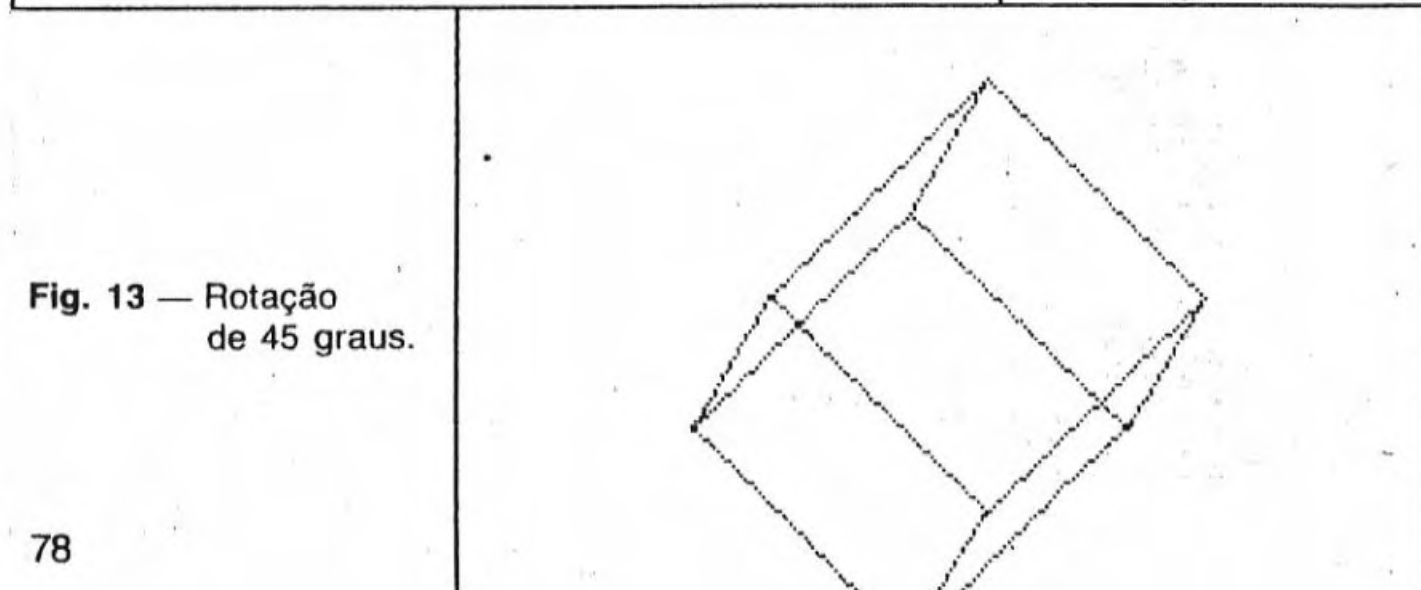


Fig. 13 — Rotação de 45 graus.

5 Perspectiva de uma curva

Modificando ligeiramente o programa do capítulo 5, parágrafo 6.2, poderemos representar uma curva $x=f(t)$, $y=g(t)$, $z=h(t)$ em perspectiva cavaleira.

O programa é o seguinte:

```

5 REM equacoes da curva
10 DEF FN f(t)=COS t
20 DEF FN g(t)=SIN t
30 DEF FN h(t)=0
35 REM intervalo de variacao d
o parametro t
40 INPUT "MINIMO DE T? ";tmin
50 INPUT "MAXIMO DE T? ";tmax
60 INPUT "O INTERVALO [TMIN,TH
MAX] ESTA DIVIDIDO EM N PARTES I
GUAIS.      INDIQUE N: ";n
65 LET l=(tmax-tmin)/n
70 DIM t(1+n)
80 DIM x(1+n)
90 DIM y(1+n)
100 DIM z(1+n)
110 FOR i=1 TO 1+n
120 LET x(i)=FN f(t(i))
130 LET y(i)=FN g(t(i))
140 LET z(i)=FN h(t(i))
150 LET t(i)=tmin+(i-1)*l
160 NEXT i
170 REM calculo da imagem
180 LET umax=-10000
190 LET vmax=-10000
200 LET umin=10000
210 LET vmin=10000
220 DIM u(n+1)
230 DIM v(n+1)
240 FOR i=1 TO n+1
250 LET u(i)=x(i)+0.375*y(i)
260 LET v(i)=z(i)+0.375*y(i)
270 IF u(i)>umax THEN LET umax=
u(i)
280 IF u(i)<umin THEN LET umin=
u(i)
290 IF v(i)>vmax THEN LET vmax=
v(i)
300 IF v(i)<vmin THEN LET vmin=
v(i)
310 NEXT i
315 REM enquadramento da imagem
320 LET kp=(vmax-vmin)/(umax-um
in)
330 IF kp>0.5 THEN LET ha=150
340 IF kp>0.5 THEN LET la=ha/kp
350 IF kp<=0.5 THEN LET la=250

```

```

360 IF KP<=0.6 THEN LET ha=la*k
P
370 LET a1=(la/(umax-umin))
380 LET a2=ha/(vmax-vmin)
390 LET b1=120-la/2-a1*umin
400 LET b2=80-ha/2-a2*vmin
410 FOR i=1 TO n+1
420 LET u(i)=a1*u(i)+b1
430 LET v(i)=a2*v(i)+b2
440 NEXT i
445 REM tracado
450 FOR i=1 TO n
460 PLOT u(i),v(i)
470 DRAW u(i+1)-u(i),v(i+1)-v(i)
480 NEXT i

```

A figura 14 representa o círculo $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 0$ em perspectiva; considerámos $N = 40$ e $0 \leq t \leq 2\pi$: obtemos de facto uma elipse.

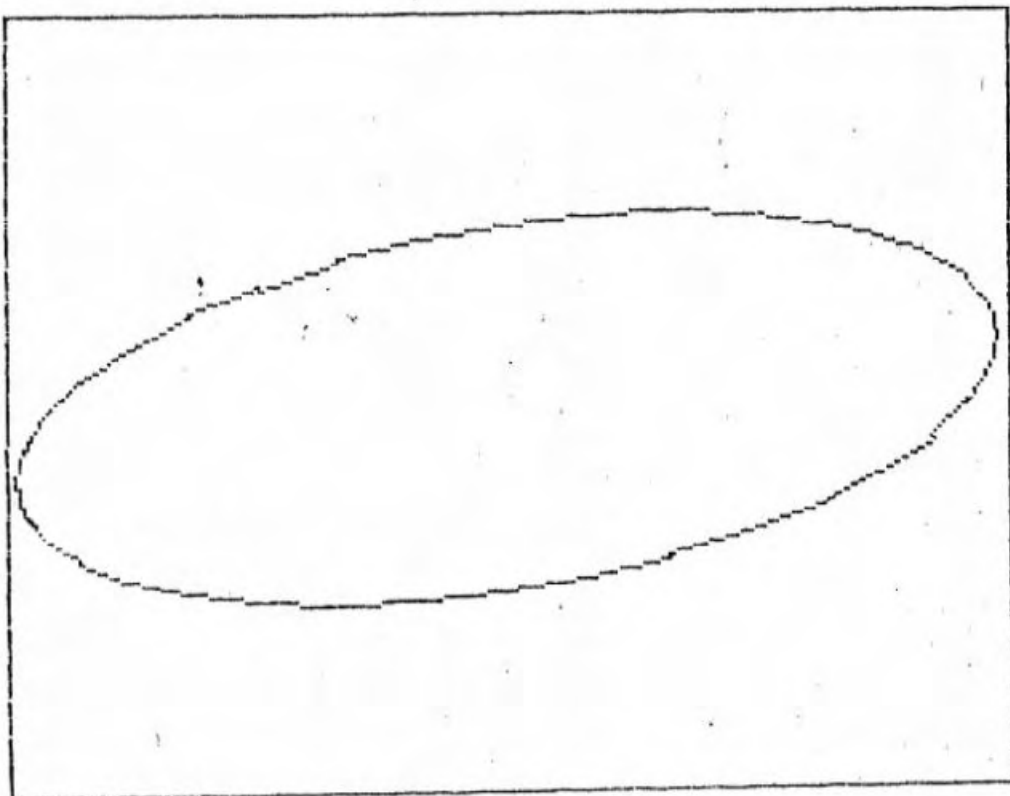


Fig. 14

A figura 15 representa uma hélice cónica de equações $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, $h = t$ com $N = 100$ e $0 \leq t \leq 4\pi$.

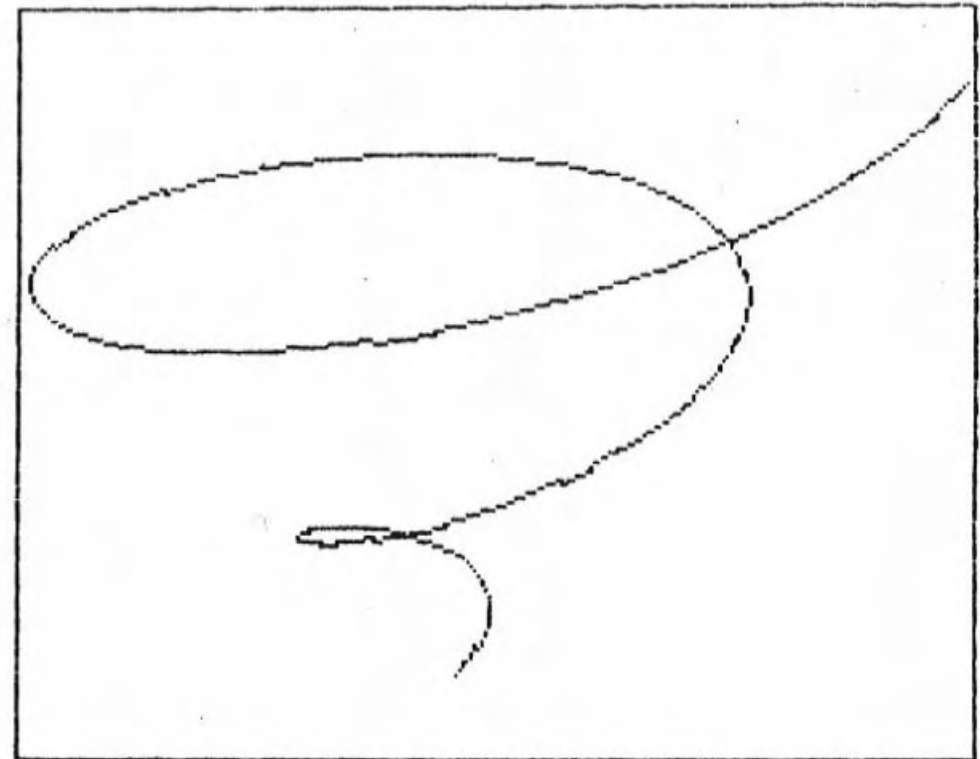


Fig. 15

PRISMAS E PIRÂMIDES

Podemos representar a maior parte dos objectos de maneira exacta ou aproximada utilizando um ou vários poliedros: cubo, paralelepípedo, prismas, etc.

Neste capítulo, estudaremos mais exactamente os prismas e os troncos de prisma, as pirâmides e os troncos de pirâmides.

O método seguido para representar estes poliedros será exposto para casos particulares.

1 Os prismas e os troncos de prisma

1. Seja L uma linha poligonal simples e fechada, traçada num plano P . Escolhamos uma recta d que intersecte o plano P num só ponto.

Por qualquer ponto de L passa uma paralela a d e só uma. O conjunto das rectas assim definidas constitui uma superfície prismática (figura 1).

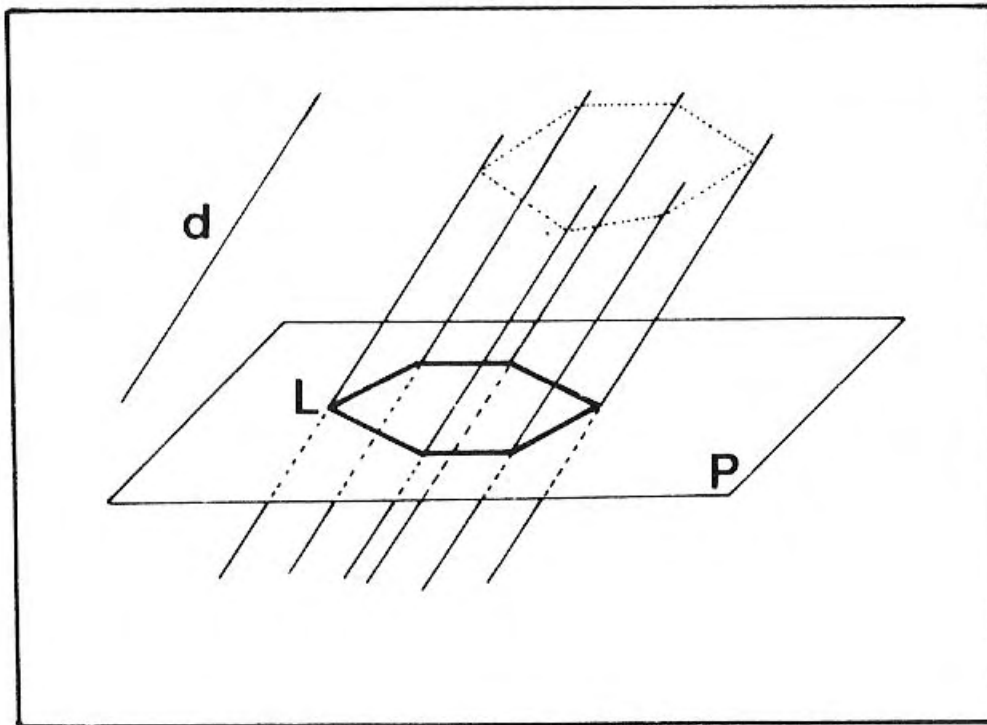


Fig. 1

2. Se cortarmos uma superfície destas por dois planos distintos P_1 e P_2 , obteremos um prisma no caso de P_1 e P_2 serem paralelos, um tronco de prisma no caso contrário (figura 2).

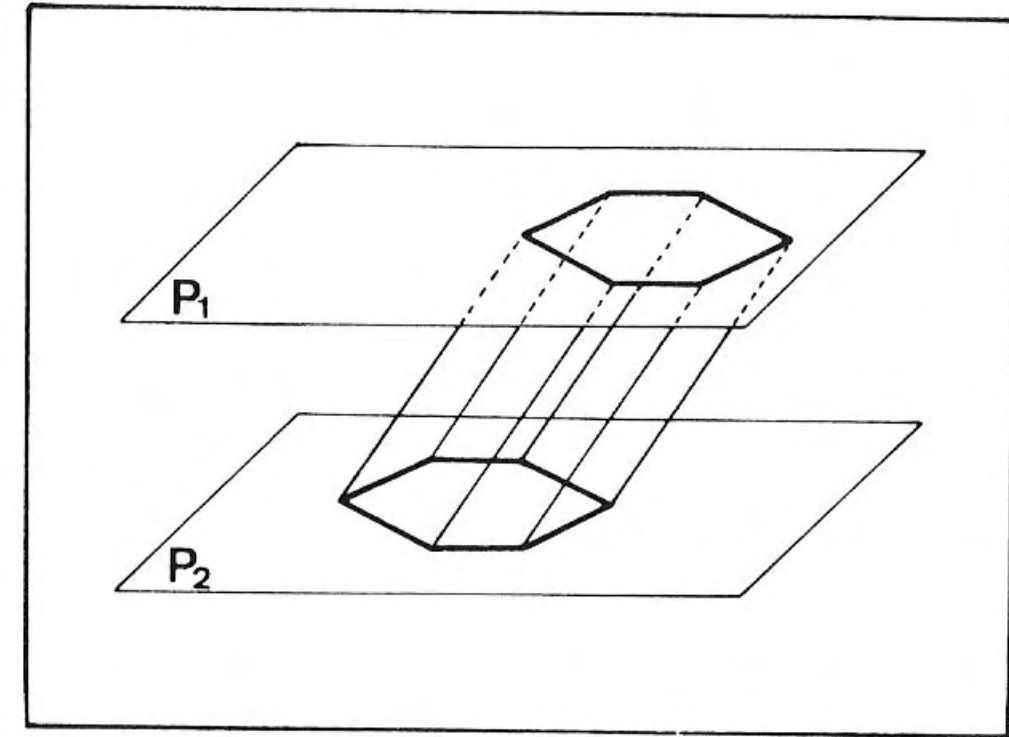


Fig. 2

3. Podemos generalizar a noção de prisma considerando L uma linha plana qualquer, por exemplo com partes curvas, mas sempre simples e fechada.

É então prático distinguir uma face dianteira e uma face traseira. Esta última é obtida por translação a partir da face dianteira (figura 3).

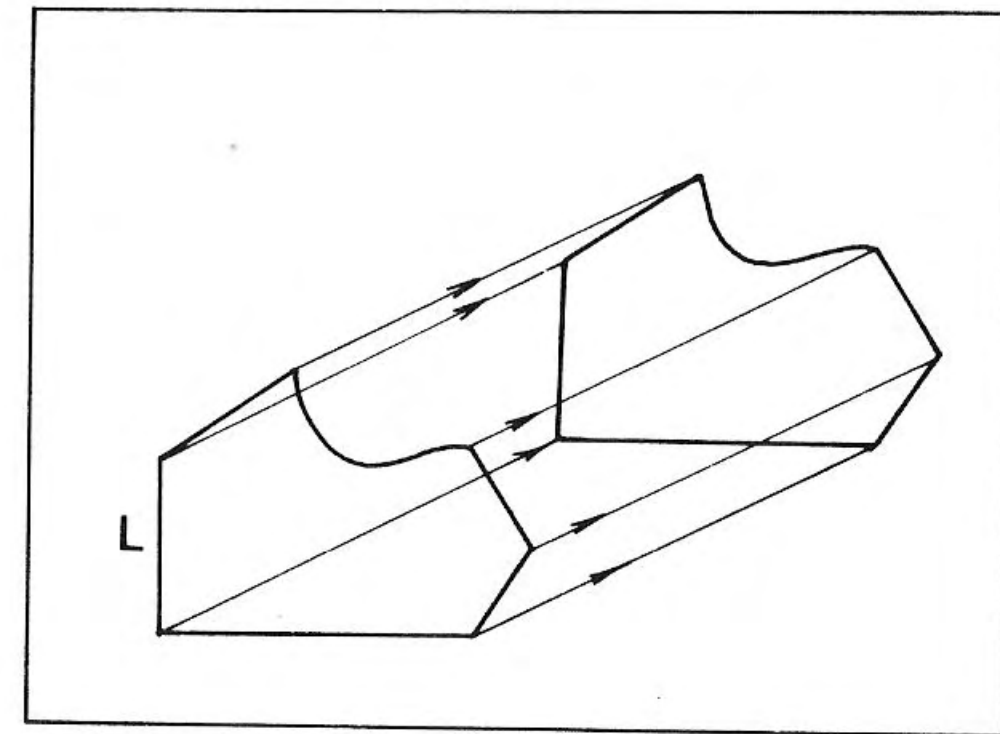


Fig. 3

2 Pirâmides e troncos de pirâmides

1. L designa novamente uma linha poligonal simples e fechada, contida num plano P . Seja S um ponto qualquer fora do plano P . Ligando S a cada um dos vértices de L , obtemos uma pirâmide (figura 4).

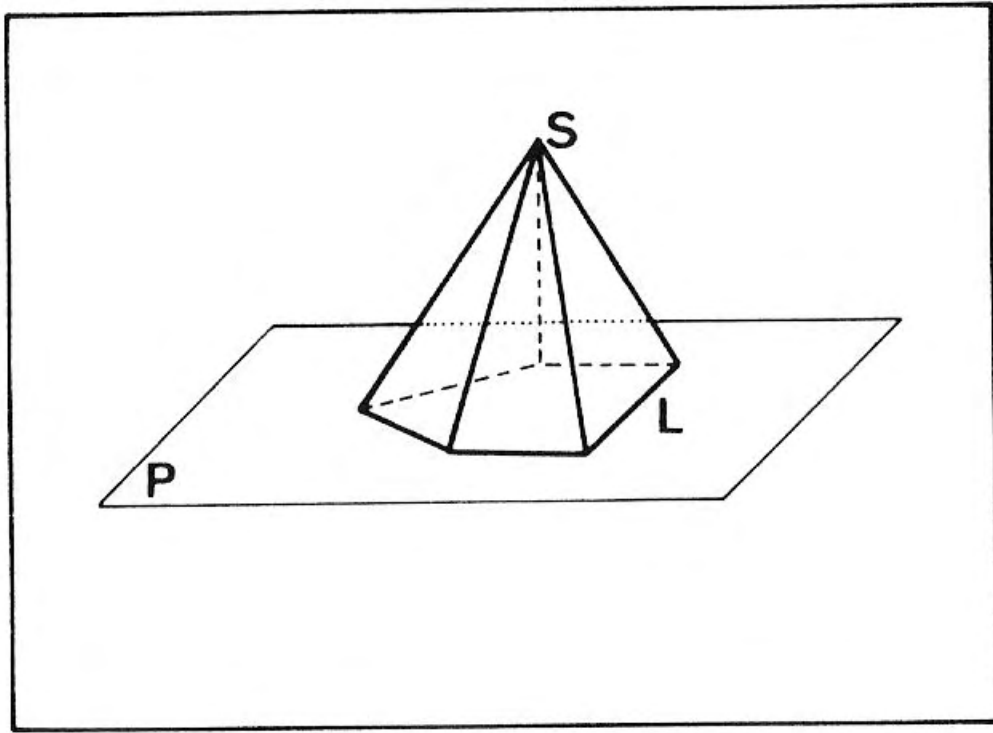


Fig. 4

2. Se cortarmos uma pirâmide por um plano qualquer, obtemos um tronco de pirâmide (figura 5), com bases paralelas ou não.

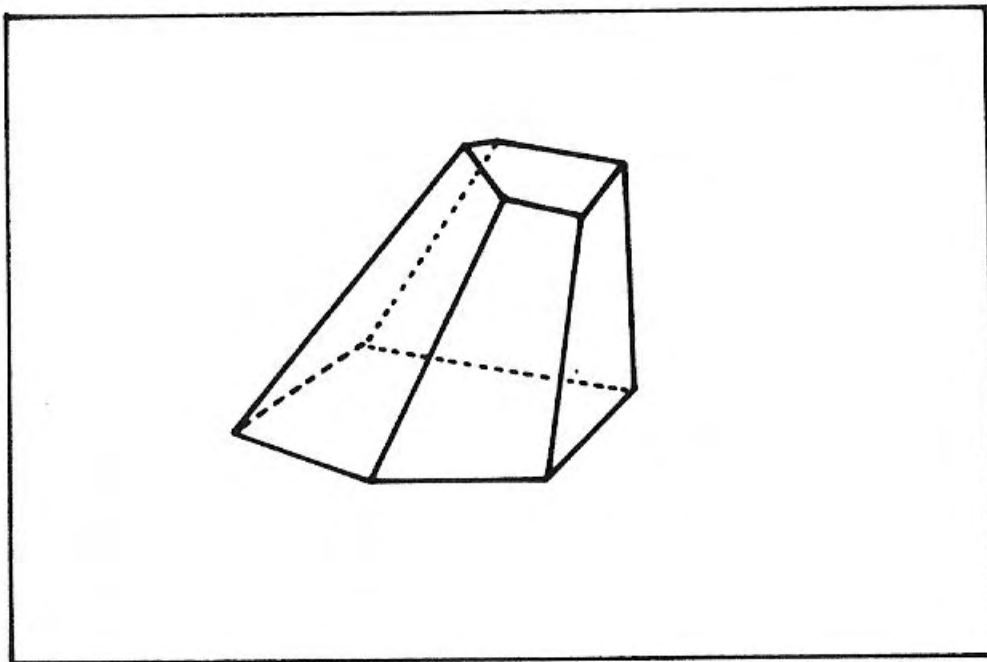


Fig. 5

3 Primeiro exemplo: prisma recto

Consideremos o poliedro da figura 6: trata-se de um prisma recto. Para representar este prisma utilizaremos um programa em cinco partes.

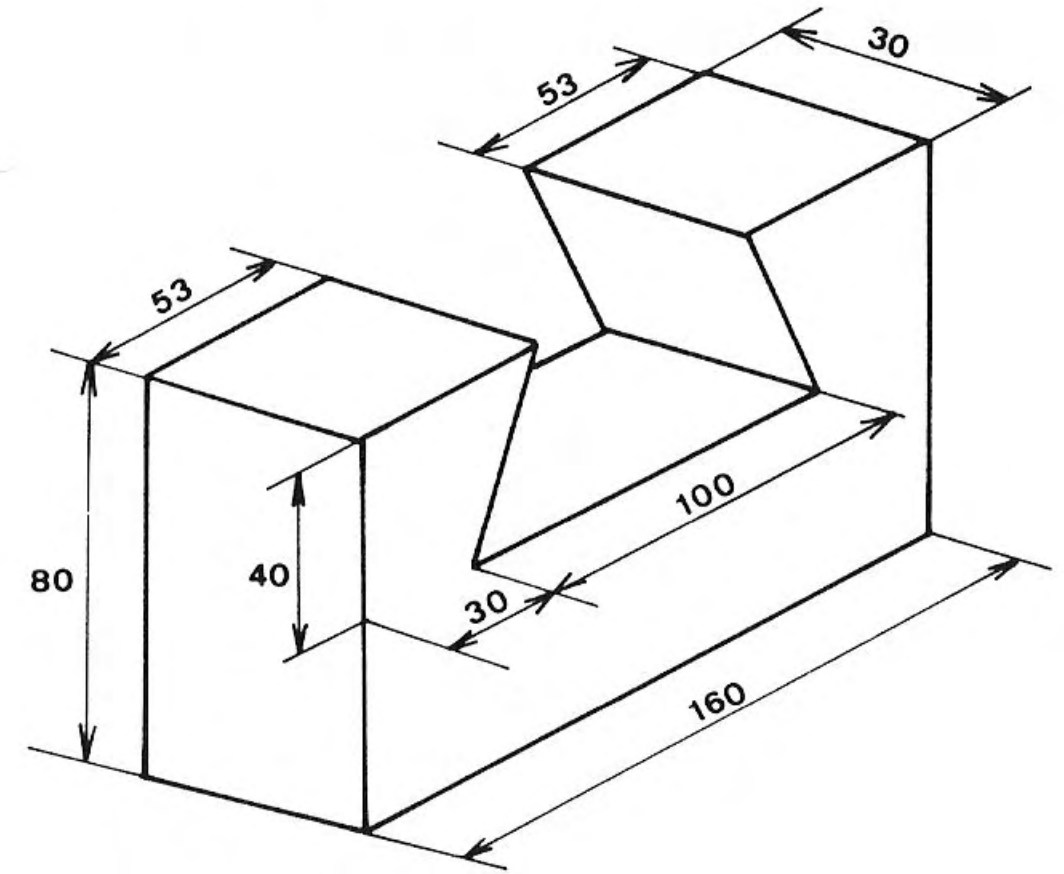


Fig. 6

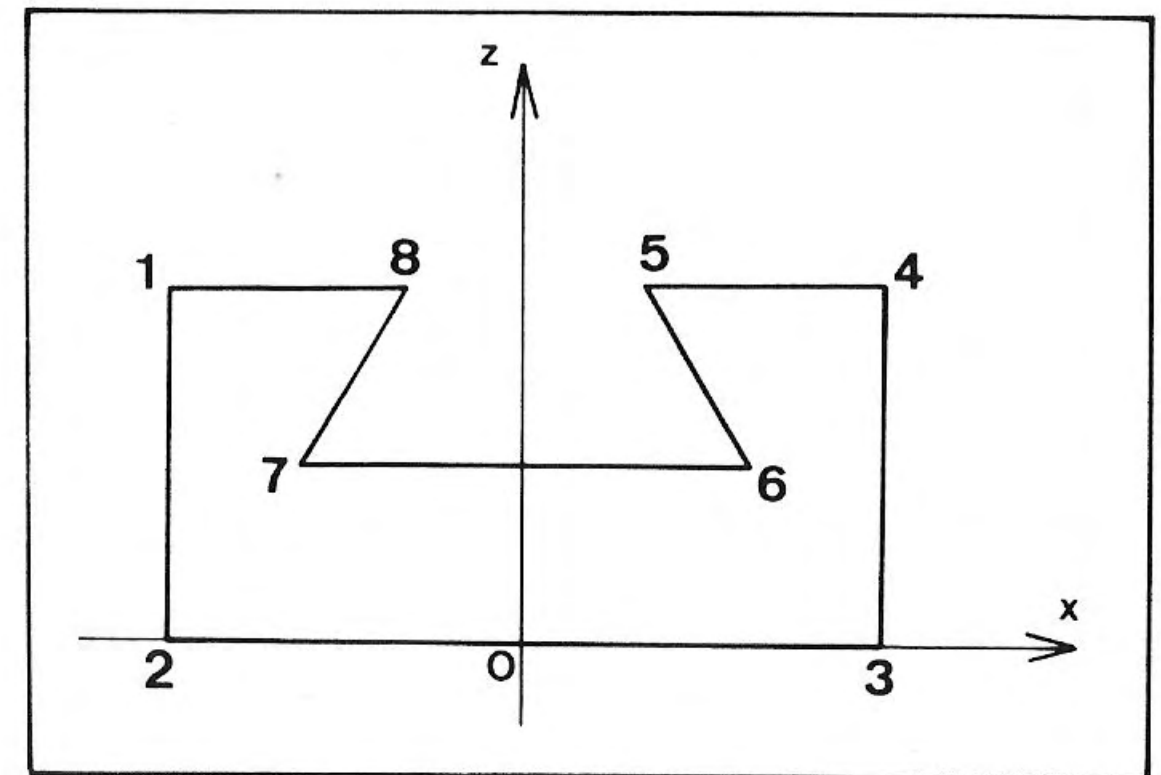


Fig. 7

1. Cálculo das coordenadas

Numeremos os vértices: de 1 a 8 para a face dianteira, de 9 a 16 para a face traseira (figura 7). Escolhamos um referencial Oxyz e calculemos as coordenadas de cada um dos dezasseis vértices relativamente a este sistema.

Estas coordenadas são indicadas na tabela que se segue:

| Número | x | y | z | Número | x | y | z |
|--------|-----|-----|-----|--------|-----|----|-----|
| 1 | -80 | -30 | 40 | 9 | -80 | 30 | 40 |
| 2 | -80 | -30 | -40 | 10 | -80 | 30 | -40 |
| 3 | 80 | -30 | -40 | 11 | 80 | 30 | -40 |
| 4 | 80 | -30 | 40 | 12 | 80 | 30 | 40 |
| 5 | 27 | -30 | 40 | 13 | 27 | 30 | 40 |
| 6 | 50 | -30 | 0 | 14 | 50 | 30 | 0 |
| 7 | -50 | -30 | 0 | 15 | -50 | 30 | 0 |
| 8 | -27 | -30 | 40 | 16 | -27 | 30 | 40 |

Estes valores serão passados ao programa numa instrução DATA onde os três primeiros números serão as coordenadas x, y e z do vértice n.º 1, os três seguintes os do vértice n.º 2, etc.

```

5 REM coordenadas dos vertice
6
10 DATA -80,-30,40,-80,-30,-40
11 DATA 80,-30,-40,80,-30,40,27,-30,40,
12 DATA 50,-30,0,-50,-30,0,-27,-30,40,-8
13 DATA 80,30,40,-80,30,-40,80,30,-40,80,
14 DATA 27,40,27,30,40,50,30,0,-50,30,0,
15 DATA -27,30,40
16
20 DIM X(16)
30 DIM Y(16)
40 DIM Z(16)
50 FOR I=1 TO 16
60 READ X,Y,Z
70 LET X(I)=X
80 LET Y(I)=Y
90 LET Z(I)=Z
100 NEXT I

```

2. Deslocamentos do prisma

Limitar-nos-emos a uma rotação em torno de cada um dos eixos do referencial, usando as fórmulas do capítulo 3, parágrafo 4.2.

```

105 REM rotacoes em torno dos e
110
120 INPUT "INDIQUE EM GRAUS (0
130) 0 ANGULO DE ROTACAO EM
140 TORNO DO EIXO OX ";RX
150 LET C=COS (RX*PI/180)
160 LET S=SIN (RX*PI/180)
170 FOR I=1 TO 16
180 LET U=X(I)*C-Z(I)*S
190 LET V=Y(I)*S+Z(I)*C
200 LET X(I)=U
210 LET Z(I)=V
220 NEXT I
230 INPUT "INDIQUE EM GRAUS (0
240) 0 ANGULO DE ROTACAO EM
250 TORNO DO EIXO OY ";RY
260 LET C=COS (RY*PI/180)
270 LET S=SIN (RY*PI/180)
280 FOR I=1 TO 16
290 LET U=X(I)*C-Z(I)*S
300 LET V=X(I)*S+Z(I)*C
310 LET X(I)=U
320 LET Z(I)=V
330 NEXT I
340 INPUT "INDIQUE EM GRAUS (0
350) 0 ANGULO DE ROTACAO EM
360 TORNO DO EIXO OZ ";RZ
370 LET C=COS (RZ*PI/180)
380 LET S=SIN (RZ*PI/180)
390 FOR I=1 TO 16
400 LET U=X(I)*C-Y(I)*S
410 LET V=X(I)*S+Y(I)*C
420 LET X(I)=U
430 LET Y(I)=V
440 NEXT I

```

3. Cálculo da perspectiva

Escolhamos uma perspectiva cavaleira de ângulo $\alpha = 60^\circ$ e de coeficiente de redução $k = 0,5$.

Ao ponto (x, y, z) corresponderá o ponto (u, v) do plano de projecção.

```

375 REM calculo da imagem
380 LET Xmax=-10000
390 LET Xmin=10000
400 LET Zmax=-10000
410 LET Zmin=10000
420 FOR I=1 TO 16
430 LET X(I)=INT (0,5*X(I)+0,25
440 *Y(I))
450 LET Z(I)=INT (0,5+Z(I)+0,43
460 *Y(I))

```

```

450 IF xmax < x(i) THEN LET xmax =
x(i)
460 IF xmin > x(i) THEN LET xmin =
x(i)
470 IF zmax < z(i) THEN LET zmax =
z(i)
480 IF zmin > z(i) THEN LET zmin =
z(i)
490 NEXT i

```

4. Enquadramento da imagem

Utilizaremos o sub-programa do capítulo 3, parágrafo 3.3 (os valores máximo e mínimo das coordenadas u e v serão calculados na terceira parte do programa).

```

495 REM enquadramento da imagem
500 LET ka = (zmax - zmin) / (xmax - xmin)
510 IF ka > 0.5 THEN LET ha = 150
520 IF ka > 0.5 THEN LET la = 150 / ka
530 IF ka <= 0.5 THEN LET la = 200
540 IF ka <= 0.5 THEN LET ha = 200 * ka
550 LET k1 = la / (xmax - xmin)
560 LET l1 = 120 + la / 2 - k1 * xmax
570 LET k2 = ha / (zmax - zmin)
580 LET l2 = 80 + ha / 2 - k2 * zmax
590 FOR i = 1 TO 16
600 LET x(i) = k1 * x(i) + l1
610 LET z(i) = k2 * z(i) + l2
620 NEXT i

```

5. O traçado

Para proceder ao traçado, devemos estabelecer uma lista das arestas. Cada aresta é designada pelos números dos dois vértices que a definem. A lista obtida é colocada na memória do computador graças a uma instrução DATA.

```

625 REM traçado
630 DATA 1,2,2,3,3,4,4,5,5,6,6,
7,7,8,8,1
640 DATA 9,10,10,11,11,12,12,13,
13,14,14,15,15,16,16,9

```

```

650 DATA 1,9,2,10,3,11,4,12,5,1
3,6,14,7,15,8,16
660 FOR i = 1 TO 24
670 READ a,b
680 PLOT x(a),z(a)
690 DRAW x(b)-x(a),z(b)-z(a)
700 NEXT i

```

6. Os resultados

As figuras 8, 9 e 10 mostram três vistas do prisma estudado. A primeira foi obtida após rotação de um ângulo de 90° em torno do eixo Ox, a segunda após rotação de 45° em torno ao eixo Oy, a terceira após rotação de 50° em torno do eixo Oz.

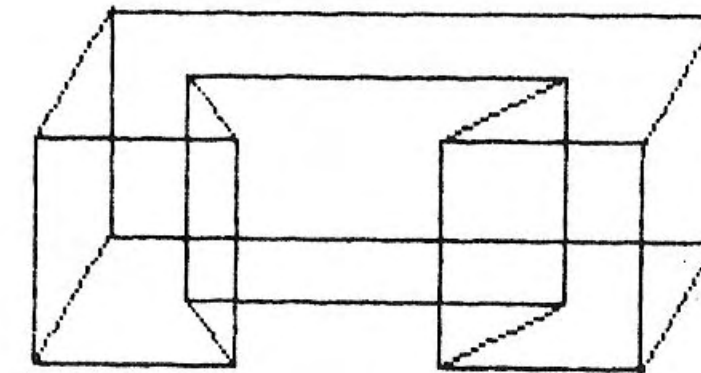


Fig. 8

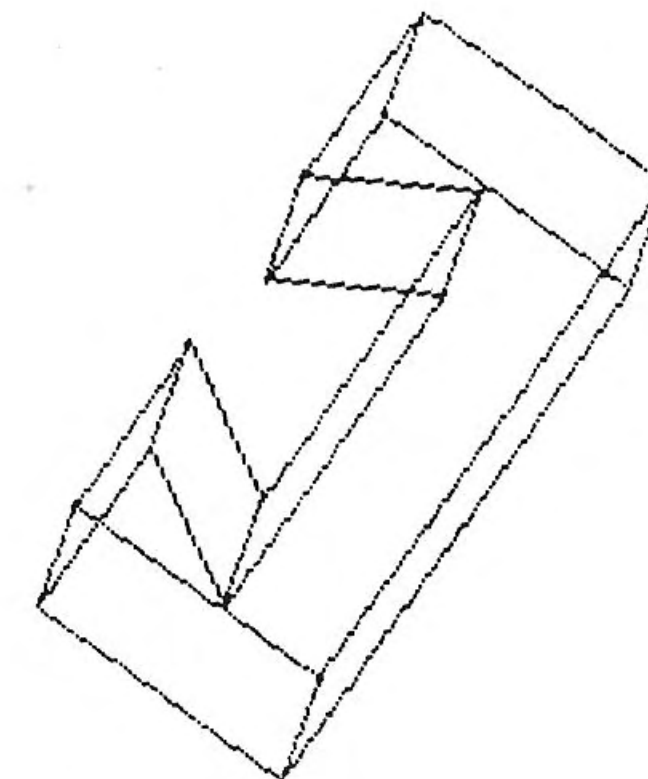


Fig. 9

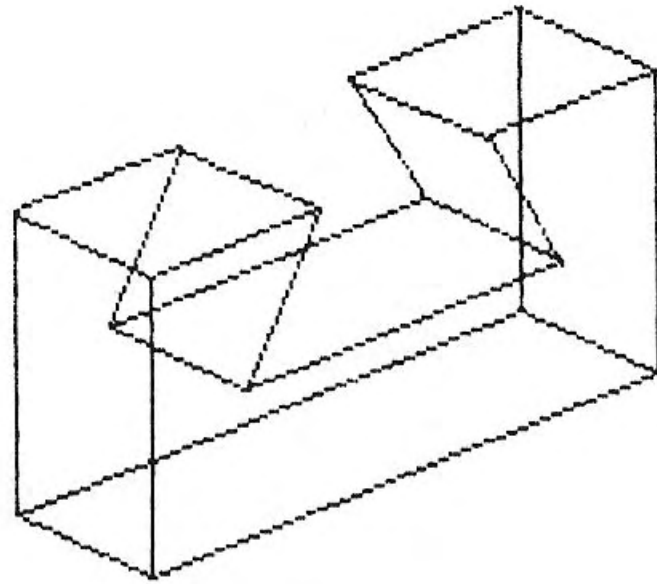


Fig. 10

4 Segundo exemplo: prisma com partes curvas

Consideremos o prisma representado pelas duas vistas da figura 11.

Este prisma oferece uma particularidade: a face dianteira e a face traseira possuem uma aresta curva, neste caso um quarto de círculo.

O programa de desenho deste prisma será formado também por cinco partes.

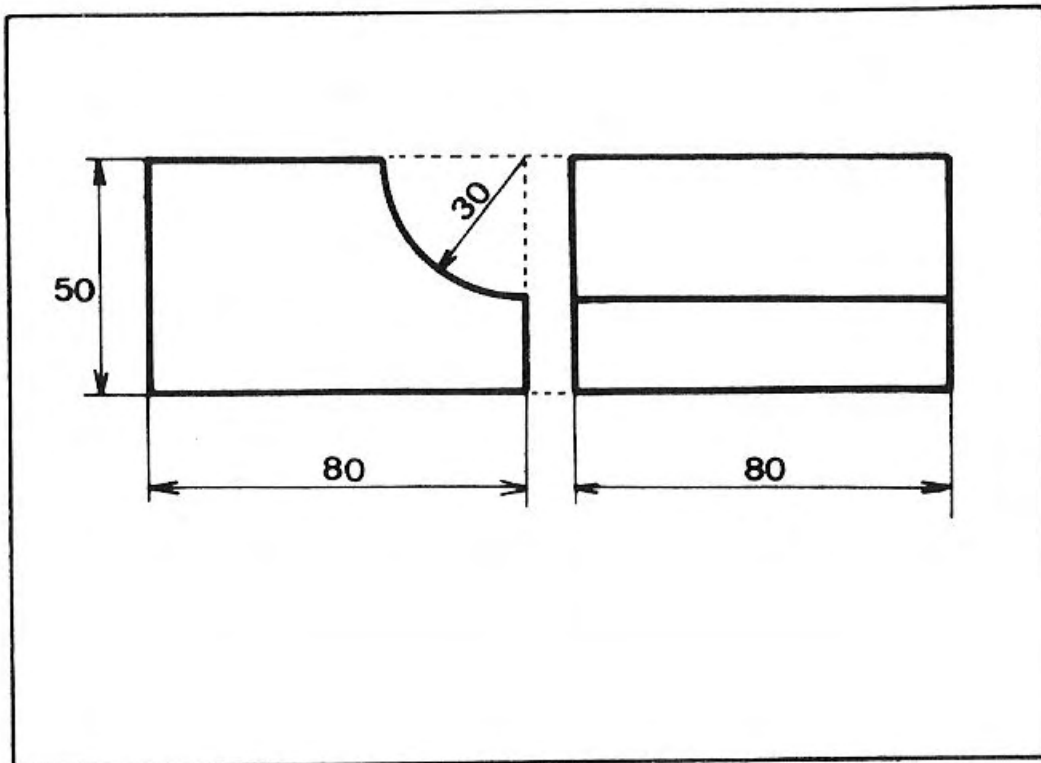


Fig. 11

1. Definição dos vértices

Na face dianteira, o arco AB será dividido em n partes iguais e substituído por uma linha poligonal com n segmentos. Haverá portanto $n - 1$ vértices intermédios entre A e B, donde $n + 4$ vértices no total para esta face.

A face traseira incluirá igualmente $n + 4$ vértices numerados entre $n + 5$ e $2n + 8$. Os eixos escolhidos e a numeração dos vértices são definidos na figura 12.

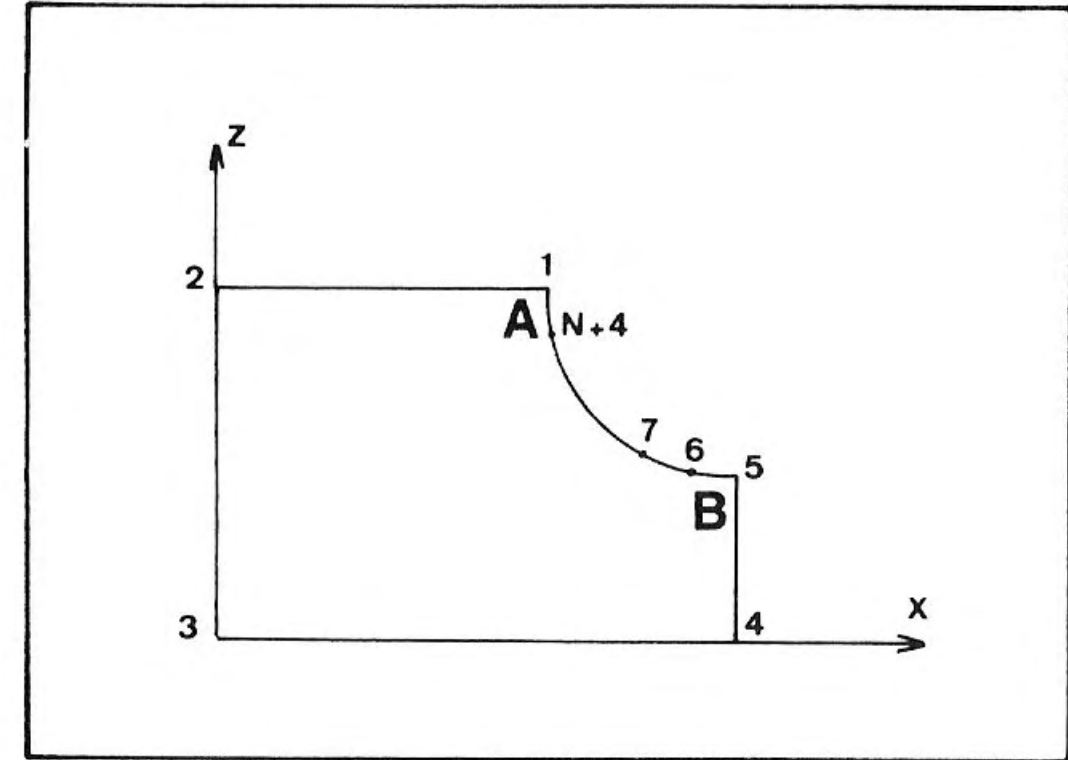


Fig. 12

2. Cálculo das coordenadas

As coordenadas dos vértices numerados de 1 a 5 na face dianteira são apresentadas na tabela seguinte:

| Número | x | y | z |
|--------|----|-----|----|
| 1 | 50 | -40 | 50 |
| 2 | 0 | -40 | 50 |
| 3 | 0 | -40 | 0 |
| 4 | 80 | -40 | 0 |
| 5 | 80 | -40 | 20 |

As coordenadas x e z serão colocadas numa instrução DATA.

Para definir as coordenadas dos n-1 vértices situados no arco AB, utilizaremos a representação paramétrica de um círculo de raio R e centro (x_c, y_c): x=x_c+R cos t, z=z_c+R sen t com 0 ≤ t ≤ 2 π.

No caso presente x_c=80, z_c=50 e R=30.

Para i variando entre 1 e n-1, podemos escrever

$$x(i) = 80 + 30 \cos \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi i}{2n} \right)$$

$$z(i) = 50 + 30 \sin \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi i}{2n} \right)$$

As coordenadas dos vértices da face traseira deduzem-se facilmente das dos vértices da face dianteira.

```

5 REM coordenadas dos vertice
10 LET n=20
20 DIM X(2*n+8)
30 DIM Y(2*n+8)
40 DIM Z(2*n+8)
50 DATA 50,50,0,50,0,0,80,0,80
60 FOR i=1 TO 5
70 READ X,Z
80 LET X(i)=X
90 LET X(n+4+i)=X(i)
100 LET Y(i)=-40
110 LET Y(n+4+i)=40
120 LET Z(i)=Z
130 LET Z(n+4+i)=Z(i)
140 NEXT i
145 REM arestas circulares
150 FOR i=1 TO n-1
160 LET t=PI/180*(270-90*i/n)
170 LET X(i+5)=80+30*COS t
180 LET X(n+4+i+5)=X(i+5)
190 LET Y(i+5)=-40
200 LET Y(n+4+i+5)=40
210 LET Z(i+5)=50+30*SEN t
220 LET Z(n+4+i+5)=Z(i+5)
230 NEXT i

```

3. A sequência do programa pode englobar as mesmas etapas do caso anterior:

- rotações eventuais do prisma;
- cálculo da perspectiva;
- enquadramento da imagem;
- traçado.

```

235 REM rotacao em torno do eix
0 OX
240 INPUT "INDIQUE EM GRAUS (0
A 360) O ANGULO DE ROTACAO EM
TORNO DE OX: " A
250 LET C=COS (A*PI/180)
260 LET S=SIN (A*PI/180)
270 FOR i=1 TO 5
280 LET U=Y(i)*C-Z(i)*S
290 LET V=Y(i)*S+Z(i)*C
300 LET Y(i)=U
310 LET Z(i)=V
320 LET U=Y(n+4+i)*C-Z(n+4+i)*S
330 LET V=Y(n+4+i)*S+Z(n+4+i)*C
340 LET Y(n+4+i)=U
350 LET Z(n+4+i)=V
360 NEXT i
370 FOR i=1 TO n-1
380 LET U=Y(i+5)*C-Z(i+5)*S
390 LET V=Y(i+5)*S+Z(i+5)*C
400 LET Y(i+5)=U
410 LET Z(i+5)=V
420 LET U=Y(n+9+i)*C-Z(n+9+i)*S
430 LET V=Y(n+9+i)*S+Z(n+9+i)*C
440 LET Y(n+9+i)=U
450 LET Z(n+9+i)=V
460 NEXT i
465 REM calculo da imagem
470 FOR i=1 TO 2*n+8
480 LET X(i)=INT (0.5+X(i)+0.37
5*Y(i))
490 LET Z(i)=INT (0.5+Z(i)+0.37
5*Y(i))
500 NEXT i
510 REM tracado
520 PLOT 100+X(1),100+Z(1)
530 FOR i=1 TO n+3
540 DRAW X(i+1)-X(i),Z(i+1)-Z(i)
)
550 NEXT i
560 DRAW X(1)-X(n+4),Z(1)-Z(n+4)
)
570 PLOT 100+X(n+5),100+Z(n+5)
580 FOR i=1 TO n+3
590 DRAW X(n+5+i)-X(n+4+i),Z(n+
5+i)-Z(n+4+i)
600 NEXT i
610 DRAW X(n+5)-X(2*n+8),Z(n+5)
-Z(2*n+8)
620 FOR i=1 TO 5
630 PLOT 100+X(i),100+Z(i)
640 DRAW X(n+4+i)-X(i),Z(n+4+i)
-Z(i)
650 NEXT i

```

4. Resultados

As figuras 13, 14 e 15 mostram o prisma em várias posições: após rotação de 20° em torno do eixo Ox , no caso da figura 13, após rotação de 45° em torno do eixo Ox , no da figura 14, e após rotação de 90° em torno do mesmo eixo, na figura 15.

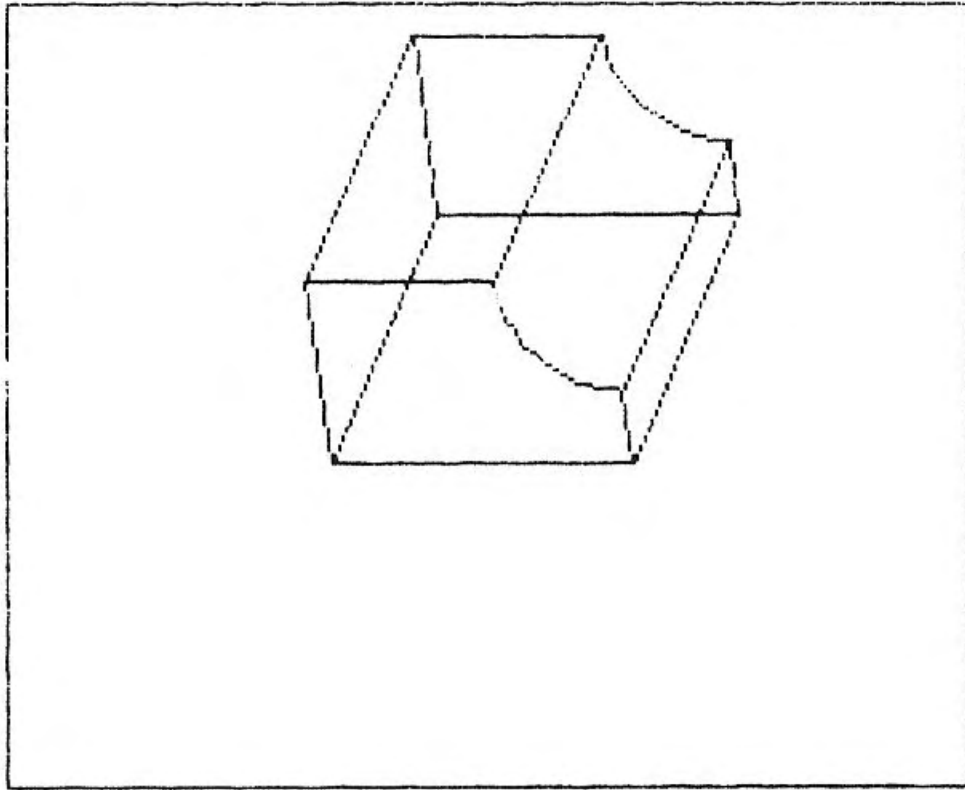


Fig. 13 — Rotação de 20 graus em torno do eixo Ox

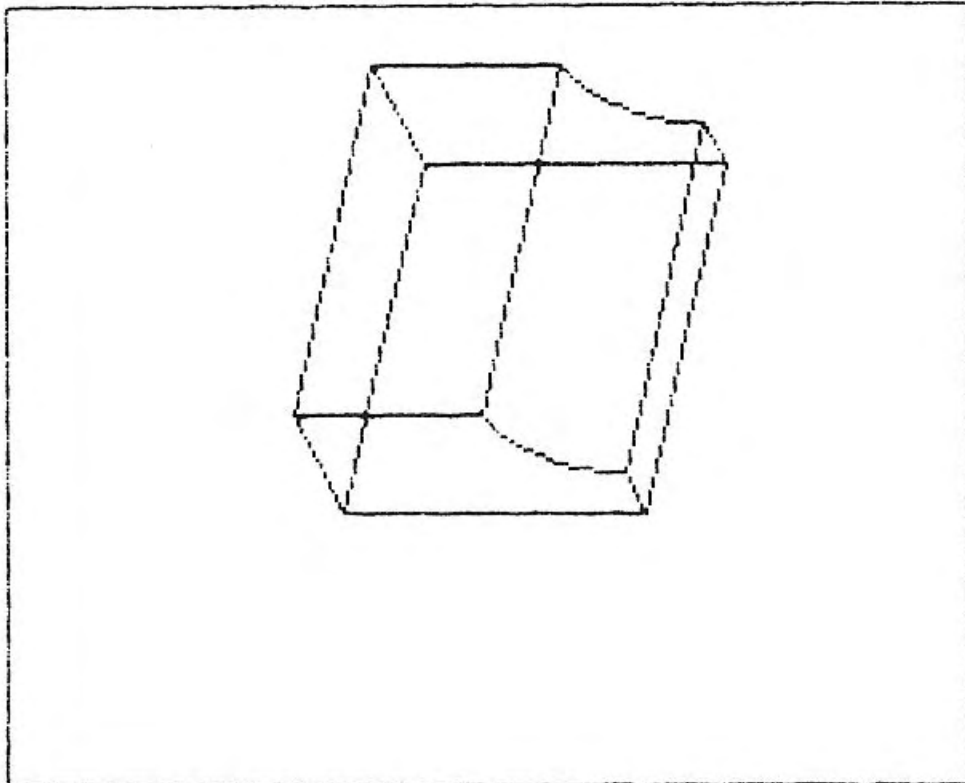


Fig. 14 — Rotação de 45 graus em torno do eixo Ox

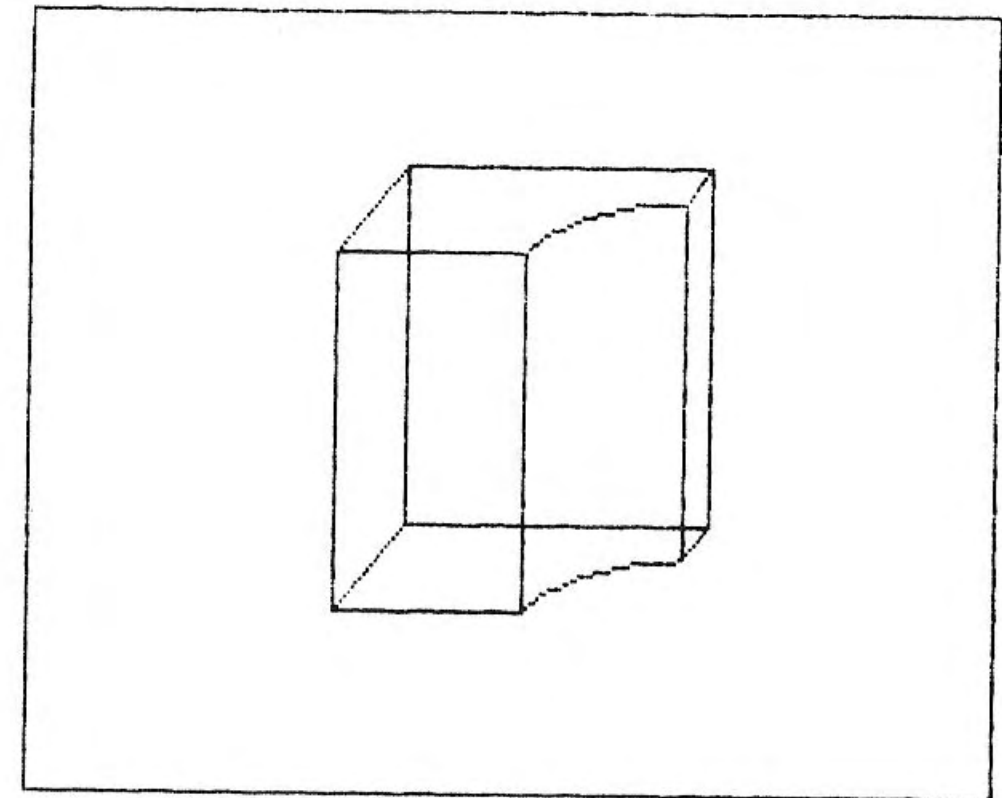


Fig. 15 — Rotação de 90 graus em torno do eixo Ox

5 Terceiro exemplo: pirâmide

Consideremos uma pirâmide de vértice S , cuja base é um polígono regular de n lados, inscrito num círculo de raio R e centro O .

Consideraremos um sistema ortonormado $Oxyz$ de modo a que os eixos Ox e Oy estejam contidos no plano do polígono de base.

1. Cálculo das coordenadas

Sejam P_1, P_2, \dots, P_n os vértices do polígono regular.

Para fechar a linha poligonal $P_1 P_2 \dots P_n P_1$, definiremos um ponto suplementar considerando $P_{n+1} = P_1$.

Resulta daqui que, para $1 \leq i \leq n+1$, o ponto P_i tem como abcissa:

$$x(i) = R \cos \frac{2\pi(i-1)}{n}$$

por ordenada:

$$y(i) = R \sin \frac{2\pi(i-1)}{n}$$

e por cota

$$z(i) = 0$$

As coordenadas do vértice S da pirâmide serão designadas por x_s , y_s e z_s .

2. Programa

Engloba três partes:

- Linhas 10 a 150: cálculo das coordenadas;
- Linhas 160 a 210: cálculo da perspectiva;
- Linhas 220 a 570: enquadramento e traçado.

Se se desejar, será fácil acrescentar as instruções que permitem modificar a posição da pirâmide relativamente ao referencial escolhido.

```

5 REM coordenadas dos vertice
10 INPUT "VALOR DE N? ";n
20 INPUT "VALOR DE R? ";r
30 INPUT "VALOR DE H? ";h
40 DIM x(n+1)
50 DIM y(n+1)
60 DIM z(n+1)
70 FOR i=1 TO n+1
80 LET t=2*PI*(i-1)/n
90 LET x(i)=r*COS t
100 LET y(i)=r*SIN t
110 LET z(i)=0
120 NEXT i
130 LET xs=0
140 LET ys=0
150 LET zs=h
160 REM calculo da imagem
170 FOR i=1 TO n+1
180 LET x(i)=INT (0.5+x(i)+0.37
5*y(i))
190 LET z(i)=INT (0.5+z(i)+0.37
5*y(i))
200 NEXT i
210 LET xs=INT (0.5+xs+0.375*ys)
220 LET zs=INT (0.5+zs+0.375*ys)
230 REM enquadramento da imagem
240 DIM u(n+2)
250 DIM v(n+2)
260 LET umax=-10e30
270 LET vmax=-10e30
280 LET umin=10e30
290 LET vmin=10e30
300 FOR i=1 TO n+2
310 IF i<>n+2 THEN LET u(i)=x(i)

```

```

320 IF i<>n+2 THEN LET v(i)=z(i)
330 IF i=n+2 THEN LET u(i)=xs
340 IF i=n+2 THEN LET v(i)=zs
350 IF u(i)>umax THEN LET umax=
u(i)
360 IF v(i)>vmax THEN LET vmax=
v(i)
370 IF u(i)<umin THEN LET umin=
u(i)
380 IF v(i)<vmin THEN LET vmin=
v(i)
390 NEXT i
400 LET ka=(vmax-vmin)/(umax-um
in)
410 IF ka>0.6 THEN LET ka=100
420 IF ka>0.6 THEN LET la=100/k
430 IF ka<=0.6 THEN LET la=200
440 IF ka<=0.6 THEN LET ha=200*
ka
450 LET k1=la/(umax-umin)
460 LET l1=100+la/2-k1*umax
470 LET k2=ha/(vmax-vmin)
480 LET l2=100+ha/2-k2*vmax
490 FOR i=1 TO n+2
500 LET u(i)=k1*u(i)+l1
510 LET v(i)=k2*v(i)+l2
520 NEXT i
530 REM traçado
540 FOR i=1 TO n
550 PLOT u(i),v(i)
560 DRAW u(i+1)-u(i),v(i+1)-v(i)
570 NEXT i
580 FOR i=1 TO n
590 PLOT u(n+2),v(n+2)
600 DRAW u(i)-u(n+2),v(i)-v(n+2)
610 NEXT i

```

As figuras 16, 17 e 18 mostram as pirâmides obtidas para $n=4$, $n=5$ e $n=6$.

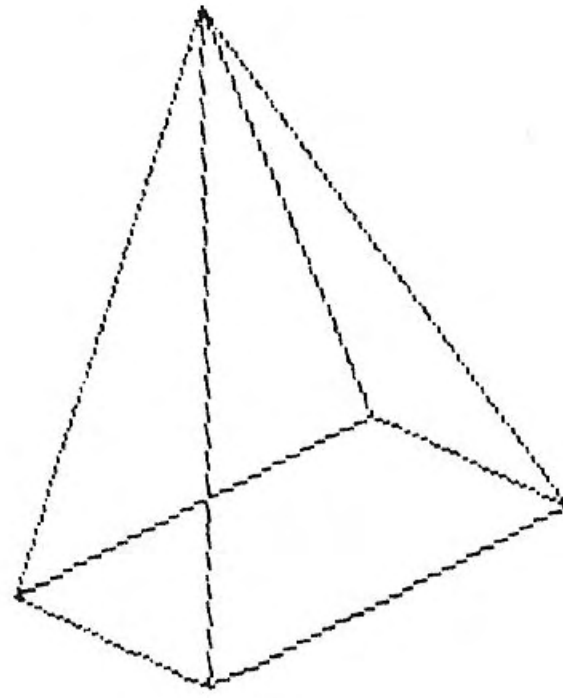


Fig. 16

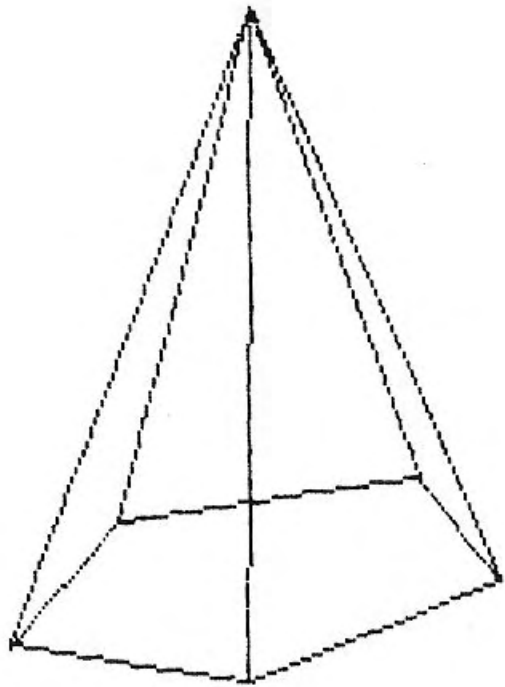


Fig. 17

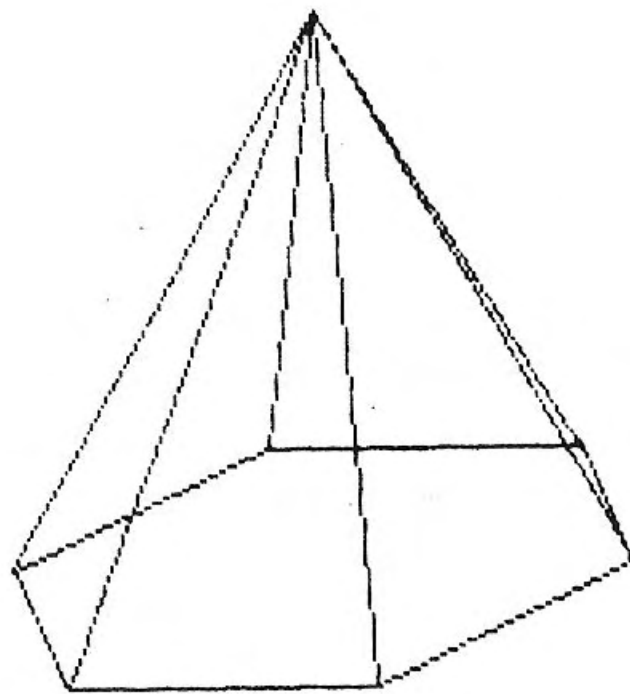


Fig. 18

PARTES ESCONDIDAS DE UM POLIEDRO CONVEXO

As figuras 1 e 2 representam o mesmo avião, um Alpha-Jet.

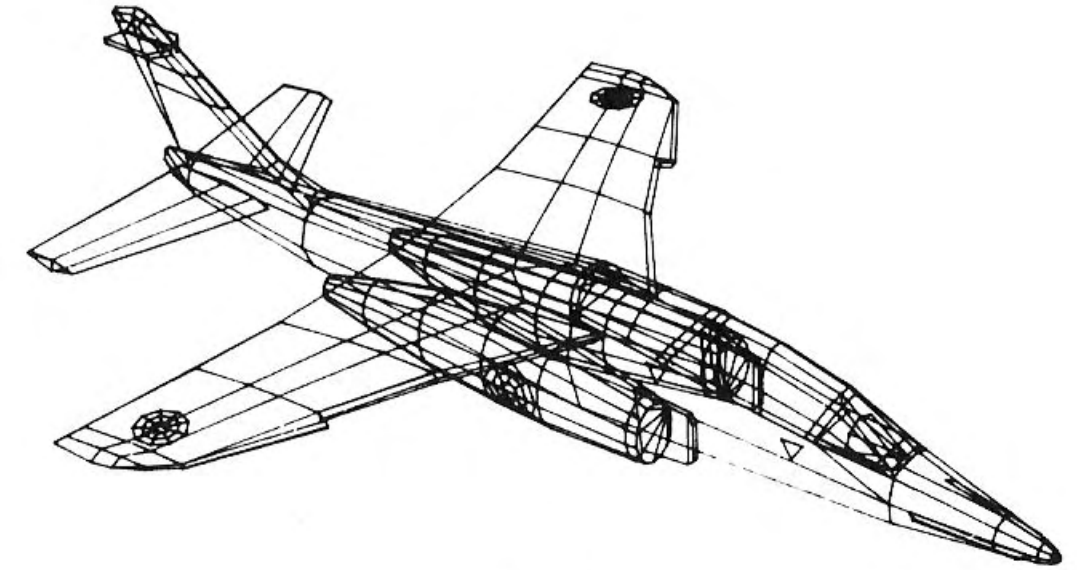


Fig. 1

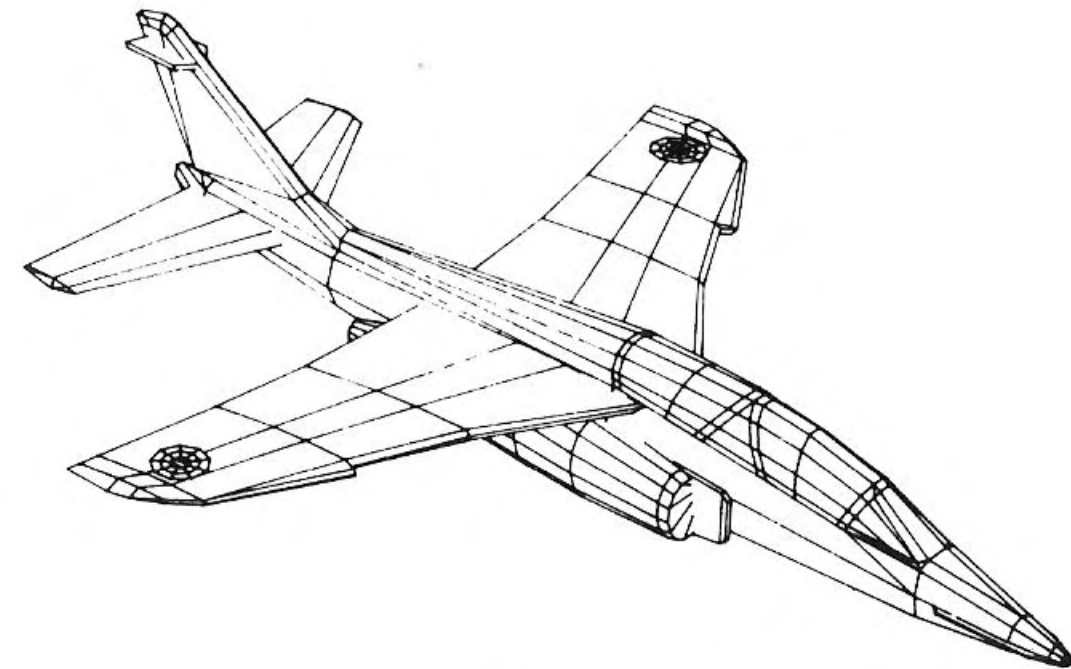


Fig. 2

No primeiro caso, todas as partes do avião foram representadas.

No segundo caso, só as partes visíveis foram desenhadas, tendo sido eliminadas as partes escondidas.

Neste capítulo, mostraremos como proceder à eliminação das partes escondidas, limitando-nos no entanto ao caso de um poliedro convexo.

1 Poliedros convexos e não convexos

1. Faces e facetas

Um poliedro qualquer é constituído por uma justaposição de polígonos planos, as facetas. Cada uma destas apresenta uma face externa, dirigida para o exterior, e uma face interior.

Para um observador exterior ao poliedro, só as faces externas são visíveis (na medida, naturalmente, em que se supõe a superfície do poliedro opaca).

A figura 3 mostra um poliedro de que são visíveis quatro facetas num total de oito.

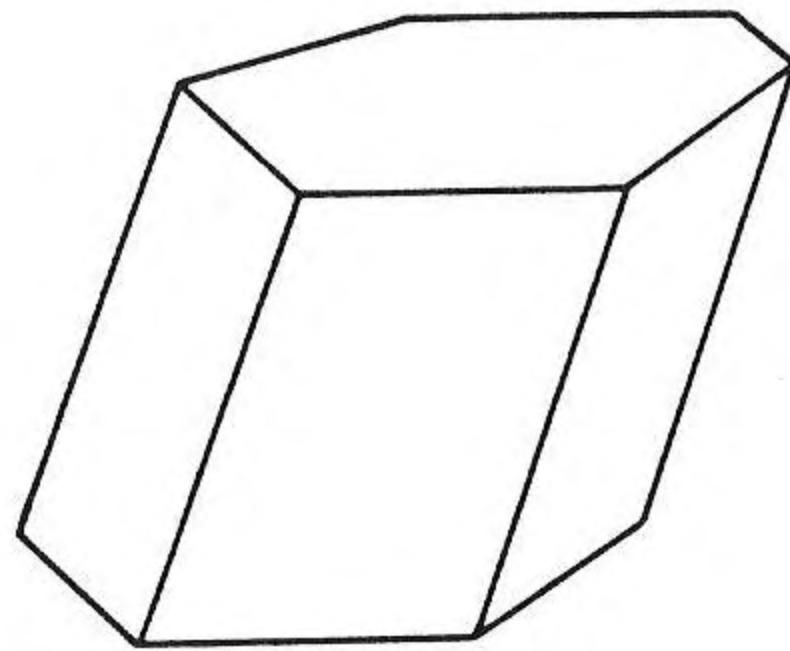


Fig. 3

2. Definição

Seja P um poliedro qualquer. Chamemos E à parte do espaço limitada por este poliedro, incluindo a superfície.

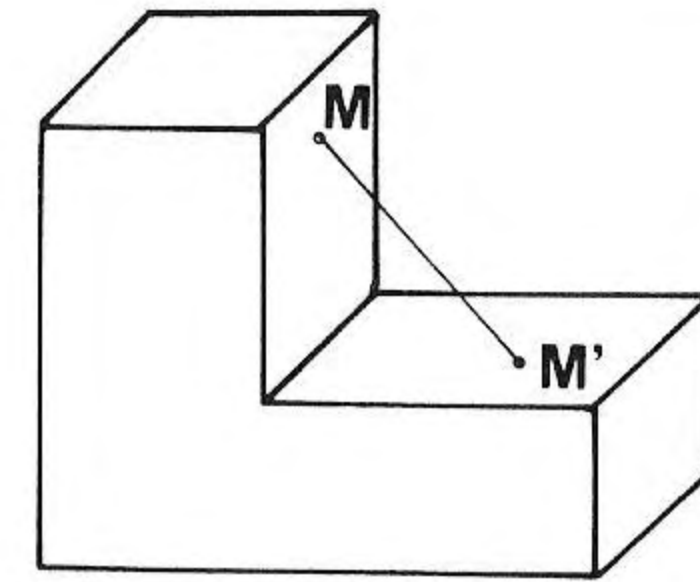


Fig. 4

Sejam M e M' dois pontos quaisquer de E : P é convexo se e só se o segmento MM' está contido em E .

O poliedro da figura 4 não é convexo porque existem dois pontos M e M' tais que MM' seja exterior ao poliedro.

3. Partes escondidas

Quando um poliedro não é convexo, algumas das suas partes podem ser escondidas por outras partes (ver a figura 5).

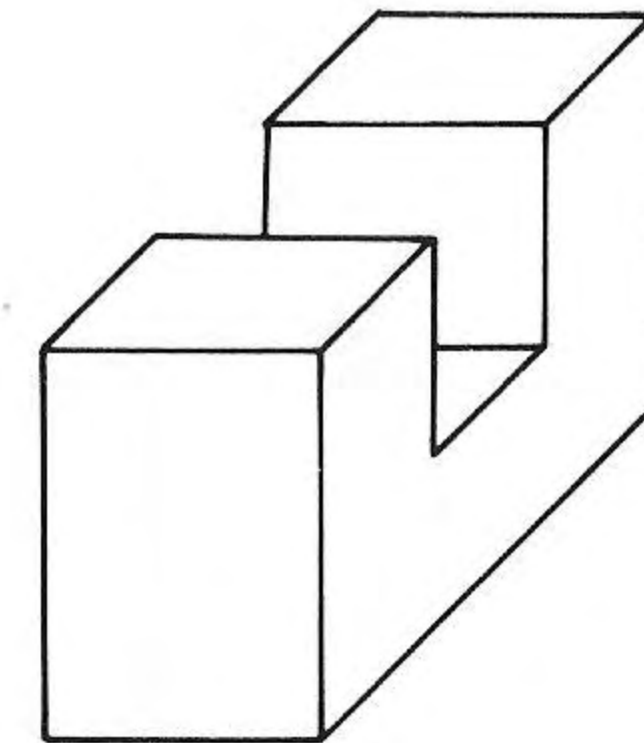


Fig. 5

Se o poliedro é convexo, nenhuma faceta pode ser escondida, sendo portanto todas elas completamente visíveis ou completamente invisíveis.

2 Orientação das facetas

1. Uma faceta apresenta um rebordo que pode ser orientado de duas maneiras opostas (figura 6).

O sentido negativo é aquele que corresponde ao sentido dos ponteiros do relógio.

O sentido positivo corresponde ao sentido contrário.

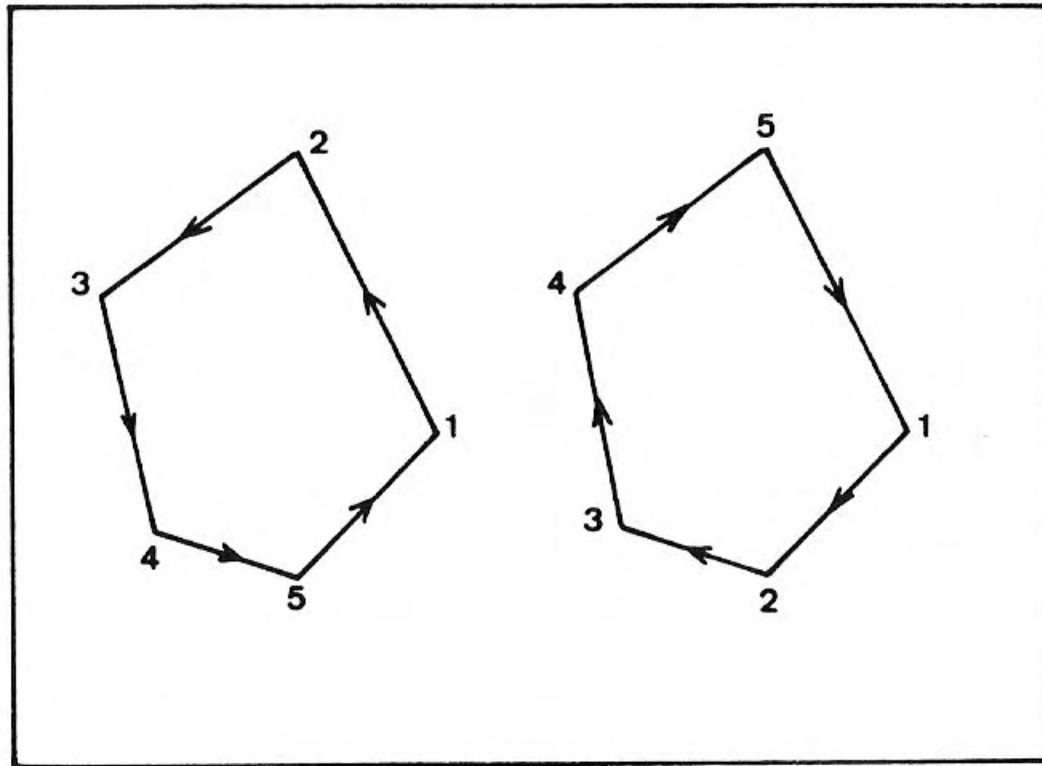


Fig. 6

2. Seja F uma faceta qualquer de um poliedro.

Diz-se que F está orientada positivamente quando, para um observador exterior ao poliedro, o rebordo desta faceta tem um sentido positivo (figura 7).

3 Como reconhecer as partes escondidas?

1. Caso particular

A figura 8 representa um cubo visto em perspectiva cavaleira. Os vértices do cubo foram numerados de forma arbitrária de 1 a 8. São visíveis três das seis facetas, as 1465, 1582 e 5678.

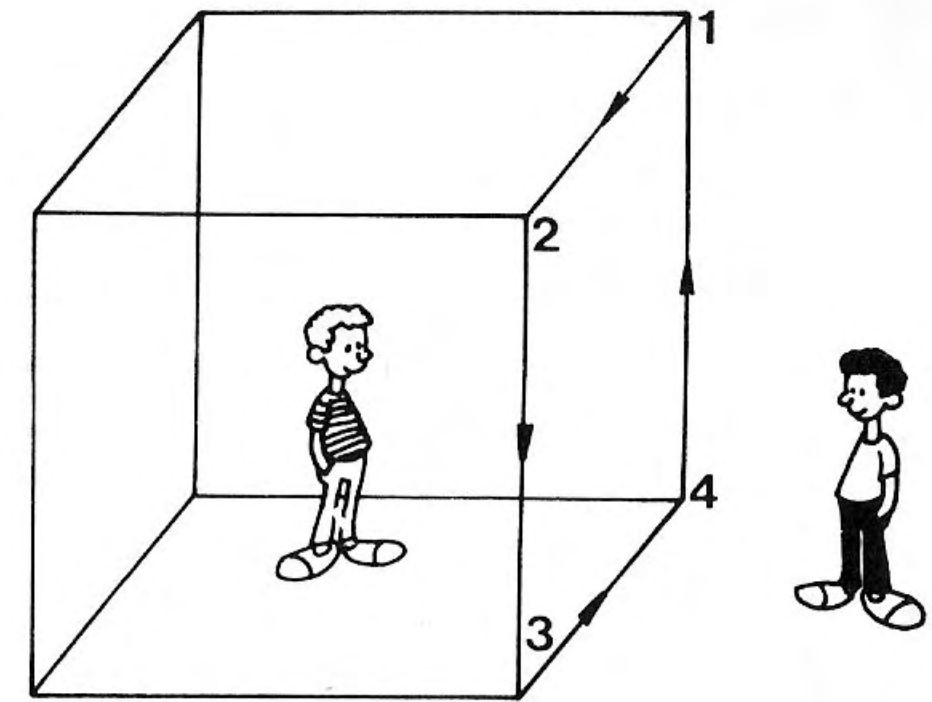


Fig. 7

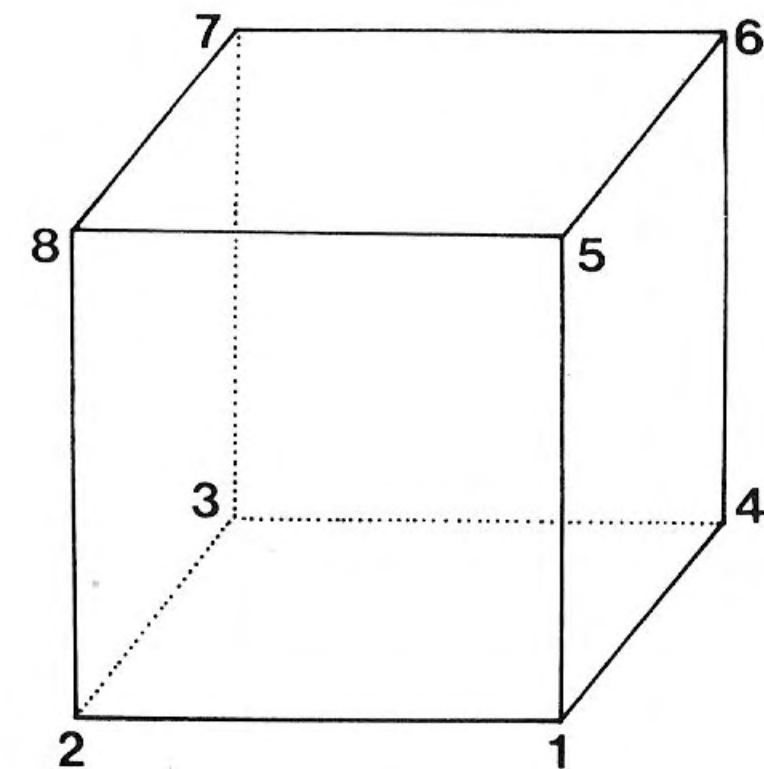


Fig. 8

Orientemos cada faceta do cubo positivamente e definamos para cada uma delas:

- a ordem dos números que corresponde a esta orientação positiva;
- a ordem pela qual se lê esta sequência de números na vista em perspectiva. Esta ordem será positiva ou negativa.

Obteremos assim a tabela seguinte:

| Número da faceta | Ordem dos vértices da faceta orientada positivamente | Sentido do bordo da faceta na projecção | Faceta visível? |
|------------------|--|---|-----------------|
| 1 | 1234 | - | não |
| 2 | 5678 | + | sim |
| 3 | 1465 | + | sim |
| 4 | 1582 | + | sim |
| 5 | 2873 | - | não |
| 6 | 7642 | - | não |

Constatamos que uma faceta orientada positivamente não é vista quando a sua projecção tem uma orientação negativa.

2. Generalização

Generalizaremos o resultado anterior a qualquer poliedro convexo. Este resultado é válido qualquer que seja para qualquer tipo de projecção: cilíndrica, cónica ou perspectiva cavaleira.

4 Utilização de um produto vectorial

Seja F uma faceta orientada positivamente e seja F' a sua imagem no plano de projecção.

Para conhecer a orientação de F' , basta utilizar o facto de o produto vectorial não ser comutativo: para dois vectores \vec{u} e \vec{v} ,

$$\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$$

1. Fórmula geral

Designemos por $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ os vértices de F' e consideremos

$$\vec{p} = \vec{P_1 P_2} \wedge \vec{P_1 P_3} + \vec{P_1 P_3} \wedge \vec{P_1 P_4} + \dots + \vec{P_1 P_{n-1}} \wedge \vec{P_1 P_n}$$

O vector \vec{p} é perpendicular ao plano de projecção dado que este contém os vectores $\vec{P_1 P_2}, \vec{P_1 P_3}, \dots, \vec{P_1 P_n}$.

Suponhamos o plano de projecção referido a um sistema ortonormado (O, \vec{u}, \vec{v}) .

Consideremos $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$: o referencial $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é ortonormado e constitui um referencial do espaço inteiro. Comparando os vectores \vec{p} e \vec{w} , podemos constatar que são possíveis três casos:

- \vec{p} é nulo. Neste caso, os pontos P_1, P_2, \dots, P_n estão alinhados, F' é um segmento de recta;
- \vec{p} não é nulo e tem o mesmo sentido de \vec{w} : F' tem uma orientação negativa (ver a figura 9);
- \vec{p} não é nulo e tem um sentido contrário ao sentido de \vec{w} : F' tem então uma orientação positiva.

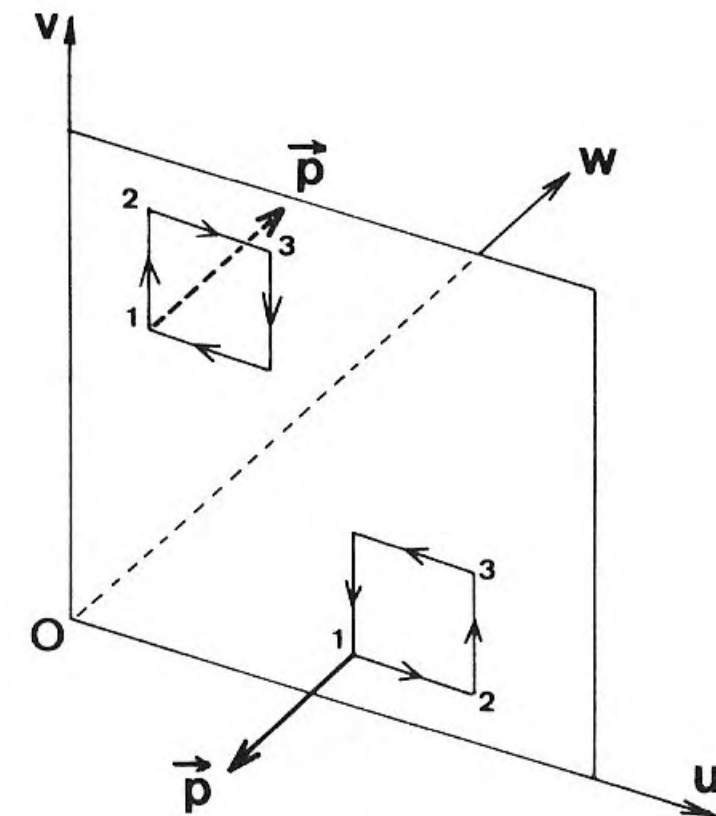


Fig. 9

2. Na prática

Contentar-nos-emos em utilizar apenas três pontos fazendo

$$\vec{p} = \vec{P_1 P_2} \wedge \vec{P_1 P_3}$$

Se u_1, u_2, u_3 e v_1, v_2, v_3 designam as coordenadas respectivas de P_1, P_2, P_3 no referencial Ouv , as do vector \vec{p} serão então $0, 0, (u_2 - u_1)(v_3 - v_1) - (u_3 - u_1)(v_2 - v_1)$.

F' encontra-se orientada positivamente, sendo portanto visível, se o número $(u_2 - u_1)(v_3 - v_1) - (u_3 - u_1)(v_2 - v_1)$ é negativo ou nulo.

5 Um exemplo detalhado, o do cubo

Representemos em perspectiva cavaleira um cubo de 40 pixels de lado.

1. Descrição do cubo

A figura 10 indica como são numerados os vértices do cubo e qual é o referencial Oxyz escolhido.

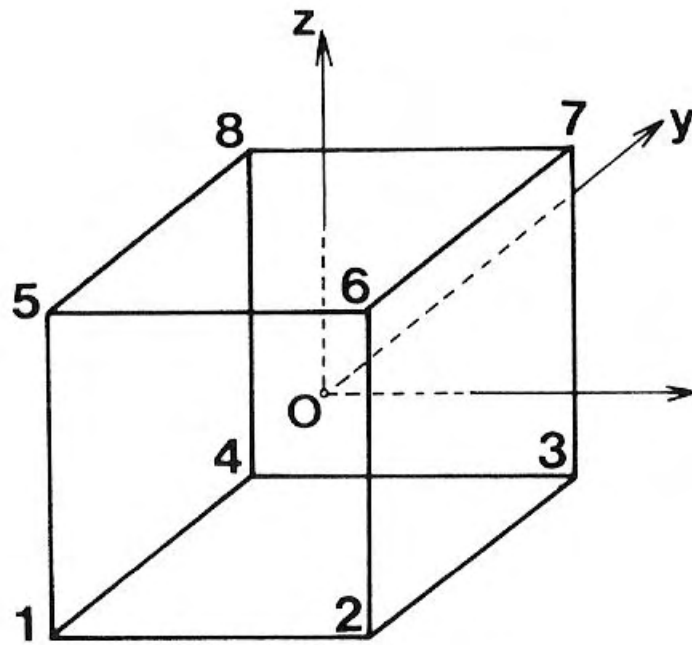


Fig. 10

a) A tabela seguinte, a que chamaremos tabela dos vértices, apresenta as coordenadas de cada um dos oito vértices do cubo no sistema escolhido:

| Número do vértice | x | y | z |
|-------------------|----|----|----|
| 1 | -1 | -1 | -1 |
| 2 | 1 | -1 | -1 |
| 3 | 1 | 1 | -1 |
| 4 | -1 | 1 | -1 |
| 5 | -1 | -1 | 1 |
| 6 | 1 | -1 | 1 |
| 7 | 1 | 1 | 1 |
| 8 | -1 | 1 | 1 |

É necessário ler esta tabela do seguinte modo: no caso do vértice n.º 1 por exemplo, $x = -u_L$, $y = -u_L$ e $z = -u_L \cdot u_L$ designa a unidade de comprimento usada.

b) Definamos para cada faceta do cubo a sequência de números que correspondem a uma orientação positiva desta faceta:

| Número da faceta | Sequência que define a faceta | | | |
|------------------|-------------------------------|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 6 | 5 |
| 2 | 2 | 3 | 7 | 6 |
| 3 | 1 | 4 | 3 | 2 |
| 4 | 1 | 5 | 8 | 4 |
| 5 | 8 | 7 | 3 | 4 |
| 6 | 8 | 5 | 6 | 7 |

Esta tabela é designada tabela das faces.

2. Programa

Este programa apresenta-se em cinco partes:

1.º Para i variando entre 1 e 8, as variáveis $x(i)$, $y(i)$, $z(i)$ representam as coordenadas dos vértices do cubo.

Colocadas em memória numa instrução DATA, estas coordenadas são lidas graças a uma instrução READ.

```

10 INPUT "INDIQUE UMA UNIDADE
DE COMPRI- MENTO INFERIOR A 40:
";UL
20 DATA -1,-1,-1,1,-1,-1,1,1,-
1,-1,1,-1,-1,-1,1,1,-1,1,1,1,-
1,1,1
30 DIM X(8)
40 DIM Y(8)
50 DIM Z(8)
60 FOR I=1 TO 8
70 READ X,Y,Z
80 LET X(I)=X*UL
90 LET Y(I)=Y*UL
100 LET Z(I)=Z*UL
110 NEXT I
    
```

2.º É prevista uma rotação de ângulo θ em torno do eixo Oz (são possíveis rotações em torno dos outros eixos).

```

120 INPUT "PARA UMA ROTACAO EM
TORNO DO EIXO OZ, INDIQUE O AN
NGULO (EM GRAUS); OU ESCREVA 0
":a
130 LET c=COS (a*PI/180)
140 LET s=SIN (a*PI/180)
150 FOR i=1 TO 8
160 LET u=x(i)*c-y(i)*s
170 LET v=x(i)*s+y(i)*c
180 LET x(i)=u
190 LET y(i)=v
200 NEXT i

```

3.º Uma segunda instrução DATA contém as seis seqüências da tabela de faces.

```

210 DATA 1,2,5,5,2,3,7,6,1,4,3,
2,1,5,8,4,8,7,3,4,8,5,6,7

```

4.º Depois de escolhidos os parâmetros da perspectiva cava-leira, podemos calcular as coordenadas das projecções dos vértices. Conservámos as antigas variáveis $x(i)$ e $z(i)$.

```

220 FOR i=1 TO 8
230 LET x(i)=x(i)+0,353*y(i)
240 LET z(i)=z(i)+0,353*y(i)
250 NEXT i

```

5.º Os números dos vértices de cada faceta são lidos graças a uma instrução READ.

Para uma qualquer faceta, as coordenadas dos três vértices que vão servir para calcular o vector \vec{p} definido no parágrafo 4.2 são designadas respectivamente por $x(a)$, $z(a)$, $x(b)$, $z(b)$ e $x(c)$, $z(c)$.

Desenha-se a faceta correspondente se a 3.ª coordenada de \vec{P} é negativa ou nula.

```

260 FOR i=1 TO 6
270 READ a,b,c,d
280 LET p=(z(b)-z(a))*(x(c)-x(a)
)- (z(c)-z(a))*(x(b)-x(a))

```

```

290 IF p>0 THEN GO TO 350
300 PLOT 128+x(a),88+z(a)
310 DRAW X(b)-X(a),Z(b)-Z(a)
320 DRAW X(c)-X(b),Z(c)-Z(b)
330 DRAW X(d)-X(c),Z(d)-Z(c)
340 DRAW X(a)-X(d),Z(a)-Z(d)
350 NEXT i

```

3. Resultados

As figuras 11 e 12 mostram o cubo na sua posição inicial e após uma rotação de 60° em torno do eixo Oz.

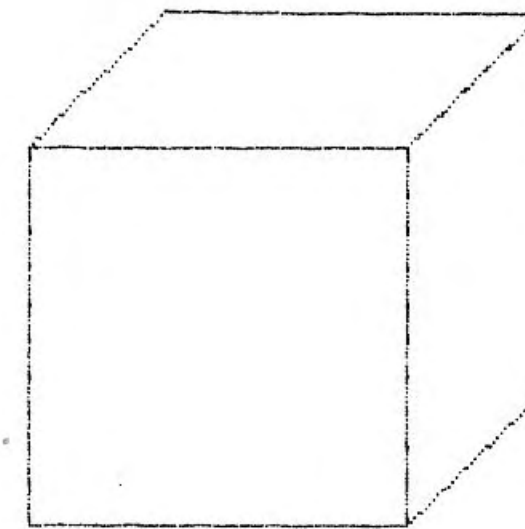


Fig. 11

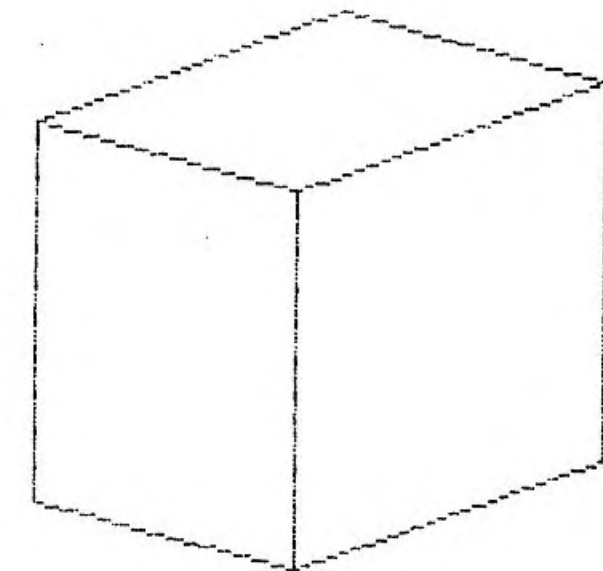


Fig. 12

OS POLIEDROS REGULARES

Existem apenas cinco poliedros regulares convexos. Os geómetras gregos conheciam-nos já no século V a.C., mas foi Euclides que, no século III antes da nossa era, demonstrou que não existia qualquer outro.

Platão (428 a.C-348 a.C.) associou quatro destes poliedros aos quatro elementos: o cubo à terra, o octaedro ao ar, o tetraedro ao fogo e o icosaedro à água. O dodecaedro, finalmente, foi associado ao universo inteiro. Os poliedros regulares convexos são por vezes designados *sólidos de Platão*.

1 Definição

1. Um poliedro convexo é regular se possui as seguintes propriedades:

- Todas as suas arestas têm o mesmo comprimento;
- Todas as suas faces são constituídas por polígonos regulares;
- De cada um dos seus vértices parte o mesmo número de arestas.

2. A tabela que se segue apresenta as características de cada um dos cinco poliedros regulares:

| Nome | Número de faces | Número de vértices | Número de arestas | Natureza das faces |
|------------|-----------------|--------------------|-------------------|------------------------|
| Tetraedro | 4 | 4 | 6 | Triângulos equiláteros |
| Cubo | 6 | 8 | 12 | Quadrados |
| Octaedro | 8 | 6 | 12 | Triângulos equiláteros |
| Dodecaedro | 12 | 20 | 30 | Pentágonos regulares |
| Icosaedro | 20 | 12 | 30 | Triângulos equiláteros |

2 Construção da imagem

O cubo já foi representado diversas vezes. Resta, portanto, construir quatro poliedros.

Cada construção será efectuada em três etapas.

1. É necessário antes de mais escolher um referencial ortonormalizado $Oxyz$ do modo mais simples possível, tendo em conta as diversas simetrias do poliedro.

A unidade de comprimento ligada a este sistema será designada por u_L .

2. As coordenadas dos vértices serão apresentadas numa tabela dos vértices. Utilizaremos uma simplificação da escrita conservando apenas os coeficientes numéricos. Por exemplo, escreveremos $x = 2$ em vez de $x = 2 u_L$.

3. É preferível orientar positivamente cada face. Tendo os vértices sido numerados de modo arbitrário, uma face qualquer é designada pelos números dos seus vértices, sendo estes números considerados do modo mais conveniente.

Podemos então construir a tabela das faces.

4. O cálculo da imagem utilizará em cada caso uma simples perspectiva cavaleira.

Proceder-se-á à eliminação das faces escondidas no caso do dodecaedro e no do icosaedro.

3 O tetraedro regular

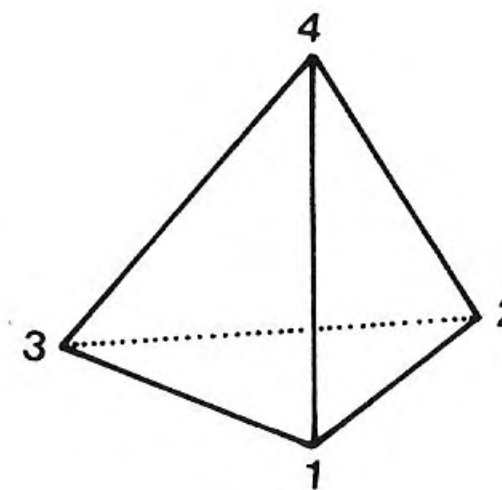


Fig. 1

1. Escolha do referencial

A figura 1 mostra como se numeram os vértices.

O é o centro da face 123, Oz passa pelo ponto 4, Ox passa pelo meio da aresta 1-2 e pelo ponto 3.

2. Tabela dos vértices

| Número do vértice | x | y | z |
|-------------------|----|-------------|------------|
| 1 | 1 | $-\sqrt{3}$ | 0 |
| 2 | 1 | $\sqrt{3}$ | 0 |
| 3 | -2 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | $\sqrt{8}$ |

3. Tabela das faces

| Número das faces | Designação |
|------------------|------------|
| 1 | 132 |
| 2 | 143 |
| 3 | 124 |
| 4 | 234 |

4. Programa e resultado

O programa é o seguinte:

```

10 INPUT "INDIQUE O VALOR DE U
L<45: ";UL
15 REM coordenadas dos vertice
S
20 DIM X(4)
30 DIM Y(4)
40 DIM Z(4)
50 DATA 1,-50R 3,0,1,50R 3,0,-
2,0,0,0,0,50R 8
60 DATA 1,3,2,1,2,4,1,4,3,3,4,
70 FOR I=1 TO 4
80 READ X,Y,Z
90 LET X(I)=X*UL
100 LET Y(I)=Y*UL
110 LET Z(I)=Z*UL
120 NEXT I
125 REM calculo da imagem
130 FOR I=1 TO 4
140 LET X(I)=INT (0.5+X(I)+0.37
5*Y(I))
150 LET Z(I)=INT (0.5+Z(I)+0.37
5*Y(I))

```

```

160 NEXT I
165 REM traçado
170 FOR I=1 TO 4
180 READ a,b,c
190 PLOT 1200+X(a),40+Z(a)
200 DRAW X(b)-X(a),Z(b)-Z(a)
210 DRAW X(c)-X(b),Z(c)-Z(b)
220 DRAW X(a)-X(c),Z(a)-Z(c)
230 NEXT I

```

Para $u_L = 40$, obtemos esta representação (figura 2), após rotação de 60° em torno do eixo Oz.

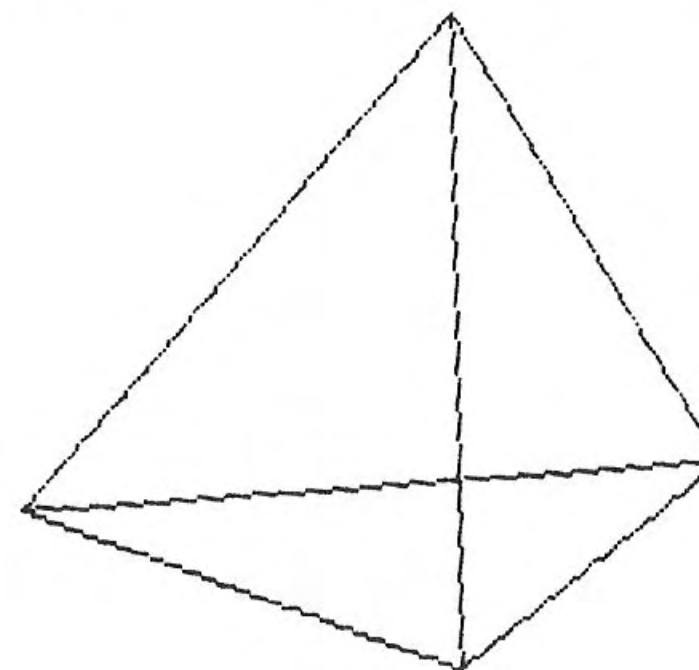


Fig. 2

4 O octaedro

1. Escolha do referencial

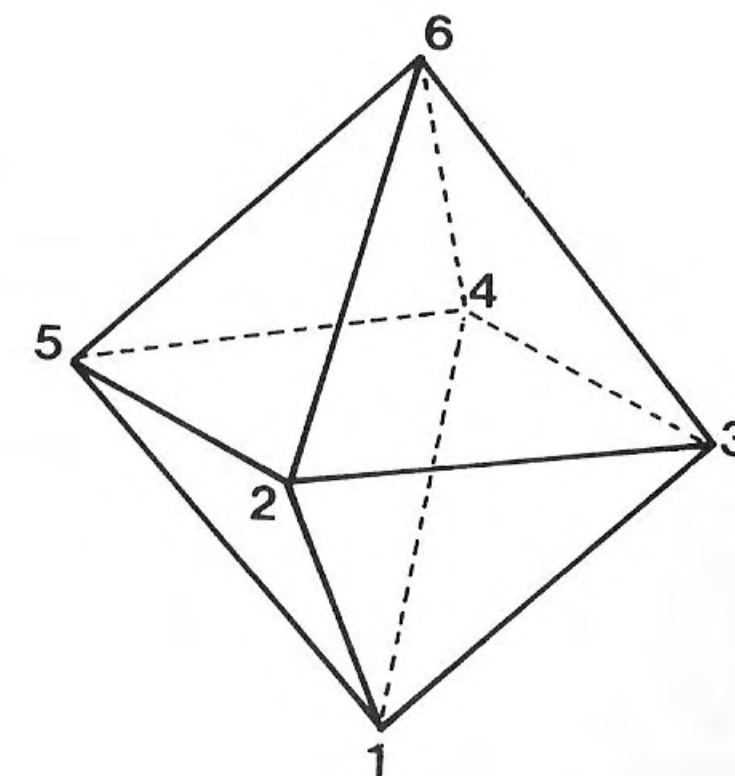


Fig. 3

Os vértices são numerados como se indica na figura 3. O está no centro do octaedro, Oz passa pelos pontos 1 e 6, Ox pelos pontos médios das arestas 4-5 e 2-3.

2. Tabela dos vértices

| Número dos vértices | x | y | z |
|---------------------|----|----|----|
| 1 | 0 | 0 | -1 |
| 2 | 0 | -1 | 0 |
| 3 | 1 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 1 | 0 |
| 5 | -1 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 1 |

3. Tabela das faces

| Número das faces | Designação |
|------------------|------------|
| 1 | 132 |
| 2 | 143 |
| 3 | 125 |
| 4 | 154 |
| 5 | 236 |
| 6 | 265 |
| 7 | 346 |
| 8 | 564 |

4. Programa e resultado

```

5 REM dados
10 INPUT "INDIQUE O VALOR DE U
L<=80: ";U
20 DIM X(6)

```

```

30 DIM U(6)
40 DIM N(6)
50 DATA 0,0,0,-1,0,0,0,-1,0,1,0,0,0,
1,0,0,0,-1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,
4,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,1,4,0,0,1,0,5,1,5,
7,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,4,0,0,0,4
60 FOR I=1 TO 6
70 READ N(I)
80 LET X(I)=X#U
90 LET U(I)=U#U
100 LET Z(I)=Z#U
110 NEXT I
120 REM calculo da imagem
130 FOR I=1 TO 6
140 LET X(I)=INT (0.5+X(I)+0.40
0#U(I))
150 LET Z(I)=INT (0.5+Z(I)+0.25
#U(I))
160 NEXT I
170 REM traçado
180 FOR I=1 TO 6
190 READ A,B,C
200 PLOT 200+X(A),80+Z(A)
210 DRAW X(B)-X(A),Z(B)-Z(A)
220 DRAW X(C)-X(B),Z(C)-Z(B)
230 DRAW X(A)-X(C),Z(A)-Z(C)
240 NEXT I

```

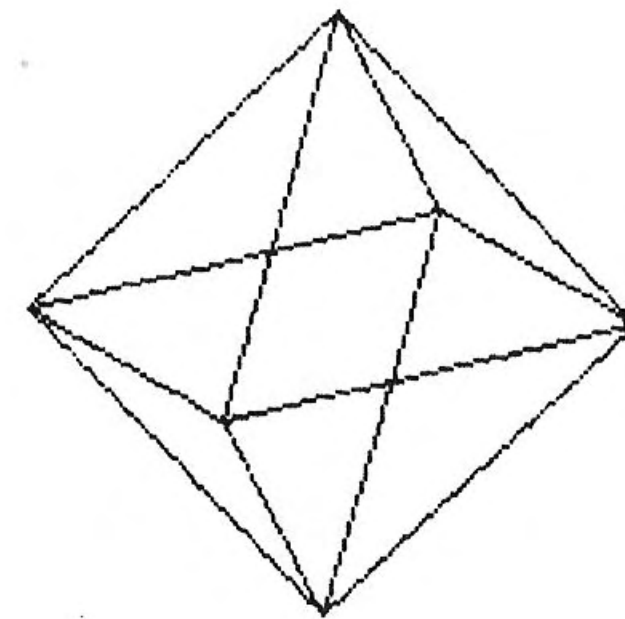


Fig. 4

5 O dodecaedro

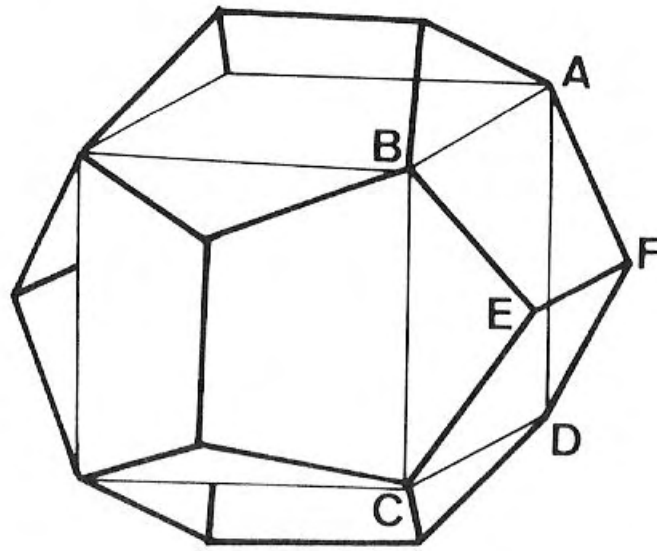


Fig. 5

1. Escolha do referencial

Consideramos um cubo inscrito no dodecaedro (figura 5): teremos O no centro do cubo, e portanto do dodecaedro, e os eixos Ox, Oy e Oz passam cada um pelo centro de uma face do cubo.

As dimensões do poliedro ABCDEF da figura 5 dependem do número de ouro $t = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$ e do comprimento c do lado do dodecaedro.

Por exemplo, $AB = ct$. Pode assim exprimir-se as coordenadas dos 20 vértices do dodecaedro em função deste número t (os cálculos são relativamente fastidiosos).

Os números escolhidos para os vértices são indicados na figura 6.

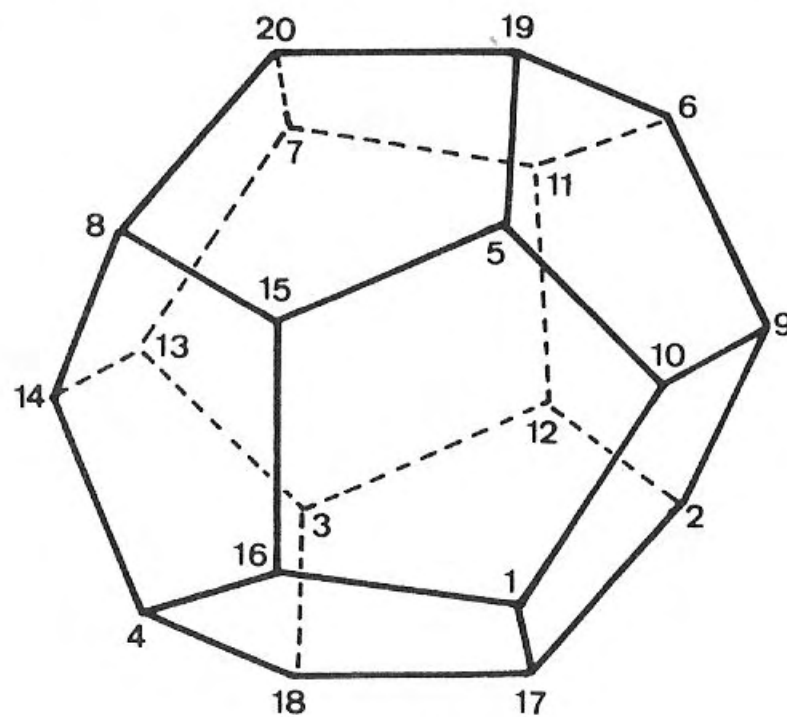


Fig. 6

2. Tabela dos vértices

| Número dos vértices | x | y | z |
|---------------------|------|------|------|
| 1 | t | -t | -t |
| 2 | t | t | -t |
| 3 | -t | t | -t |
| 4 | -t | -t | -t |
| 5 | t | -t | t |
| 6 | t | t | t |
| 7 | -t | t | t |
| 8 | -t | -t | t |
| 9 | 1+t | 1 | 0 |
| 10 | 1+t | -1 | 0 |
| 11 | 0 | 1+t | 1 |
| 12 | 0 | 1+t | -1 |
| 13 | -1-t | 1 | 0 |
| 14 | -1-t | -1 | 0 |
| 15 | 0 | -1-t | 1 |
| 16 | 0 | -1-t | -1 |
| 17 | 1 | 0 | -1-t |
| 18 | -1 | 0 | -1-t |
| 19 | 1 | 0 | 1+t |
| 20 | -1 | 0 | 1+t |

3. Tabela das faces

| Número das faces | Designação | | | | |
|------------------|------------|----|----|----|----|
| 1 | 11 | 6 | 9 | 2 | 12 |
| 2 | 19 | 5 | 10 | 9 | 6 |
| 3 | 19 | 6 | 11 | 7 | 20 |
| 4 | 8 | 15 | 5 | 19 | 20 |
| 5 | 4 | 16 | 15 | 8 | 14 |
| 6 | 16 | 1 | 10 | 5 | 15 |
| 7 | 16 | 4 | 18 | 17 | 1 |
| 8 | 12 | 2 | 17 | 18 | 3 |
| 9 | 17 | 2 | 9 | 10 | 1 |
| 10 | 20 | 7 | 13 | 14 | 8 |
| 11 | 14 | 13 | 3 | 18 | 4 |
| 12 | 11 | 12 | 3 | 13 | 7 |

4. Programa

Antes de procedermos ao traçado, poderemos rodar o dodecaedro em torno do eixo Oz (linhas 150 a 230). Seria fácil acrescentar rotações em torno dos eixos Ox e Oy.

As linhas 320 e 330 permitem eliminar as partes escondidas (ver o capítulo 8). Basta suprimir estas duas linhas para ver todas as faces.

```

5 REM coordenadas dos vinte v
vertices
10 LET U1=30
20 LET t=(1+SQR 5)/2
30 LET l=1+t
40 DATA t,-t,-t,t,t,-t,-t,t,-t
,-t,-t,-t,t,-t,t,t,t,-t,t,-t
,-t,t,t,1,0,t,-1,0,0,t,1,0,l,-1,
,-1,1,0,-1,-1,0,0,-1,1,0,-1,-1,1,
0,-1,-1,0,-1,1,0,t,-1,0,t
50 DIM X(20)
60 DIM U(20)
70 DIM N(20)
80 FOR i=1 TO 20
90 READ a,b,c,N
100 LET X(i)=X#U1
110 LET U(i)=U#U1
120 LET N(i)=N#U1
130 NEXT i
140 REM rotacao em torno do eix
o Oz
150 INPUT "QUAL E' O ANGULO DE
ROTACAO (EM GRADOS)? "a
160 LET c=COS (a*PI/180)
170 LET s=SEN (a*PI/180)
180 FOR i=1 TO 20
190 LET U=X(i)*c-U(i)*s
200 LET V=X(i)*s+U(i)*c
210 LET X(i)=U
220 LET U(i)=V
230 NEXT i
240 REM calculo da perspectiva
250 FOR i=1 TO 20
260 LET X(i)=INT (.5+X(i)+.053*
U(i))
270 LET Z(i)=INT (.5+Z(i)+0.07*
U(i))
280 NEXT i
290 REM tabela das faces
300 DATA 11,0,0,10,10,10,10,0
,0,11,7,0,0,10,10,10,10,
,10,0,14,10,10,10,10,4,10,10,
,10,10,17,10,0,17,0,10,11,0,7
,10,14,0,14,10,0,10,4,11,10,0,10
,7

```

```

300 FOR i=1 TO 12
310 READ a,b,c,d,e
320 LET p=(Z(b)-Z(a))*(X(c)-X(a)
)- (Z(c)-Z(a))*(X(b)-X(a))
330 IF p>0 THEN GO TO 400
340 PLOT 120+X(a),80+Z(a)
350 PLOT X(b)-X(a),Z(b)-Z(a)
360 PLOT X(c)-X(a),Z(c)-Z(a)
370 PLOT X(d)-X(a),Z(d)-Z(a)
380 PLOT X(e)-X(a),Z(e)-Z(a)
390 NEXT i

```

5. Resultados

As figuras 7 e 8 representam o dodecaedro na sua posição inicial sem eliminação das partes escondidas e com eliminação destas.

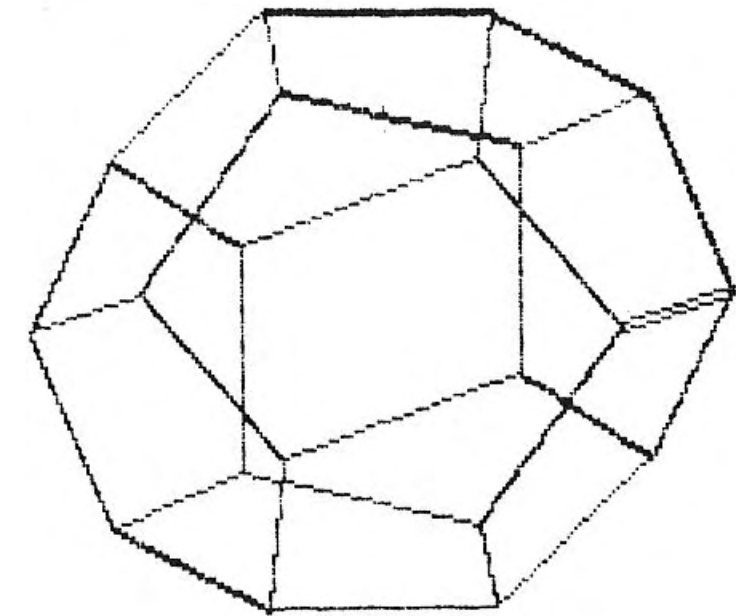


Fig. 7

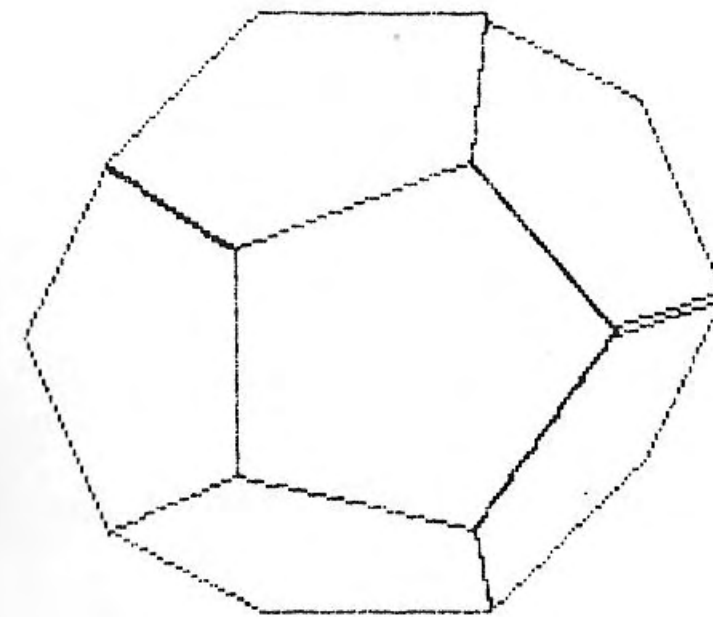


Fig. 8

As figuras 9 e 10 representam o dodecaedro após rotação de 80° e de 90° em torno do eixo Oz.

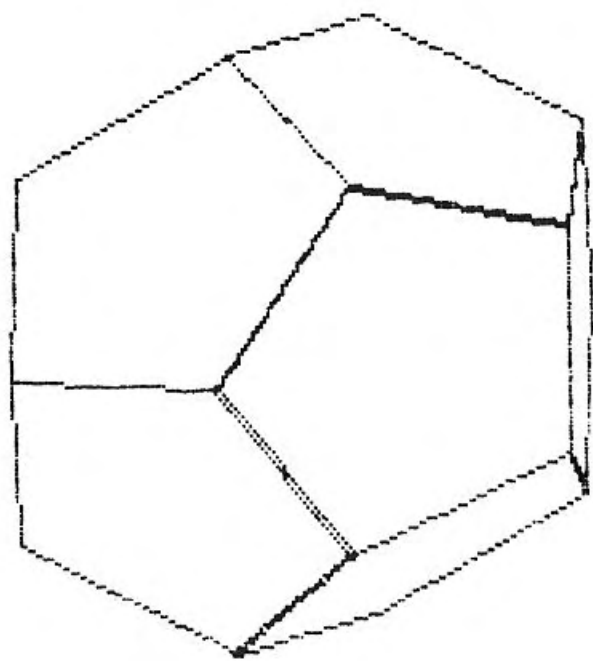


Fig. 9

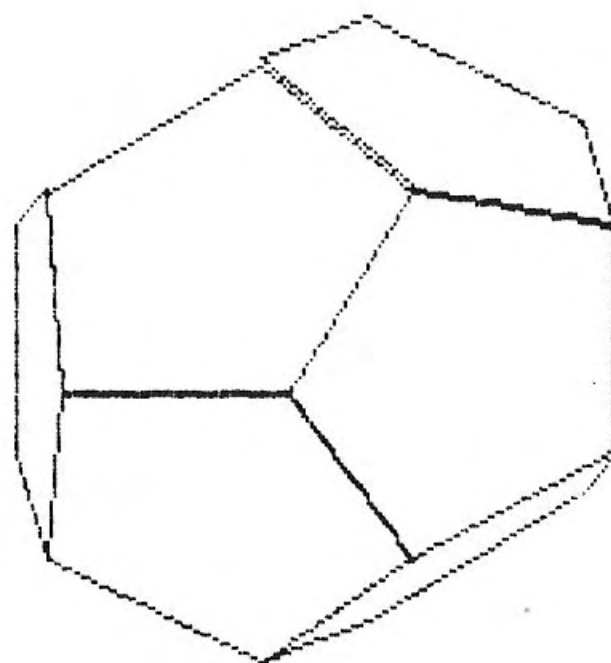


Fig. 10

6 O icosaedro

Para construir um icosaedro, utilizaremos um resultado descoberto no Renascimento e relacionado com as propriedades dos rectângulos de ouro.

Um rectângulo de ouro possui a seguinte propriedade: o quociente do comprimento pela largura é o número de ouro

$$t = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

1. Tabela dos vértices

Juntando três rectângulos de ouro do modo indicado na figura 11 e ligando os vértices dois a dois, obtém-se um icosaedro.

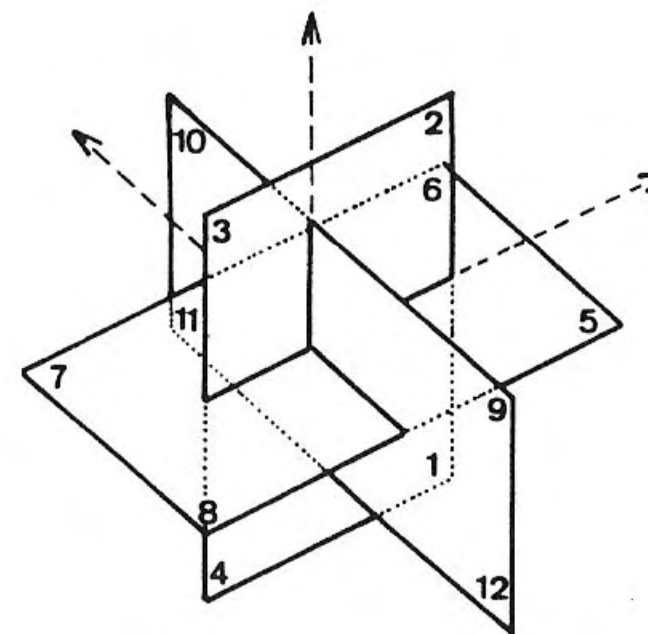


Fig. 11

As coordenadas dos doze vértices deste icosaedro calculam-se facilmente.

| Número dos vértices | x | y | z |
|---------------------|----|----|----|
| 1 | 1 | 0 | -t |
| 2 | 1 | 0 | t |
| 3 | -1 | 0 | t |
| 4 | -1 | 0 | -t |
| 5 | t | -1 | 0 |
| 6 | t | 1 | 0 |
| 7 | -t | 1 | 0 |
| 8 | -t | -1 | 0 |
| 9 | 0 | -t | 1 |
| 10 | 0 | t | 1 |
| 11 | 0 | t | -1 |
| 12 | 0 | -t | -1 |

2. Tabela das faces

| Número das faces | Designação |
|------------------|------------|
| 1 | 2 10 3 |
| 2 | 10 2 6 |
| 3 | 10 6 11 |
| 4 | 7 10 11 |
| 5 | 7 3 10 |
| 6 | 8 9 3 |
| 7 | 2 3 9 |
| 8 | 2 9 5 |
| 9 | 6 2 5 |
| 10 | 6 5 1 |
| 11 | 6 1 11 |
| 12 | 11 1 4 |
| 13 | 7 11 4 |
| 14 | 8 7 4 |
| 15 | 8 3 7 |
| 16 | 12 5 9 |
| 17 | 1 5 12 |
| 18 | 1 12 4 |
| 19 | 4 12 8 |
| 20 | 8 12 9 |

3. Programa

```

5 REM coordenadas dos doze ve
rtices
10 LET UL=50
20 LET t=(1+SOR 5)/2
30 LET l=-t
40 DATA 1,0,l,1,0,t,-1,0,t,-1,
0,l,t,-1,0,t,1,0,l,1,0,l,-1,0,0,
l,1,0,t,1,0,t,-1,0,l,-1
50 DIM X(12)
60 DIM Y(12)
70 DIM Z(12)
80 FOR i=1 TO 12
90 READ X,Y,Z
100 LET X(i)=X*UL
110 LET Y(i)=Y*UL
120 LET Z(i)=Z*UL
130 NEXT i

```

```

140 REM rotacao em torno do eix
o OZ
150 INPUT "QUAL E O ANGULO DE
ROTAÇÃO (EM GRAUS)? ";ar
160 LET c=COS (ar*PI/180)
170 LET s=SIN (ar*PI/180)
180 FOR i=1 TO 12
190 LET U=X(i)*c-Y(i)*s
200 LET V=X(i)*s+Y(i)*c
210 LET X(i)=U
220 LET Y(i)=V
230 NEXT i
240 REM calculo da perspectiva
250 FOR i=1 TO 12
260 LET X(i)=INT (0.5+X(i)+0.47
*Y(i))
270 LET Z(i)=INT (0.5+Z(i)+0.17
1*Y(i))
280 NEXT i
290 REM tabela das faces
300 DATA 2,10,3,10,6,11,7,10,11,
7,3,10,8,9,3,2,3,9,2,9,5,6,2,5,
6,5,1,6,1,11,11,1,4,7,11,4,7,11,4,
8,7,4,8,3,7,12,5,9,1,5,12,1,12,4,
4,12,8,8,12,9
310 REM tracoado
320 FOR i=1 TO 20
330 READ a,b,c
340 LET p=(Z(b)-Z(a))*(X(c)-X(a)
)- (Z(c)-Z(a))*(X(b)-X(a))
350 IF p>0 THEN GO TO 360
360 PLOT 100+X(a),80+Z(a)
370 DRAW X(b)-X(a),Z(b)-Z(a)
380 DRAW X(c)-X(b),Z(c)-Z(b)
390 DRAW X(a)-X(c),Z(a)-Z(c)
400 NEXT i

```

As figuras 12 e 13 representam o mesmo icosaedro, na posição inicial, com e sem eliminação das partes escondidas.

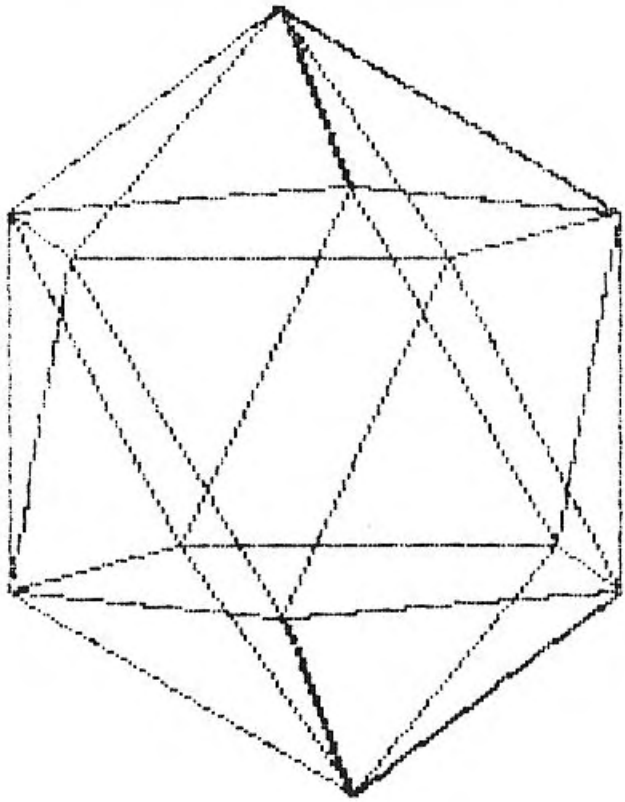


Fig. 12

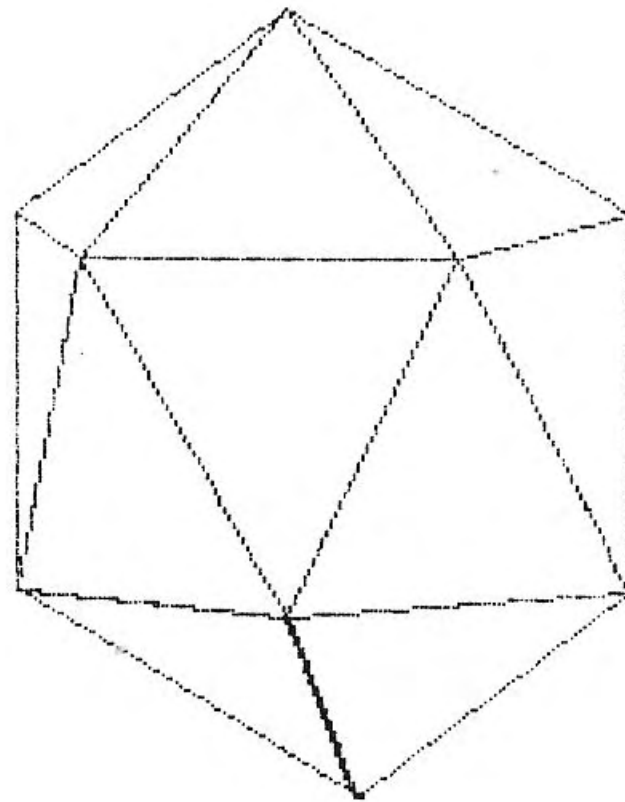


Fig. 13

OS POLIEDROS CONVEXOS SEMI-REGULARES

A figura 1, extraída dos cadernos de Leonardo da Vinci, mostra dois poliedros semi-regulares.

Estes poliedros possuem quase todas as propriedades dos poliedros regulares:

- Podem ser inscritos numa esfera;
- Todas as arestas têm o mesmo comprimento;
- As suas faces estão dispostas de modo idêntico em torno de cada um dos vértices.

A diferença reside no seguinte: as faces de um poliedro semi-regular não são todas idênticas.

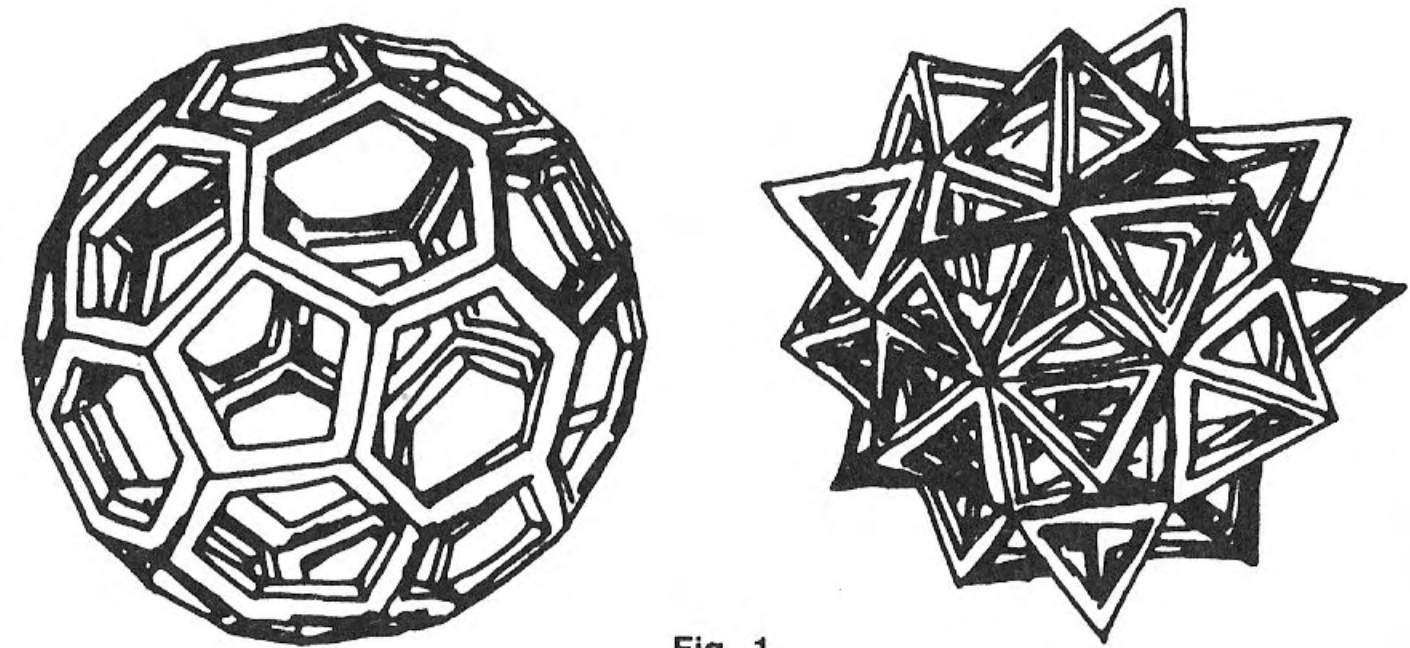


Fig. 1

1 Os sólidos de Arquimedes

São em número de quinze. Entre eles, sete obtêm-se a partir dos poliedros regulares, por truncatura dos vértices.

Todos estes poliedros são convexos.

1. Truncando os quatro vértices de um tetraedro regular, obtêm-se um tetraedro truncado.

A partir de um cubo ou de um octaedro regular obtêm-se um cubo truncado, um cuboctaedro e um octaedro truncado.

A partir de um dodecaedro ou de um icosaedro obtêm-se um dodecaedro truncado, um icosidodecaedro e um icosaedro truncado.

A tabela que se segue indica as características destes sete poliedros. Nesta tabela, as letras T, C, P, H, O e D designam respectivamente os polígonos regulares de 3, 4, 5, 6, 8 e 10 lados.

| Nome | Número dos vértices | Número das arestas | Natureza e número das faces |
|---------------------|---------------------|--------------------|-----------------------------|
| Tetraedro truncado | 12 | 18 | 4 T + 4 H |
| Cubo truncado | 24 | 36 | 8 T + 6 O |
| Cuboctaedro | 12 | 24 | 8 T + 6 C |
| Octaedro truncado | 24 | 36 | 6 C + 8 H |
| Dodecaedro truncado | 60 | 90 | 20 T + 12 D |
| Icosidodecaedro | 30 | 60 | 20 T + 12 P |
| Icosaedro truncado | 60 | 90 | 12 P + 20 H |

2. O leitor poderá encontrar uma descrição dos outros sólidos de Arquimedes na obra de Alan Holden, *Formas, espaço e simetrias*.

2 Primeiro exemplo: o octaedro truncado

1. Os vértices deste poliedro são numerados de 1 a 24 como se indica na figura 2 (os vértices 9, 10, 11, 12, 13, 19 estão escondidos no desenho).

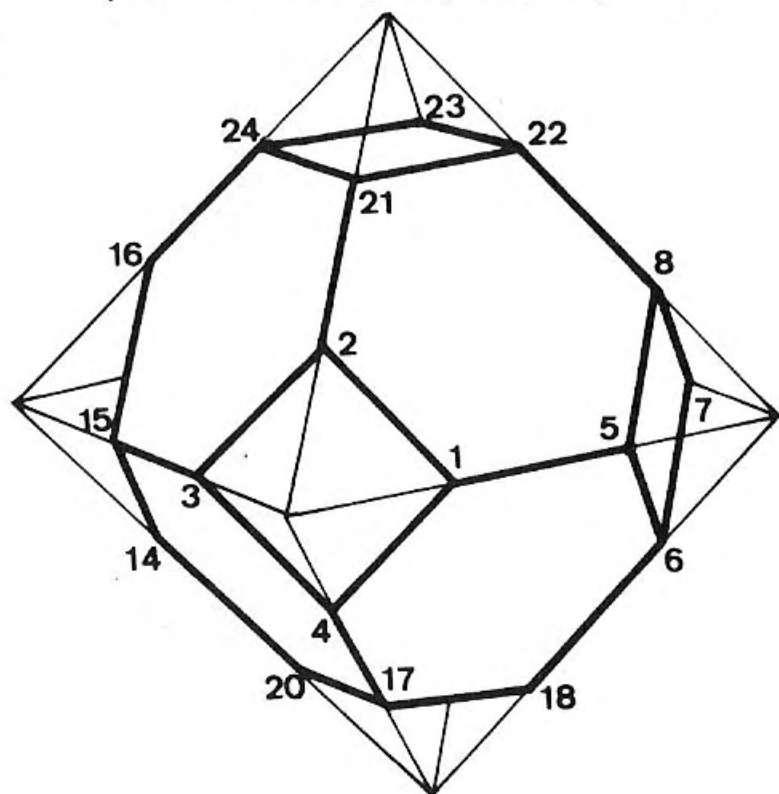


Fig. 2

O referencial Oxyz é idêntico ao que foi usado no caso do octaedro (ver o capítulo 9, parágrafo 4).

2. Tabela dos vértices

Se u_L designa a unidade de comprimento, as coordenadas x , y e z de cada vértice podem escrever-se $x = k_x u_L$, $y = k_y u_L$ e $z = k_z u_L$. Na tabela que se segue figuram portanto apenas k_x , k_y e k_z .

| Número do vértice | x | y | z |
|-------------------|----|----|--------------|
| 1 | 3 | -1 | 0 |
| 2 | 2 | -2 | $\sqrt{2}$ |
| 3 | 1 | -3 | 0 |
| 4 | 2 | -2 | $-\sqrt{2}$ |
| 5 | 3 | 1 | 0 |
| 6 | 2 | 2 | $-\sqrt{2}$ |
| 7 | 1 | 3 | 0 |
| 8 | 2 | 2 | $\sqrt{2}$ |
| 9 | -1 | 3 | 0 |
| 10 | -2 | 2 | $-\sqrt{2}$ |
| 11 | -3 | 1 | 0 |
| 12 | -2 | 2 | $\sqrt{2}$ |
| 13 | -3 | -1 | 0 |
| 14 | -2 | -2 | $-\sqrt{2}$ |
| 15 | -1 | -3 | 0 |
| 16 | -2 | -2 | $\sqrt{2}$ |
| 17 | 1 | -1 | $-2\sqrt{2}$ |
| 18 | 1 | 1 | $-2\sqrt{2}$ |
| 19 | -1 | 1 | $-2\sqrt{2}$ |
| 20 | -1 | -1 | $-2\sqrt{2}$ |
| 21 | 1 | -1 | $2\sqrt{2}$ |
| 22 | 1 | 1 | $2\sqrt{2}$ |
| 23 | -1 | 1 | $2\sqrt{2}$ |
| 24 | -1 | -1 | $2\sqrt{2}$ |

5. As figuras 3 e 4 mostram-nos o octaedro truncado em perspectiva cavaleira. Para obter a totalidade das arestas, eliminámos as linhas 220 e 330 do programa.

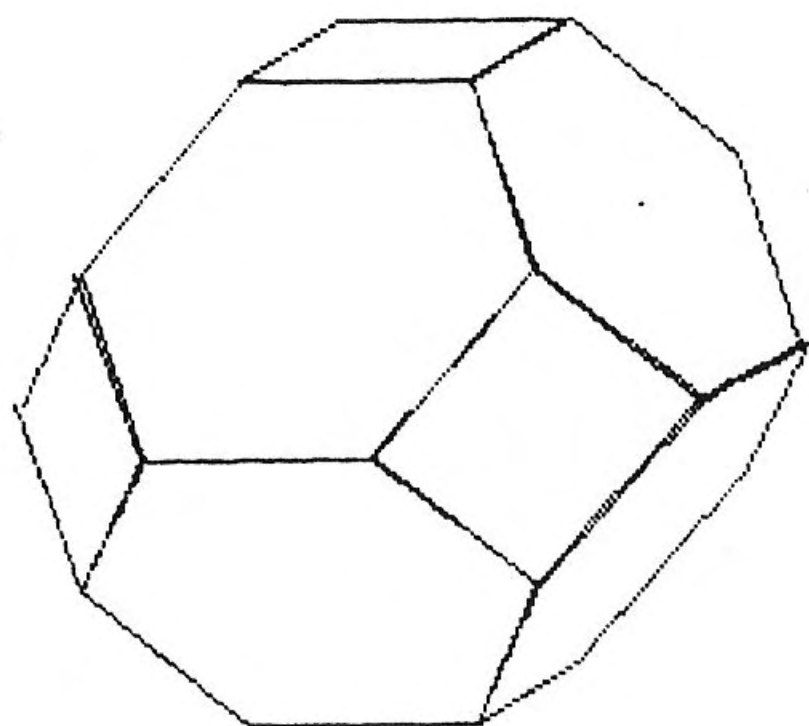


Fig. 3

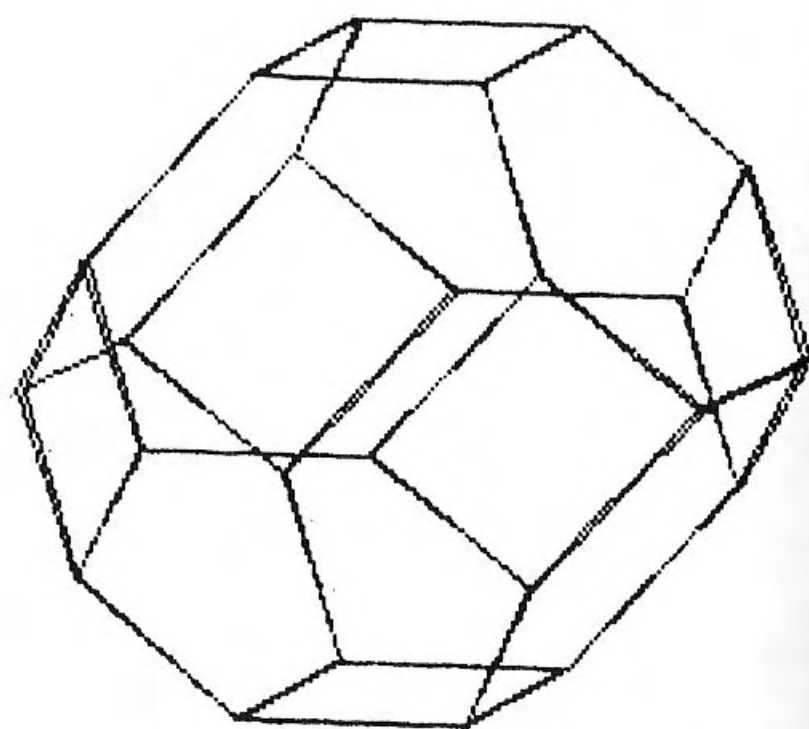


Fig. 4

3 Segundo exemplo: o cuboctaedro

1. Os vértices deste poliedro são os pontos médios das arestas do cubo.

A figura 5 indica o referencial escolhido assim como os números atribuídos a cada vértice.

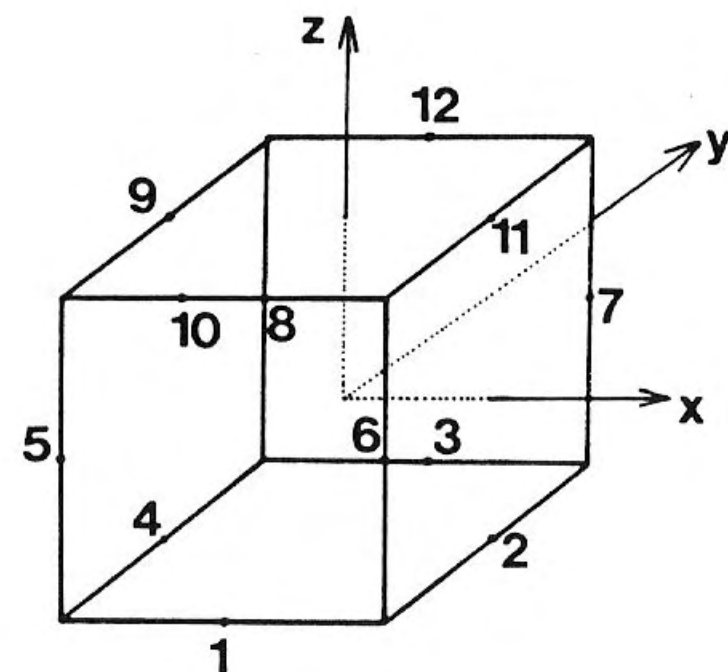


Fig. 5

2. Tabela dos vértices

| Número dos vértices | x | y | z |
|---------------------|----|----|----|
| 1 | 0 | -1 | -1 |
| 2 | 1 | 0 | -1 |
| 3 | 0 | 1 | -1 |
| 4 | -1 | 0 | -1 |
| 5 | -1 | -1 | 0 |
| 6 | 1 | -1 | 0 |
| 7 | 1 | 1 | 0 |
| 8 | -1 | 1 | 0 |
| 9 | -1 | 0 | 1 |
| 10 | 0 | -1 | 1 |
| 11 | 1 | 0 | 1 |
| 12 | 0 | 1 | 1 |

3. Tabelas das faces

| Faces quadradas | Designações | | | |
|-----------------|-------------|----|----|----|
| 1 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 2 | 1 | 4 | 3 | 2 |
| 3 | 2 | 7 | 11 | 6 |
| 4 | 5 | 9 | 8 | 4 |
| 5 | 1 | 6 | 10 | 5 |
| 6 | 12 | 7 | 3 | 8 |

| Faces triangulares | Designações | | |
|--------------------|-------------|----|----|
| 1 | 10 | 9 | 5 |
| 2 | 10 | 6 | 11 |
| 3 | 11 | 7 | 12 |
| 4 | 9 | 12 | 8 |
| 5 | 1 | 5 | 4 |
| 6 | 1 | 2 | 6 |
| 7 | 3 | 7 | 2 |
| 8 | 4 | 8 | 3 |

4. Programa

```

5 REM coordenadas dos vertice
6
10 LET U1=70
20 DIM X(12)
30 DIM Y(12)
40 DIM Z(12)
50 DATA 0,-1,-1,1,0,-1,0,1,-1,
-1,0,-1,-1,-1,0,1,-1,0,1,1,0,-1,
1,0,-1,0,1,0,-1,1,1,0,1,0,1,1
70 FOR I=1 TO 12
80 READ X,Y,Z
90 LET X(I)=X*U1
100 LET Y(I)=Y*U1
110 LET Z(I)=Z*U1
120 NEXT I
130 REM calculo da perspectiva
140 FOR I=1 TO 12
150 LET X(I)=X(I)+0.375*Y(I)
160 LET Z(I)=Z(I)+0.375*Y(I)
170 NEXT I

```

```

180 REM desenho das faces
170 DATA 9,10,11,12,1,4,3,2,7,6,5,8
,11,0,0,0,4,1,0,10,0,12,7,0,0,7
180 FOR I=1 TO 6
190 READ a,b,c,d
200 LET p=(Z(b)-Z(a))*(X(c)-X(a)
)- (Z(c)-Z(a))*(X(b)-X(a))
210 IF p>0 THEN GO TO 270
220 PLOT 120+X(a),80+Z(a)
230 DRAW X(b)-X(a),Z(b)-Z(a)
240 DRAW X(c)-X(b),Z(c)-Z(b)
250 DRAW X(d)-X(c),Z(d)-Z(c)
260 DRAW X(a)-X(d),Z(a)-Z(d)
270 NEXT I
270 REM desenho das faces trian
gulares
280 DATA 10,9,5,10,6,11,11,7,12
,0,1,0,1,0,4,1,0,0,0,7,0,4,0,0
290 FOR I=1 TO 8
300 READ a,b,c
310 LET p=(Z(b)-Z(a))*(X(c)-X(a)
)- (Z(c)-Z(a))*(X(b)-X(a))
320 IF p>0 THEN GO TO 370
330 PLOT 120+X(a),80+Z(a)
340 DRAW X(b)-X(a),Z(b)-Z(a)
350 DRAW X(c)-X(b),Z(c)-Z(b)
360 DRAW X(a)-X(c),Z(a)-Z(c)
370 NEXT I

```

5. A figura 6 apresenta, em perspectiva cavaleira, um cuboctaedro cujas partes escondidas foram eliminadas.

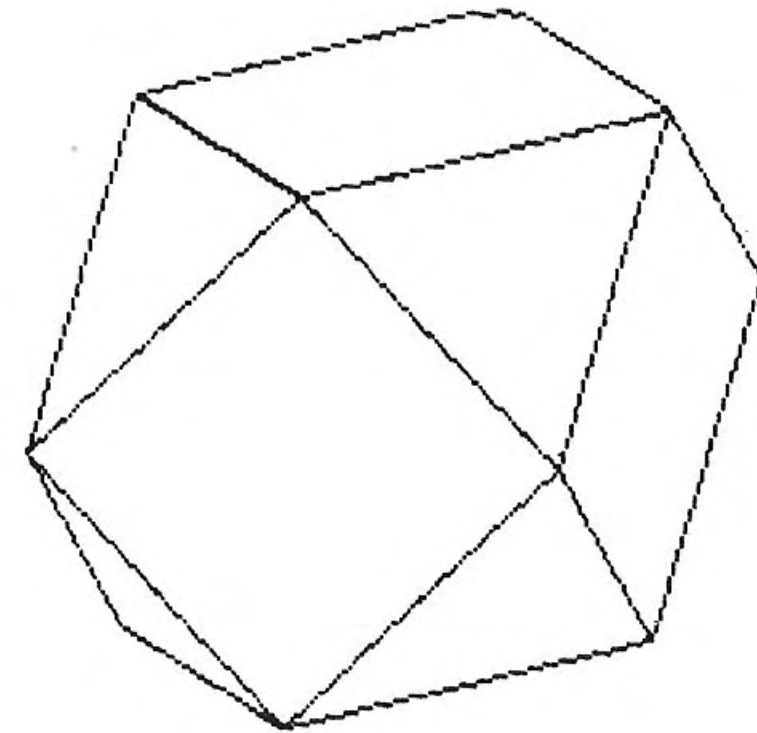


Fig. 6

4 Prismas e antiprismas de Kepler

No início do século XVII, Kepler descobriu dois novos tipos de poliedros que satisfazem a definição dos poliedros semi-regulares:

- os prismas rectos cujas faces laterais são quadrados;
- os antiprismas cujas faces laterais são triângulos equiláteros.

As figuras 7 e 8 apresentam um exemplo do prisma de Kepler, de bases hexagonais.

A figura 9 representa um antiprisma de Kepler, igualmente de bases hexagonais.

Este antiprisma foi obtido graças ao programa do parágrafo 4.3.

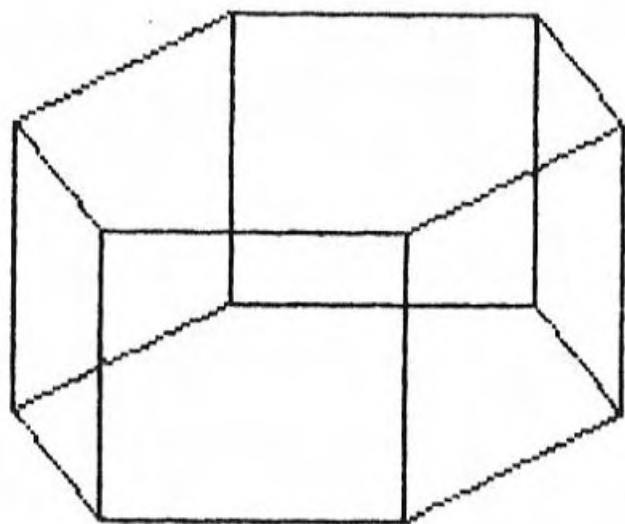


Fig. 7

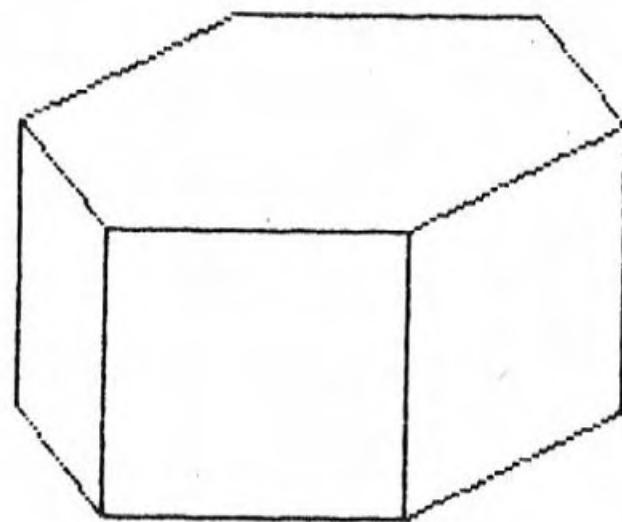


Fig. 8

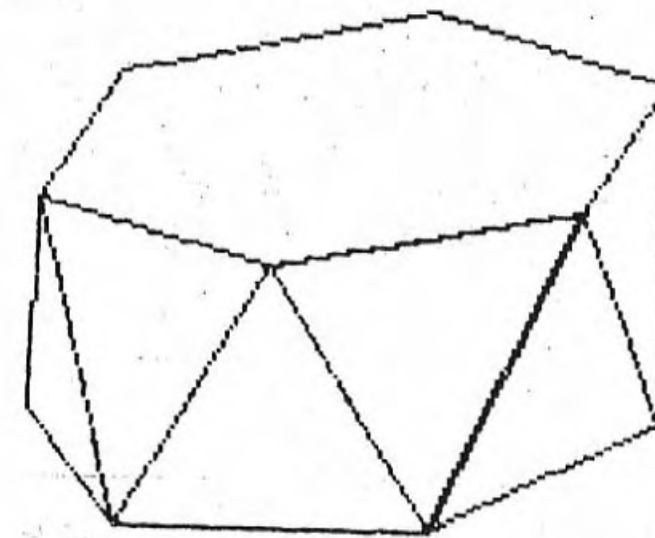


Fig. 9

1. A figura 10 mostra como os doze vértices foram numerados e como foi escolhido o referencial Oxyz.

As coordenadas destes vértices foram calculadas graças à representação paramétrica do círculo $x = R \cos t$ e $y = R \sin t$.

A altura h deste prisma é

$$h = R \sqrt{1 - 4 \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{16}}$$

ou seja,

$$h = R \times 0,9207383$$

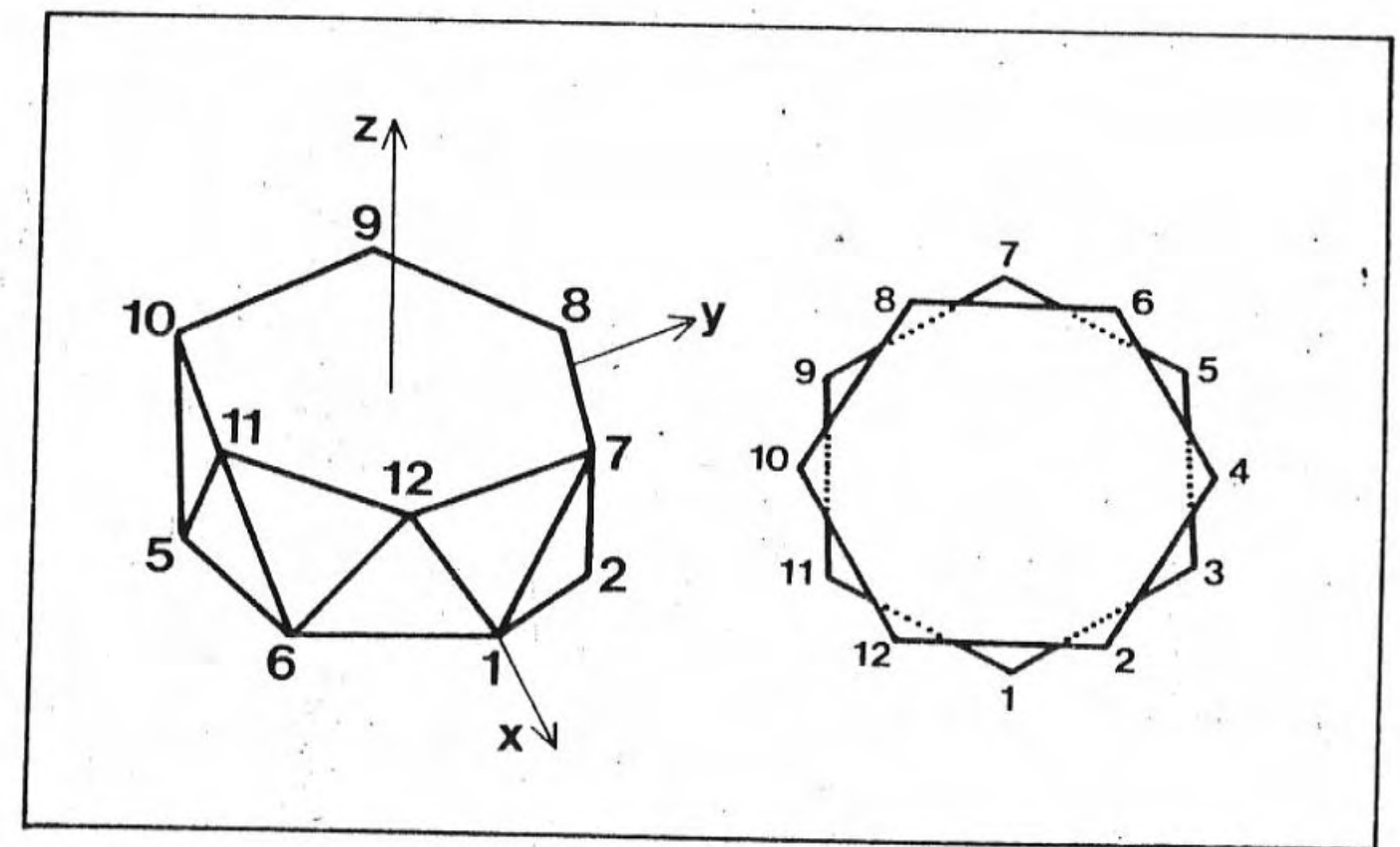


Fig. 10

2. A tabela das faces triangulares é a seguinte:

| Número da face | Designações | | |
|----------------|-------------|----|----|
| 1 | 2 | 7 | 1 |
| 2 | 7 | 2 | 8 |
| 3 | 3 | 8 | 2 |
| 4 | 8 | 3 | 9 |
| 5 | 4 | 9 | 3 |
| 6 | 9 | 4 | 10 |
| 7 | 5 | 10 | 4 |
| 8 | 10 | 5 | 11 |
| 9 | 6 | 11 | 5 |
| 10 | 11 | 6 | 12 |
| 11 | 1 | 12 | 6 |
| 12 | 12 | 1 | 7 |

3. Programa

```

5 REM dados
10 INPUT "VALOR DO RAIOS? "; r
20 LET h=r*0.9207383
30 DIM x(12)
40 DIM y(12)
50 DIM z(12)
60 FOR i=1 TO 6
70 LET x(i)=r*cos((i-1)*PI/3)
80 LET y(i)=r*sin((i-1)*PI/3)
90 LET z(i)=0
100 LET x(i+6)=r*cos((2*i-1)*PI/6)
110 LET y(i+6)=r*sin((2*i-1)*PI/6)
120 LET z(i+6)=h
130 NEXT i
135 REM calculo da perspectiva
140 FOR i=1 TO 12
150 LET x(i)=x(i)+0.25*y(i)
160 LET z(i)=z(i)+0.433*y(i)
170 NEXT i
175 REM desenho das faces hexag
ONais
180 LET p=(z(3)-z(1))*(x(2)-x(1))
190 IF p>0 THEN GO TO 250
200 PLOT 128+x(1),50+z(1)
210 FOR i=2 TO 6

```

```

220 DRAW x(i)-x(i-1),z(i)-z(i-1)
230 NEXT i
240 DRAW x(1)-x(6),z(1)-z(6)
250 LET p=(z(8)-z(7))*(x(9)-x(7))
260 IF p>0 THEN GO TO 320
270 PLOT 128+x(7),50+z(7)
275 REM desenho das faces triangulares
280 FOR i=7 TO 11
290 DRAW x(i+1)-x(i),z(i+1)-z(i)
300 NEXT i
310 DRAW x(7)-x(12),z(7)-z(12)
315 REM desenho das faces triangulares
320 DATA 2,7,1,7,2,8,3,8,2,8,3,9,4,9,3,9,4,10,5,10,4,10,5,11,6,11,6,11,6,12,1,12,6,12,1,7
330 FOR i=1 TO 12
340 READ a,b,c
350 LET p=(z(b)-z(a))*(x(c)-x(a))
360 IF p>0 THEN GO TO 410
370 PLOT 128+x(a),50+z(a)
380 DRAW x(b)-x(a),z(b)-z(a)
390 DRAW x(c)-x(a),z(c)-z(a)
400 DRAW x(b)-x(c),z(b)-z(c)
410 NEXT i

```

AS SUPERFÍCIES DEFINIDAS POR UMA EQUAÇÃO $Z = F(X, Y)$

Seja f uma função numérica de duas variáveis x e y . Supomos que, para $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$ e $y_{\min} \leq y \leq y_{\max}$ a função f é definida e contínua.

Consideremos $z = f(x, y)$. O espaço é organizado por um referencial $Oxyz$, sendo os números x , y e z as coordenadas de um ponto.

O conjunto dos pontos assim definido constitui uma superfície cuja equação é $z = f(x, y)$.

Neste capítulo, estudaremos dois programas que permitem representar uma tal superfície, não incluindo o primeiro uma eliminação das partes escondidas. O segundo permite eliminar estas partes, e utiliza o algoritmo de Wright.

1 Princípio geral da representação

Dividamos o intervalo $[x_{\min}, x_{\max}]$ em n_x partes iguais.

Para $1 \leq i \leq 1 + n_x$ teremos $x_i = x_{\min} + (i - 1) \left(\frac{x_{\max} - x_{\min}}{n_x} \right)$.

Dividamos agora o intervalo $[y_{\min}, y_{\max}]$ em n_y partes iguais.

Para $1 \leq j \leq 1 + n_y$, teremos então $y_j = y_{\min} + (j - 1) \left(\frac{y_{\max} - y_{\min}}{n_y} \right)$.

Define-se assim uma rede rectangular formada por $n_x + 1$ linhas paralelas ao eixo Oy e $n_y + 1$ linhas paralelas ao eixo Ox (ver a figura 1).

Em cada ponto (x_i, y_j) da rede, calcula-se $z(i, j) = f(x_i, y_j)$: obtêm-se então os pontos $P(i, j)$ (ver a figura 2).

Basta em seguida juntar os pontos obtidos por segmentos de recta a fim de obter uma aproximação suficientemente grande da superfície a representar (ver a figura 3).

O emprego de uma perspectiva, cavaleira ou cónica, permite em seguida visualizar esta superfície no visor.

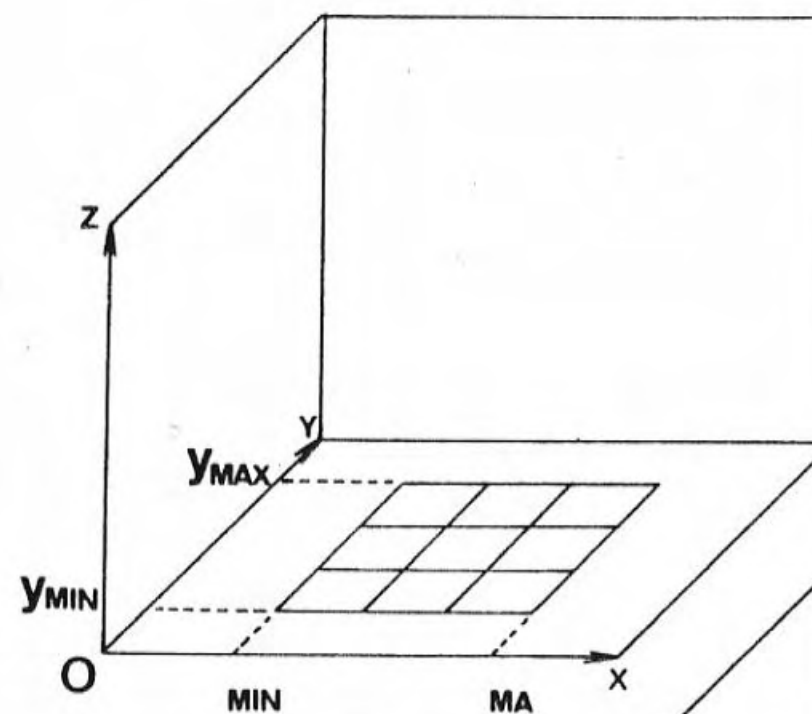


Fig. 1

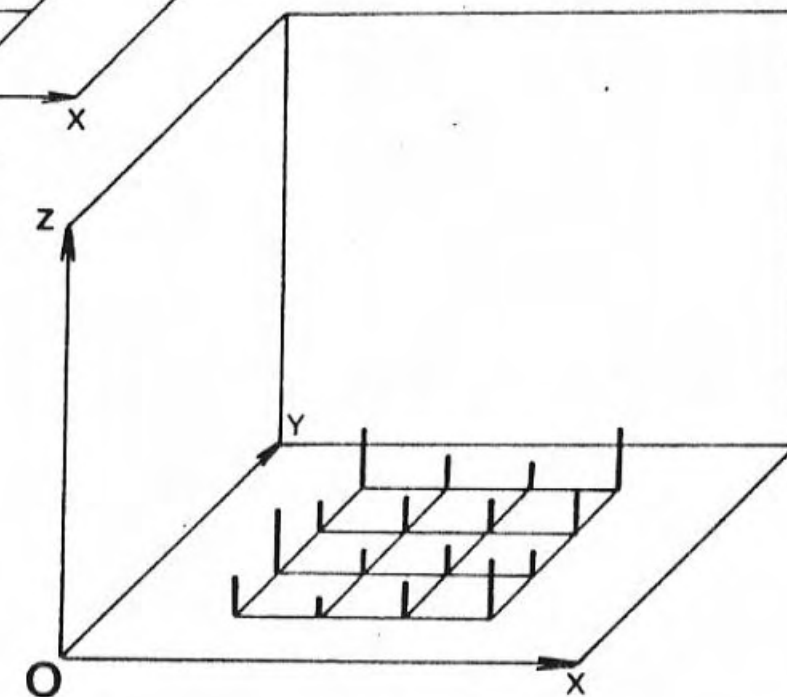


Fig. 2

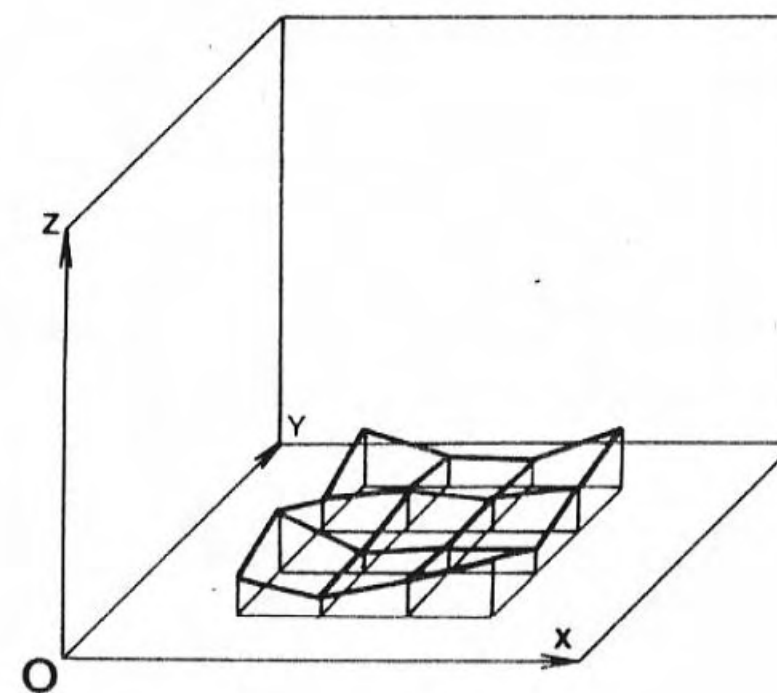


Fig. 3

2 Primeiro programa

Este programa engloba seis partes.

1. Primeira parte

A função f deve antes do mais ser definida na linha 10.

Apresentam-se em seguida os diferentes parâmetros x_{\min} , x_{\max} , y_{\min} , y_{\max} , n_x e n_y necessários à execução do programa:

```
10 DEF FN z(x,y)=.....
20 INPUT xmin
30 INPUT xmax
40 INPUT ymin
50 INPUT ymax
60 INPUT nx
70 INPUT ny
```

2. Segunda parte

Calculam-se os valores de x_i e de y_j para $1 \leq i \leq n_x + 1$ e $1 \leq j \leq n_y + 1$.

```
80 DIM x(nx+1)
90 DIM y(ny+1)
100 FOR i=1 TO 1+nx
110 LET x(i)=xmin+(i-1)*(xmax-x
min)/nx
120 NEXT i
130 FOR j=1 TO 1+ny
140 LET y(j)=ymin+(j-1)*(ymax-y
min)/ny
150 NEXT j
```

3. Terceira parte

Para cada ponto (x_i, y_j) da rede, calcula-se $z(i, j) = f(x_i, y_j)$.

```
160 DIM z(1+nx,1+ny)
170 FOR i=1 TO 1+nx
180 FOR j=1 TO 1+ny
190 LET z(i,j)=FN z(x(i),y(j))
200 NEXT j
210 NEXT i
```

4. Quarta parte

O ponto de coordenadas $x_i, y_j, z(i, j)$ é representado, no plano de projecção, pelo ponto de coordenadas $u(i, j)$ e $v(i, j)$.

A perspectiva empregue é uma perspectiva cavaleira.

Durante os cálculos, determinaremos os valores máximos e mínimos das coordenadas u e v .

```
220 DIM u(1+nx,1+ny)
230 DIM v(1+nx,1+ny)
240 LET umax=-10e30
250 LET vmax=-10e30
260 LET umin=10e30
270 LET vmin=10e30
280 FOR i=1 TO 1+nx
290 FOR j=1 TO 1+ny
300 LET u(i,j)=x(i)+0.375*y(j)
310 LET v(i,j)=z(i,j)+0.375*y(j)
)
320 IF u(i,j)<umin THEN LET umi
n=u(i,j)
330 IF v(i,j)<vmin THEN LET vmi
n=v(i,j)
340 IF u(i,j)>umax THEN LET uma
x=u(i,j)
350 IF v(i,j)>vmax THEN LET vma
x=v(i,j)
360 NEXT j
370 NEXT i
```

5. Quinta parte

Procedemos ao enquadramento da imagem utilizando o método número 1 do capítulo 3.

```
380 LET k1=253/(umax-umin)
390 LET k2=173/(vmax-vmin)
400 LET l1=254-k1*umax
410 LET l2=174-k2*vmax
420 FOR i=1 TO nx+1
430 FOR j=1 TO ny+1
440 LET u(i,j)=k1*u(i,j)+l1
450 LET v(i,j)=k2*v(i,j)+l2
460 NEXT j
470 NEXT i
```

6. Sexta parte

Traçamos os segmentos que ligam os pontos $u(i, j)$, $v(i, j)$ ao ponto $u(i+1, j)$, $v(i+1, j)$ e ao ponto $u(i, j+1)$, $v(i, j+1)$.

```

4000 FOR I=1 TO 1+NX
4010 FOR J=1 TO 1+NY
4020 IF I=NX THEN PLOT U(I,J),V
(I,J): DRAW U(I+1,J)-U(I,J),V(I+
I,J)-V(I,J)
4030 IF J=NY THEN PLOT U(I,J),V
(I,J): DRAW U(I,J+1)-U(I,J),V(I,
J+1)-V(I,J)
4040 NEXT J
4050 NEXT I

```

3 Exemplos

1.º A figura 4 representa uma parabolóide elíptica de equação

$$z = 2x^2 + y^2$$

Escolhemos $x_{\min} = y_{\min} = -4$, $x_{\max} = y_{\max} = 4$ e $n_x = n_y = 16$.

2.º A figura 5 representa uma parabolóide hiperbólica de equação $z = x^2 - y^2$. Os parâmetros escolhidos têm o mesmo valor que anteriormente.

3.º Na figura 6 é representada uma parte da esfera

$$z = \sqrt{1000 - (x^2 + y^2)}$$

com $x_{\min} = y_{\min} = -20$, $x_{\max} = y_{\max} = 20$.

4.º A figura 7 mostra uma parte do plano $z = x + y$.

5.º Finalmente, a figura 8 representa a superfície de equação

$$z = x^2 y^2$$

com $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$, $n_x = n_y = 12$.

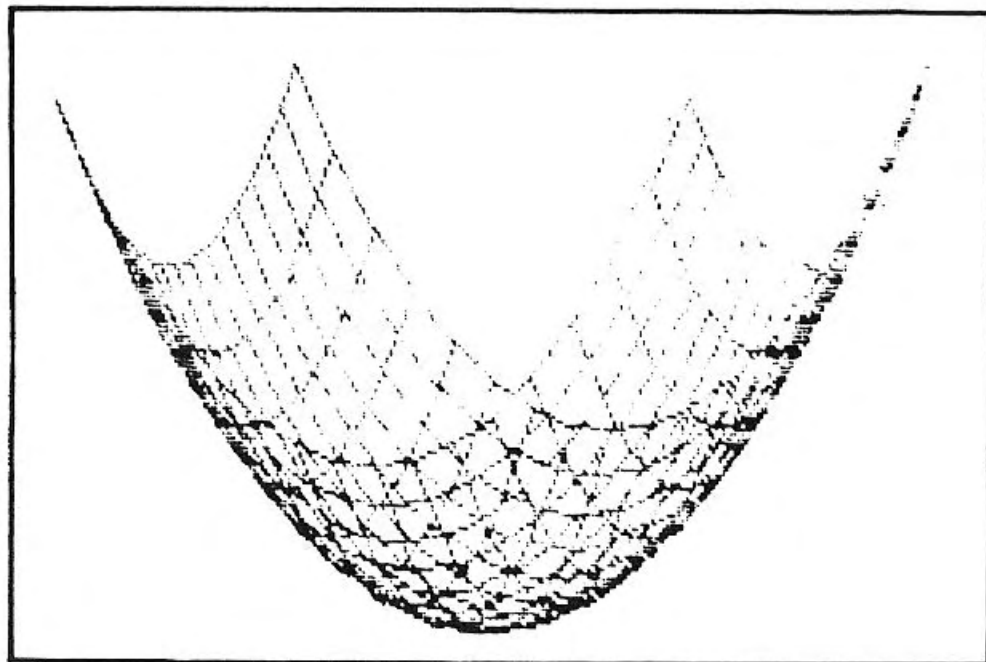


Fig. 4

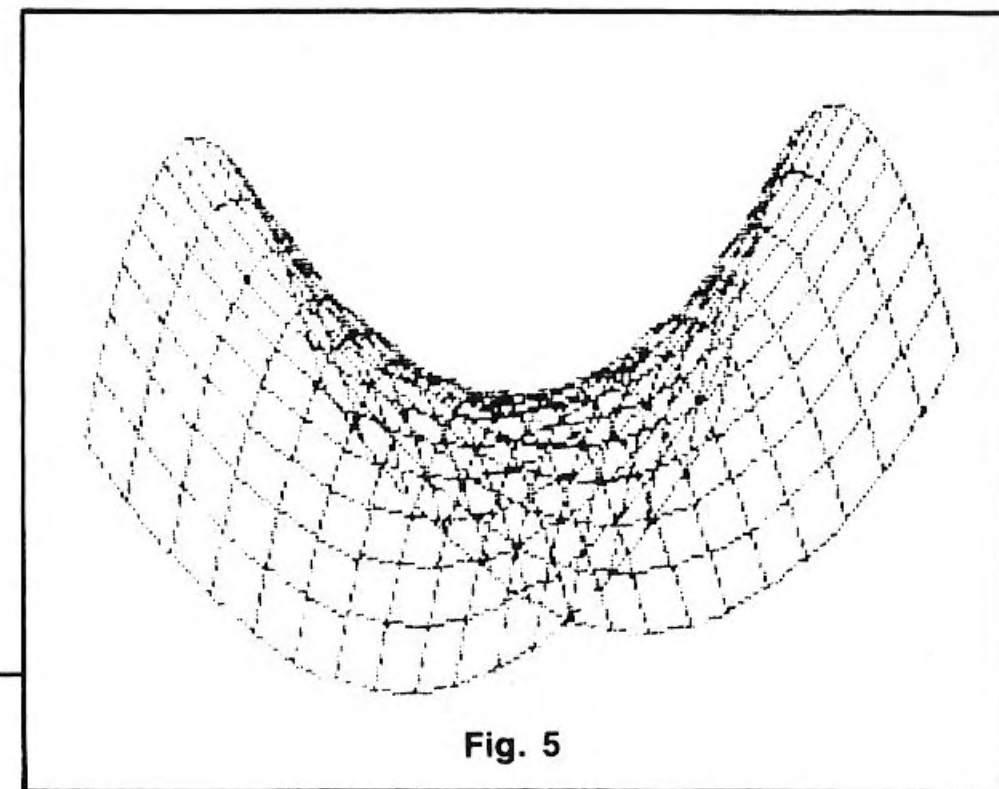


Fig. 5

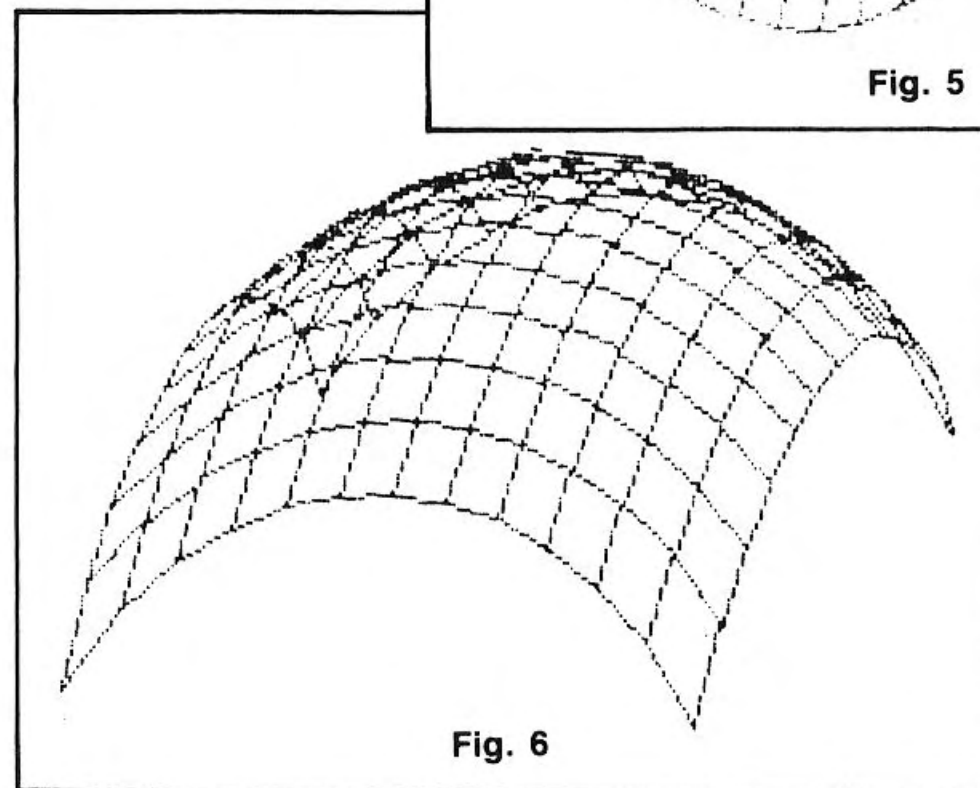


Fig. 6

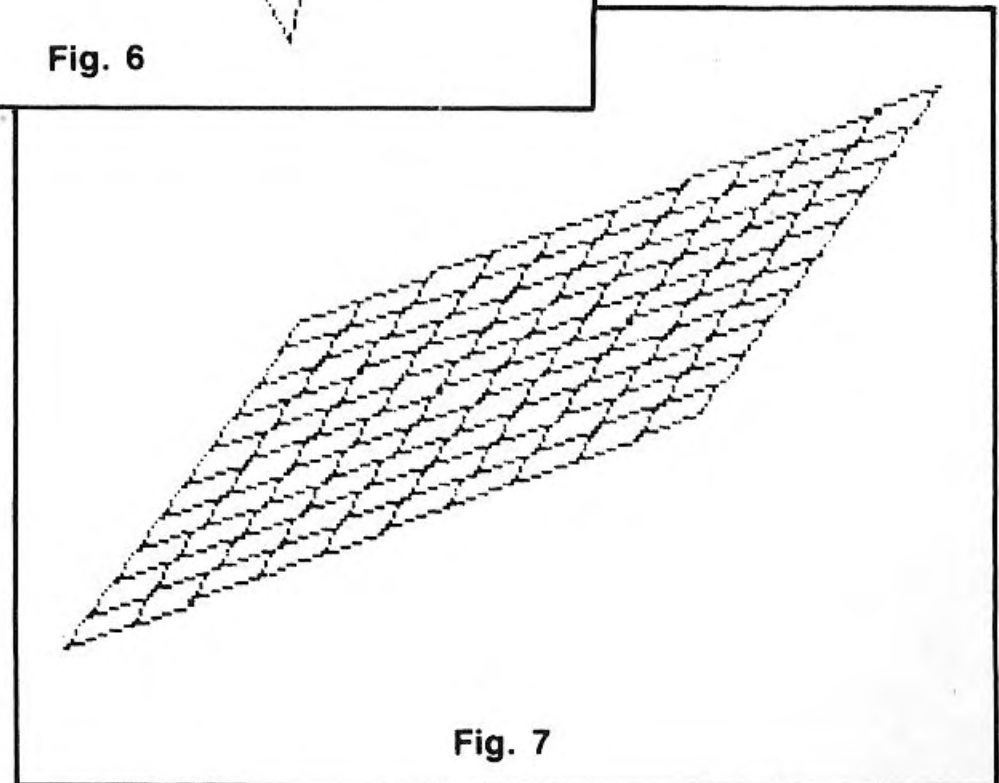


Fig. 7

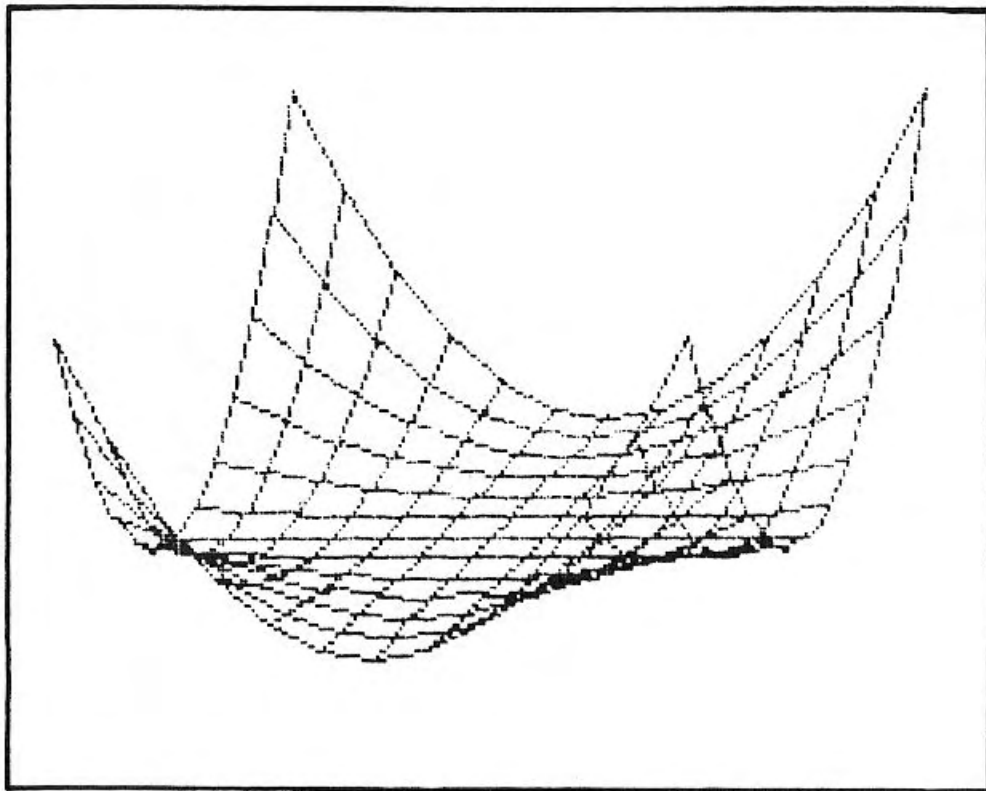


Fig. 8

4 Eliminação das partes escondidas

1. Definições

Comparemos as figuras 9 e 10: trata-se da mesma superfície mas, na figura 9, certas partes ditas escondidas foram eliminadas.

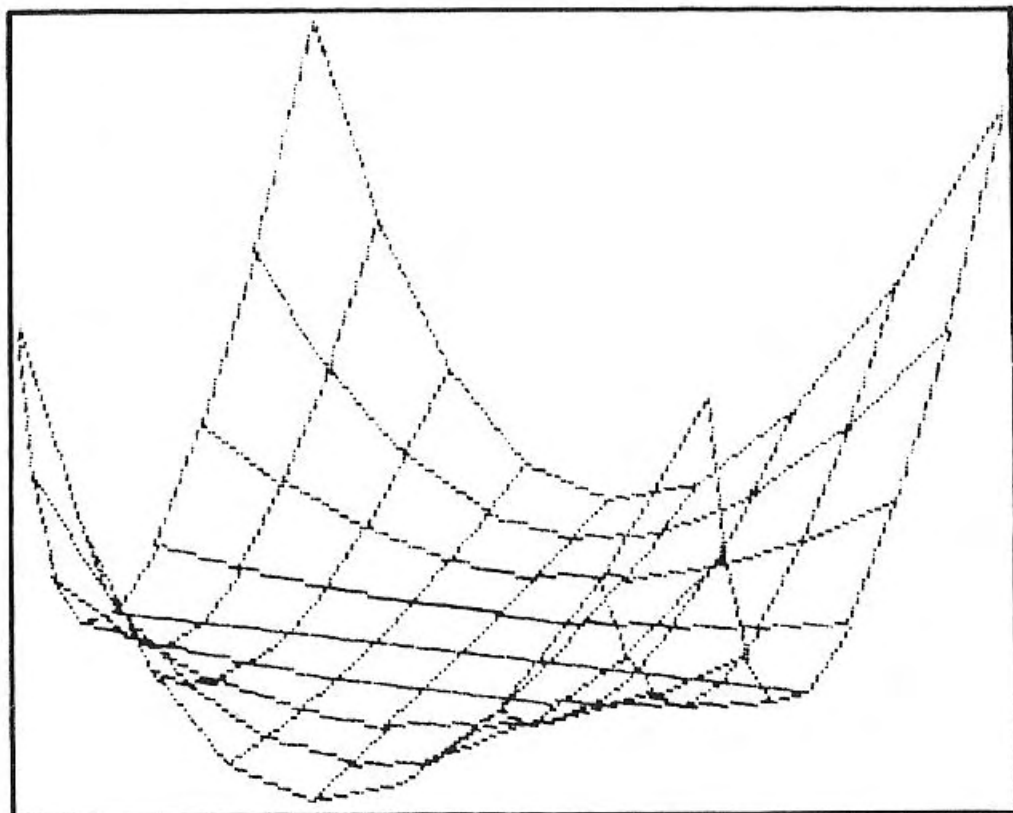


Fig. 9

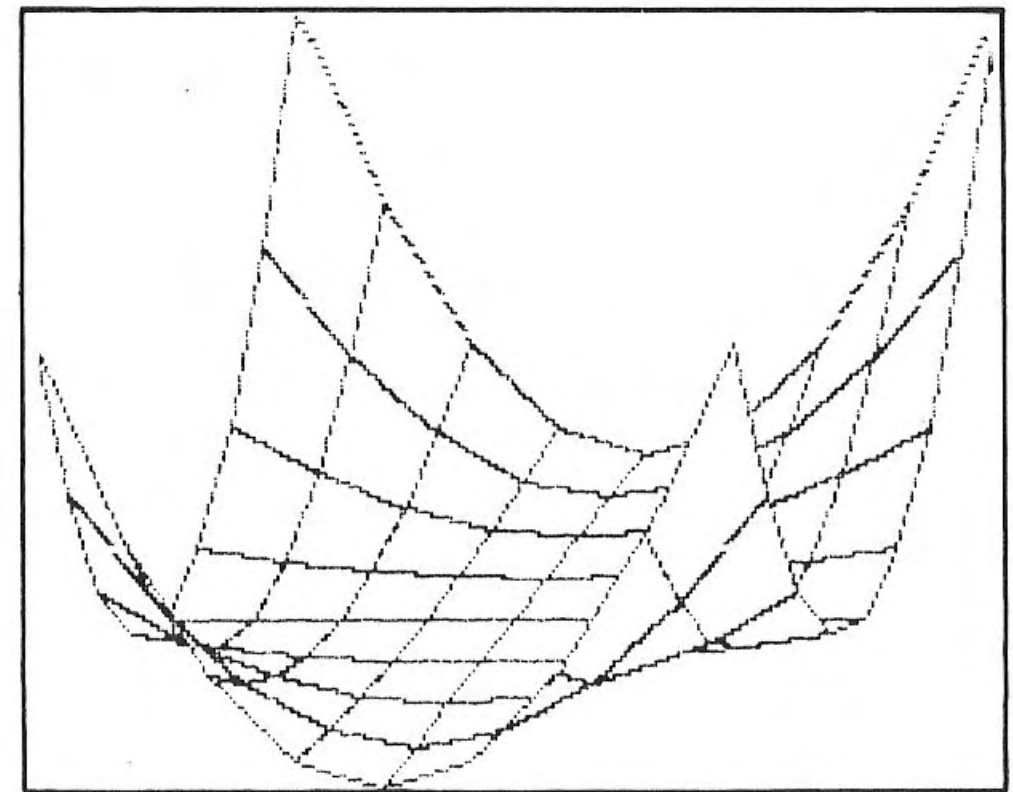


Fig. 10

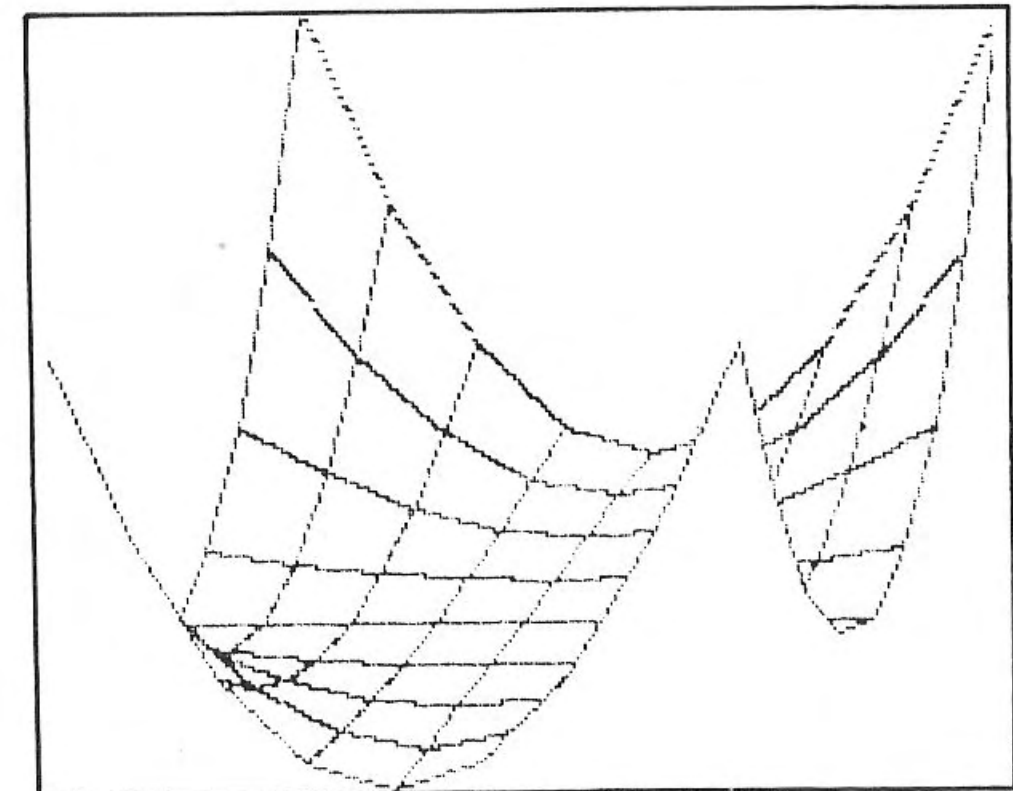


Fig. 11

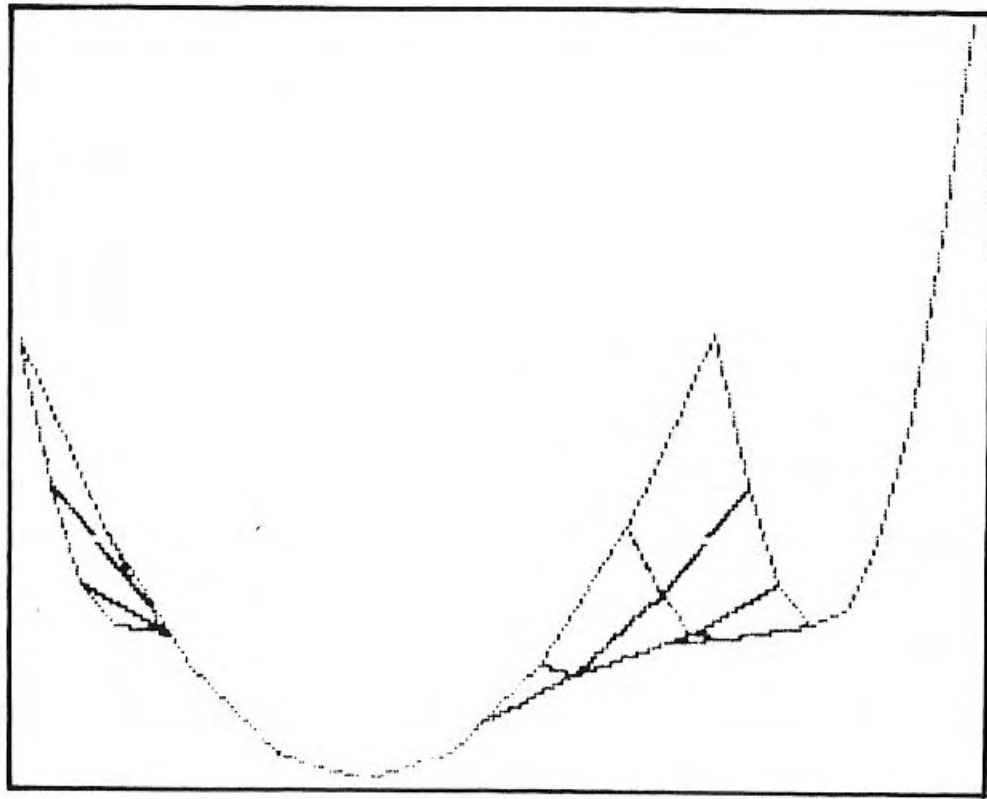


Fig. 12

Para um observador colocado sobre o eixo $y'y$ e olhando o plano xOz , a superfície apresenta uma parte inferior (figura 11) e uma parte superior (figura 12) definidas respectivamente em relação a uma linha de «crista» inicial suposta sempre visível (figura 13).

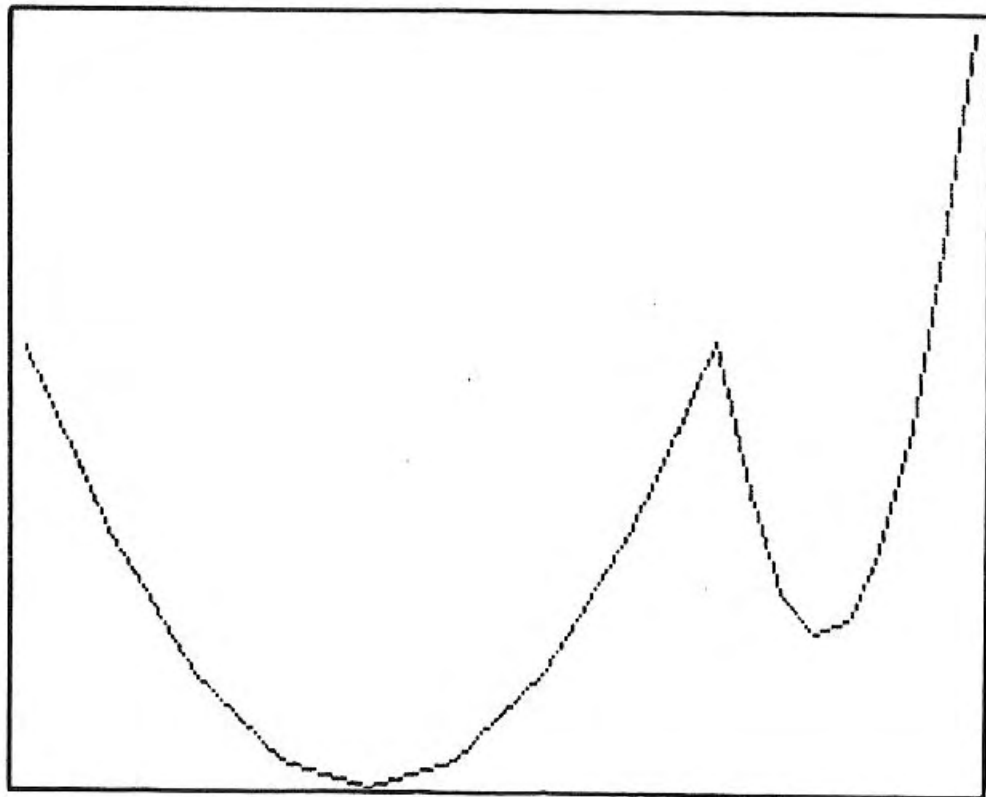


Fig. 13

2. Linha de crista inicial

O método do capítulo 3 (parágrafo 3.2) permite-nos inscrever a imagem da superfície a representar S num rectângulo de 254 pixels de largura.

A cada ponto $P(i, j)$ de S é então associado um ponto $M(i, j)$ deste rectângulo.

A linha de crista inicial é constituída por duas linhas distintas:

1.º Para $j=1$ e $1 \leq i \leq n_x+1$, traçam-se os segmentos que ligam os pontos $M(i, j)$ dois a dois.

2.º Para $i=n_x+1$ e $1 \leq j \leq n_y+1$, traçam-se os segmentos que ligam os pontos $M(i, j)$ dois a dois.

3. Linhas de crista máximas e mínimas

Consideremos primeiramente o caso do desenho da parte superior da superfície S .

Em cada etapa da construção é necessário definir uma linha de crista máxima. Apenas são visíveis, entre os pontos que falta desenhar, aqueles que se situam acima desta linha.

Seja x o número de um pixel qualquer: teremos portanto $1 \leq x \leq 254$. Notaremos $k(x)$, ordenada do ponto da linha de crista que corresponde a esta abcissa.

Do mesmo modo, o desenho da parte inferior da superfície S obriga à definição, em cada etapa, de uma linha de crista mínima.

4. Princípio do traçado

Depois de desenhada a linha de crista inicial, deverão ser traçados os segmentos que compõem as outras linhas em função da sua visibilidade.

Em cada etapa da construção, serão traçados dois segmentos se forem visíveis (na totalidade ou em parte): o segmento $M(i-1, j)M(i, j)$ e o segmento $M(i-1, j-1)M(i-1, j)$. Define-se em seguida a linha de crista.

Designemos por AB o segmento a traçar na etapa em curso e chamemos x_A, y_A e x_B, y_B as coordenadas respectivas de A e B .

Suponhamos $x_A < x_B$. Para x variando entre x_A e x_{B-1} com valores inteiros, designemos por T_1 e T_2 os pontos do segmento AB de abcissas respectivas x e $x+1$.

As ordenadas y_1 e y_2 destes pontos serão calculadas usando a fórmula

$$y = y_A + (x - x_A) \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

O caso em que se teria $x_A = x_B$ é muito improvável. Se ocorresse, bastaria alterar os valores de n_x ou de n_y .

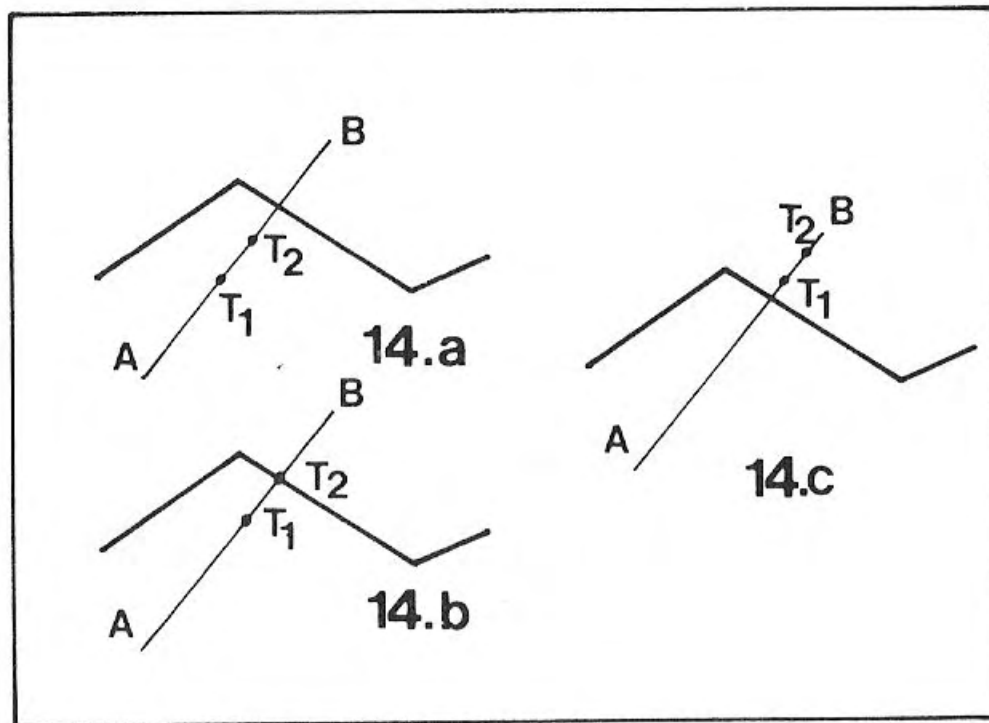


Fig. 14

Podem ocorrer três casos:

- 1.º T_1 e T_2 não são visíveis (figura 14a). O segmento $T_1 T_2$ não é desenhado.
- 2.º Só T_2 é visível (figura 14b). O segmento $T_1 T_2$ não é desenhado.
- 3.º T_1 e T_2 são visíveis (figura 14c). O segmento $T_1 T_2$ é desenhado.

5 Segundo programa

Este programa engloba três partes.

1. Primeira parte

Até à linha 470, esta parte é idêntica à do programa anterior.

2. Segunda parte

Constrói-se a parte superior da superfície.

1.º Linhas 480 a 580: definição da linha de crista inicial.

```

480 DIM h(254)
490 FOR i=2 TO nx+1
500 FOR x=u(i-1,1) TO u(i,1)
510 LET h(x)=INT (0.5+v(i-1,1)+
(x-u(i-1,1))*(v(i,1)-v(i-1,1))/(
u(i,1)-u(i-1,1)))
520 NEXT x
530 NEXT i
540 FOR j=2 TO ny+1
550 FOR x=u(nx+1,j-1) TO u(nx+1
,j)
560 LET h(x)=INT (0.5+v(nx+1,j-
1)+(x-u(nx+1,j-1))*(v(nx+1,j)-v(
nx+1,j-1))/(u(nx+1,j)-u(nx+1,j-1
)))
570 NEXT x
580 NEXT j

```

2.º Linhas 590 a 620: traçado da linha de crista inicial.

```

590 PLOT 1,h(1)
600 FOR x=1 TO 253
610 DRAW 1,h(x+1)-h(x)
620 NEXT x

```

3.º Linhas 630 a 730: traçado dos dois segmentos $M(i-1, j)$ e $M(i, j)$ e $M(i-1, j-1)$ e $M(i-1, j)$.

```

760 FOR i=2 TO nx+1
770 FOR x=u(i-1,j) TO u(i,j)
780 LET yt=v(i-1,j)+(x-u(i-1,j)
)*(v(i,j)-v(i-1,j))/(u(i,j)-u(i-
1,j))
790 IF yt>h(x) THEN LET h(x)=yt
800 NEXT x
810 NEXT i
820 NEXT j

```

4.º Linhas 740 a 820: cálculo da nova linha de crista máxima.

```

830 FOR j=2 TO ny+1
840 FOR i=2 TO nx+1
850 FOR x=u(i-1,j) TO u(i,j)-1
860 LET y1=INT (0.5+v(i-1,j)+(x
-u(i-1,j))*(v(i,j)-v(i-1,j))/(u(
i,j)-u(i-1,j)))

```

```

670 LET Y2=INT (0.5+V(I-1,J)+(X
+1-U(I-1,J))*(V(I,J)-V(I-1,J))/(
U(I,J)-U(I-1,J)))
680 IF Y1>=5(X) AND Y2>=5(X+1)
THEN PLOT X,Y1: DRAW 1,Y2-Y1
690 NEXT X
700 FOR X=U(I-1,J-1) TO U(I-1,J
)-1
710 LET Y1=INT (0.5+V(I-1,J-1)+
(X-U(I-1,J-1))*(V(I-1,J)-V(I-1,J
-1))/(U(I-1,J)-U(I-1,J-1)))
720 LET Y2=INT (0.5+V(I-1,J-1)+
(X+1-U(I-1,J-1))*(V(I-1,J)-V(I-1
,J-1))/(U(I-1,J)-U(I-1,J-1)))
730 IF Y1>=5(X) AND Y2>=5(X+1)
THEN PLOT X,Y1: DRAW 1,Y2-Y1
740 NEXT X
750 NEXT I

```

3. Terceira parte

Constrói-se a parte inferior da superfície.
Esta parte retoma as linhas 490 a 820 com três exceções:

- Linhas 680 e 730: substituem-se os \geq por \leq .
- Linha 790: substitui-se $>$ por $<$.

6 Exemplos

As figuras 15, 16 e 17 representam respectivamente as superfícies de equações:

$$z = 2x^2 + y^2$$

$$z = \frac{1}{1+x^2+y^2}$$

$$z = xy + \frac{1}{10+y^2}$$

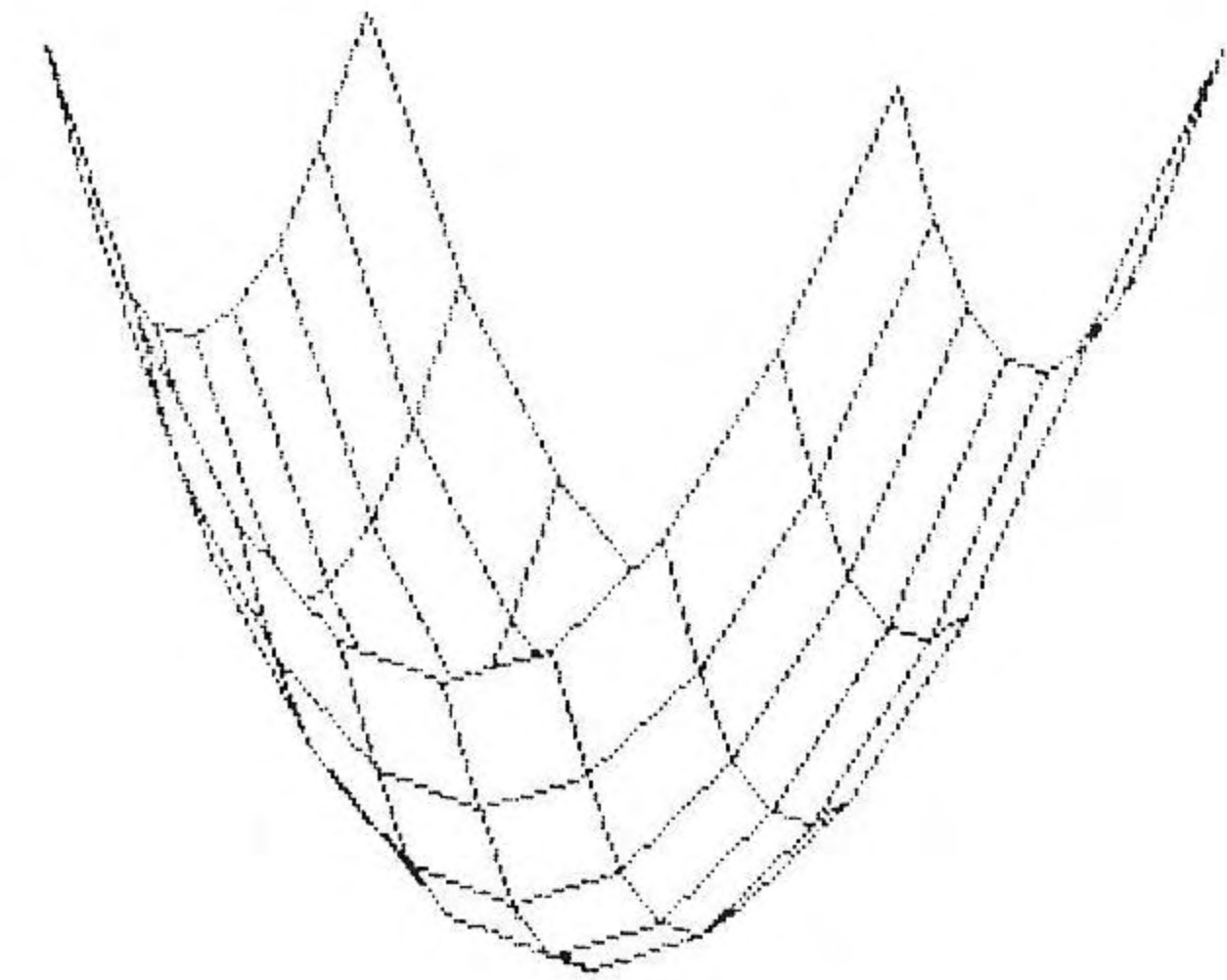


Fig. 15

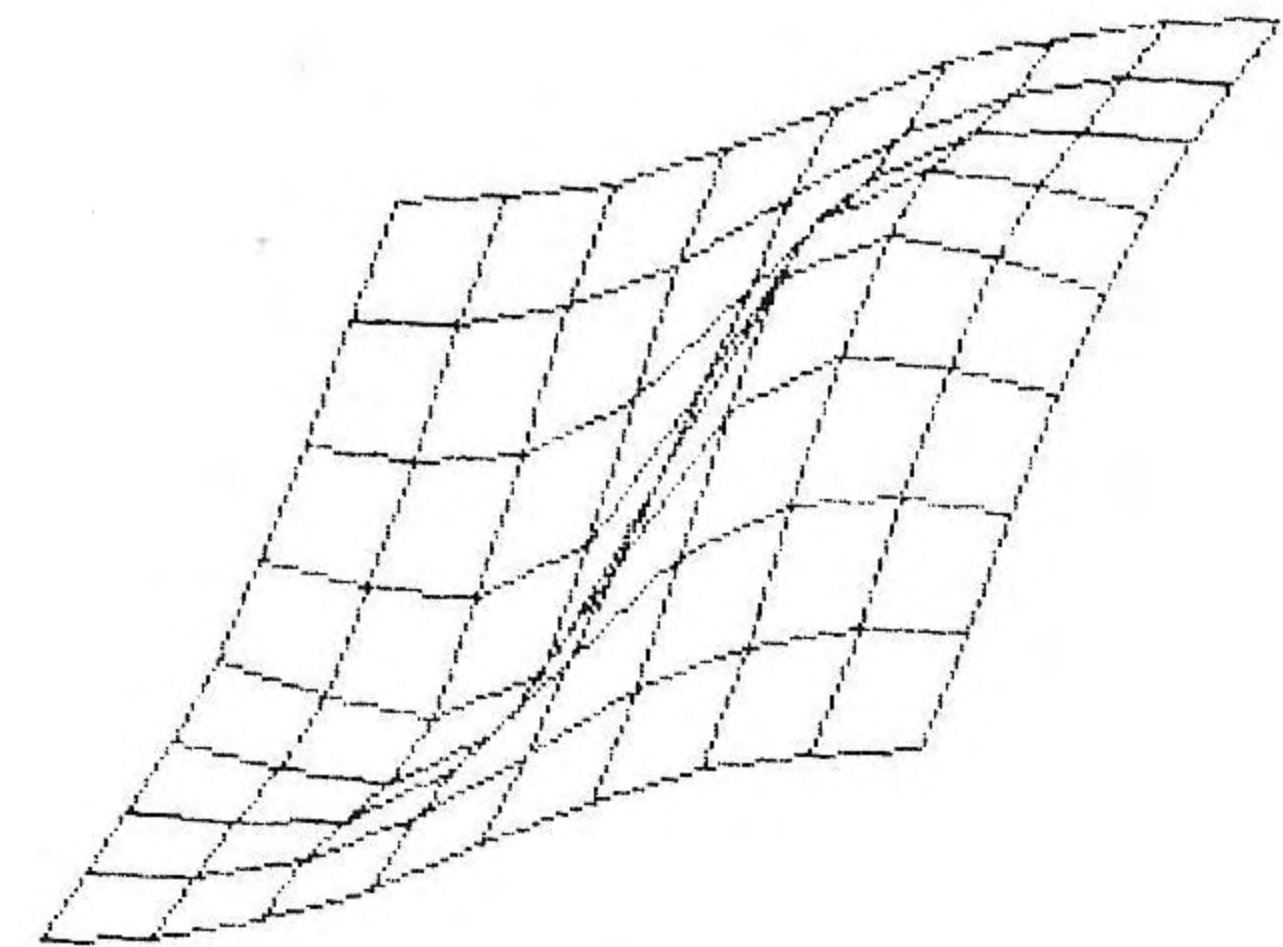


Fig. 16

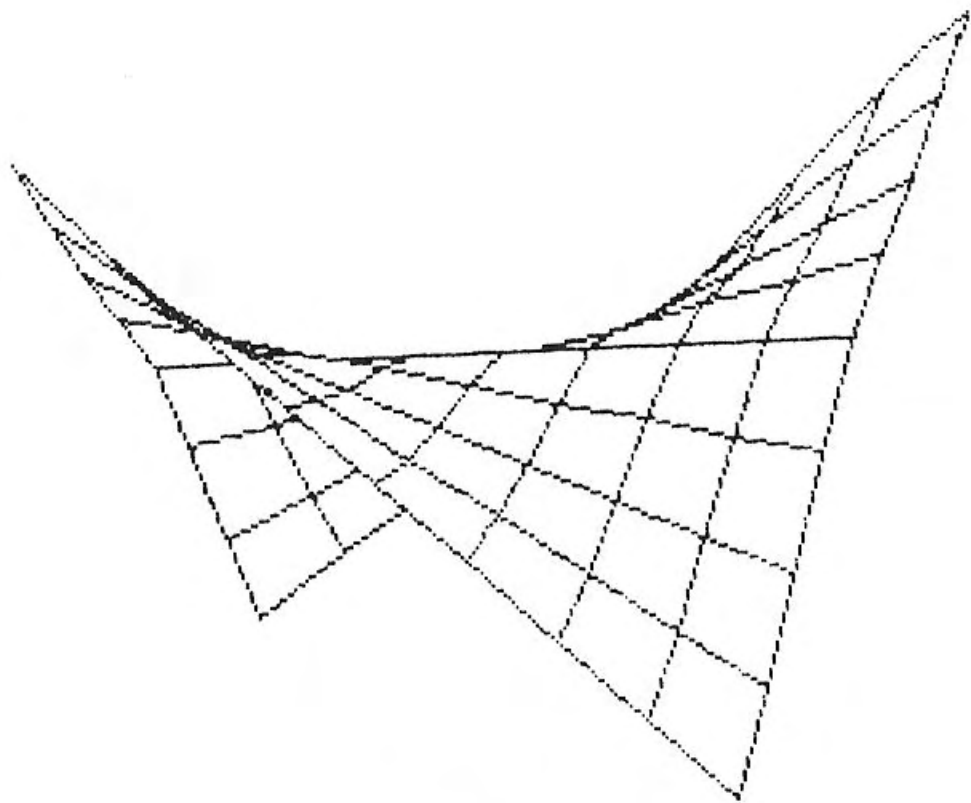


Fig. 17

Em todos os casos escolheu-se $n_x = n_y = 8$ a fim de limitar o tempo de cálculo a uma vintena de minutos.

AS SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO

Seja C uma curva contida no plano xOz . Rodando em torno do eixo Oz , a curva C produz uma superfície de revolução S .

Para construir esta superfície S , pode recorrer-se a dois métodos:

- 1.º Pode determinar-se a equação de S a partir da de C . Neste caso, é possível utilizar os programas do capítulo 11.
- 2.º Pode também representar-se S de uma maneira aproximada graças a um poliedro.

1 Superfície de equação $x = f(\sqrt{x^2 + y^2})$

Seja, para $0 \leq x_1 \leq x \leq x_2$, $z = f(x)$ a equação cartesiana de uma curva C . Vamos supor que a função f é definida e contínua no intervalo $[x_1, x_2]$ (figura 1).

Obtém-se a equação da superfície S substituindo, na equação de C , a variável x pela expressão $\sqrt{x^2 + y^2}$.

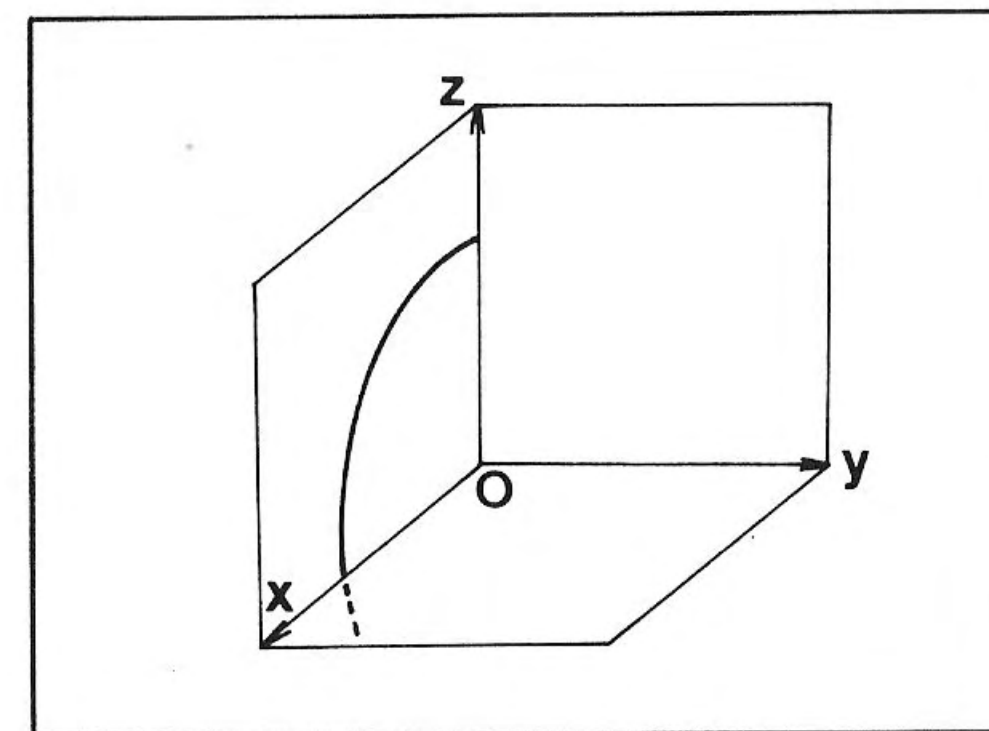


Fig. 1

1. Seja $P = (x, y)$ um ponto qualquer de S : P é a imagem de um ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ da curva C , numa rotação de eixo Oz .

Do mesmo modo, a projecção ortogonal H de P no plano xOy é a imagem da projecção ortogonal H_0 do ponto P_0 neste mesmo plano (figura 2).

Uma rotação conserva os comprimentos, e portanto $OH = OH_0$ e $PH = PH_0$.

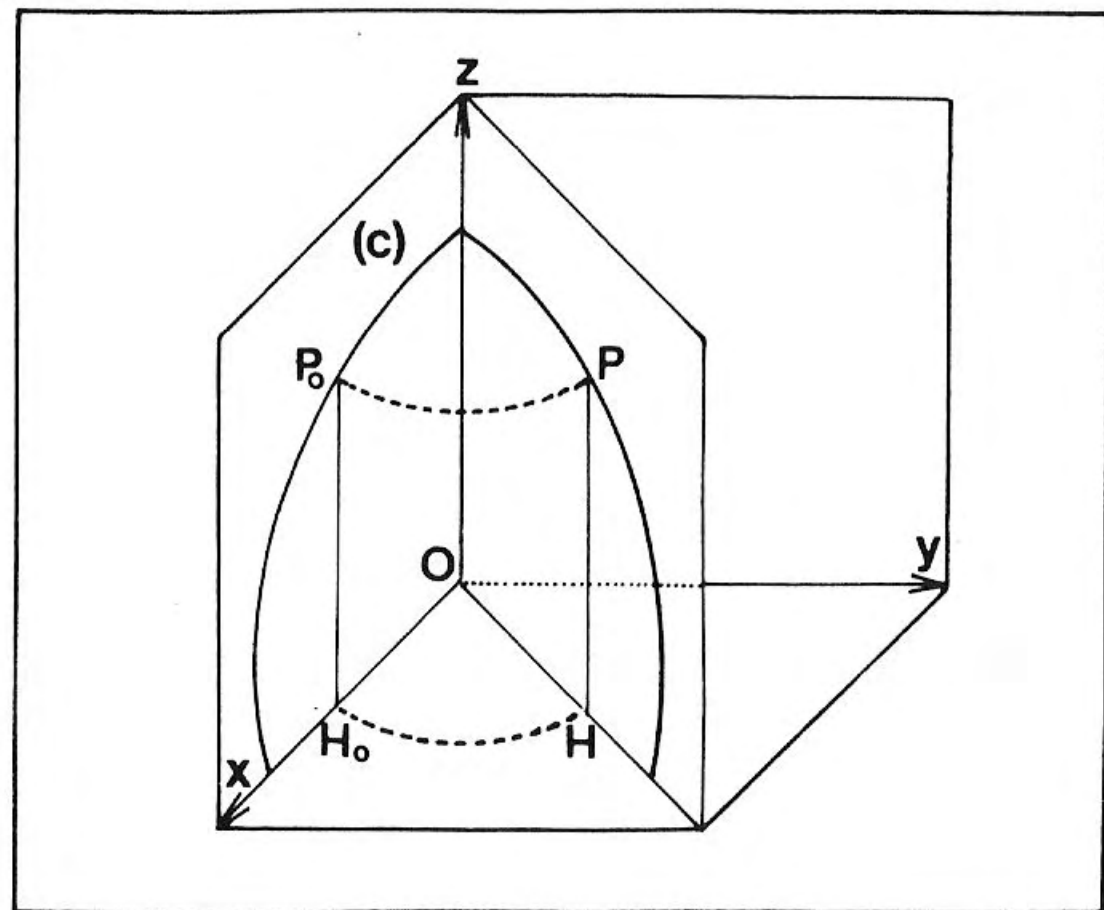


Fig. 2

Estas duas igualdades conduzem a $x^2 + y^2 = x_0^2$ e $z = z_0 = f(x_0)$. Como x_0 é positivo, teremos $x_0 = \sqrt{x^2 + y^2}$. Resulta daqui $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$.

2. Exemplos

As quatro superfícies foram obtidas com o segundo programa do capítulo 11, programa que permite eliminar as partes escondidas.

1.º Consideremos uma curva de Gauss com a equação $x = e^{-x^2}$. A figura 3 mostra esta curva para $0 \leq x \leq 2$.

Rodando em torno de Oz , esta curva produz uma superfície de equação $x = e^{-(x^2 + y^2)}$.

A figura 4 representa esta superfície para $-2 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 2$, $n_x = n_y = 20$.

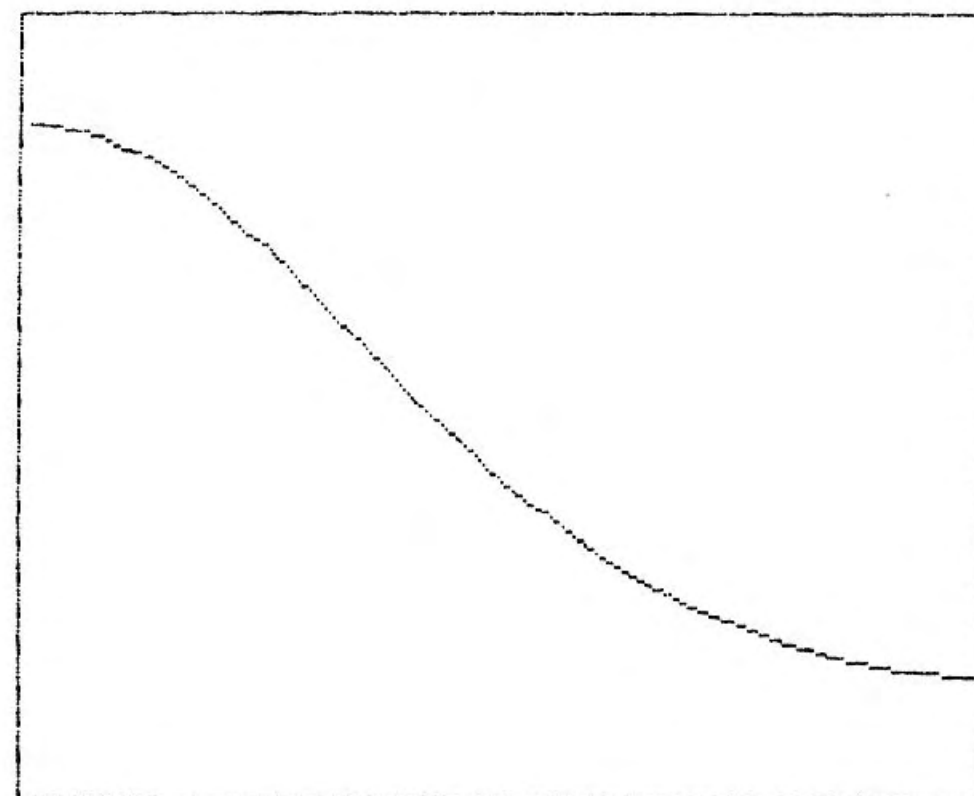


Fig. 3

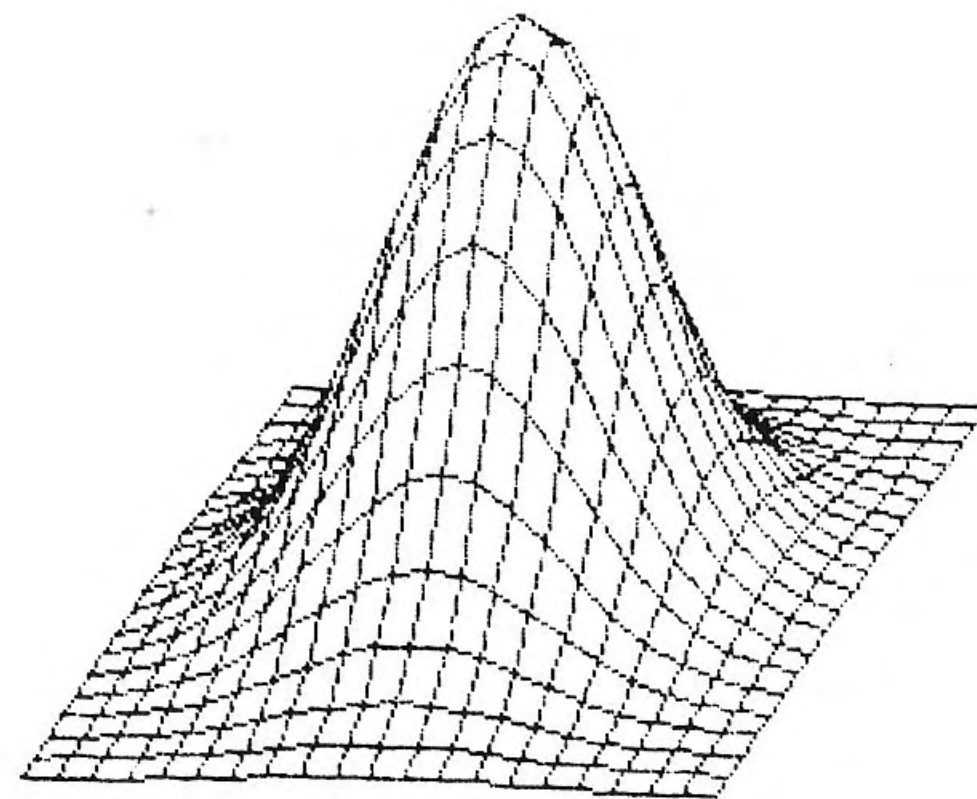


Fig. 4

2.º Consideremos, para $0 \leq x \leq 10$, $z = \frac{\cos x}{2+x}$. A curva correspondente é representada na figura 5.

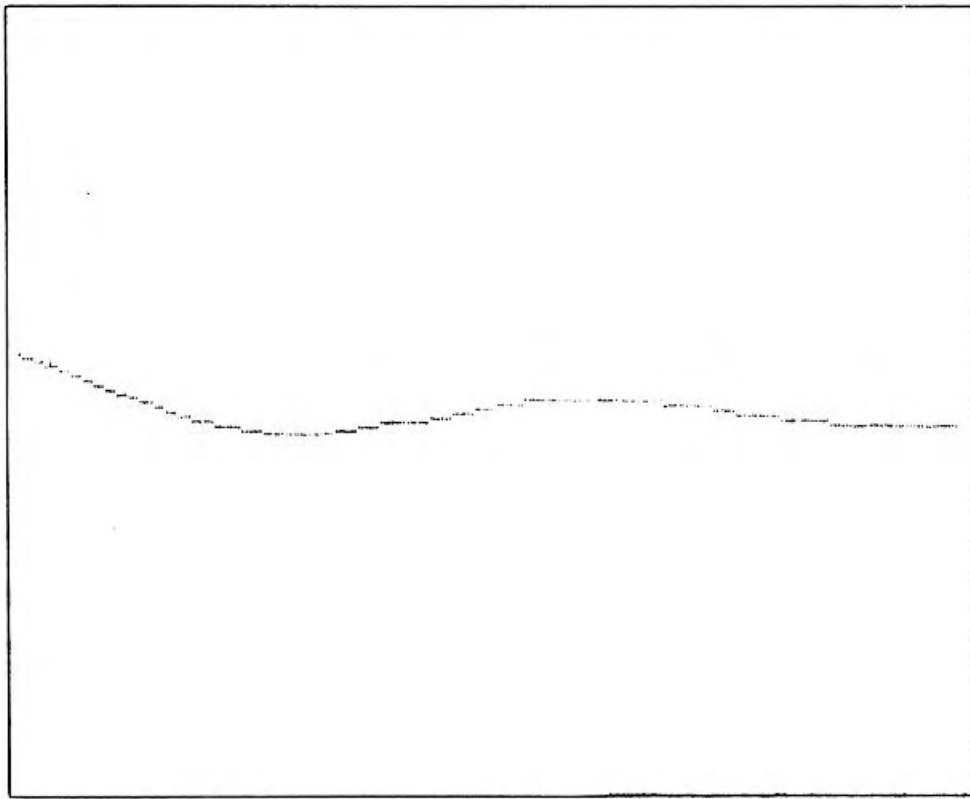


Fig. 5

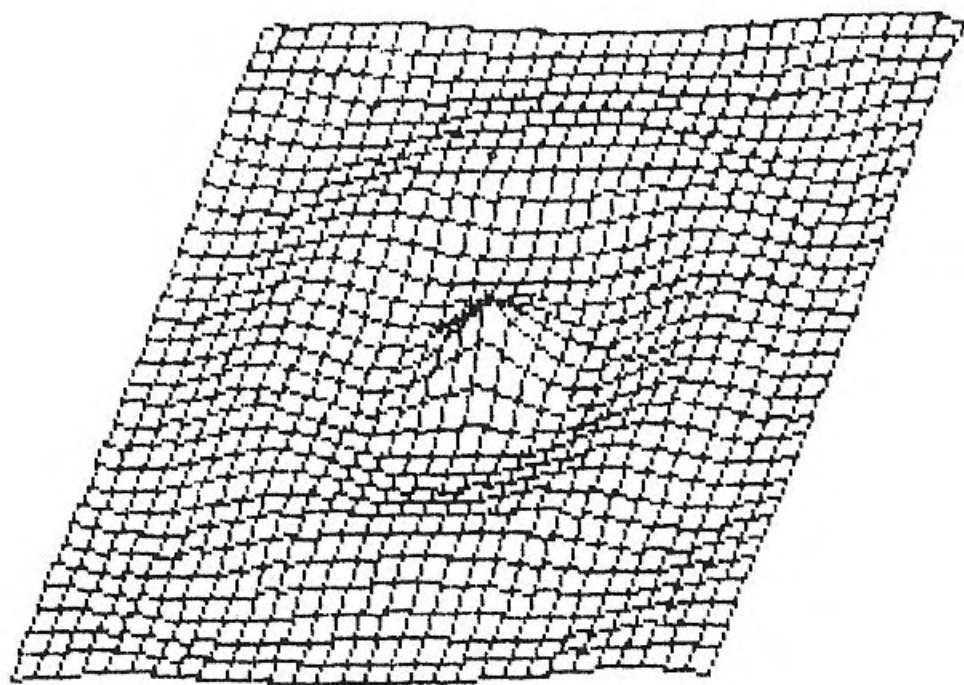


Fig. 6

A superfície S, de equação $z = \frac{\cos \sqrt{x^2 + y^2}}{2 + \sqrt{x^2 + y^2}}$ é representada na figura 6 para $-10 \leq x \leq 10$, $-10 \leq y \leq 10$ e $n_x = n_y = 20$.

3.º A curva da figura 7, definida para $0 \leq x \leq 2$, tem como equação $z = x \sin x$.

Produz uma superfície de equação $z = \sqrt{x^2 + y^2} \times \sin(\sqrt{x^2 + y^2})$. Para $-2 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 2$, $n_x = n_y = 20$, esta superfície é representada na figura 8.

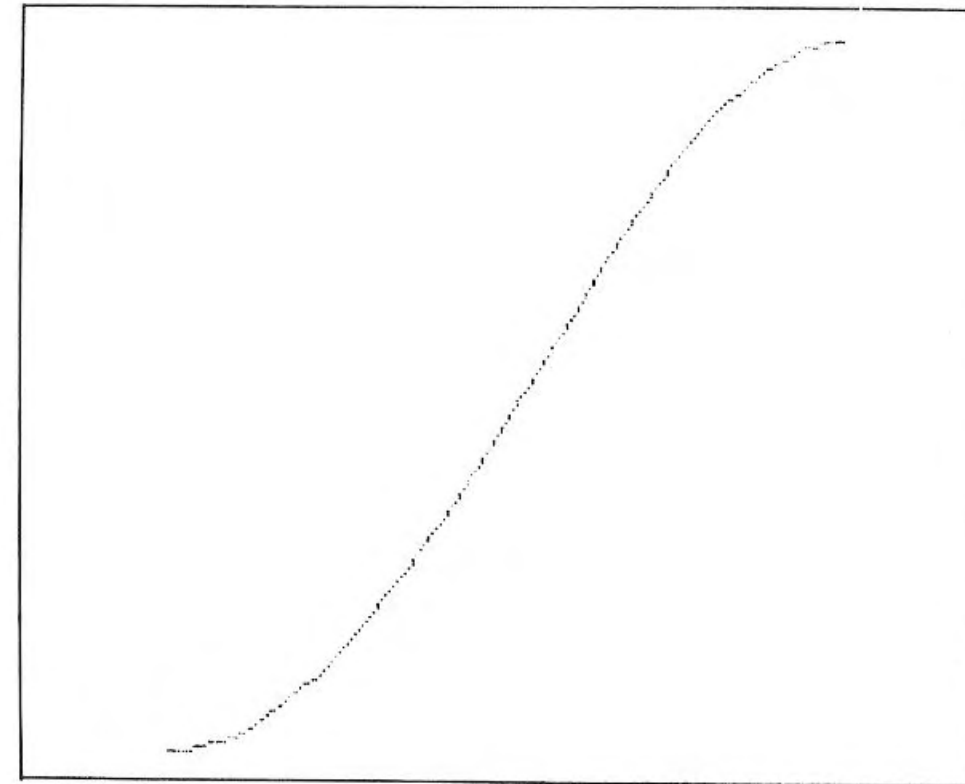


Fig. 7

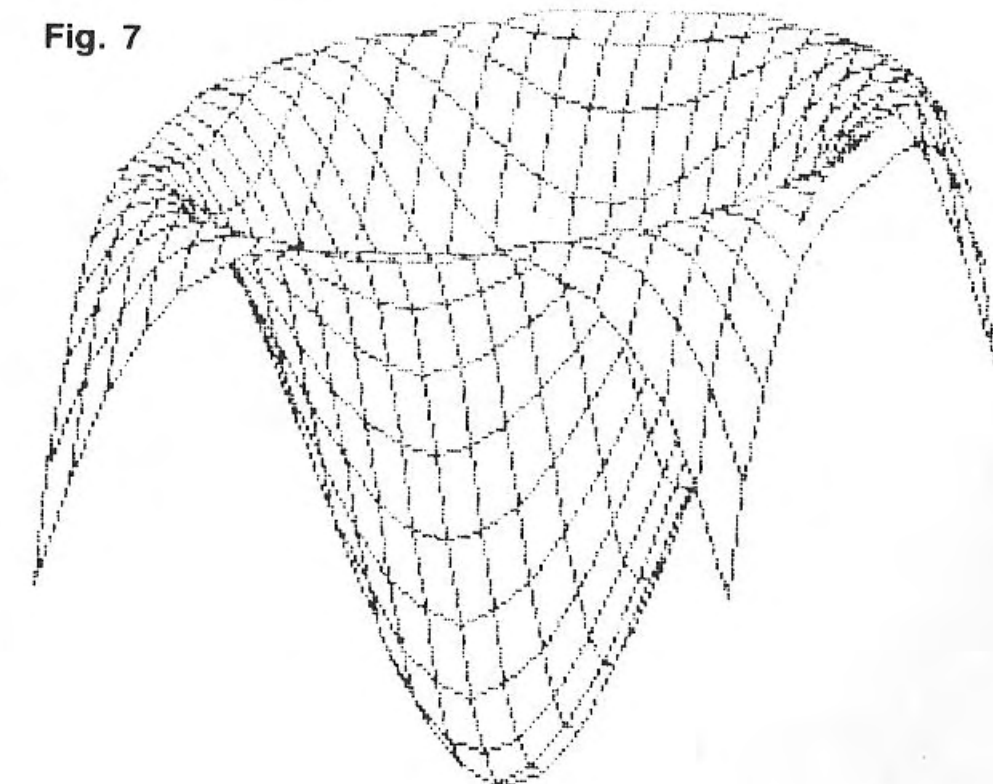


Fig. 8

4.º Seja $z = \sqrt{x}$, com $x \geq 0$. Esta curva é representada para $0 \leq x \leq 2$, na figura 9.

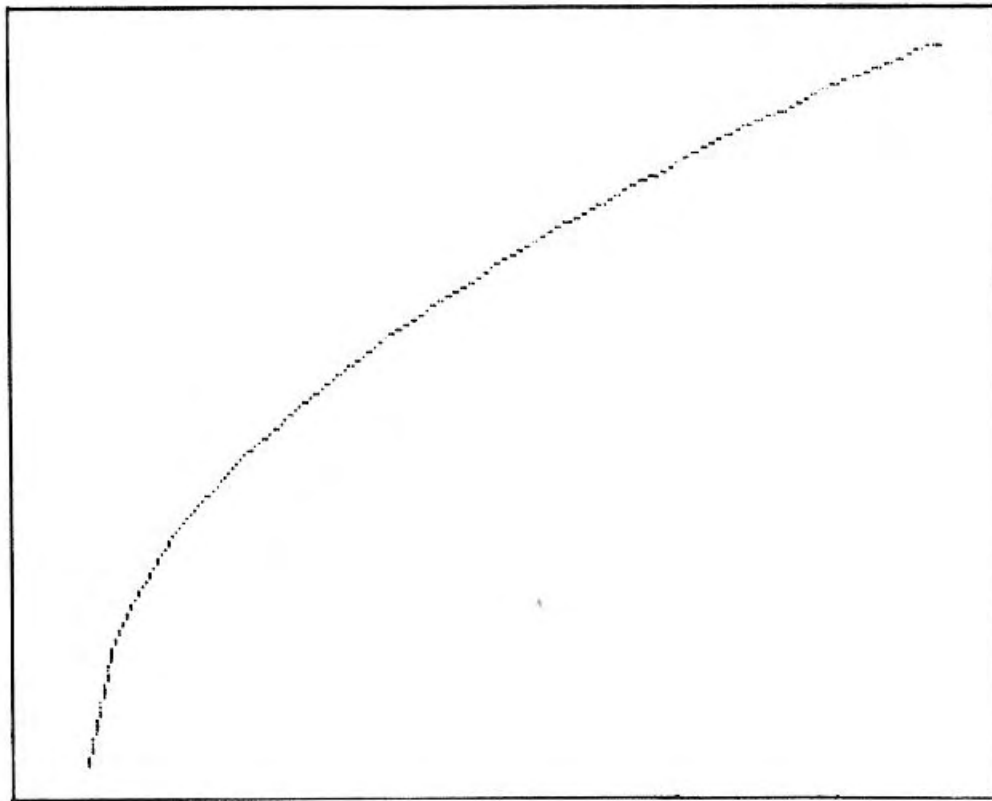


Fig. 9

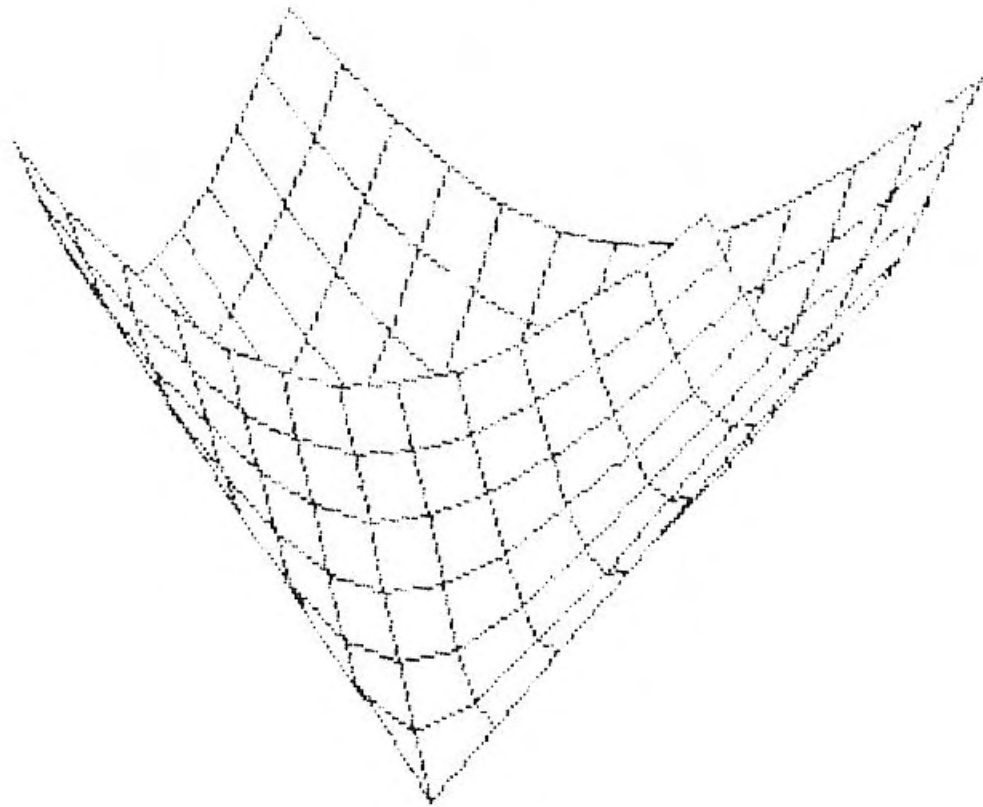


Fig. 10

A superfície produzida tem por equação $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Esta superfície é representada na figura 10 para $-2 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 2$, $n_x = n_y = 12$.

2 Superfícies de equação $x = f(r)$

Nas mesmas condições do parágrafo 1, consideremos $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. A equação da superfície S passa a $z = f(r)$.

1. Programa

Modificaremos ligeiramente o programa número 1 do capítulo 11 (não haverá portanto eliminação das partes escondidas).

1.º A definição de $f(r)$ será dada na linha 10, que passará a:

```
10 DEF FN z(r) = . . . . .
```

2.º Substituiremos a linha 190 pela seguinte:

```
190 LET z(i,j) = FN z(r)
```

3.º Finalmente, acrescentaremos esta linha:

```
185 LET r = SQRT (x(i) * x(i) + y(j) * y(j))
```

2. Exemplos

Seja $z = \frac{r^2}{1+r^2}$.

Para $-2 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 2$ e $n_x = n_y = 10$, obtemos a superfície da figura 11.

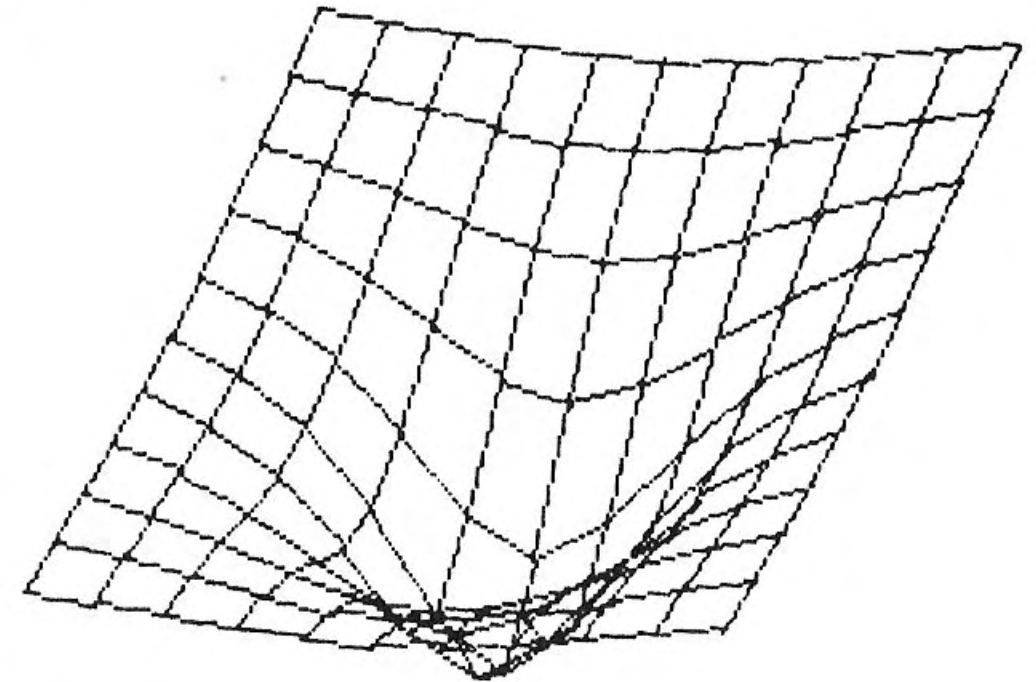


Fig. 11

2.º Consideremos agora $z = \frac{\cos r^2}{1+r^2}$ com $-2 \leq x \leq 2$ e $-2 \leq y \leq 2$.

Para $n_x = 24$ e $n_y = 24$, obtemos a superfície da figura 12.

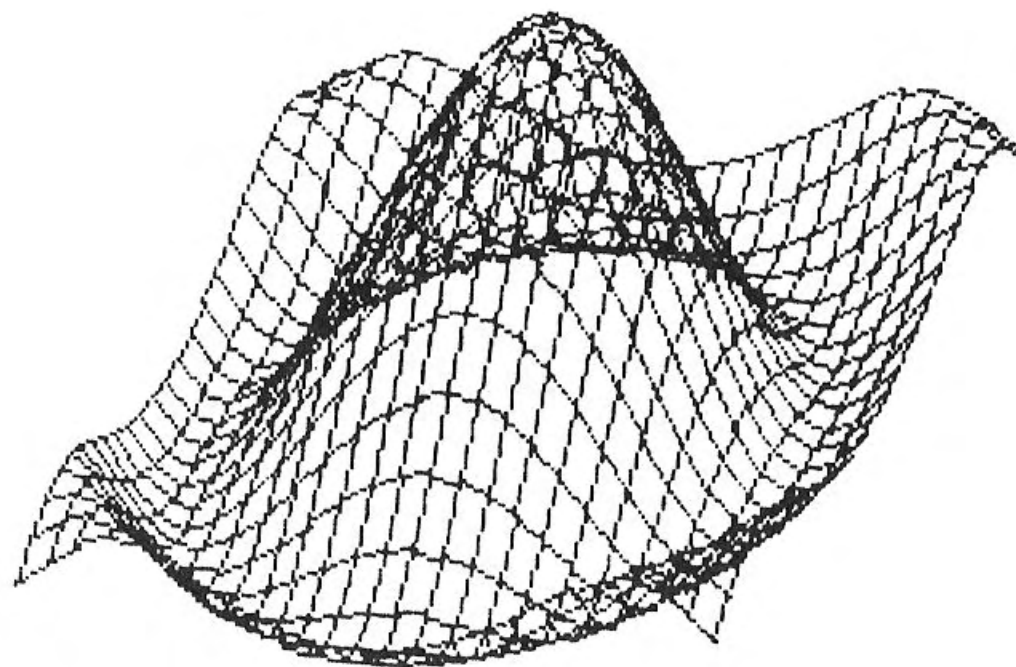


Fig. 12

3 Construção aproximada de uma superfície de revolução

Para obter uma representação aproximada da superfície de revolução produzida por uma curva C do plano xOz , devemos proceder a duas aproximações:

- a curva C é substituída por uma linha poligonal L ;
- os círculos descritos para cada um dos pontos de C são substituídos por polígonos regulares.

1. Começemos por escolher numa curva C um número n_p de pontos. Estes pontos serão designados por $P_{1,1}, P_{2,1}, P_{3,1}, \dots, P_{n_p,1}$. Ligando estes pontos por segmentos de recta, definimos uma linha poligonal L contida no plano xOz (figura 13).

2. Escolhamos em seguida um ângulo φ cujo valor em graus divide 360° . Por rotações de ângulos $\varphi, 2\varphi, 3\varphi$, etc., em torno do eixo Oz , obteremos linhas com os números 2, 3, 4, etc.

Consideremos $n_L = \frac{360^\circ}{\varphi}$: existirão ao todo n_L linhas poligonais.

A linha número 2 conterà os pontos $P_{1,2}, P_{2,2}, P_{3,2}$, etc.

A linha número 3 conterà os pontos $P_{1,3}, P_{2,3}, P_{3,3}$, etc.

De um modo geral, a notação $P_{i,j}$ designará o ponto da ordem i da linha de ordem j .

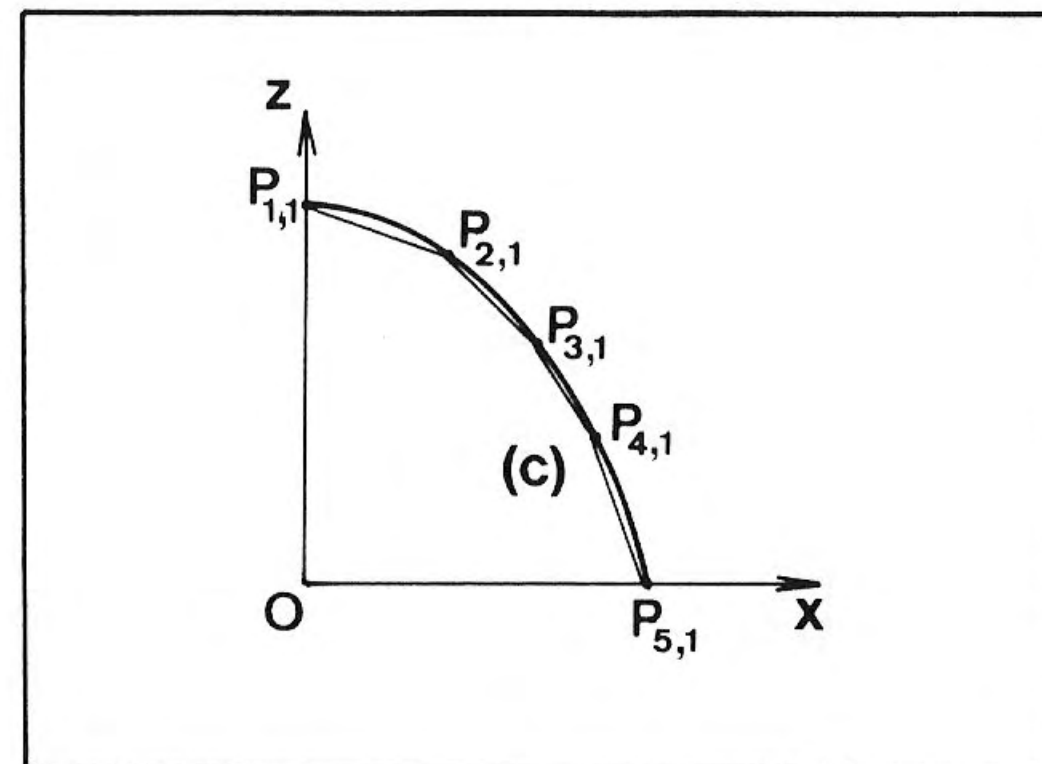


Fig. 13

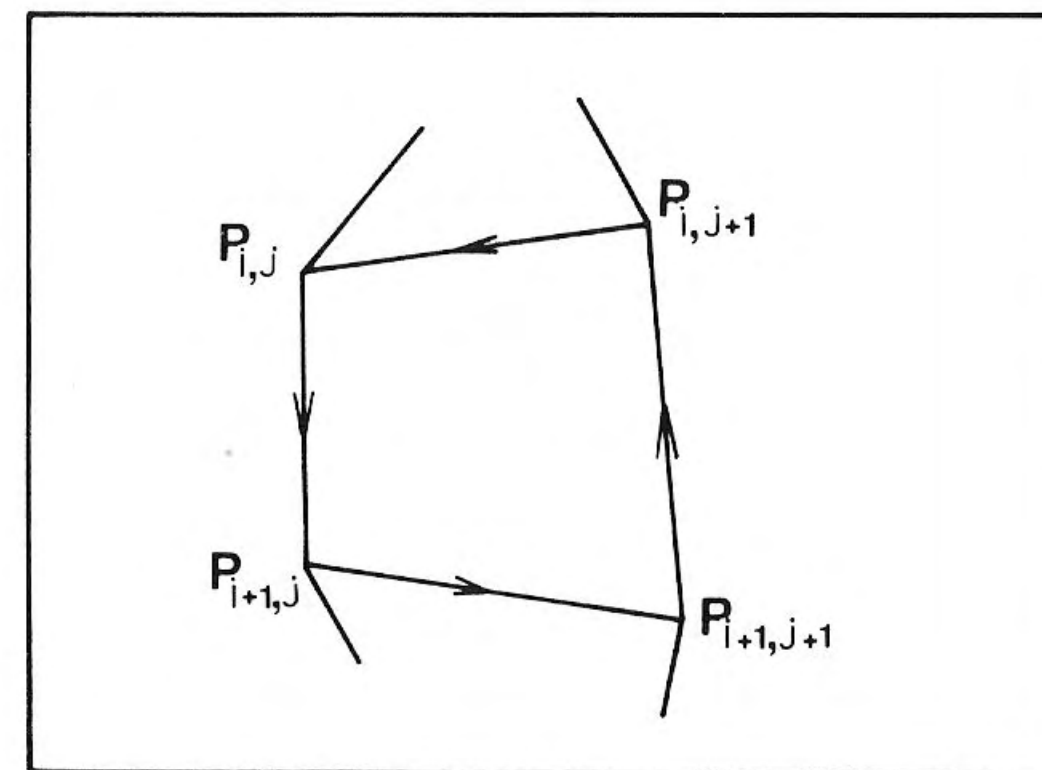


Fig. 14

3. Ligando convenientemente certos pontos de duas linhas vizinhas, podem-se definir *facetas* (figura 14).

Estas facetas são polígonos que poderão ser orientados de modo a permitir, no caso de um poliedro convexo, a eliminação das partes escondidas.

4 Construção aproximada de um cilindro recto

Consideremos o segmento [A, B] da figura 15: os pontos A e B têm como coordenadas respectivas 40, 0, 50 e 40, 0, -50. Uma rotação deste segmento de 360° em torno do eixo Oz produz um cilindro recto de bases circulares com o diâmetro de 80 e a altura de 100 (estes números foram escolhidos de modo a permitir o desenho directo do cilindro no visor).

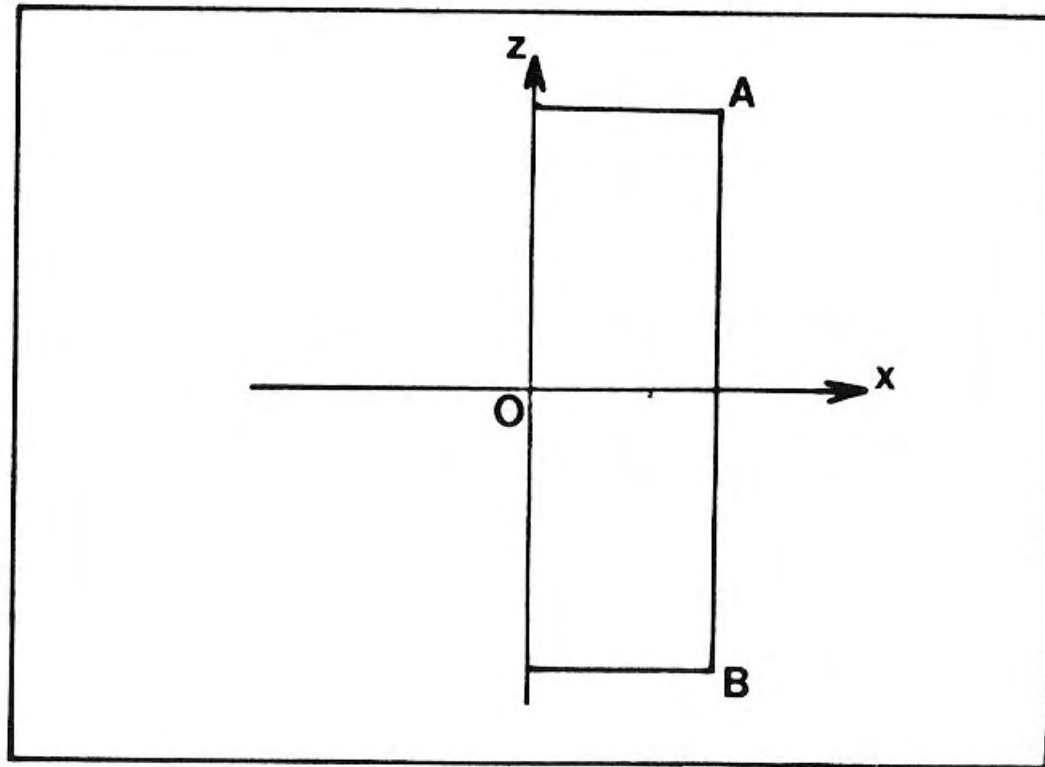


Fig. 15

Vamos representar este cilindro por um prisma recto que conterà n_L arestas laterais.

O programa possui 4 partes.

1. A primeira parte permite definir as coordenadas dos dois pontos da primeira linha e escolher o número n_L das linhas poligonais.

Fez-se DIM X (2, 1 + NL) e não DIM X (2, NL) de modo a obter arestas fechadas: identifica-se portanto o ponto $P_{i,1+NL}$ ao ponto $P_{i,1}$.

```

10 DATA 40,0,50,40,0,-50
20 INPUT "QUANTAS LINHAS POLIGONAIS? ";nL
30 DIM X(2,1+nL)
40 DIM Y(2,1+nL)
50 DIM Z(2,1+nL)
60 FOR I=1 TO 2
70 READ X,Y,Z

```

```

80 LET X(I,1)=X
90 LET Y(I,1)=Y
100 LET Z(I,1)=Z
110 NEXT I

```

2. O ângulo φ é representado pela variável F. As coordenadas dos pontos das linhas numeradas 2, 3, 4, ..., n_L são calculadas a partir das dos pontos da linha 1.

Utilizam-se as fórmulas do capítulo 3, parágrafo 4.2 para as rotações de ângulo φ , 2φ , 3φ , etc.

```

120 LET F=2*PI/nL
130 FOR J=2 TO 1+nL
140 LET C=COS((J-1)*F)
150 LET S=SIN((J-1)*F)
160 FOR I=1 TO 2
170 LET X(I,J)=X(I,1)*C-Y(I,1)*S
180 LET Y(I,J)=X(I,1)*S+Y(I,1)*C
190 LET Z(I,J)=Z(I,1)
200 NEXT I
210 NEXT J

```

3. Calcula-se a imagem utilizando uma perspectiva cavaleira.

```

220 FOR J=1 TO 1+nL
230 FOR I=1 TO 2
240 LET X(I,J)=X(I,J)+.375*Y(I,J)
250 LET Z(I,J)=Z(I,J)+.375*Y(I,J)
260 NEXT I
270 NEXT J

```

4. A última parte permite desenhar as facetas.

```

280 FOR J=1 TO nL
290 FOR I=1 TO 2
300 PLOT 128+X(I,J),88+Z(I,J)
310 IF I=1 THEN DRAW X(I+1,J)-X(I,J),Z(I+1,J)-Z(I,J)
320 PLOT 128+X(I,J),88+Z(I,J)
330 DRAW X(I,J+1)-X(I,J),Z(I,J+1)-Z(I,J)
340 NEXT I
350 NEXT J

```

5. As figuras 16, 17, 18 e 19 apresentam os prismas obtidos para diversos valores de n_L .

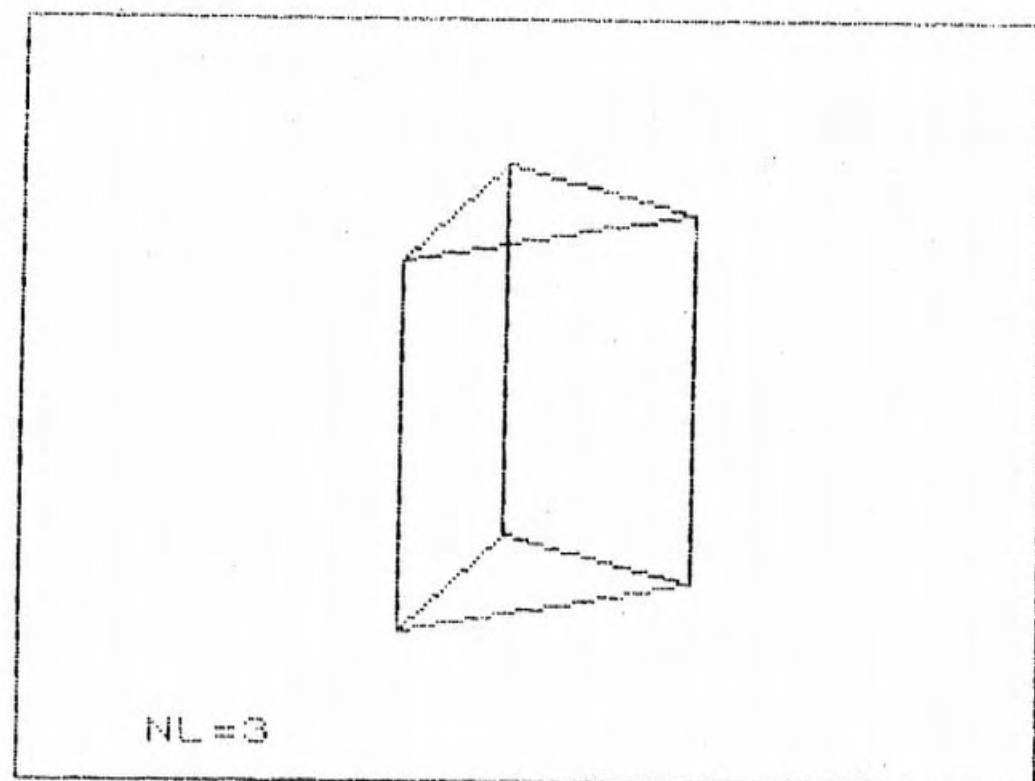


Fig. 16

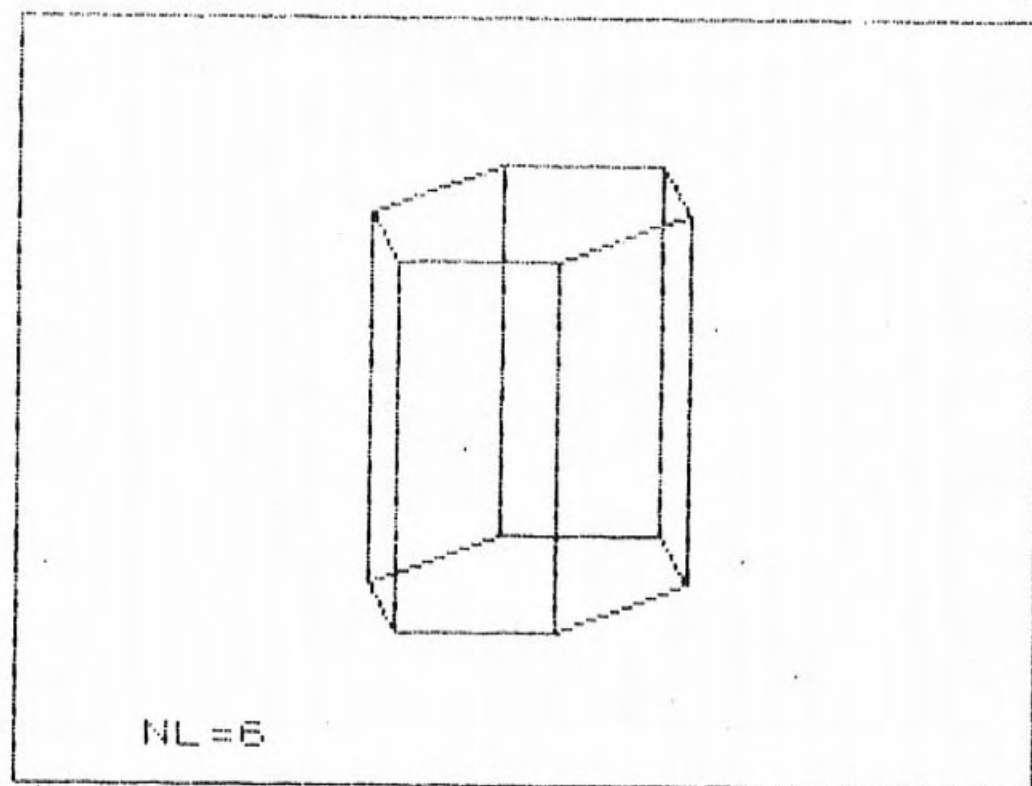


Fig. 17

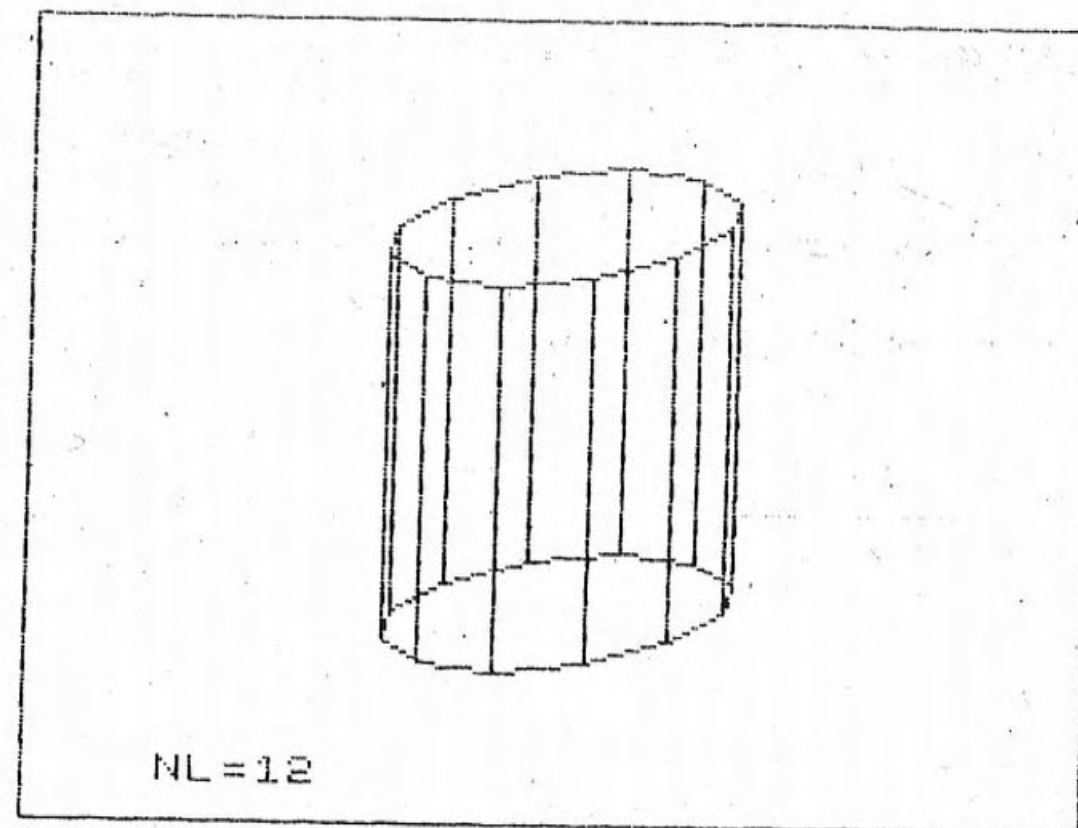


Fig. 18

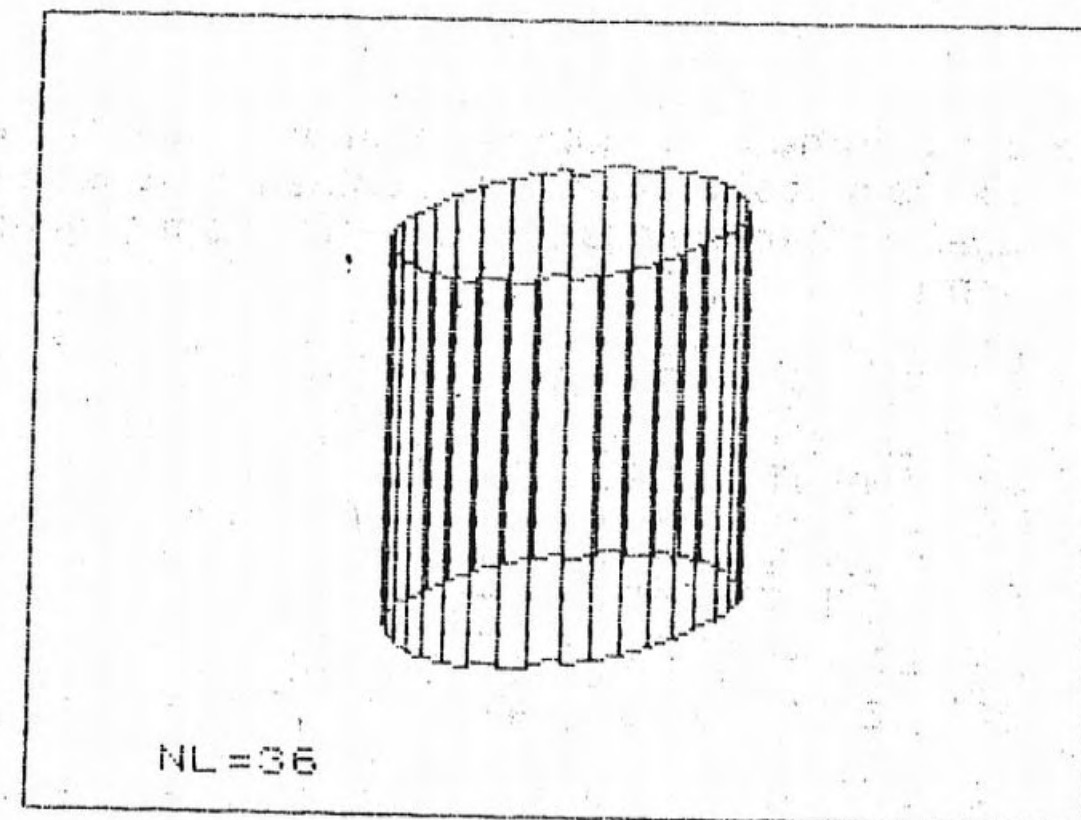


Fig. 19

5 Construção aproximada de um elipsóide

Consideremos uma semi-elipse de semi-grande eixo e semi-pequeno eixo b (figura 20).

Ao rodar em torno do eixo Oz, esta semi-elipse produz um elipsóide.

O programa que permite desenhar este elipsóide engloba quatro partes.

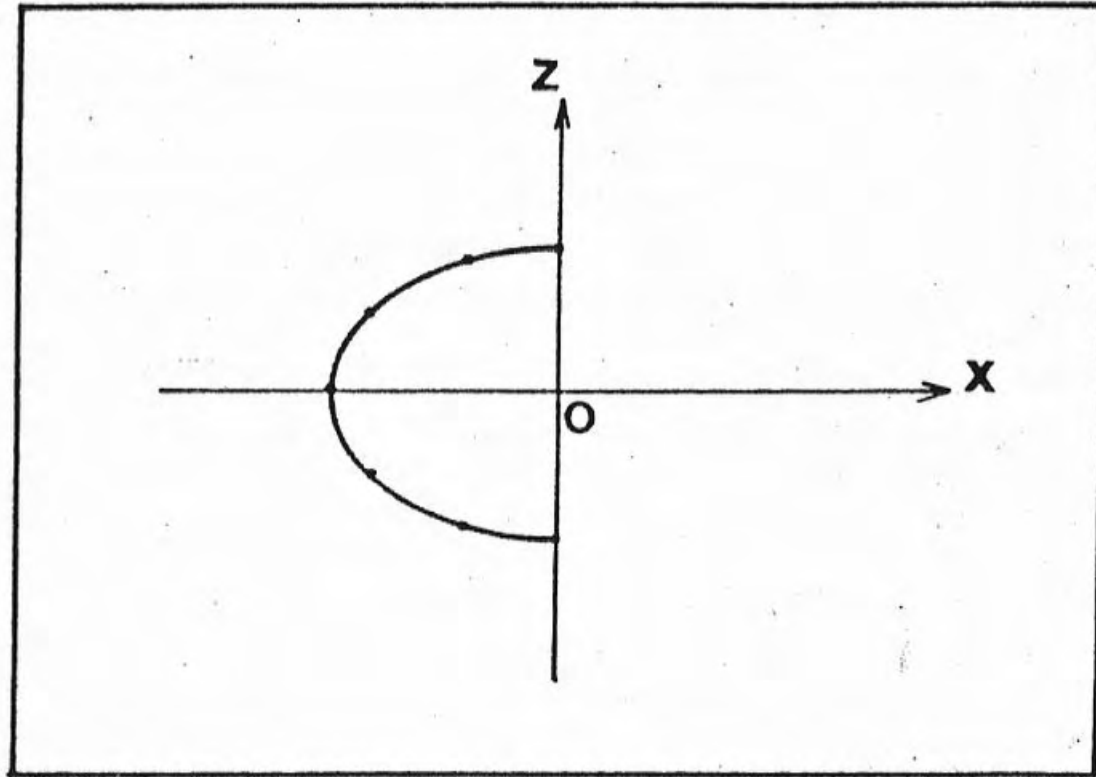


Fig. 20

1. Nesta parte, fornece os quatro parâmetros a, b, n_L e n_p.

As coordenadas de cada um dos n_p pontos da primeira linha são calculadas graças à representação paramétrica bem conhecida $x = a \cos t$ e $y = b \sin t$.

```

10 INPUT "EIXO MAIOR? "; a
20 INPUT "EIXO MENOR? "; b
30 INPUT "VALOR DE NP? "; np
40 INPUT "VALOR DE NL? "; nl
50 DIM x(1+np,1+nl)
60 DIM y(1+np,1+nl)
70 DIM z(1+np,1+nl)
80 LET t=PI/(np-1)
90 FOR i=1 TO 1+np
100 LET x(i,1)=a*COS (PI/2+(i-1)*t)
110 LET z(i,1)=b*SIN (PI/2+(i-1)*t)
120 LET y(i,1)=0
130 NEXT i

```

2. Calculam-se as coordenadas dos n_p pontos das linhas com os números 2, 3, etc.

```

140 LET f=2*PI/nl
150 FOR j=2 TO 1+nl
160 LET c=COS ((j-1)*f)
170 LET s=SIN ((j-1)*f)
180 FOR i=1 TO 1+np
190 LET x(i,j)=x(i,1)*c-y(i,1)*s
200 LET y(i,j)=x(i,1)*s+y(i,1)*c
210 LET z(i,j)=z(i,1)
220 NEXT i
230 NEXT j

```

3. Calcula-se a imagem utilizando uma perspectiva cavaleira.

```

240 FOR j=1 TO 1+nl
250 FOR i=1 TO 1+np
260 LET x(i,j)=x(i,j)+.65*y(i,j)
270 LET z(i,j)=z(i,j)+.375*y(i,j)
280 NEXT i
290 NEXT j

```

4. Desenham-se as facetas eliminando as partes escondidas. Para tal, calcula-se:

$$\overrightarrow{P_{i+1,j}} \wedge \overrightarrow{P_{i+1,j+1}} \wedge \overrightarrow{P_{i+1,j}} \wedge \overrightarrow{P_{i,j+1}}$$

```

300 FOR j=1 TO nl
310 FOR i=1 TO np
320 LET p=(x(i+1,j)-x(i+1,j+1))*
*(z(i+1,j)-z(i,j+1))-(x(i+1,j)-x
(i,j+1))*(z(i+1,j)-z(i+1,j+1))
330 IF p>0 THEN GO TO 390
340 PLOT 128+x(i,j),88+z(i,j)
350 DRAW x(i+1,j)-x(i,j),z(i+1,
j)-z(i,j)
360 DRAW x(i+1,j+1)-x(i+1,j),z(
i+1,j+1)-z(i+1,j)
370 DRAW x(i,j+1)-x(i+1,j+1),z(
i,j+1)-z(i+1,j+1)
380 DRAW x(i,j)-x(i,j+1),z(i,j)
-z(i,j+1)
390 NEXT i
400 NEXT j

```

5. A figura 21 foi obtida considerando $a=80$, $b=70$, $n_p=16$, $n_L=16$.

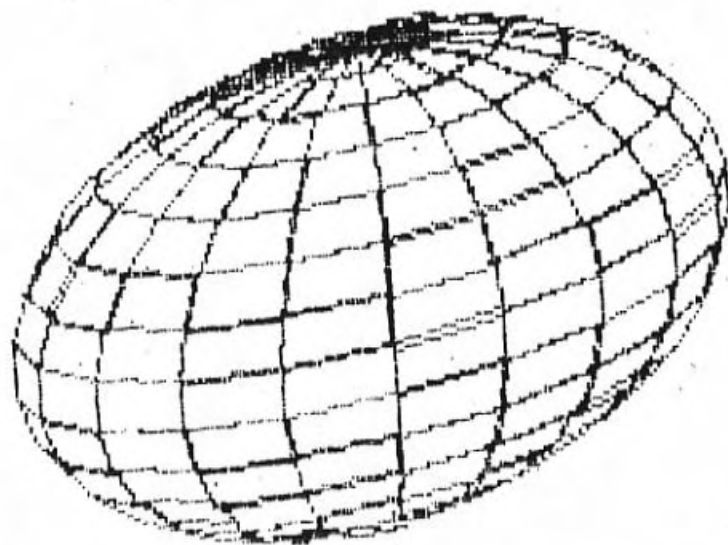


Fig. 21

No caso do elipsóide da figura 22, teremos $n_p=16$ e $n_L=12$.

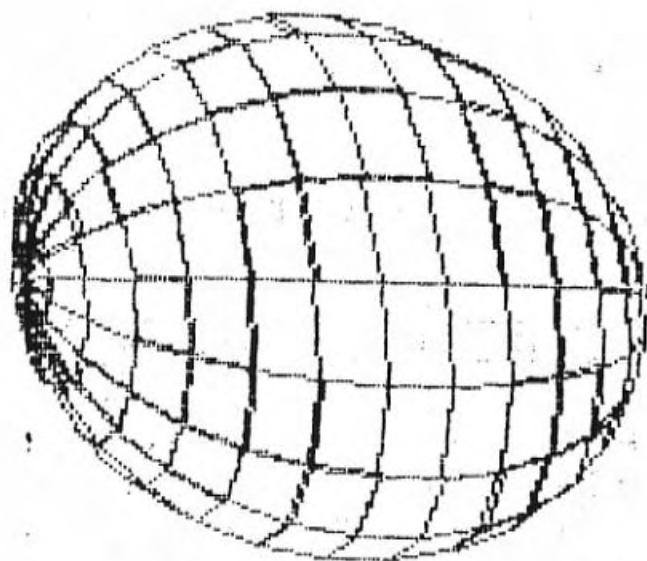


Fig. 22

Consideremos um prisma que possui n faces laterais. Para n suficientemente grande, um tal prisma poderá ser assemelhado a um cilindro (figura 1).

Do mesmo modo, pode obter-se um cone a partir de uma pirâmide (figura 2).

No entanto, a presença de numerosas arestas laterais não é desejável. Para desenhar os cilindros e os cones com traços, como na figura 3, será portanto necessário recorrer a um outro método.

Limitar-nos-emos, neste capítulo, ao caso de um cilindro recto de base circular e ao de um cone regular, também de base circular.

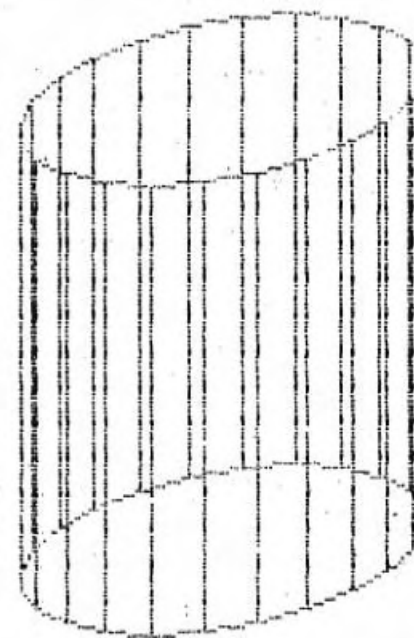


Fig. 1

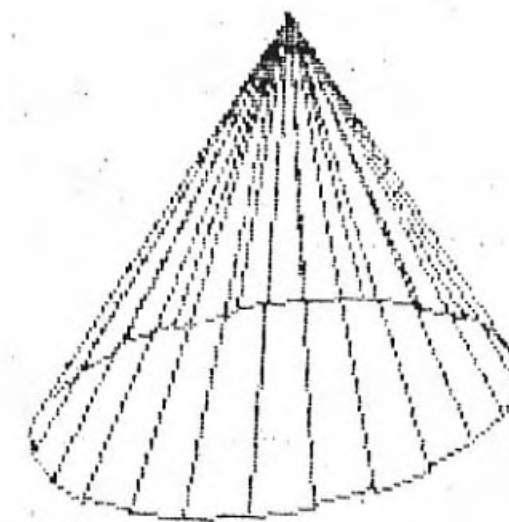


Fig. 2

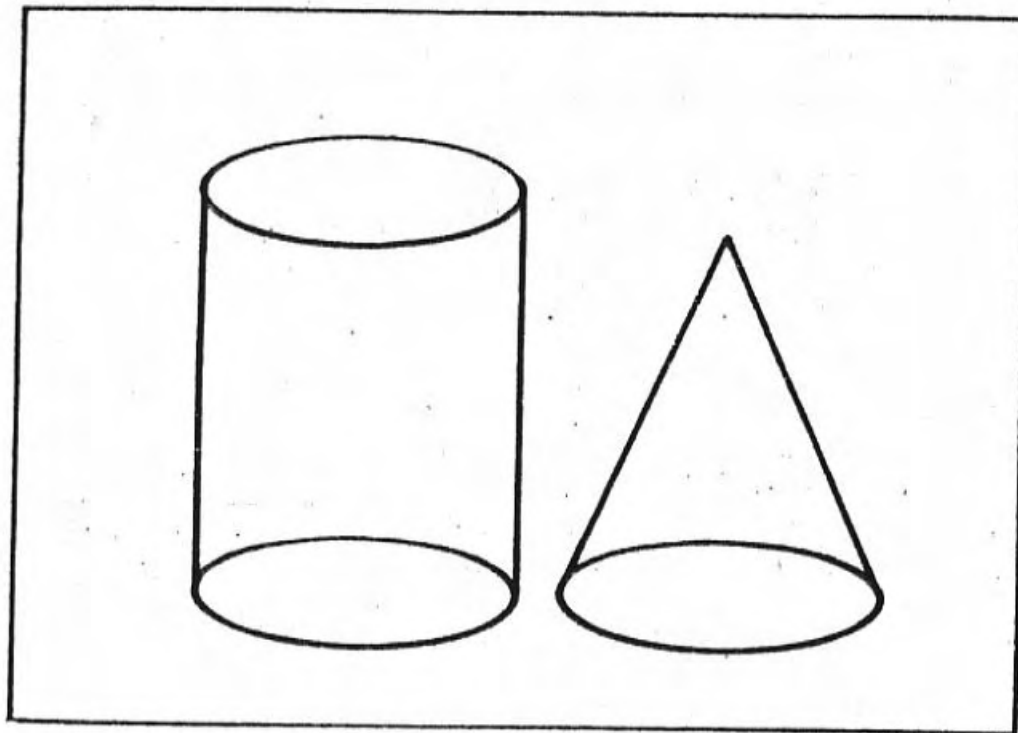


Fig. 3

1 Caso do cilindro

Considere-se um cilindro recto de raio $R=50$ e de altura $H=120$ (estes valores foram escolhidos de modo a serem directamente compatíveis com as dimensões do visor, a fim de evitar o recurso a um procedimento de enquadramento).

Em perspectiva cavaleira, um tal cilindro é representado do modo indicado na figura 4.

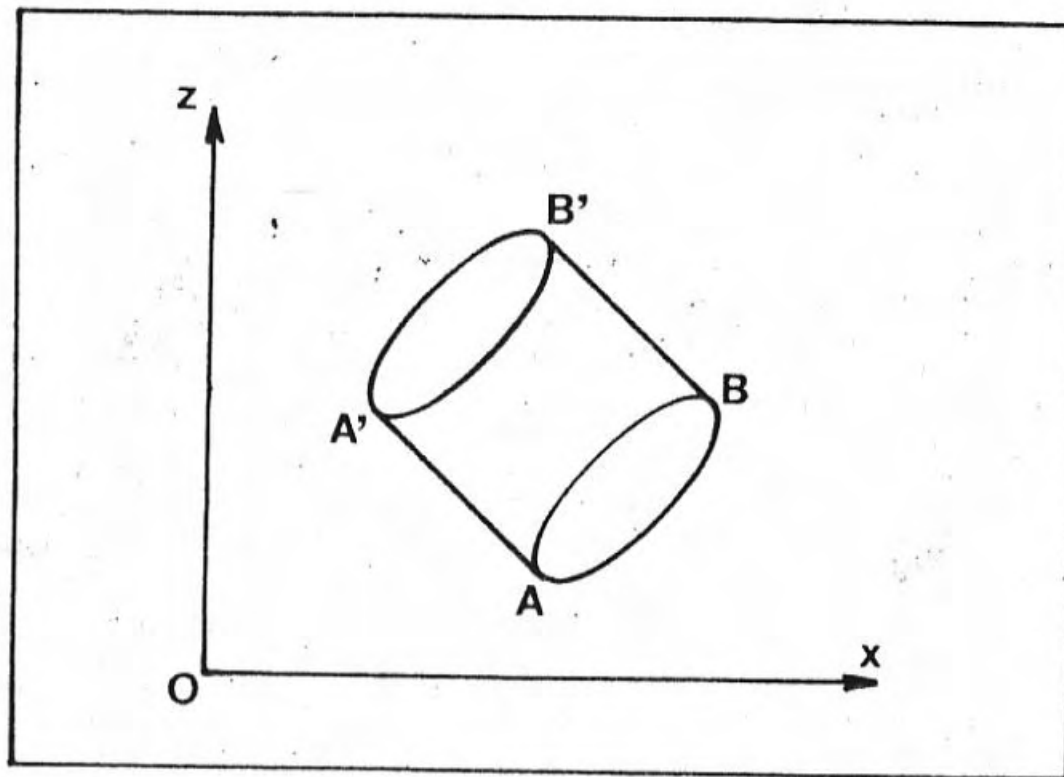


Fig. 4

A imagem inclui portanto:

- Duas elipses que representam as arestas circulares;
- As tangentes comuns AA' e BB' a estas elipses.

1. Definição das arestas circulares

Cada aresta circular é substituída por um polígono regular de n lados.

O referencial escolhido tem como origem O , o centro do cilindro, passando o eixo Oz pelos centros das faces circulares.

Para definir, neste referencial, as coordenadas dos n vértices de cada polígono regular, utilizam-se as equações clássicas do círculo $x=R \cos t$ e $y=R \sin t$.

```

5 REM dados
10 LET h=80
20 LET r=50
30 LET n=40
35 REM coordenadas dos pontos
dos círculos
40 DIM x(2*n)
50 DIM y(2*n)
60 DIM z(2*n)
70 FOR i=1 TO n
80 LET t=(i-1)*2*PI/(n-1)
90 LET x(i)=r*cos t
100 LET x(i+n)=x(i)
110 LET y(i)=r*sin t
120 LET y(i+n)=y(i)
130 LET z(i)=h/2
140 LET z(i+n)=-h/2
150 NEXT i

```

2. Deslocamentos do cilindro

Limitámo-nos a uma rotação em torno do eixo Oy .

```

155 REM rotacao em torno de Oy
160 INPUT "INDIQUE ANGULO EM GR
AUS, OU 0:" ,a
170 LET a=a*PI/180
180 LET c=cos a
190 LET s=sin a
200 FOR i=1 TO 2*n
210 LET u=x(i)*c-z(i)*s
220 LET v=x(i)*s+z(i)*c
230 LET x(i)=u
240 LET z(i)=v
250 NEXT i

```

3. Cálculo da imagem

Utiliza-se uma perspectiva cavaleira. As variáveis x e z servem para designar as coordenadas no espaço, e também no plano de projecção.

```

295 REM desenho das elipses
300 FOR i=1 TO n-1
310 PLOT 128+x(i),80+z(i)
320 DRAW x(i+1)-x(i),z(i+1)-z(i)
)
330 PLOT 128+x(i+n),80+z(i+n)
340 DRAW x(i+n+1)-x(i+n),z(i+n+1)-z(i+n)
350 NEXT i

```

4. Desenho das arestas circulares

```

355 REM desenho das partes rect
as no caso de rotacao em torno d
e Oy
360 IF ry=0 THEN GO TO 510
370 LET wmin=10e30
380 LET wmax=-10e30
390 FOR i=1 TO n
400 LET w=(x(i+n)*z(i)-x(i)*z(i+n))/
(x(i+n)-x(i))
410 IF w<wmin THEN LET j1=i
420 IF w<wmin THEN LET wmin=w
430 IF w>wmax THEN LET j2=i
440 IF w>wmax THEN LET wmax=w
450 NEXT i
460 PLOT 128+x(j1),80+z(j1)
470 DRAW x(n+j1)-x(j1),z(n+j1)-z(j1)
480 PLOT 128+x(j2),80+z(j2)
490 DRAW x(n+j2)-x(j2),z(n+j2)-z(j2)
500 GO TO 9999

```

5. Desenho das tangentes comuns

São de considerar dois casos conforme o eixo do cilindro é paralelo ou não ao eixo Oz.

1.º caso

O eixo do cilindro não é paralelo ao eixo Oz: isto pressupõe que se tenha escolhido uma rotação de ângulo não nulo em torno de Oy.

Seja M(i) um ponto qualquer da elipse que represente a aresta circular inferior do cilindro.

Designemos por x(i) e z(i) as coordenadas deste ponto no plano de projecção organizado por um referencial Ouv.

Seja M' o ponto da elipse que representa a aresta circular superior do cilindro definido por $\vec{M(i)M'} = \vec{AA'} = \vec{BB'}$ (ver figura 5).

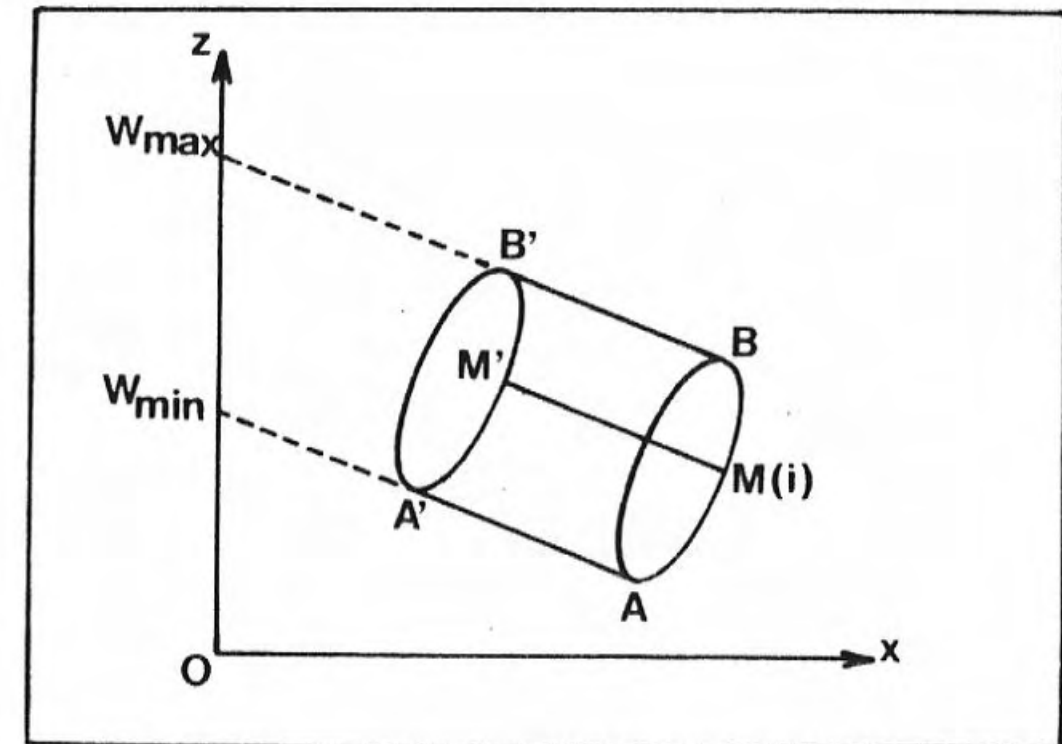


Fig. 5

As coordenadas de M' são x(i+n) e z(i+n).

A recta M(i)M' intersecta o eixo Ov num ponto P de ordenada:

$$W = \frac{x(i+n)z(i) - x(i)z(i+n)}{x(i+n) - x(i)}$$

Quando M(i) descreve a elipse inferior, a recta M(i)M' varia entre as posições extremas (AA') e (BB').

O ponto P varia entre os pontos Q₁ e Q₂ cujas ordenadas são, respectivamente, W_{min} e W_{max}. Estes pontos Q₁ e Q₂ correspondem a pontos da elipse inferior cujos índices são respectivamente j₁ e j₂.

2.º caso

Neste caso (figura 6), basta determinar as abcissas x_{\min} e x_{\max} dos pontos A e A'.

```
505 REM desenho das partes rect
510 na ausencia de rotacao sobre
520 OY
530 LET xmin=10e30
540 LET xmax=-10e30
550 FOR i=1 TO n
560 IF x(i)<xmin THEN LET j1=i
570 IF x(i)<xmin THEN LET xmin=
x(i)
580 IF x(i)>xmax THEN LET j2=i
590 IF x(i)>xmax THEN LET xmax=
x(i)
600 NEXT i
610 PLOT 120+x(j1),80+z(j1)
620 DRAW x(n+j1)-x(j1),z(n+j1)-
z(j1)
630 PLOT 120+x(j2),80+z(j2)
640 DRAW x(n+j2)-x(j2),z(n+j2)-
z(j2)
```

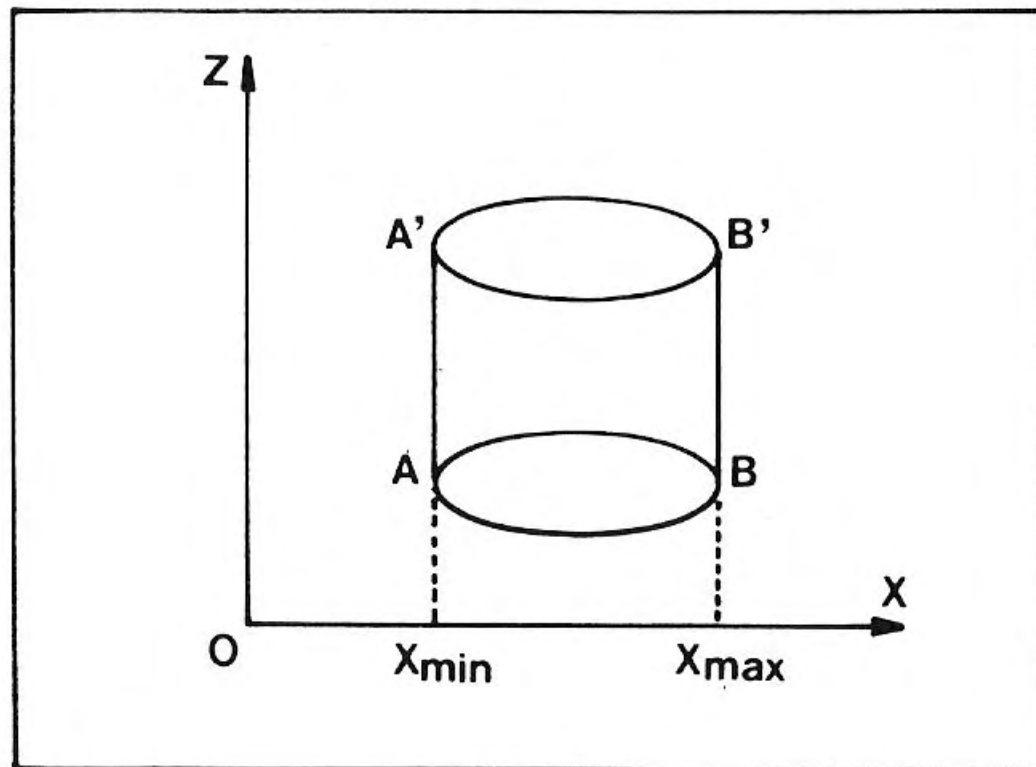


Fig. 6

6. Resultados

As figuras 7, 8 e 9 representam o cilindro, com e sem eliminação das partes escondidas.

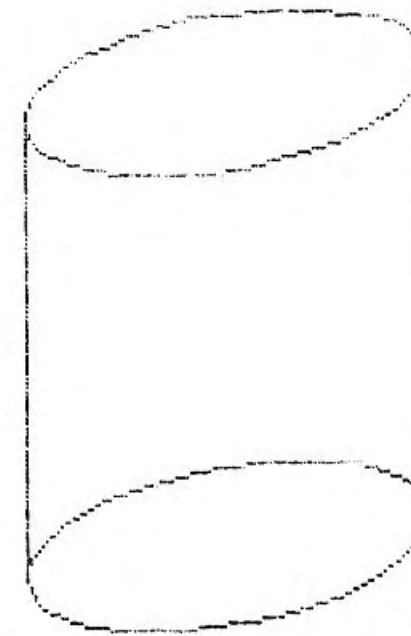


Fig. 7

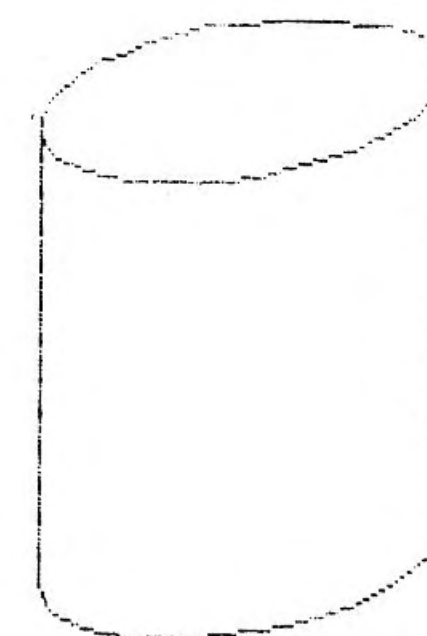


Fig. 8

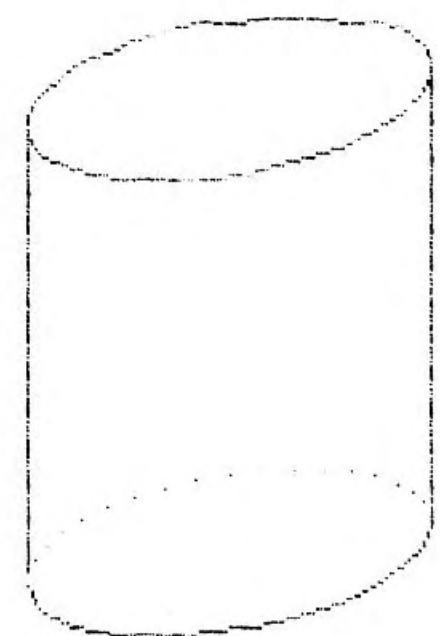


Fig. 9

2 Cone

Consideremos um cone recto de vértice S: se C é o centro do círculo de base, a recta (SC) é perpendicular ao plano contendo este círculo.

Seja $R = 40$ o raio do círculo de base e seja $H = 80$ a altura do cone.

1. Definição da aresta circular

Consideremos como vértice um referencial ortonormado de origem $O = C$, coincidindo o eixo Oz com a recta SC .

O círculo de base é representado por um polígono regular de n lados. As coordenadas dos vértices deste polígono são calculadas, para i variando entre 1 e n , graças às fórmulas $x = R \cos t$, $y = R \sin t$,

$$t = 2\pi \times \frac{i-1}{n-1}$$

```
5 REM dados
10 LET h=80
20 LET r=40
30 LET n=40
40 LET xs=0
```

```

000 LET us = 0
000 LET zs = 0
000 REM coordenadas dos pontos
do circulo de base
70 DIM x(n)
80 DIM y(n)
90 DIM z(n)
100 FOR i = 1 TO n
110 LET t = 2*PI*(i-1)/(n-1)
120 LET x(i) = r*cos t
130 LET y(i) = r*sin t
140 LET z(i) = 0
150 NEXT i

```

2. Deslocamentos do cone

Limitámo-nos a uma rotação em torno do eixo Oy.

Uma rotação em torno do eixo Oz não apresenta qualquer interesse dada a posição inicial do cone. Para introduzir uma rotação de eixo Ox, será necessário utilizar as fórmulas do capítulo 3.

Neste caso, será necessário ter em conta o facto de a projecção do vértice do cone poder encontrar-se no interior da elipse. Não se poderão nessas condições traçar tangentes à elipse, dado que não existem.

```

155 REM rotacao em torno de OY
160 INPUT "INDIQUE ANGULO EM GR
165, OU 0:" a
170 LET c = cos a * PI / 180
180 LET s = sin a
200 FOR i = 1 TO n
210 LET u = x(i) * c - z(i) * s
220 LET v = x(i) * s + z(i) * c
230 LET x(i) = u
240 LET z(i) = v
250 NEXT i
260 LET u = xs * c - zs * s
270 LET v = xs * s + zs * c
280 LET xs = u
290 LET zs = v

```

3. Cálculo da imagem

A perspectiva empregue é uma perspectiva cavaleira, na qual se utilizaram de novo as variáveis x e z.

```

305 REM calculo da perspectiva
310 FOR i = 1 TO n
320 LET x(i) = x(i) + .375 * y(i)
330 LET z(i) = z(i) + .375 * y(i)
340 NEXT i
345 LET xs = xs + .375 * ys
355 LET zs = zs + .375 * zs

```

4. Determinação das tangentes

Seja M um ponto qualquer da elipse que representa a aresta circular (figura 10).

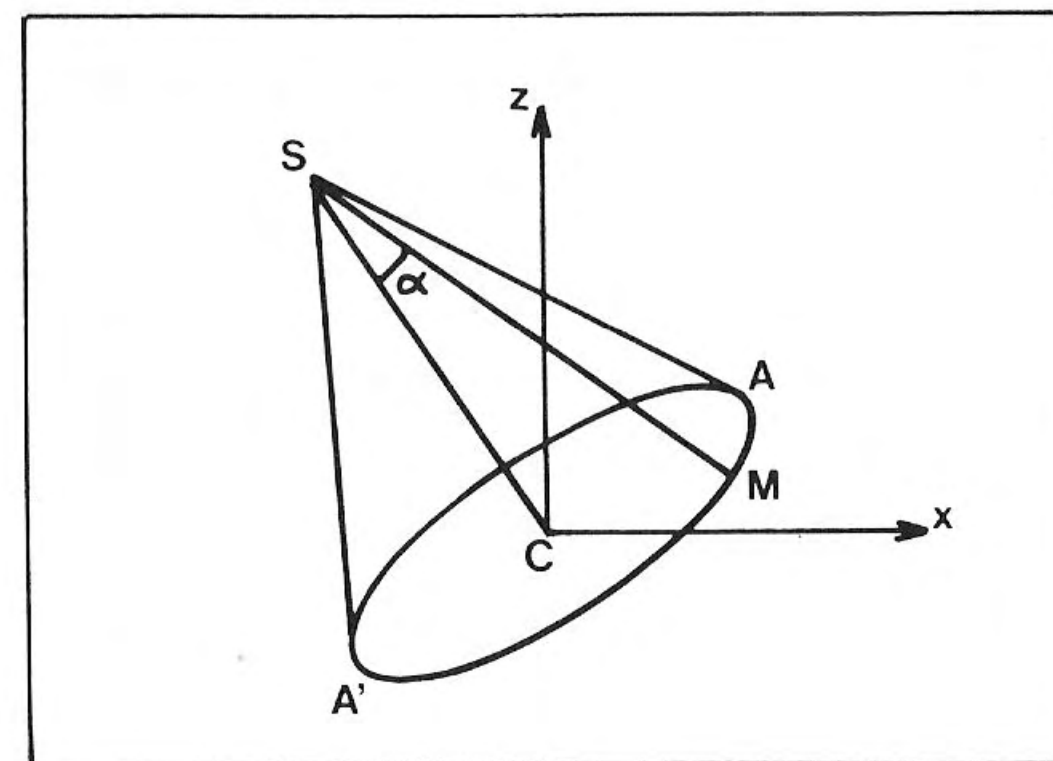


Fig. 10

Sendo o plano de projecção referenciado a um sistema ortonormal Ouv, com $O = C$, designemos por $x(i)$ e $z(i)$ as coordenadas de M, por x_s e z_s as de S.

Seja α o ângulo (\vec{SC}, \vec{SM}) : este ângulo é máximo quando M se encontra em A, e mínimo quando M está em A'.

Utilizando o produto vectorial $\vec{SC} \wedge \vec{SM}$, pode escrever-se

$$\text{sen } \alpha = \frac{\|\vec{SC} \wedge \vec{SM}\|}{\|\vec{SC}\| \times \|\vec{SM}\|}$$

com

$$\vec{SC} \wedge \vec{SM} = [x(i) - x_s] z_s - x_s [z(i) - z_s],$$

$$\|\vec{SC}\| = \sqrt{x_s^2 + z_s^2}$$

e

$$\|\vec{SM}\| = \sqrt{[x(i) - x_s]^2 + [z(i) - z_s]^2}$$

Como $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\text{sen } \alpha$ varia como α : M está, portanto, em A' quando $\text{sen } \alpha$ é mínimo e em A quando $\text{sen } \alpha$ é máximo. Basta então determinar os índices j_1 e j_2 que correspondem a estes valores.

```

355 REM determinacao das tangen
tes
360 LET smax = -10e30
370 LET smin = 10e30
380 FOR i = 1 TO n
390 LET d1 = 600 * (xs * xs + zs * zs)
400 LET d2 = 600 * ((x(i) - xs) * (x(i)
- xs) + (z(i) - zs) * (z(i) - zs))
410 LET p = zs * (x(i) - xs) - xs * (z(i)
- zs)
420 LET s = p / (d1 + d2)
430 IF s < smin THEN LET j1 = i
440 IF s < smin THEN LET smin = s
450 IF s > smax THEN LET j2 = i
460 IF s > smax THEN LET smax = s
470 NEXT i

```

5. Desenho

```

475 REM desenho
480 FOR i = 1 TO n - 1
490 PLOT 120 + x(i), 80 + z(i)
500 DRAW x(i + 1) - x(i), z(i + 1) - z(i)
510 NEXT i
520 PLOT 120 + xs, 80 + zs
530 DRAW x(j1) - xs, z(j1) - zs
540 PLOT 120 + xs, 80 + zs
550 DRAW x(j2) - xs, z(j2) - zs

```

6. Resultados

As figuras 11, 12, 13 e 14 apresentam diversos aspectos do cone após rotação em torno do eixo Oy.

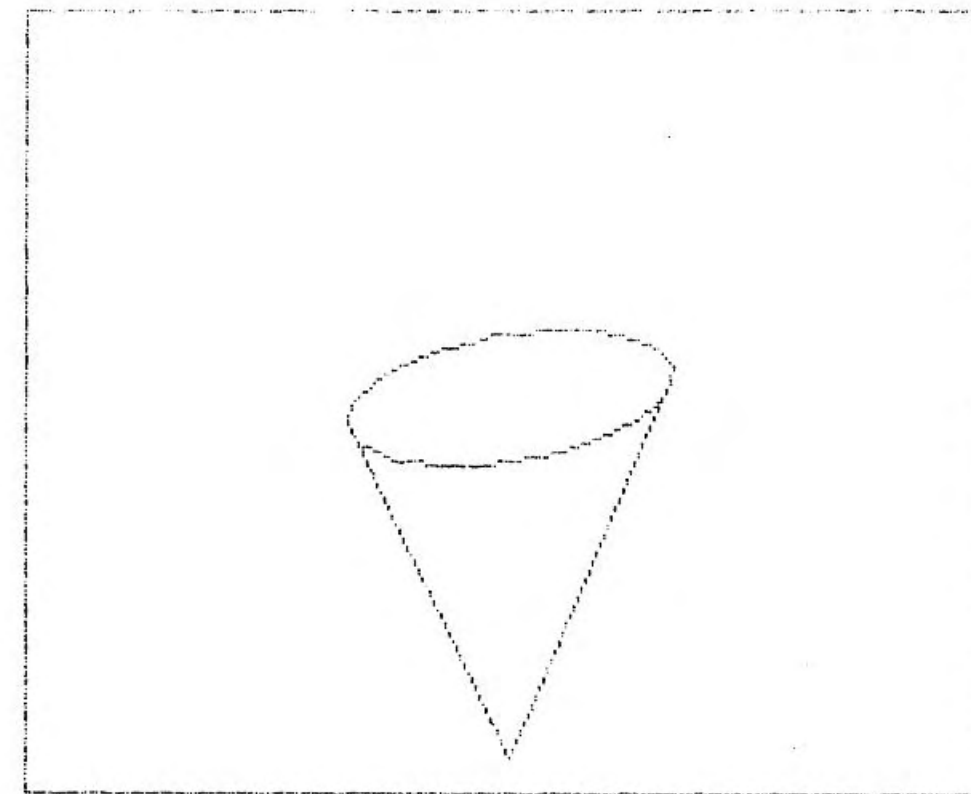


Fig. 11. — Rotação: 180 graus.

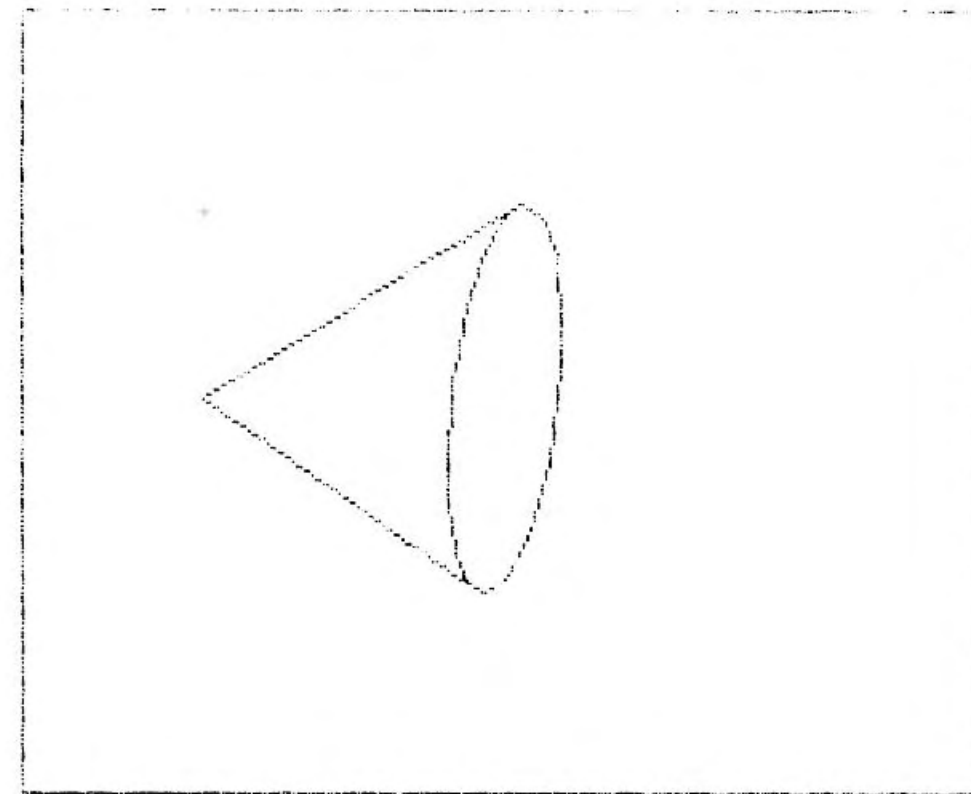


Fig. 12. — Rotação: 90 graus.

REPRESENTAÇÕES PARAMÉTRICAS DAS SUPERFÍCIES

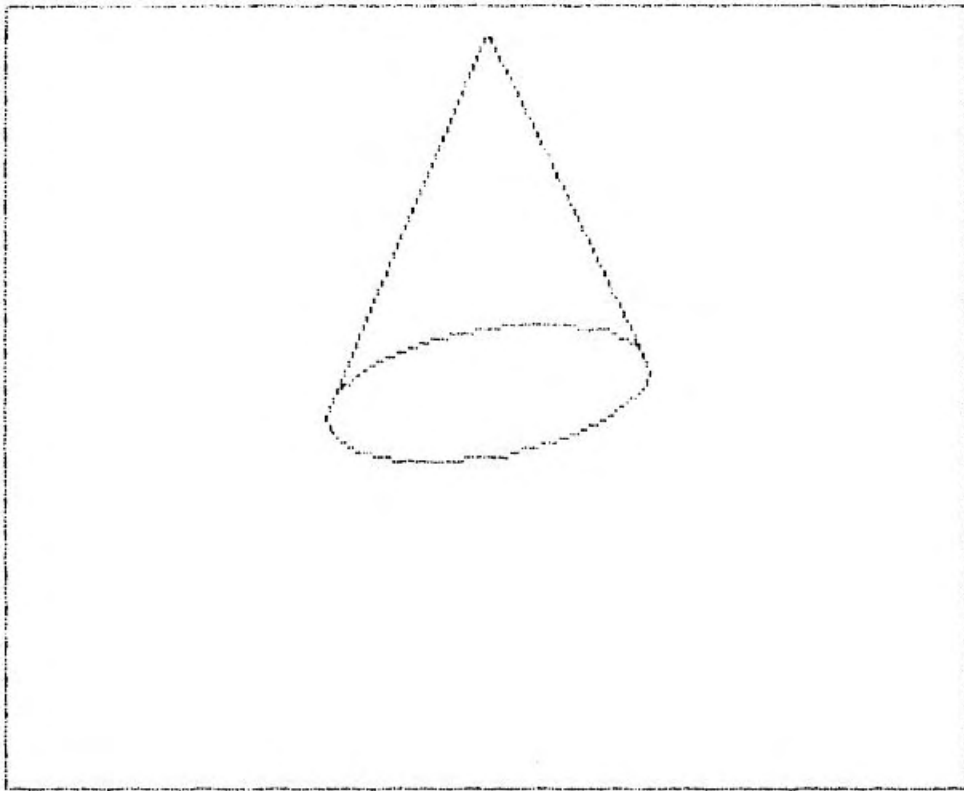


Fig. 13. — Rotação: 0 graus.

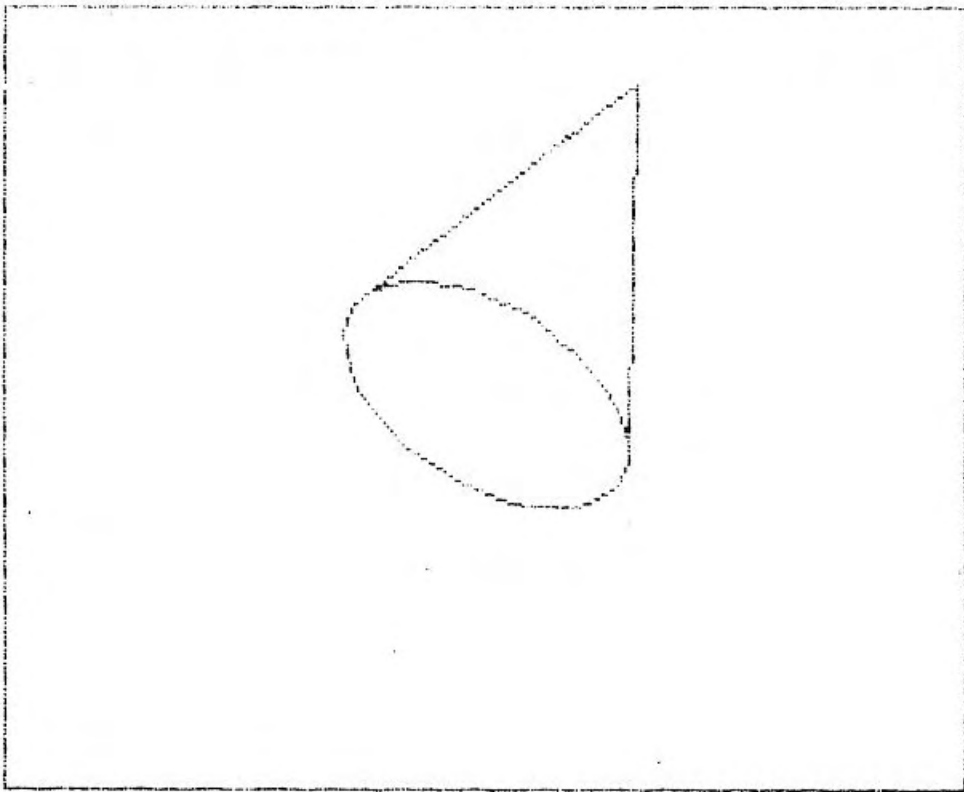


Fig. 14. — Rotação: -30 graus.

Sendo o espaço organizado por um sistema ortonormado, seja S uma superfície qualquer.

As coordenadas x , y e z de cada um dos pontos de S podem depender de outras variáveis designadas parâmetros. Dispõe-se então de uma representação paramétrica da superfície S .

Neste capítulo, utilizaremos três tipos de representação paramétrica.

1 As coordenadas cilíndricas

1. Definição

Na figura 1, o ponto M é definido graças ao ângulo θ , ao comprimento $r = \overline{OH}$ e ao lado $z = \overline{HM}$.

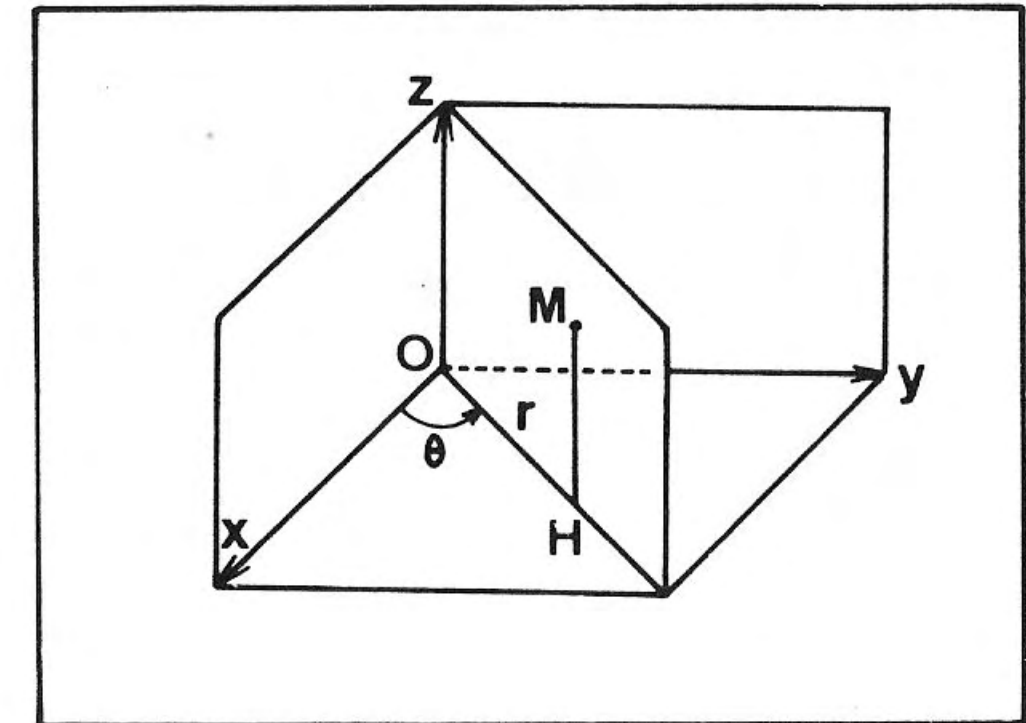


Fig. 1

Estes três números constituem as coordenadas cilíndricas do ponto M.

É fácil ver que $x=r \cos \theta$ e $y=r \sin \theta$.

2. Método

Deseja representar-se uma superfície definida, em coordenadas cilíndricas, por uma equação do tipo $z=f(r, \theta)$.

O princípio de representação desta superfície a usar neste programa é idêntico ao do capítulo 11, parágrafo 1.

r varia entre r_{\min} e r_{\max} , enquanto θ varia entre θ_{\min} e θ_{\max} .

Divide-se o intervalo $[r_{\min}, r_{\max}]$ em $n_r - 1$ partes iguais donde, para

$$1 \leq i \leq n_r, \quad r_i = r_{\min} + (i-1) \left[\frac{r_{\max} - r_{\min}}{n_r - 1} \right].$$

Divide-se igualmente o intervalo $[\theta_{\min}, \theta_{\max}]$ em $n_\theta - 1$ partes

$$\text{iguais donde, para } 1 \leq j \leq n_\theta, \quad \theta_j = \theta_{\min} + (j-1) \left[\frac{\theta_{\max} - \theta_{\min}}{n_\theta - 1} \right].$$

Dispomos então de uma rede (figura 2) cujos pontos têm como coordenadas:

$$\begin{aligned} x(i,j) &= r_i \cos \theta_j \\ y(i,j) &= r_i \sin \theta_j \\ z(i,j) &= f(r_i, \theta_j) \end{aligned}$$

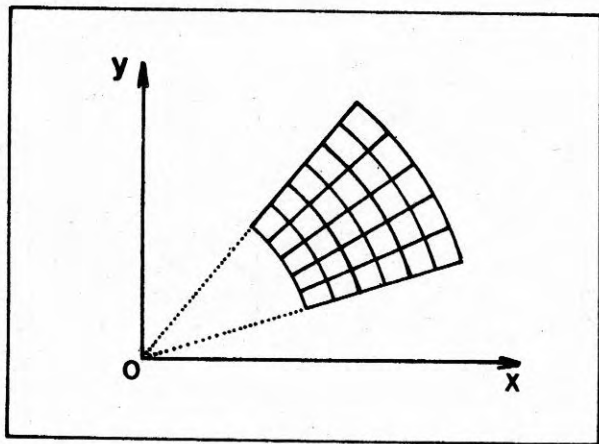


Fig. 2

3. Programa

Engloba cinco partes. Para o utilizarmos, teremos primeiro de definir a função $z=f(r, \theta)$ na linha 10.

As variáveis θ e n_θ são designadas, respectivamente, pelas letras T e NT.

```

5 REM dados e calculo dos intervalos
10 DEF FN z(r,t)=t/r
20 INPUT "Rmin: ";rmin
30 INPUT "Rmax: ";rmax
40 INPUT "Tmin (em graus): ";tmin
50 INPUT "Tmax (em graus): ";tmax
55 LET tmin=tmin*.0174533
56 LET tmax=tmax*.0174533
60 INPUT "NR: ";nr
70 INPUT "NT: ";nt
80 DIM r(nr)
90 DIM t(nt)
100 FOR j=1 TO nt
110 LET t(j)=tmin+(j-1)*(tmax-tmin)/(nt-1)
120 NEXT j
130 FOR i=1 TO nr
140 LET r(i)=rmin+(i-1)*(rmax-rmin)/(nr-1)
150 NEXT i
160 REM coordenadas dos pontos da rede
160 DIM x(nr,nt)
170 DIM y(nr,nt)
180 DIM z(nr,nt)
190 FOR i=1 TO nr
200 FOR j=1 TO nt
210 LET x(i,j)=r(i)*COS t(j)
220 LET y(i,j)=r(i)*SIN t(j)
230 LET z(i,j)=FN z(r(i),t(j))
240 NEXT j
250 NEXT i
260 REM calculo da imagem (perspectiva cavaleira)
270 DIM u(nr,nt)
280 DIM v(nr,nt)
290 LET vmin=10e30
300 LET vmin=10e30
310 LET vmax=-10e30
320 LET vmax=-10e30
330 FOR i=1 TO nr
340 FOR j=1 TO nt
350 LET u(i,j)=x(i,j)+.375*y(i,j)

```

```

350 LET v(i,j)=z(i,j)+.375*y(i,
j)
360 IF u(i,j)<umin THEN LET umi
n=u(i,j)
370 IF v(i,j)<vmin THEN LET vmi
n=v(i,j)
380 IF u(i,j)>umax THEN LET uma
x=u(i,j)
390 IF v(i,j)>vmax THEN LET vma
x=v(i,j)
400 NEXT j
410 NEXT i
415 REM enquadramento da imagem
420 LET k1=.25/(umax-umin)
430 LET k2=.175/(vmax-vmin)
440 LET l1=.25-k1*umax
450 LET l2=.175-k2*vmax
460 FOR i=1 TO nr
470 FOR j=1 TO nt
480 LET u(i,j)=k1*u(i,j)+l1
490 LET v(i,j)=k2*v(i,j)+l2
500 NEXT j
510 NEXT i
515 REM desenho
520 FOR i=1 TO nr
530 FOR j=1 TO nt
540 IF i<nr-1 THEN PLOT u(i,j)
,v(i,j): DRAW u(i+1,j)-u(i,j),v
i+1,j)-v(i,j)
550 IF j<nt-1 THEN PLOT u(i,j)
,v(i,j): DRAW u(i,j+1)-u(i,j),v
i,j+1)-v(i,j)
560 NEXT j
570 NEXT i

```

4. Exemplos

Daremos cinco exemplos de superfícies obtidas com este programa.

1.º Fig. 3: cone recto de equação $z=r$.

2.º Fig. 4: parabolóide elíptico de equação $z=r^2$.

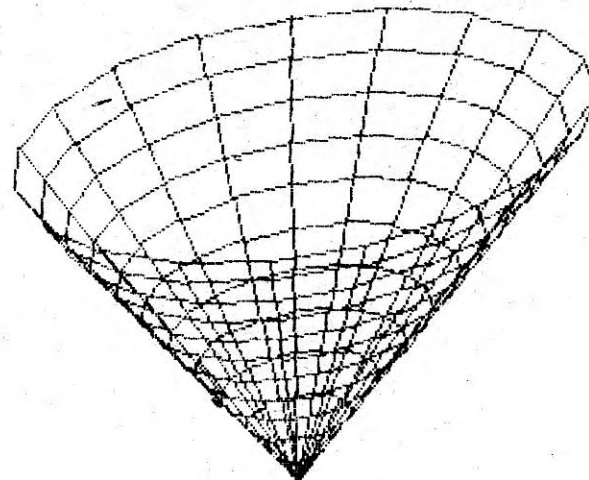


Fig. 3

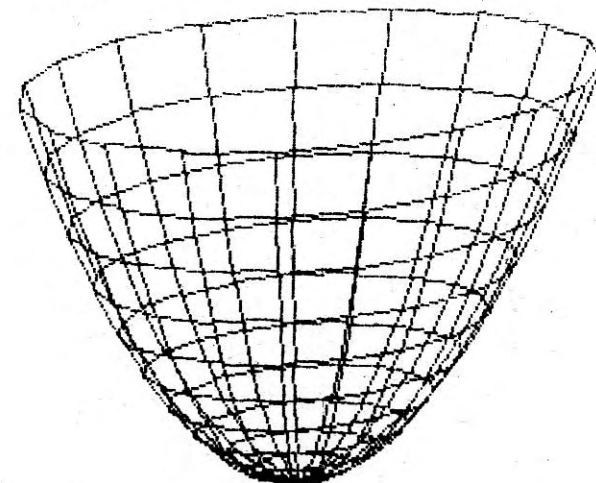


Fig. 4

3.º Fig. 5: cone parabólico de equação $z = \sqrt{r}$, com $r \geq 0$.

4.º Fig. 6: cone hiperbólico de equação $z = \frac{1}{r}$, com $r \neq 0$.

5.º A fig. 7 apresenta a superfície $z = \frac{\theta}{r}$ obtida com $r_{\min} = 1$, $r_{\max} = 4$, $\theta_{\min} = 0^\circ$, $\theta_{\max} = 270^\circ$, $n_r = 5$ e $n_\theta = 20$.

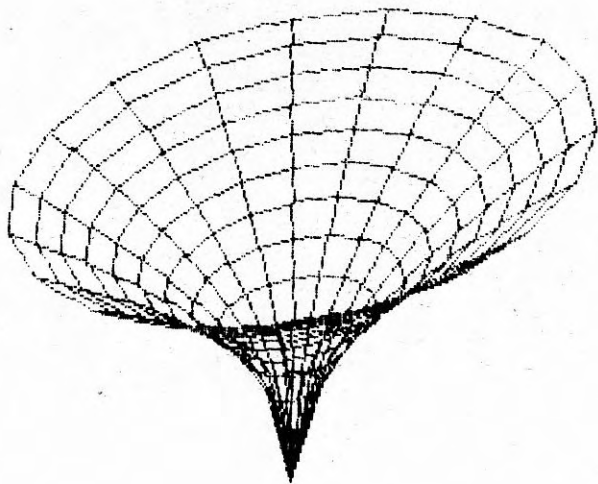


Fig. 5

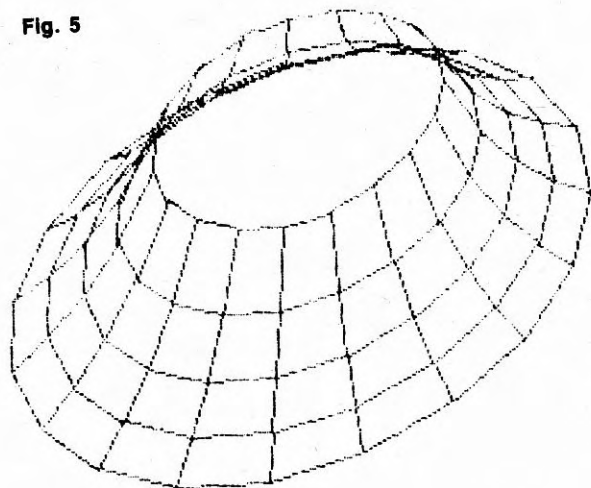


Fig. 6

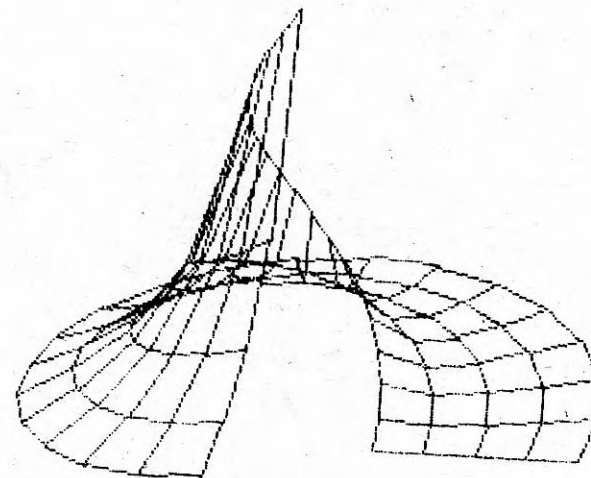


Fig. 7

2 Coordenadas esféricas

1. Definições

Na figura 8, o ponto M é definido pelos dois ângulos φ e θ e pelo número $r = OM$. φ e θ serão designados respectivamente por latitude e longitude do ponto M.

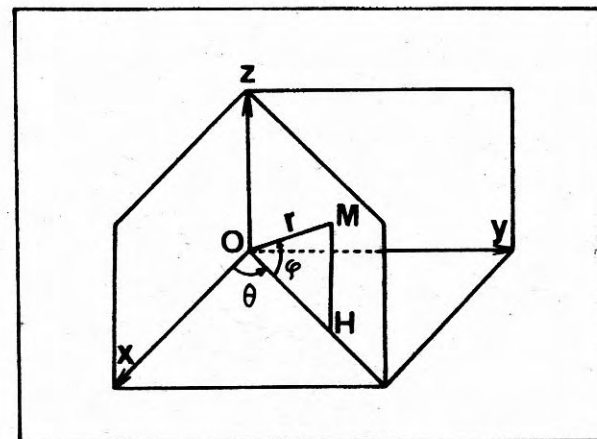


Fig. 8

Estes três números constituem as coordenadas esféricas do ponto M.

Obtemos facilmente:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi \cos \Theta, \\y &= r \cos \varphi \sin \Theta,\end{aligned}$$

e

$$z = r \sin \varphi.$$

Em coordenadas esféricas a equação de uma superfície é do tipo $r = f(\Theta, \varphi)$.

2. Variáveis do programa

Θ está compreendido entre Θ_{\min} e Θ_{\max} , e φ entre φ_{\min} e φ_{\max} .

Os intervalos $[\Theta_{\min}, \Theta_{\max}]$ e $[\varphi_{\min}, \varphi_{\max}]$ são divididos, respectivamente, em $n_{\Theta} - 1$ e $n_{\varphi} - 1$ partes iguais. Obtemos então:

$$\Theta_i = \Theta_{\min} + (i - 1) \left[\frac{\Theta_{\max} - \varphi_{\min}}{n_{\Theta} - 1} \right]$$

para $1 \leq i \leq n_{\Theta}$ e

$$\varphi_j = \varphi_{\min} + (j - 1) \left[\frac{\varphi_{\max} - \varphi_{\min}}{n_{\varphi} - 1} \right]$$

para $1 \leq j \leq n_{\varphi}$.

Os pontos da rede correspondente têm por coordenadas:

$$\begin{aligned}x(i,j) &= f(\Theta_i, \varphi_j) \cos \varphi_j \cos \Theta_i \\y(i,j) &= f(\Theta_i, \varphi_j) \cos \varphi_j \sin \Theta_i \\z(i,j) &= f(\Theta_i, \varphi_j) \sin \varphi_j\end{aligned}$$

3. Programa

Θ é representado por T, φ por F, n_{Θ} por NT, n_{φ} por NF.

Para utilizar este programa é necessário primeiramente definir a função $r = f(T, F)$ completando a linha 10.

O programa engloba cinco partes:

```

5 REM dados e calculo dos intervalos
10 DEF FN r(t,f)=t
20 INPUT "Tmin (em graus): "; tmin
30 INPUT "Tmax (em graus): "; tmax
40 INPUT "Fmin (em graus): "; fmin
50 INPUT "Fmax (em graus): "; fmax

```

```

60 LET tmin=tmin*.0174533
65 LET tmax=tmax*.0174533
70 LET fmin=fmin*.0174533
75 LET fmax=fmax*.0174533
80 INPUT "NT: "; nt
90 INPUT "NF: "; nf
100 DIM t(nt)
110 DIM f(nf)
120 FOR i=1 TO nt
130 LET t(i)=tmin+(i-1)*(tmax-tmin)/(nt-1)
140 NEXT i
150 FOR i=1 TO nf
160 LET f(i)=fmin+(i-1)*(fmax-fmin)/(nf-1)
170 NEXT i
180 REM coordenadas dos pontos da rede
190 DIM x(nt,nf)
200 DIM y(nt,nf)
210 DIM z(nt,nf)
220 FOR i=1 TO nt
230 FOR j=1 TO nf
240 LET r=FN r(t(i),f(j))
250 LET x(i,j)=r*COS t(i)*COS f(j)
260 LET y(i,j)=r*SIN t(i)*COS f(j)
270 LET z(i,j)=r*SIN f(j)
280 NEXT j
290 NEXT i
300 REM calculo da imagem (perspectiva cavaleira)
310 DIM u(nt,nf)
320 DIM v(nt,nf)
330 LET umin=10000
340 LET vmin=10000
350 LET umax=-10000
360 LET vmax=-10000
370 FOR i=1 TO nt
380 FOR j=1 TO nf
390 LET u(i,j)=x(i,j)+.375*y(i,j)
400 LET v(i,j)=z(i,j)+.375*y(i,j)
410 IF u(i,j)<umin THEN LET umin=u(i,j)
420 IF v(i,j)<vmin THEN LET vmin=v(i,j)
430 IF u(i,j)>umax THEN LET umax=u(i,j)
440 IF v(i,j)>vmax THEN LET vmax=v(i,j)
450 NEXT j
460 NEXT i

```

```

415  REM  enquadramento da imagem
420  LET  K1=200/(UMAX-UMIN)
430  LET  K2=170/(VMAX-VMIN)
440  LET  L1=200-K1*UMAX
450  LET  L2=170-K2*VMAX
460  FOR  I=1 TO NT
470  FOR  J=1 TO NF
480  LET  U(I,J)=K1*U(I,J)+L1
490  LET  V(I,J)=K2*V(I,J)+L2
500  NEXT J
510  NEXT I
520  REM  desenho
530  FOR  I=1 TO NT
540  FOR  J=1 TO NF
550  IF  I<=NT-1 THEN PLOT U(I,J)
560  IF  J<=NF-1 THEN PLOT U(I,J)
570  NEXT J
580  NEXT I

```

4. Exemplos

1.º Em coordenadas esféricas, a equação de uma esfera de raio 1 é $r=1$.

As figuras 9 e 10 mostram uma semi-esfera e uma esfera completa vistas em perspectiva cavaleira, sem eliminação de partes escondidas.

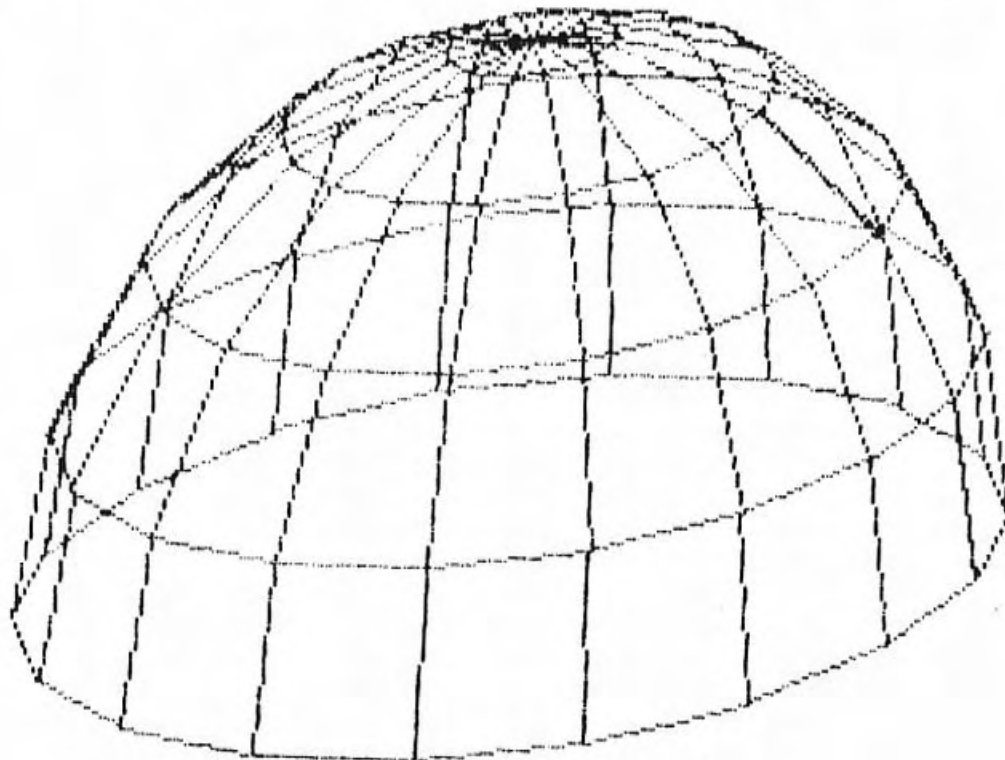


Fig. 9

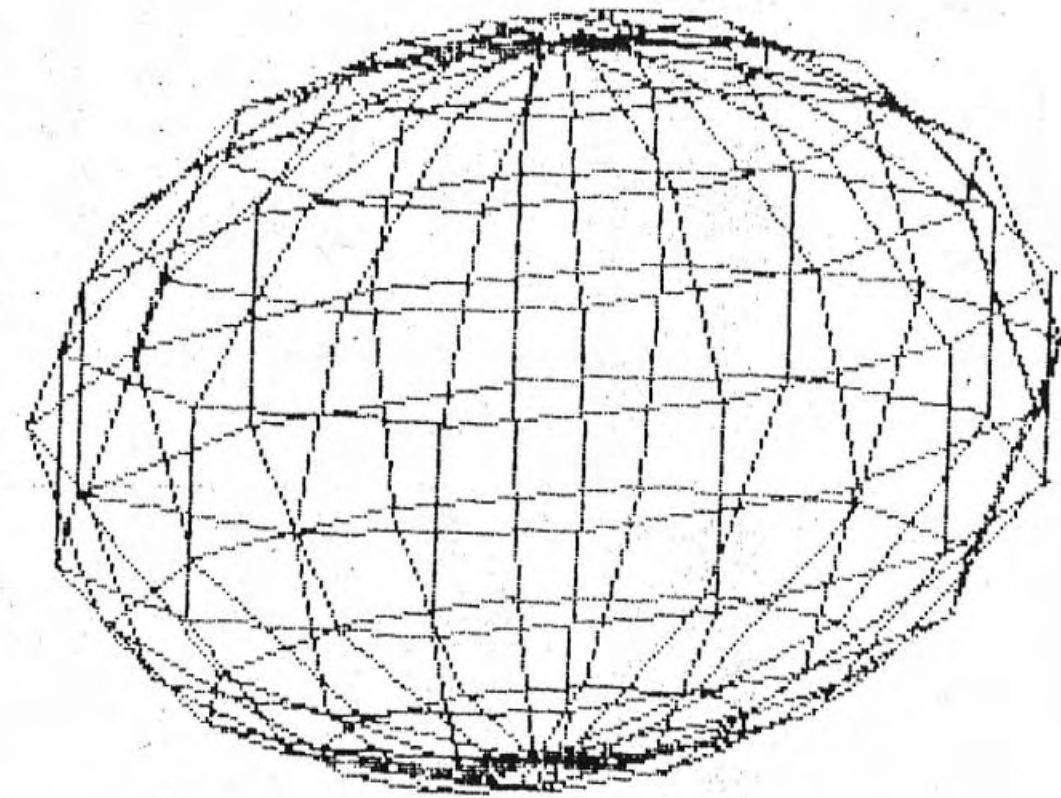


Fig. 10

2.º Seja a equação $r=\theta$ com $45^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$, $0^\circ \leq \varphi \leq 270^\circ$. Para $n_\varphi = n_\theta = 16$, obtemos a superfície da figura 11, em forma de concha.

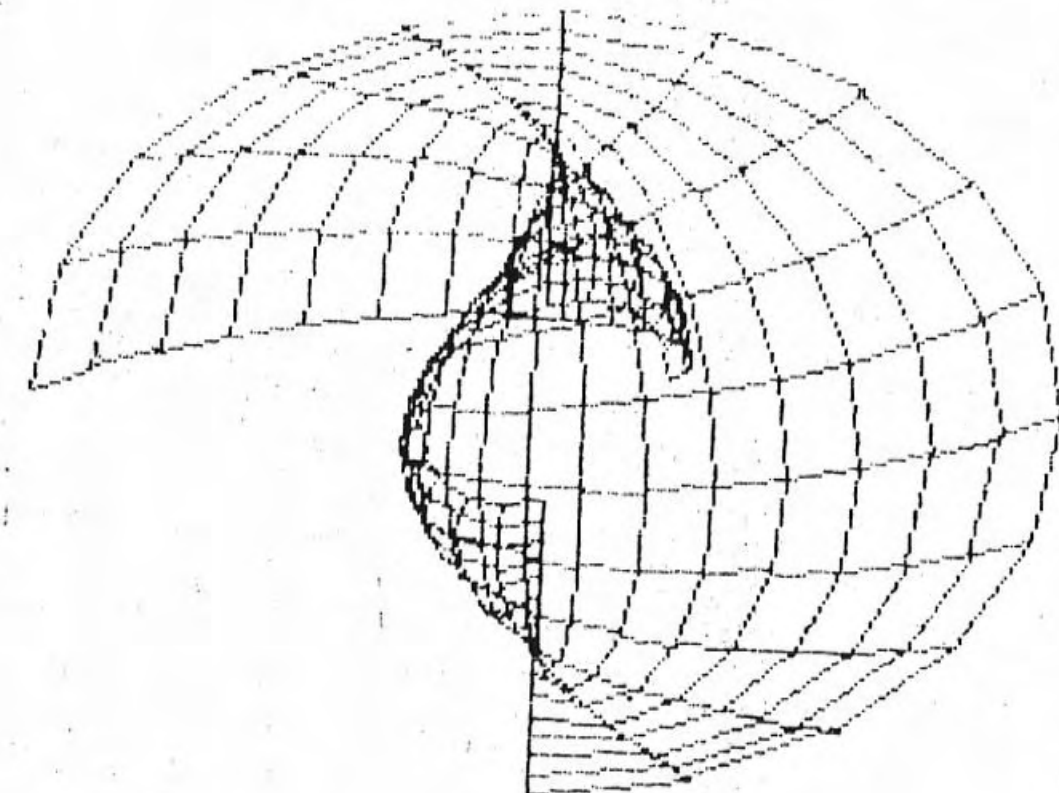


Fig. 11

3 Caso geral

1. Definição de uma superfície

Sejam u e v dois parâmetros quaisquer e sejam f , g e h três funções numéricas das variáveis u e v .

Consideremos $x=f(u,v)$, $y=g(u,v)$ e $z=h(u,v)$. Os três números assim definidos podem ser considerados como as coordenadas de um ponto do espaço.

Para u variando de u_{\min} e u_{\max} e v variando de v_{\min} a v_{\max} o conjunto dos pontos que têm como coordenadas $x=f(u,v)$, $y=g(u,v)$ e $z=h(u,v)$ constitui uma superfície.

2. Variáveis do programa

Os intervalos $[u_{\min}, u_{\max}]$ e $[v_{\min}, v_{\max}]$ são divididos respectivamente em $n_u - 1$ e $n_v - 1$ partes iguais.

Resulta daqui:

$$u_i = u_{\min} + (i-1) \left[\frac{u_{\max} - u_{\min}}{n_u - 1} \right]$$

para $1 \leq i \leq n_u$ e

$$v_j = v_{\min} + (j-1) \left[\frac{v_{\max} - v_{\min}}{n_v - 1} \right]$$

para $1 \leq j \leq n_v$.

Define-se assim, como nos casos precedentes, uma rede de pontos. Estes pontos têm como coordenadas:

$$\begin{aligned} x(i,j) &= f(u_i, v_j) \\ y(i,j) &= g(u_i, v_j) \\ z(i,j) &= h(u_i, v_j) \end{aligned}$$

Finalmente, o ponto de coordenadas $x(i,j)$, $y(i,j)$ e $z(i,j)$ será representado pelo ponto de coordenadas $w(i,j)$ e $q(i,j)$ no plano de projecção.

3. Programa

Devemos antes do mais definir as funções f , g e h nas linhas 10, 11 e 12.

O programa, ainda neste caso, é formado por cinco partes.

```
5 REM dados e calculo dos intervalos
10 DEF FN f(u,v) = (5+v*COSE(u/2)) * COS u
11 DEF FN g(u,v) = (5+v*COSE(u/2)) * SIN u
```

```
12 DEF FN h(u,v) = v * SIN (u/2)
20 INPUT "Umin (em graus): "; u_min
30 INPUT "Umax (em graus): "; u_max
40 INPUT "Vmin (em graus): "; v_min
50 INPUT "Vmax (em graus): "; v_max
60 INPUT "NU: "; nu
70 INPUT "NV: "; nv
80 DIM U(nu)
90 DIM V(nv)
100 FOR i=1 TO nu
110 LET U(i) = u_min + (i-1) * (u_max - u_min) / (nu-1)
120 NEXT i
130 FOR j=1 TO nv
140 LET V(j) = v_min + (j-1) * (v_max - v_min) / (nv-1)
150 NEXT j
155 REM coordenadas dos pontos da rede
160 DIM X(nu,nv)
170 DIM Y(nu,nv)
180 DIM Z(nu,nv)
190 FOR i=1 TO nu
200 FOR j=1 TO nv
210 LET X(i,j) = FN f(U(i),V(j))
220 LET Y(i,j) = FN g(U(i),V(j))
230 LET Z(i,j) = FN h(U(i),V(j))
240 NEXT j
250 NEXT i
255 REM calculo da imagem
260 DIM W(nu,nv)
270 DIM Q(nu,nv)
280 LET w_min = 10e30
290 LET q_min = 10e30
300 LET w_max = -10e30
310 LET q_max = -10e30
320 FOR i=1 TO nu
330 FOR j=1 TO nv
340 LET W(i,j) = X(i,j) + .375 * Y(i,j)
350 LET Q(i,j) = Z(i,j) + .375 * Y(i,j)
360 IF W(i,j) < w_min THEN LET w_min = W(i,j)
370 IF Q(i,j) < q_min THEN LET q_min = Q(i,j)
380 IF W(i,j) > w_max THEN LET w_max = W(i,j)
390 IF Q(i,j) > q_max THEN LET q_max = Q(i,j)
400 NEXT j
```

```

410 NEXT i
415 REM enquadramento da imagem
420 LET K1=2555/(wmax-wmin)
430 LET K2=175/(qmax-qmin)
440 LET L1=2555-K1#wmax
450 LET L2=175-K2*qmax
460 FOR i=1 TO nu
470 FOR j=1 TO nv
480 LET w(i,j)=K1#w(i,j)+L1
490 LET q(i,j)=K2*q(i,j)+L2
500 NEXT j
510 NEXT i
515 REM desenho
520 FOR i=1 TO nu
530 FOR j=1 TO nv
540 IF i<=nu-1 THEN PLOT w(i,j)
q(i,j): DRAW w(i+1,j)-w(i,j),q(
i+1,j)-q(i,j)
550 IF j<=nv-1 THEN PLOT w(i,j)
q(i,j): DRAW w(i,j+1)-w(i,j),q(
i,j+1)-q(i,j)
560 NEXT j
570 NEXT i

```

4. Exemplos

1.º O cilindro da figura 12 tem como representação $x = \cos u$, $y = \sin u$ e $z = v$.
escolhemos $u_{\min} = 0$, $u_{\max} = 6,28$, $v_{\min} = -4$ e $v_{\max} = 4$.

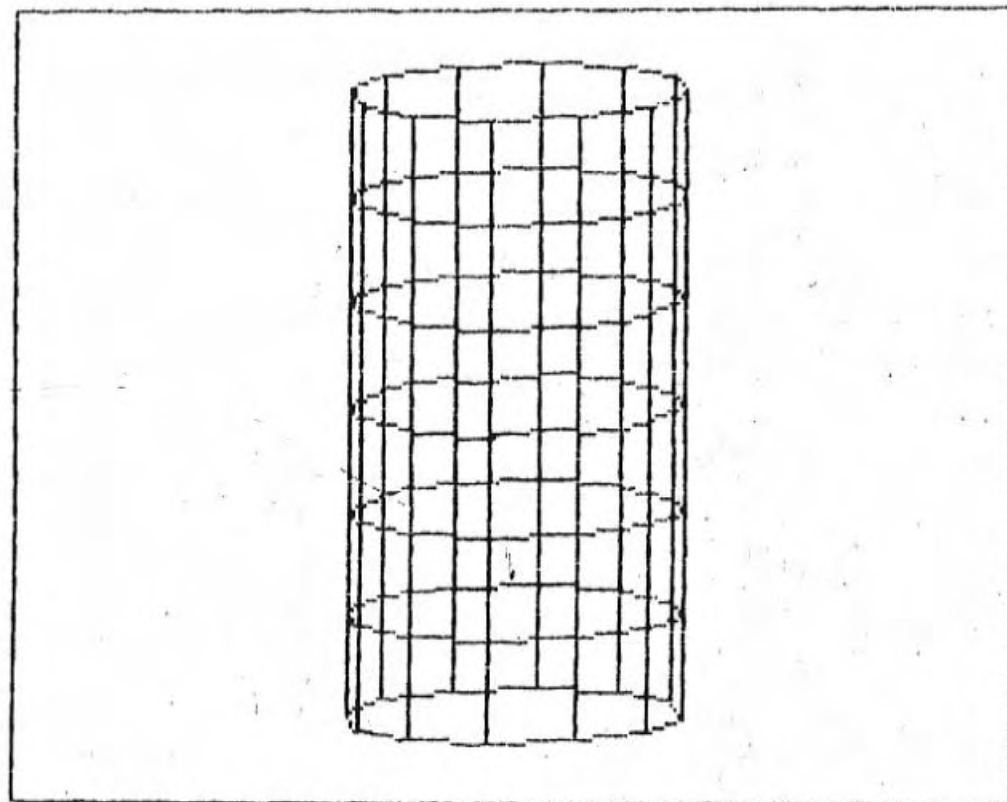


Fig. 12

2.º A figura 13 representa uma «fita de Moebius» de equações:

$$x = \left(5 + v \cos \frac{u}{2}\right) \cos u$$

$$y = \left(5 + v \cos \frac{u}{2}\right) \sin u$$

$$z = v \sin \frac{u}{2}$$

Escolheu-se $u_{\min} = 0$, $u_{\max} = 6,28$, $v_{\min} = -1$, $v_{\max} = 1$, $n_u = 30$ e $n_v = 2$.

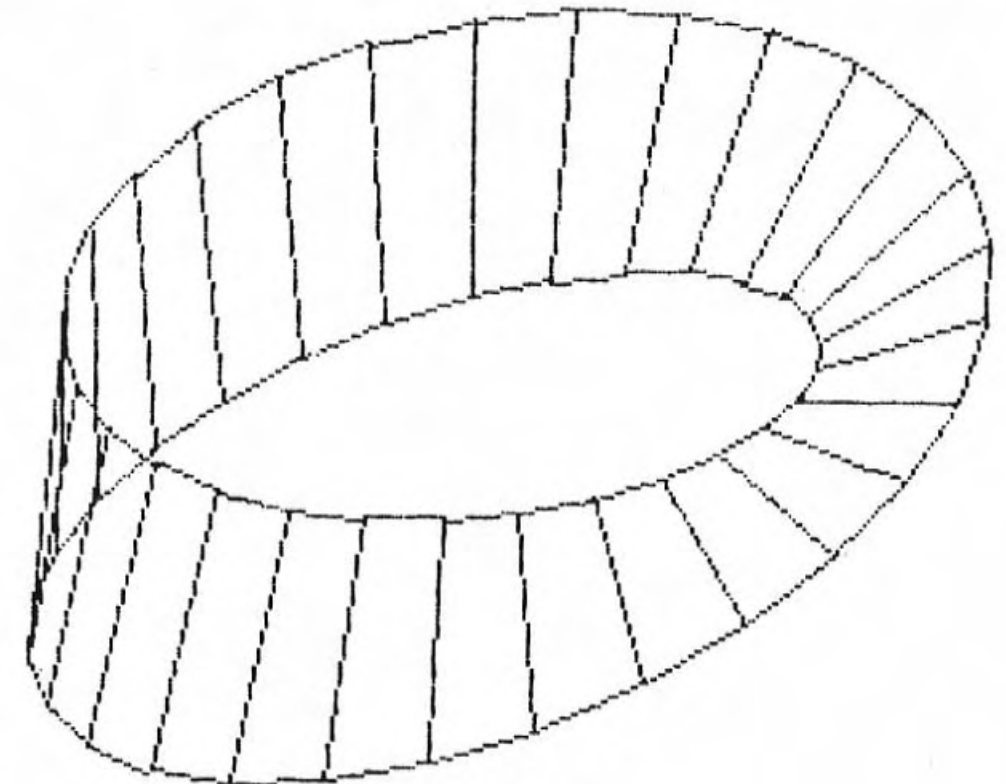


Fig. 13

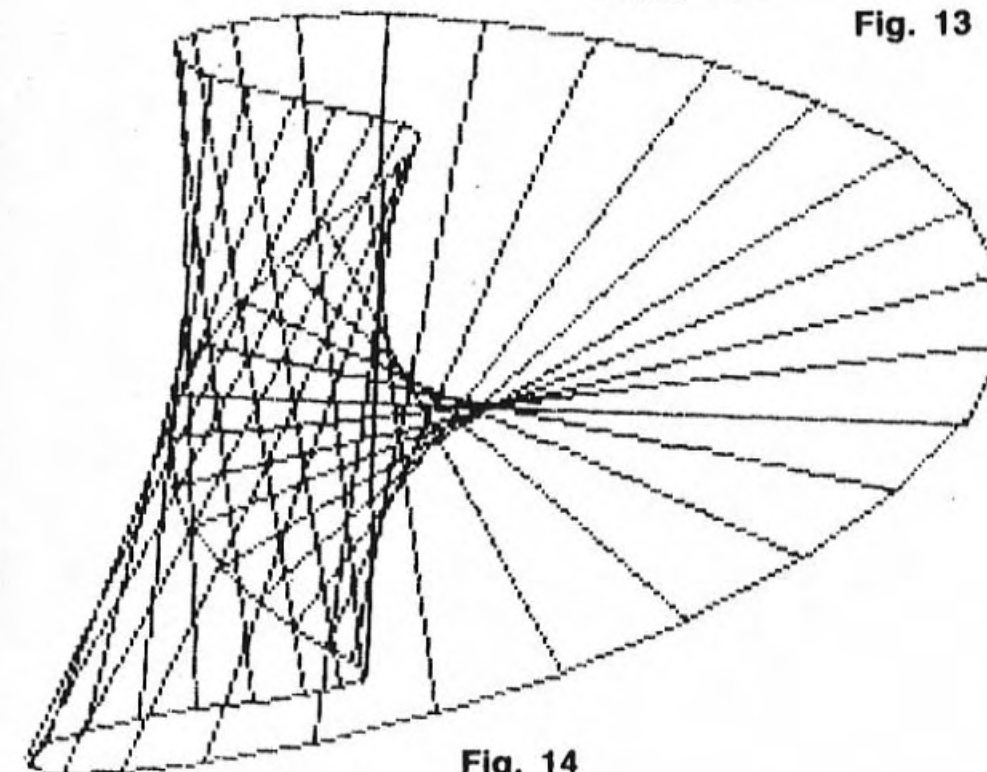


Fig. 14

3.º Substituindo o número 5 pelo número 0,5 nas equações que caracterizam a «fita de Moebius», obtemos a superfície da figura 14.

4.º Finalmente a figura 15 mostra um toro cuja representação é $x = (2 + \cos u) \cos v$, $y = (2 + \cos u) \sin v$, $z = \sin u$.

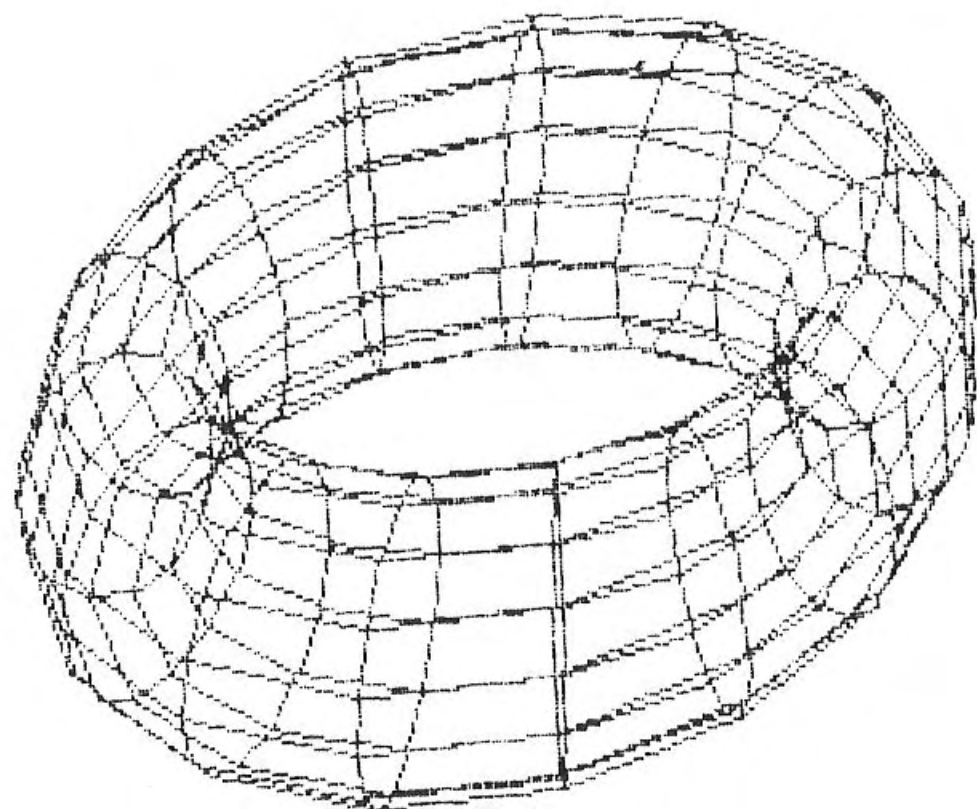


Fig. 15

5. Observações

1.º Consideremos $x = u$, $y = v$: obtemos $z = h(u, v) = h(x, y)$. Se bem que seja muito mais lento, este programa permite, portanto, obter todas as superfícies construídas recorrendo ao programa do capítulo 11, parágrafo 2.

2.º Do mesmo modo, podem obter-se as superfícies representadas por coordenadas cilíndricas. Basta considerar $x = u \cos v$, $y = u \sin v$ e $z = h(u, v)$.

A descoberta da perspectiva linear deve-se a dois florentinos, o arquitecto Filippo Brunelleschi (1377-1446) e o pintor Leon Battista Alberti (1404-1472).

Após esta invenção, o quadro passou a ser considerado como «uma janela aberta através da qual se vê o tema a pintar» (ver a figura 1).

A noção de raio visual permite em seguida associar a perspectiva linear a uma teoria física da visão.

A partir do século XVII, a perspectiva linear, considerada como moda científica de representação do espaço e «perspectiva verdadeira», viria a constituir o essencial no ensino académico em pintura e arquitectura.



Fig. 1. — Gravura de A. Dürer (1471-1528)

1 Definição e propriedades

1. O observador encontra-se em O_e ; escolhamos um plano de projecção P , o *quadro*. Seja M um ponto qualquer do espaço. Se a recta (OM) não for paralela ao plano P , ela encontra este plano em M' .

M' é a imagem de M na projecção cónica do centro O_e e plano P . A perspectiva linear é uma projecção cónica.

A figura 2 mostra como é possível obter a imagem de um cubo em projecção cónica.

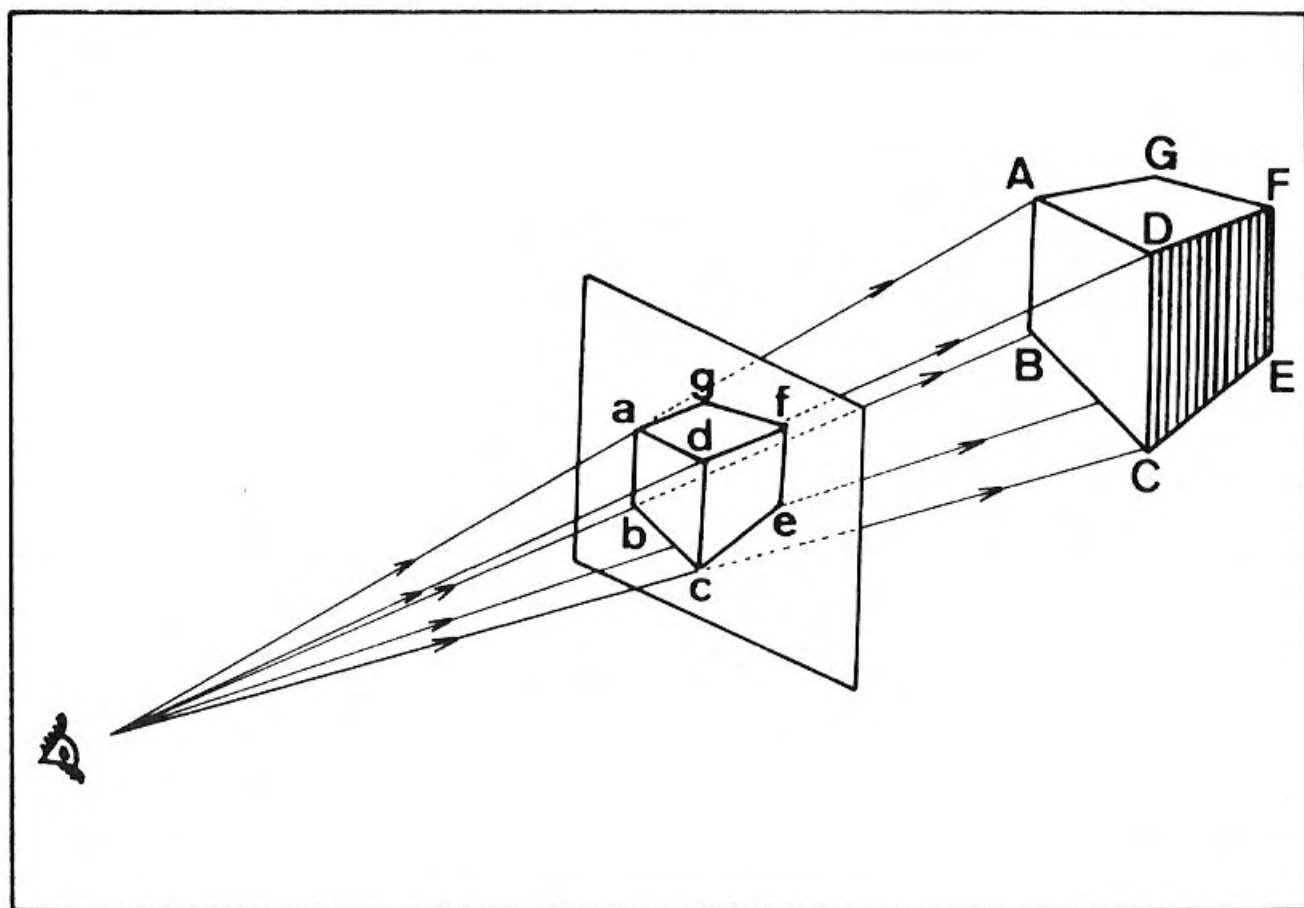


Fig. 2

Nesta figura, o plano de projecção está colocado entre o observador e o objecto, mas poderia encontrar-se atrás do objecto ou do observador.

Em qualquer caso, as dimensões da imagem podem ser muito superiores às do objecto.

2. Demonstra-se que uma projecção cónica mantém o alinhamento dos pontos: a imagem de uma recta é portanto uma recta.

Pelo contrário, o paralelismo não é conservado: as imagens de duas rectas paralelas não são, em geral, rectas paralelas.

Consideremos, por exemplo, a imagem de um cubo. Conforme a disposição do plano de projecção relativamente ao cubo, podem verificar-se três casos:

1.º Se o plano de projecção é paralelo a uma face do cubo, existe apenas um ponto de fuga. Na imagem, duas famílias de arestas são paralelas (figura 3a).

2.º Se o plano de projecção não é paralelo a qualquer das faces do cubo, mas é paralelo a uma família de arestas, verifica-se a existência de dois pontos de fuga (figura 3b).

3.º Se o plano de projecção não é paralelo a qualquer das arestas do cubo, existem então três pontos de fuga (figura 3c).

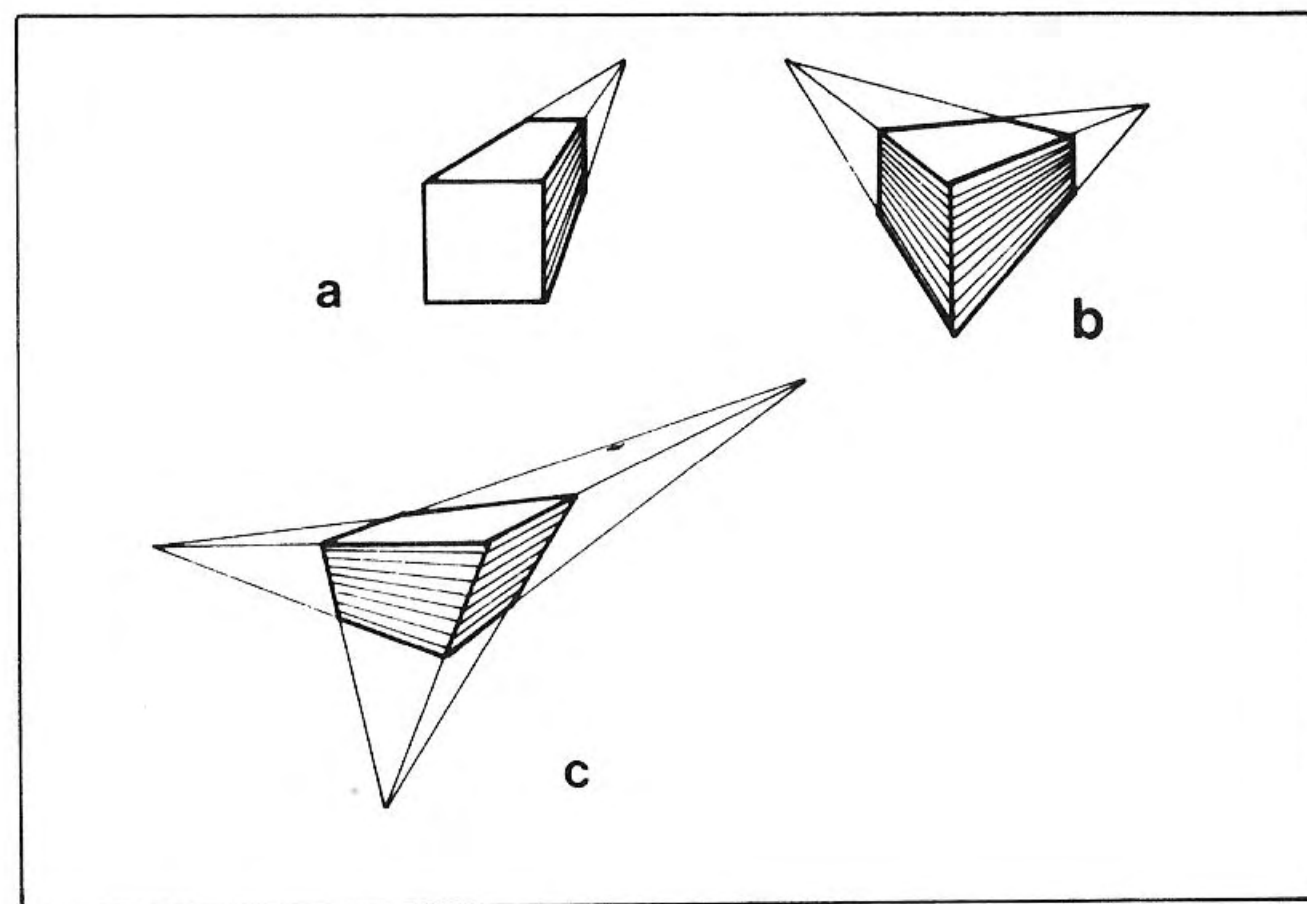


Fig. 3

2 Fórmulas fundamentais

As coordenadas de M' , imagem de M numa projecção cónica, exprimem-se simplesmente em função das de M desde que se escolha como referencial um sistema de coordenadas ligado à posição do observador.

1. Definições

O olho do observador está colocado em O_e e este ponto constitui a origem de um sistema ortonormado considerado «ligado ao observador».

Neste sistema O_eUVW , o eixo O_eV constitui a linha de vista, isto é, a direcção em que o observador olha.

O plano de projecção é escolhido de modo a ser perpendicular à linha de vista. Está colocado a uma distância d do observador.

2. Cálculos

Seja $M = (u, v, w)$ um ponto do espaço.

Se $v \neq 0$, M' existe e tem como coordenadas u', v' e w' no sistema O_euvw (figura 4).

Os triângulos O_eTH' e O_eKH são homotéticos:

$$\frac{\overline{O_eT}}{\overline{O_eK}} = \frac{\overline{TH'}}{\overline{KH}} = \frac{\overline{O_eH'}}{\overline{O_eH}}$$

Resulta daqui:

$$u' = u \times \frac{d}{v}$$

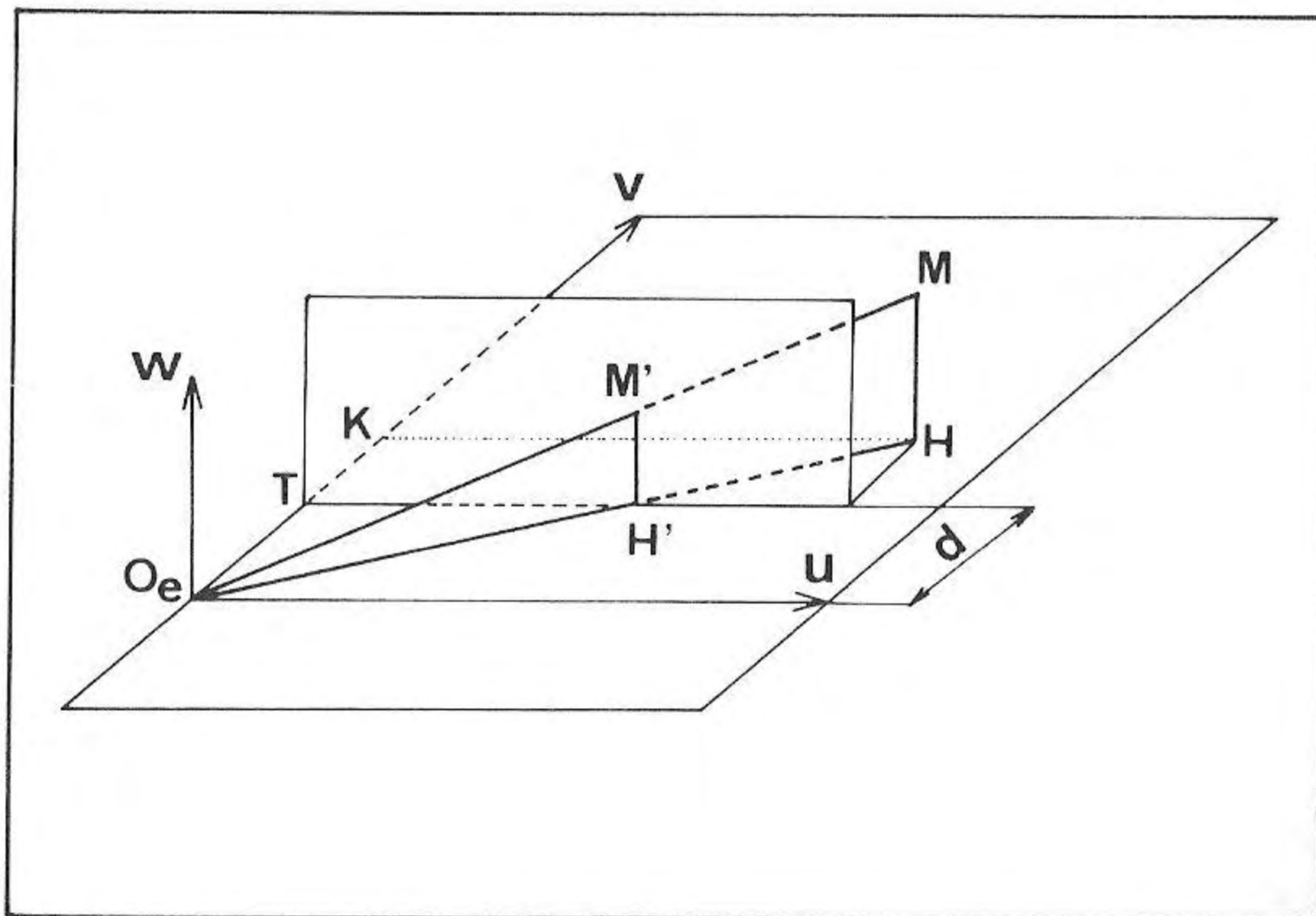


Fig. 4

Os triângulos $O_eH'M'$ e O_eHM são igualmente homotéticos:

$$\frac{\overline{M'H'}}{\overline{MH}} = \frac{\overline{O_eH'}}{\overline{O_eH}}$$

Donde resulta:

$$w' = w \times \frac{d}{v}$$

3. Conclusões

Seja M um ponto de coordenadas u, v e w no sistema ligado ao observador.

Para $v \neq 0$, M tem como imagem M' , cujas coordenadas, neste sistema, são $u' = u \frac{d}{v}$ e $w' = w \frac{d}{v}$.

Resulta daqui que, no plano de projecção, se podem escolher u' e v' como coordenadas de M' .

3 Cálculo da imagem de um objecto

Este cálculo será efectuado em várias etapas, consistindo o essencial do cálculo em mudar de referencial.

Para tal, utilizar-se-á o método já usado no capítulo 5, parágrafo 5.2. Note-se que este método não é o único, existindo outros.

1. Descrição do objecto

Escolhe-se um sistema ortonormado, o sistema de definição, relativamente ao qual se calcularão as coordenadas dos diferentes pontos característicos do objecto a representar.

2. Escolha da posição do observador

Este encontra-se colocado em O_2 , de coordenadas x_0, y_0, z_0 relativamente ao referencial de definição $Oxyz$.

3. Escolha da linha de vista

O observador vê um ponto P_v de coordenadas x_v, y_v e z_v relativamente ao referencial de definição.

A linha de vista é a recta $O_2 P_v$.

Esta recta só existe se $P_v \neq O_2$: deveremos, portanto, ter $x_v \neq x_0$, $y_v \neq y_0$.

Nos programas mais «profissionais», define-se a linha de vista recorrendo a três ângulos. Consultar a obra de J. L. Vuldy indicada na bibliografia.

4. Escolha do plano de projecção

Este será colocado entre o observador e o objecto, perpendicularmente à linha de vista, a uma distância d do observador.

No referencial ligado ao observador, devemos ter portanto $d > 0$.

5. Mudança de sistema

O sistema de definição $Oxyz$ deve ser substituído pelo sistema ligado ao observador, O_2uvw .

Isto equivale a determinar três vectores unitários \vec{i}_2 , \vec{j}_2 e \vec{k}_2 ortogonais entre si e formando uma base directa.

O eixo O_2v deve apontar para o ponto observado P_v : deveremos, portanto, escolher o vector unitário da recta $O_2 P_v$ como vector \vec{j}_2 .

Designemos por d_1 a distância que separa o observador do ponto visado:

$$d_1 = \sqrt{(x_v - x_0)^2 + (y_v - y_0)^2 + (z_v - z_0)^2}$$

Como $P_v \neq O_2$, temos $d_1 \neq 0$; consideremos portanto:

$$a = \frac{x_v - x_0}{d_1}, \quad b = \frac{y_v - y_0}{d_1}, \quad c = \frac{z_v - z_0}{d_1}$$

Dado que $\vec{O_2 P_v} = (x_v - x_0, y_v - y_0, z_v - z_0)$, $\vec{j}_2 = (a, b, c)$.

Seja agora $d_2 = \sqrt{a^2 + b^2}$ se $x_v \neq x_0$ ou seja $y_v \neq y_0$, teremos $d_2 \neq 0$.

O vector $\vec{i}_2 = \left(\frac{b}{d_2}, -\frac{a}{d_2}, 0\right)$ existe portanto, é unitário e ortogonal a \vec{j}_2 .

Para terminar, consideremos $\vec{k}_2 = \vec{i}_2 \wedge \vec{j}_2$: obtemos então

$$\vec{k}_2 = \left(-\frac{ac}{d_2}, -\frac{bc}{d_2}, 1\right)$$

O sistema $(O_2, \vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$ constitui o referencial O_2uvw procurado.

6. Cálculo das novas coordenadas

Seja P um ponto de coordenadas x, y, z no sistema $Oxyz$ e de coordenadas u, v, w no sistema O_2uvw .

As fórmulas do capítulo 2, parágrafo 6.2 permitem escrever:

$$\begin{aligned} u &= \frac{b}{d_2} (x - x_0) - \frac{a}{d_2} (y - y_0) \\ v &= a (x - x_0) + b (y - y_0) + c (z - z_0) \\ w &= -\frac{ac}{d_2} (x - x_0) - \frac{bc}{d_2} (y - y_0) + d_2 (z - z_0) \end{aligned}$$

7. Coordenadas da imagem

Seja $P' = (u', v', w')$ a imagem de P . O plano de projecção é paralelo ao plano O_2uw . u' e w' são, portanto, as coordenadas de P' num referencial ortonormado deste plano de projecção.

Aplicam-se então as fórmulas do parágrafo 2.3.

4 Corte da imagem

O campo visual do observador constitui a pirâmide de visão. A figura 5, extraída de uma gravura de A. Bosse (1602-1676), permite compreender como é definida esta pirâmide.

Os objectos situados fora desta pirâmide não são evidentemente vistos pelo observador.

Os objectos colocados parcialmente fora desta pirâmide só são vistos em parte, tornando-se necessário proceder àquilo a que chamaremos corte da imagem.

Esta operação necessita de um tempo de cálculo extremamente importante, pelo que nos contentaremos com indicar o seu princípio, baseado no algoritmo de Cohen-Sutherland.

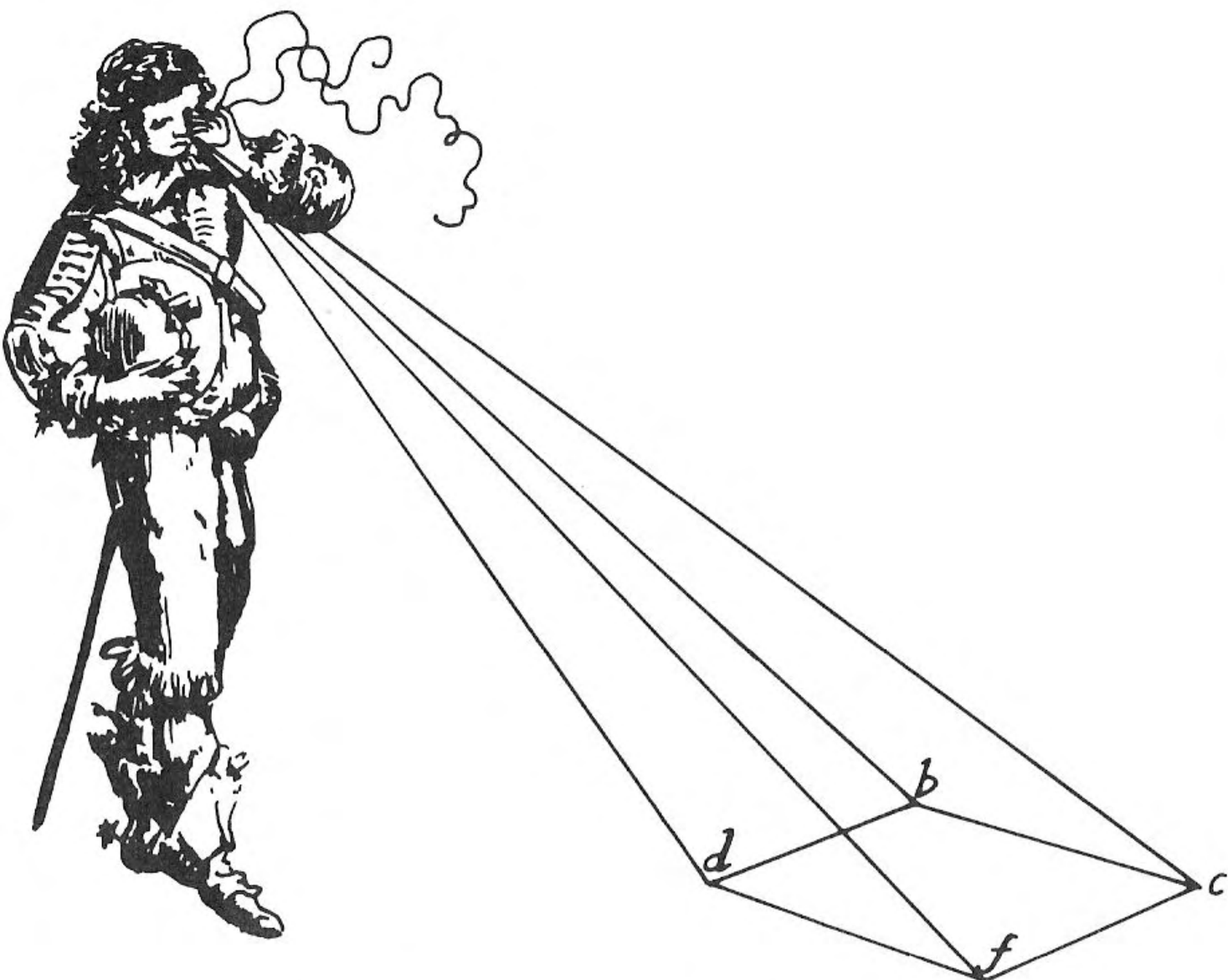


Fig. 5. — Segundo gravura de A. Bosse. Século XVII

1. Equações da pirâmide de visão

Sejam h a altura do visor, L a sua largura e d a distância do observador ao plano de projecção.

Seja O_euvw o referencial ligado ao observador e seja $M = (u, v, w)$ um ponto qualquer do espaço.

Por M passa um plano paralelo ao plano de projecção. Este plano corta a pirâmide de visão em A, B, C e D (figura 6).

Os planos O_eAB, O_eCD, O_eAD e O_eBC têm, respectivamente, por equações:

$$\begin{aligned} 0 u + h v - 2d w &= 0 \\ 0 u - h v - 2d w &= 0 \\ 1 u - 2d v + 0 w &= 0 \\ 1 u + 2d v + 0 w &= 0 \end{aligned}$$

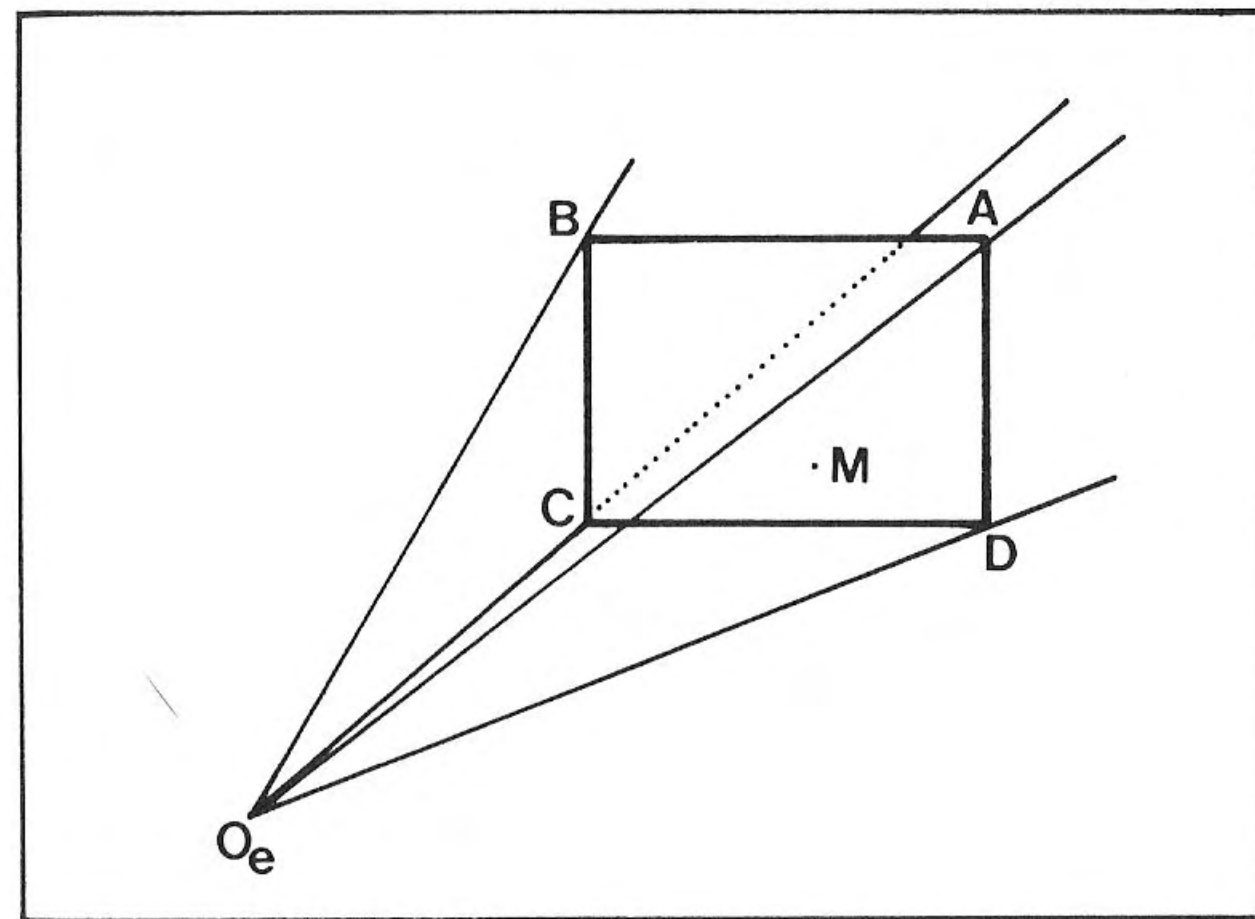


Fig. 6

2. Os indicadores de posição

A cada ponto $M = (u, v, w)$ pode associar-se um indicador de posição: trata-se de um código binário de quatro casas que permite definir a posição de M relativamente aos planos O_eAB, O_eCD, O_eAD e O_eBC .

Para determinar este indicador, procede-se do seguinte modo:

- O indicador é inicializado para 0000;
- Se $w \geq \frac{h v}{2 d}$, M encontra-se acima do plano O_eAB e coloca-se 1 na primeira casa do código;
- Se $w \leq -\frac{h v}{2 d}$, M encontra-se abaixo do plano O_eCD e coloca-se 1 na segunda casa do código;
- Se $u \geq \frac{2 v d}{l}$, M encontra-se à direita do plano O_eAD e coloca-se 1 na terceira casa do código;
- Finalmente, se $u \leq -\frac{2 v d}{l}$, M está à esquerda do plano O_eBC e coloca-se 1 na última casa do código.

Obtemos assim nove indicadores de posição possíveis, um para cada uma das nove regiões do espaço onde se pode encontrar o ponto M (figura 7).

| | | |
|---------|---------|---------|
| 1 0 0 1 | 1 0 0 0 | 1 0 1 0 |
| B | | A |
| 0 0 0 1 | 0 0 0 0 | 0 0 1 0 |
| 0 1 0 1 | 0 1 0 0 | 0 1 1 0 |
| C | | D |

Fig. 7

3. Visibilidade de uma aresta

Seja M_1M_2 uma aresta qualquer do poliedro a representar.

Para qualquer ponto M da recta (M_1M_2) existe um número k tal que $\vec{M_1M} = k \vec{M_1M_2}$. Esta igualdade constitui a equação vectorial da recta (ver o capítulo 4).

Se $0 \leq k \leq 1$, M pertence ao segmento $[M_1, M_2]$.

Podemos utilizar esta propriedade para determinar a parte visível da aresta $[M_1M_2]$.

A recta (M_1M_2) corta as rectas (AB), (BC), (CD) e (DA) em pelo menos dois pontos ou em quatro no máximo.

Quando existem os quatro, designaremos estes pontos por l_1, l_2, l_3 e l_4 .

As equações das rectas (M_1M_2) , (AB), (BC), (CD) e (DA) podem facilmente ser determinadas. Permitem calcular as coordenadas dos pontos l_1, l_2, l_3 e l_4 .

A equação vectorial da recta (M_1M_2) permite em seguida associar os números k_1, k_2, k_3 e k_4 a cada um dos pontos.

Conforme o valor dos indicadores de posição de M_1 e de M_2 , ser-nos-á necessário distinguir três casos.

1.º caso:

Os dois indicadores valem 0000 cada um (figura 8).

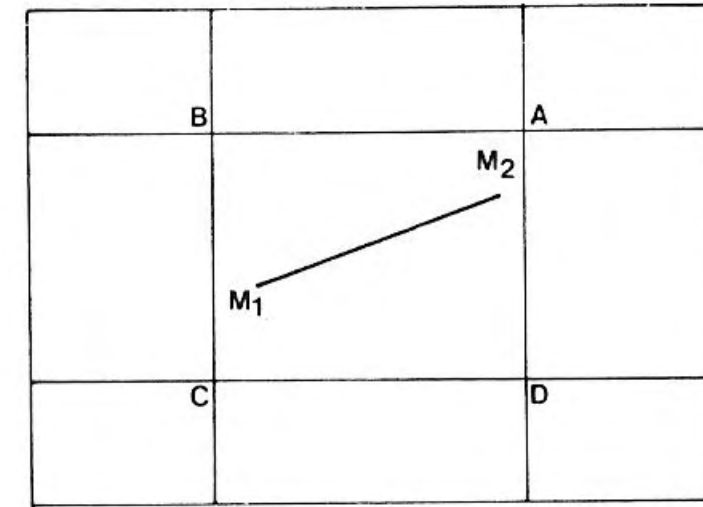


Fig. 8. — M_1 e M_2 são visíveis. Desenha-se a aresta M_1M_2

2.º caso:

Só um indicador é igual a 0000, por exemplo o de M_1 .

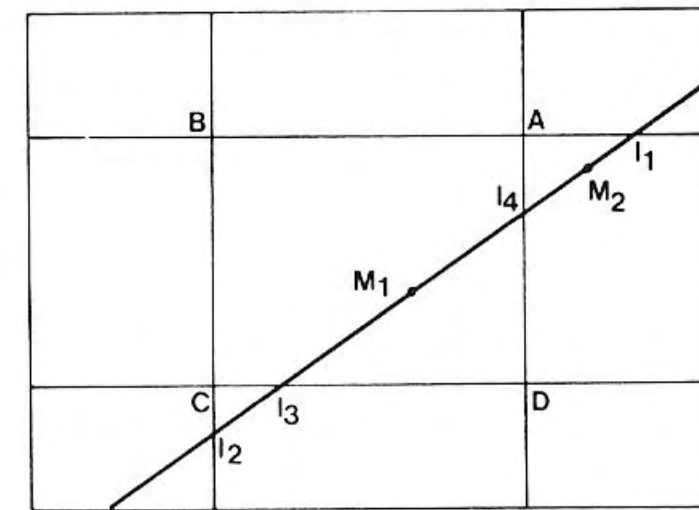


Fig. 9. — Só k_4 está compreendido entre 0 e 1. Desenha-se M_1l_4

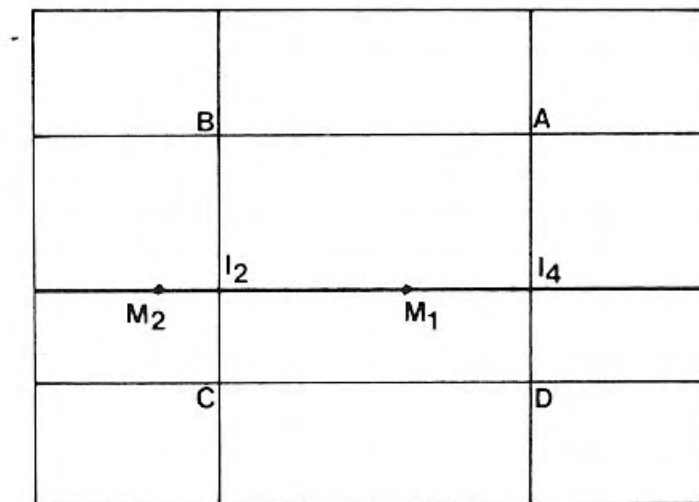


Fig. 10. — Só k_2 está compreendido entre 0 e 1. Desenha-se M_1l_2

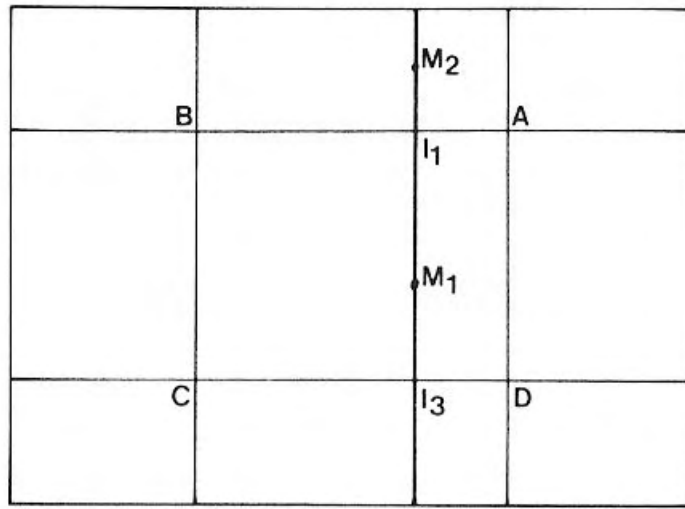


Fig. 11. — Só k_1 está compreendido entre 0 e 1. Desenha-se M_1I_1

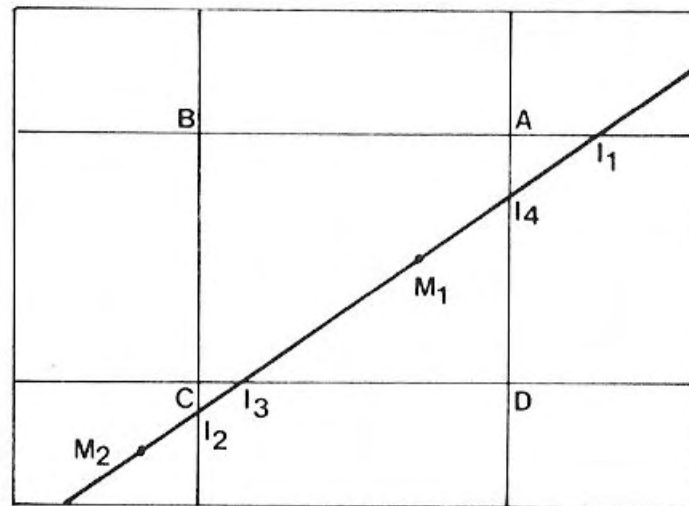


Fig. 12. — k_2 e k_3 estão compreendidos entre 0 e 1. k_3 é menor do que k_2 .
Desenha-se M_1I_3

3.º caso:
Nenhum indicador é igual a 0000.

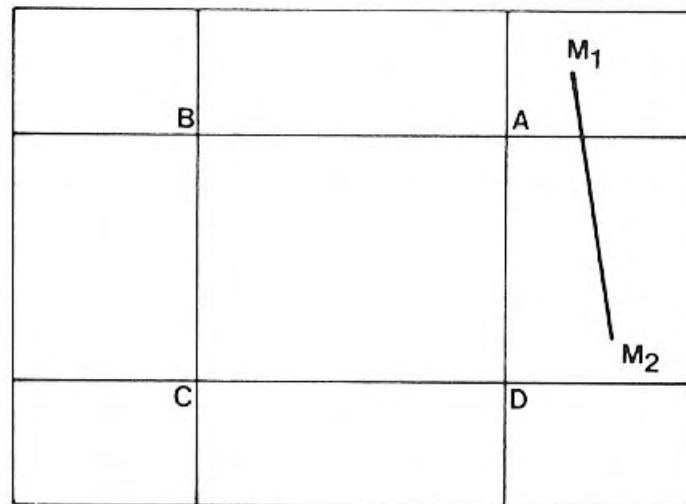


Fig. 13. — Só os 2 indicadores possuem um 1 na mesma casa, a aresta $[M_1M_2]$ não é visível

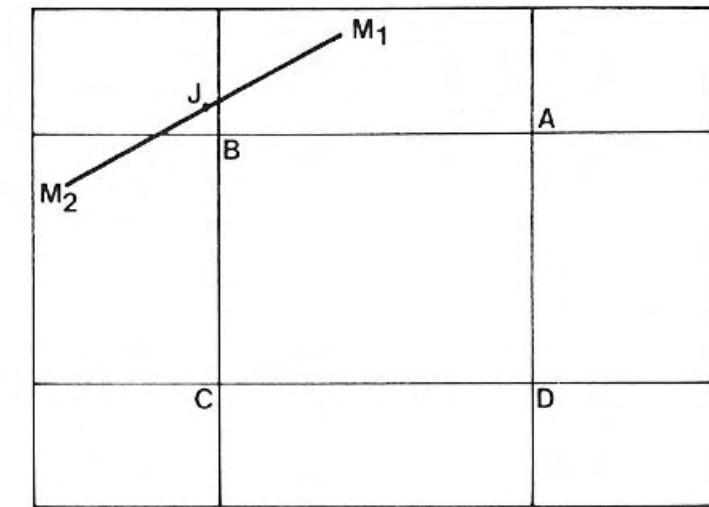


Fig. 14. — Se os 2 indicadores não possuem um 1 na mesma posição, substitui-se a aresta $[M_1M_2]$ pelas duas arestas $[M_1J]$ e $[JM_2]$, designando J o meio de $[M_1M_2]$

Ao fim de algumas etapas, cair-se-á necessariamente num destes casos.

5 Programa simplificado

Representemos, em projecção cónica, a casa da figura 15. Utilizaremos um programa englobando sete partes.

Este programa é considerado simplificado na medida em que foi evitado o recurso a um procedimento de corte.

1. Descrição da casa

Numeremos os vértices do modo indicado na figura 16 e calculemos as coordenadas destes vértices relativamente ao referencial Oxyz. Obtemos a tabela seguinte:

| Número | x | y | z |
|--------|-----|-----|----|
| 1 | -50 | -40 | 0 |
| 2 | 50 | -40 | 0 |
| 3 | 50 | 40 | 0 |
| 4 | -50 | 40 | 0 |
| 5 | -50 | -40 | 30 |
| 6 | 50 | -40 | 30 |
| 7 | 50 | 40 | 30 |
| 8 | -50 | 40 | 30 |
| 9 | -50 | 0 | 80 |
| 10 | 50 | 0 | 80 |
| 11 | 50 | -10 | 0 |
| 12 | 50 | -10 | 20 |
| 13 | 50 | 10 | 20 |
| 14 | 50 | 10 | 0 |

O conteúdo desta tabela está guardado numa instrução DATA.

```

100 DATA -5, -4, 5, 0, -4, 5, 0, 4, 5, -
110 DATA 5, 0, 0, 0, 0, 0, -4, 5, 0, -4, 5, 4,
120 DATA 5, 0, 0, 0, 0, 0, -4, 5, 0, -4, 5, 4,
130 DIM X(14)
140 DIM Y(14)
150 DIM Z(14)
160 FOR I=1 TO 14
170 READ X(I), Y(I), Z(I)
180 NEXT I

```

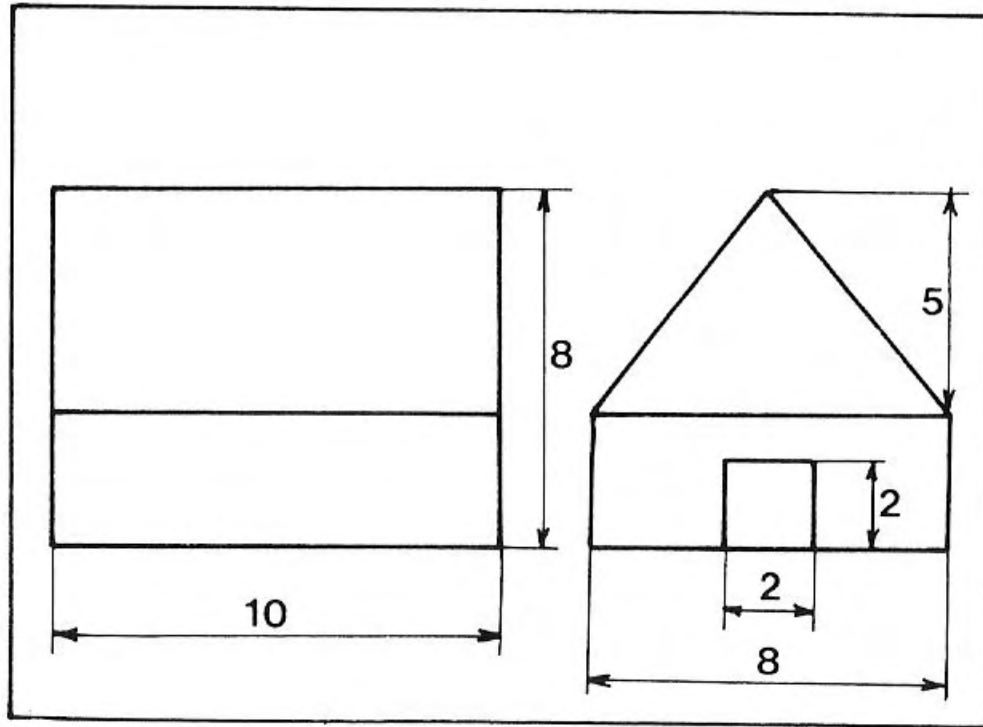


Fig. 15

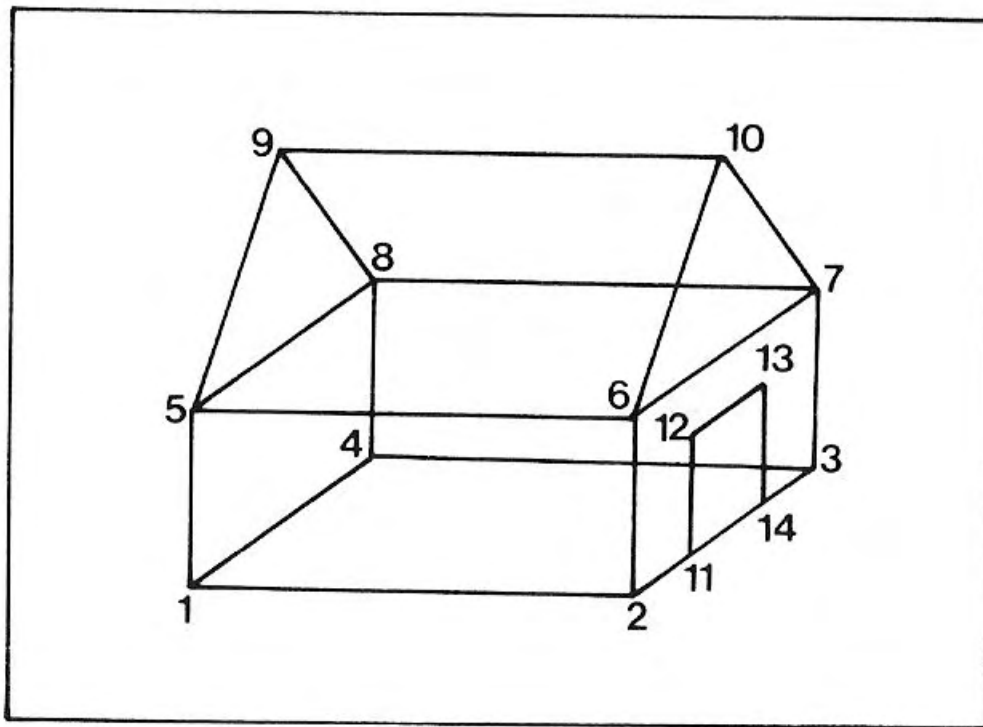


Fig. 16

2. Ponto observado e posição do observador

Escolheremos a origem do sistema de coordenadas como ponto observado: teremos, portanto

$$x_v = y_v = z_v = 0$$

Definiremos um valor mínimo d_{\min} à distância que separa o observador daquele ponto: uma vez e meia a duas vezes a dimensão máxima do objecto a representar. Isto permite evitar a utilização do procedimento de corte.

```

75 REM distancia minima
85 LET dmin=10
85 REM posicao do observador
90 INPUT "INDIQUE A ABCISSA DA
POSICAO OCUPADA PELO OBSERVA
COR: " / X0
100 INPUT "INDIQUE A ORDENADA D
A POSICAO OCUPADA PELO OBSERVA
COR: " / Y0
110 INPUT "INDIQUE A ALTITUDE D
A POSICAO OCUPADA PELO OBSERVA
COR: " / Z0
115 REM coordenadas do ponto co
nsiderado
125 LET Xv=5
135 LET Yv=5
145 LET Zv=5
155 LET d1=SQRT ((Xv-X0)*(Xv-X0)
+ (Yv-Y0)*(Yv-Y0) + (Zv-Z0)*(Zv-Z0)
)
160 IF d1 < dmin THEN PRINT "DEMA
SIADO PERTO": GO TO 9999

```

3. Distância observador/plano de projecção

Esta distância não tem qualquer influência sobre a forma da imagem, mas apenas sobre as suas dimensões.

Considerá-la-emos igual a 1.

```

165 REM distancia do visor
170 LET de=1

```

4. Mudança de sistema

Calculamos as coordenadas u, v, w de cada vértice no sistema ligado ao observador.

```
175 REM mudança de referencial
180 LET a=(xv-xo)/d1
190 LET b=(yv-yo)/d1
200 LET c=(zv-zo)/d1
210 LET d2=300 (a#a+b#b)
220 IF d2=0 THEN PRINT "O OBSER
VADOR NAO PODE ESTAR AQUI": GO T
O 9999
230 REM novas coordenadas
240 DIM u(14)
250 DIM v(14)
260 DIM w(14)
270 FOR i=1 TO 14
280 LET u(i)=b*(x(i)-xo)/d2-a*(
v(i)-yo)/d2
290 LET v(i)=a*(x(i)-xo)+b*(y(i)
-zo)+c*(z(i)-zo)
300 LET w(i)=-a#c*(x(i)-xo)/d2-
b#c*(y(i)-yo)/d2+d*(z(i)-zo)
310 NEXT i
```

5. Cálculo da imagem

As variáveis x, y e z podem ser reutilizadas. Designaremos, portanto, por x e y as coordenadas de cada vértice no plano de projecção. Calculamos x e y graças às fórmulas do parágrafo 2.3.

```
325 REM calculo da imagem
330 LET xmin=10000
340 LET ymin=10000
350 LET xmax=-10000
360 LET ymax=-10000
370 FOR i=1 TO 14
380 LET x(i)=u(i)#de/v(i)
390 LET y(i)=w(i)#de/v(i)
400 IF x(i)>xmax THEN LET xmax=
x(i)
410 IF y(i)>ymax THEN LET ymax=
y(i)
420 IF x(i)<xmin THEN LET xmin=
x(i)
430 IF y(i)<ymin THEN LET ymin=
y(i)
440 NEXT i
```

6. Enquadramento da imagem

Actuamos em dois tempos:

1.º A cada ponto (x, y) da imagem é associado, pelo procedimento do capítulo 3, um ponto de coordenadas k_1x+l_1 e k_2y+l_2 .

Os parâmetros k_1 , k_2 , l_1 e l_2 são calculados de modo a inscrever a imagem num rectângulo de 150×250 .

Designamos ainda por x e y as coordenadas obtidas.

2.º Quanto mais afastado estiver o observador do objecto, mais reduzidas são as dimensões da imagem.

Para ter em conta este facto, associamos ao ponto (x, y) o ponto que tem como coordenadas:

$$x \times \frac{d_{\min}}{d_1}$$

e

$$y \times \frac{d_{\min}}{d_1}$$

```
425 REM enquadramento da imagem
430 LET g=(ymax-ymin)/(xmax-xmi
n)
440 IF g>.6 THEN LET h=150: LET
l=h/g
450 IF g<=.6 THEN LET l=250: LE
T h=l*g
460 LET k1=l/(xmax-xmin)
470 LET k2=h/(ymax-ymin)
480 LET l1=l/2-k1*xmax
490 LET l2=h/2-k2*ymax
500 FOR i=1 TO 14
510 LET x(i)=dmin/d1*(k1*x(i)+l
1)
520 LET y(i)=dmin/d1*(k2*y(i)+l
2)
530 NEXT i
```

7. Desenho da perspectiva

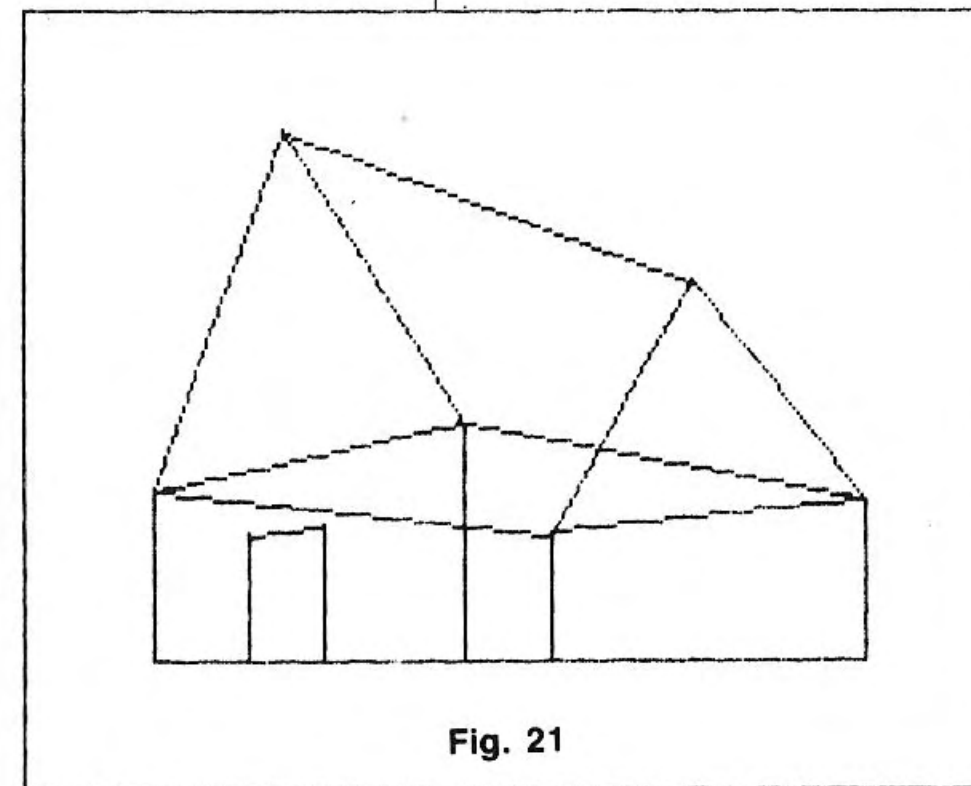
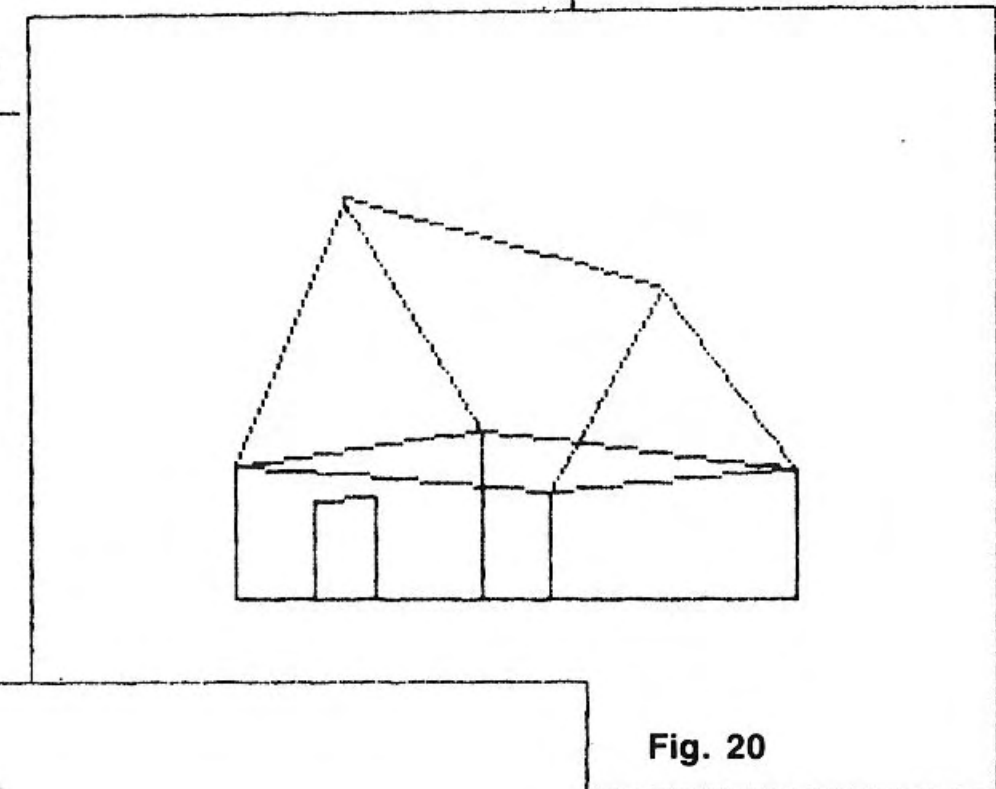
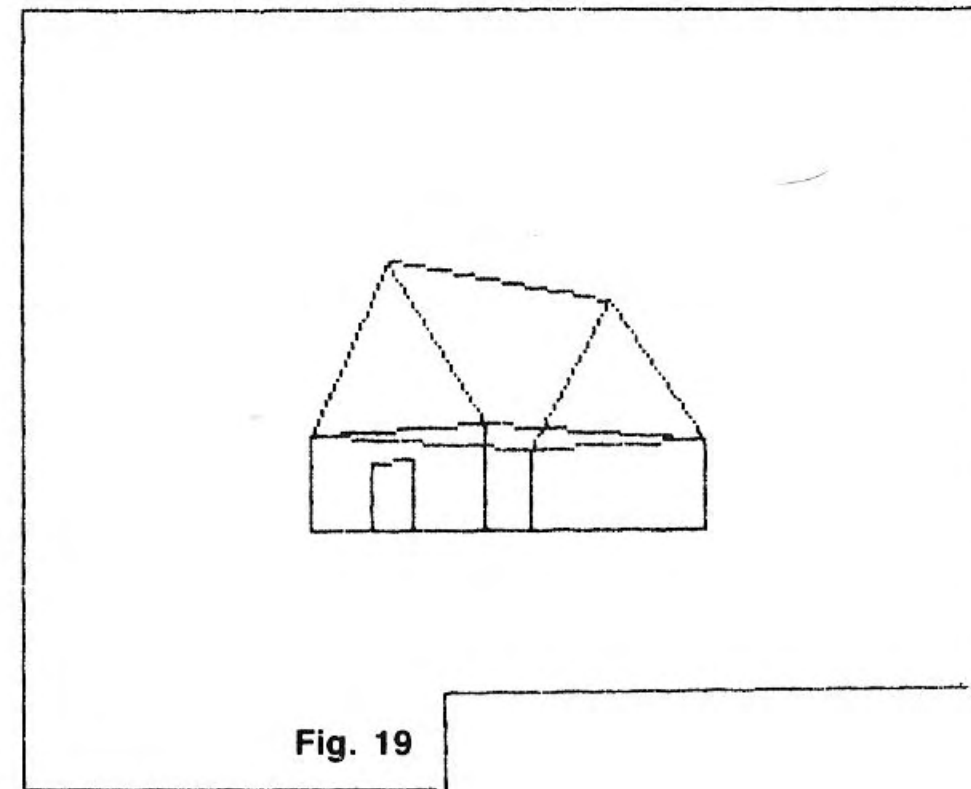
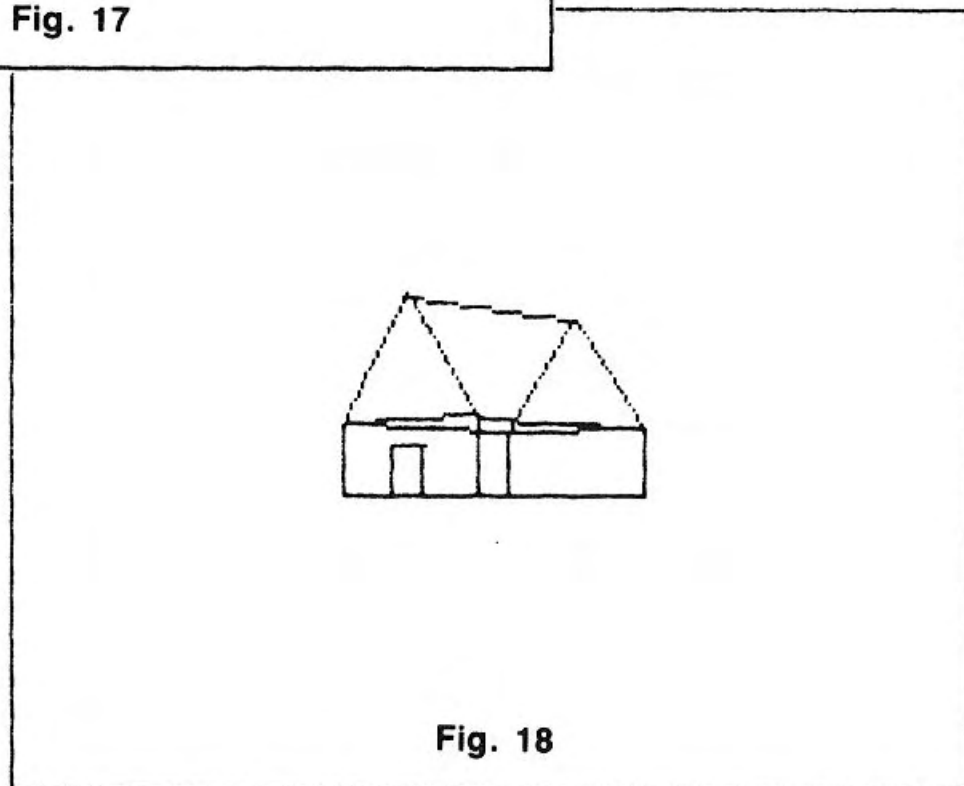
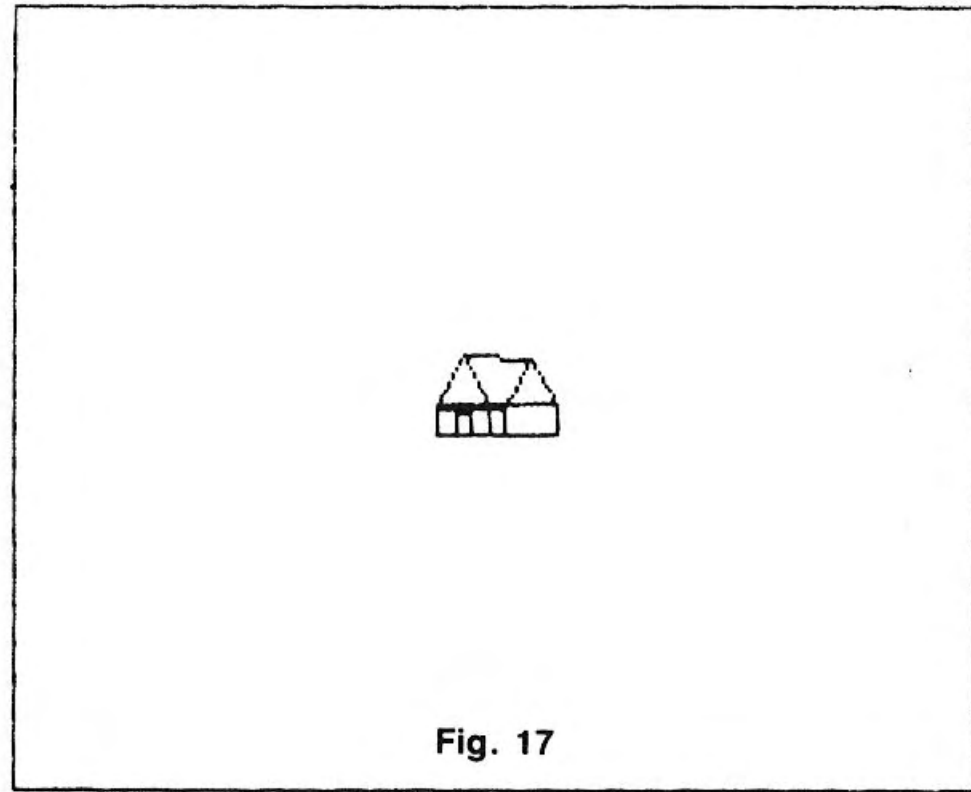
```
535 REM instrucoes de desenho
540 DATA 1,2,2,3,3,4,4,1,1,5,2,
5,3,7,4,8,5,6,6,7,7,8,8,9,9,
10,10,11,12,13,13,
14
550 FOR i=1 TO 20
560 READ s,t
570 PLOT 128+x(s),68+y(s)
580 DRAW x(t)-x(s),y(t)-y(s)
590 NEXT i
```

8. Condições a respeitar para obter uma imagem

O método escolhido para efectuar uma mudança de referencial obriga a não usar $x_v = x_o$ e $y_v = y_o$ simultaneamente. Se esta condição for respeitada, o parâmetro d_2 da linha 210 não é nulo e obtemos uma imagem.

9. Algumas perspectivas obtidas

1.º As figuras 17, 18, 19, 20 e 21 mostram a casa tal como é vista por um observador que se aproxime em linha recta.



2.º As figuras 22, 23, 24 e 25 mostram a casa vista a partir de posições bastante diferentes entre si.

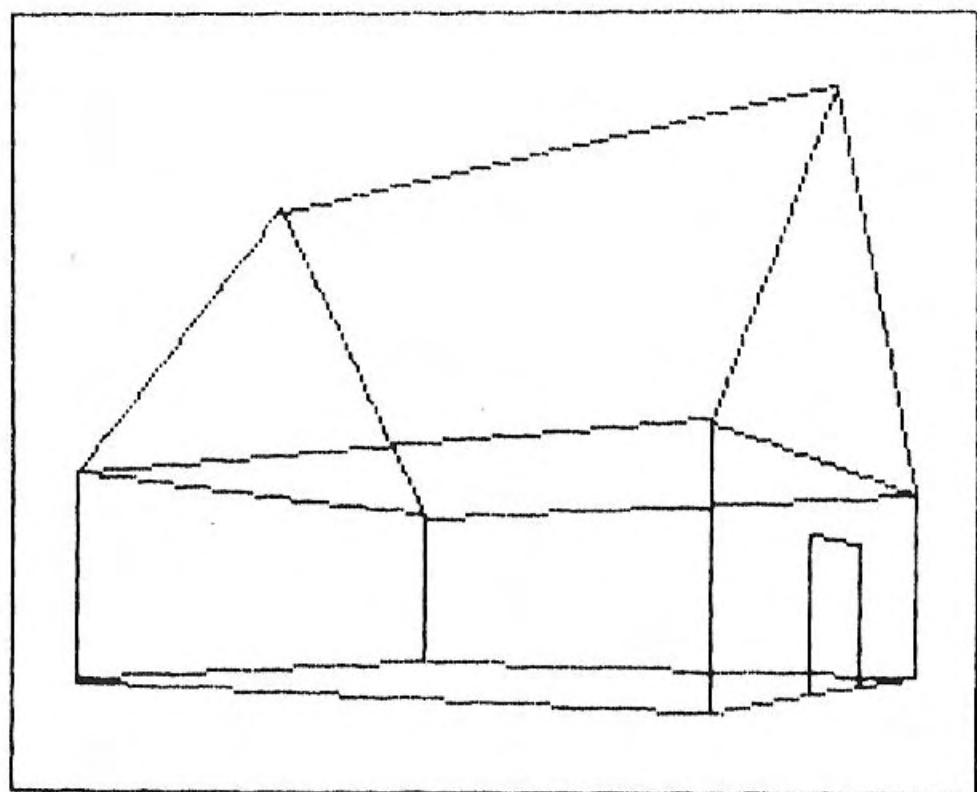


Fig. 22

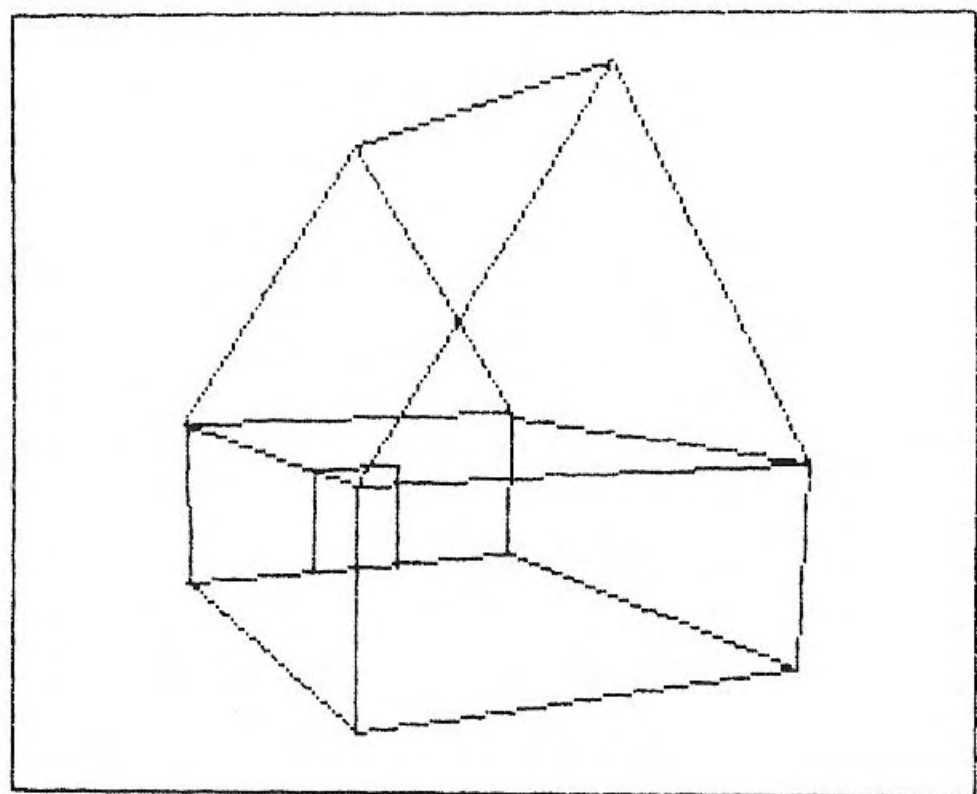


Fig. 23

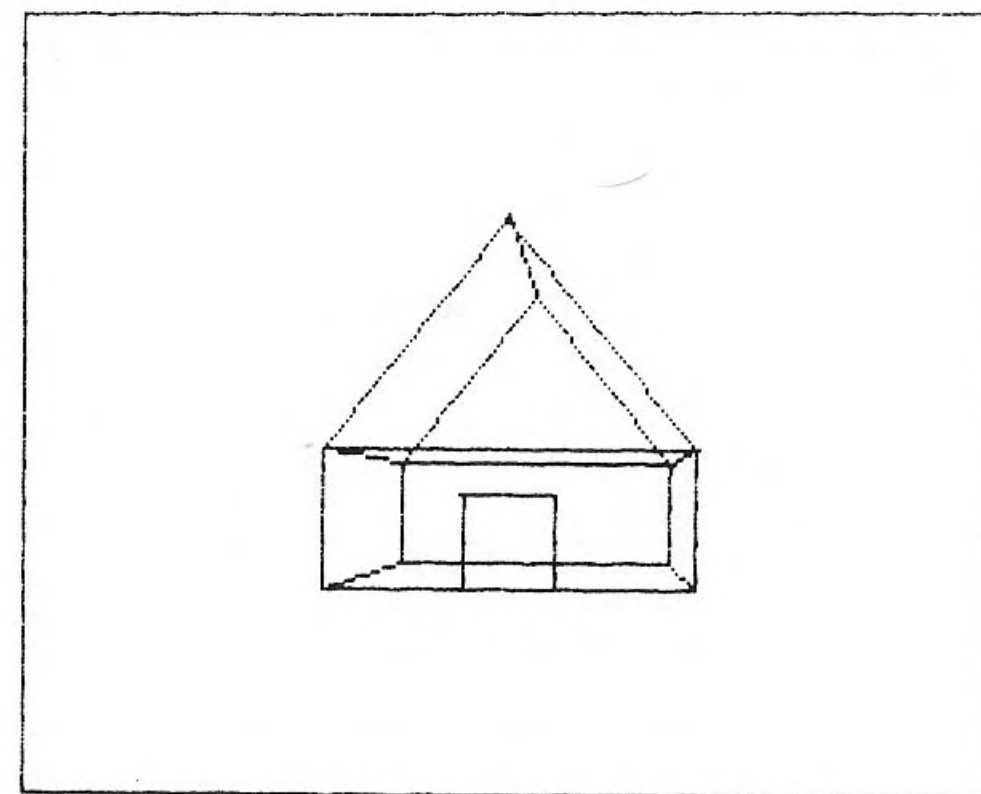


Fig. 24

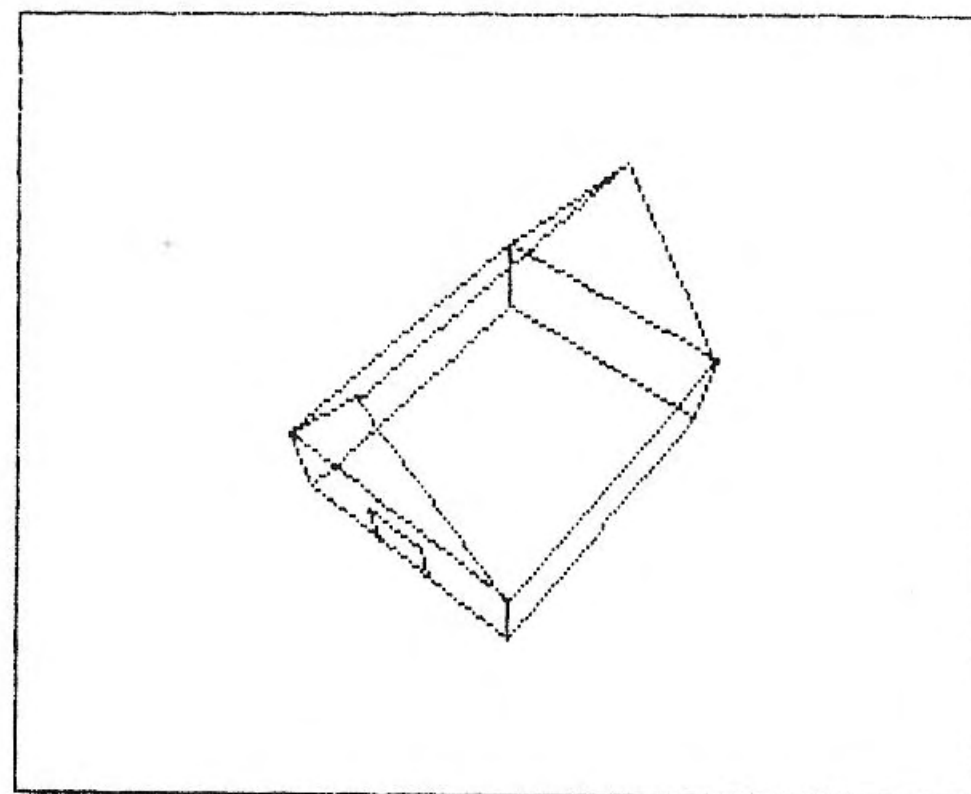


Fig. 25

3.º As figuras 26, 27, 28 e 29 mostram a imagem da casa para uma distância reduzida entre o observador e a casa. As distorções obtidas permitem compreender que a projecção cónica não corresponde de facto ao funcionamento da nossa vista em visão próxima.

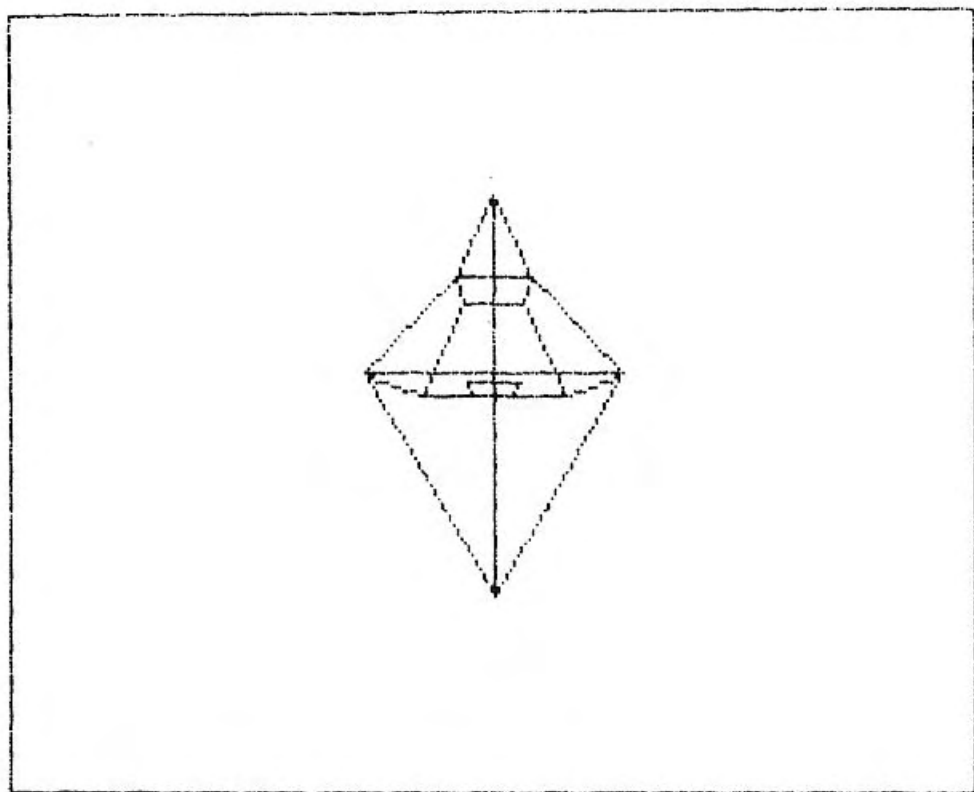


Fig. 26

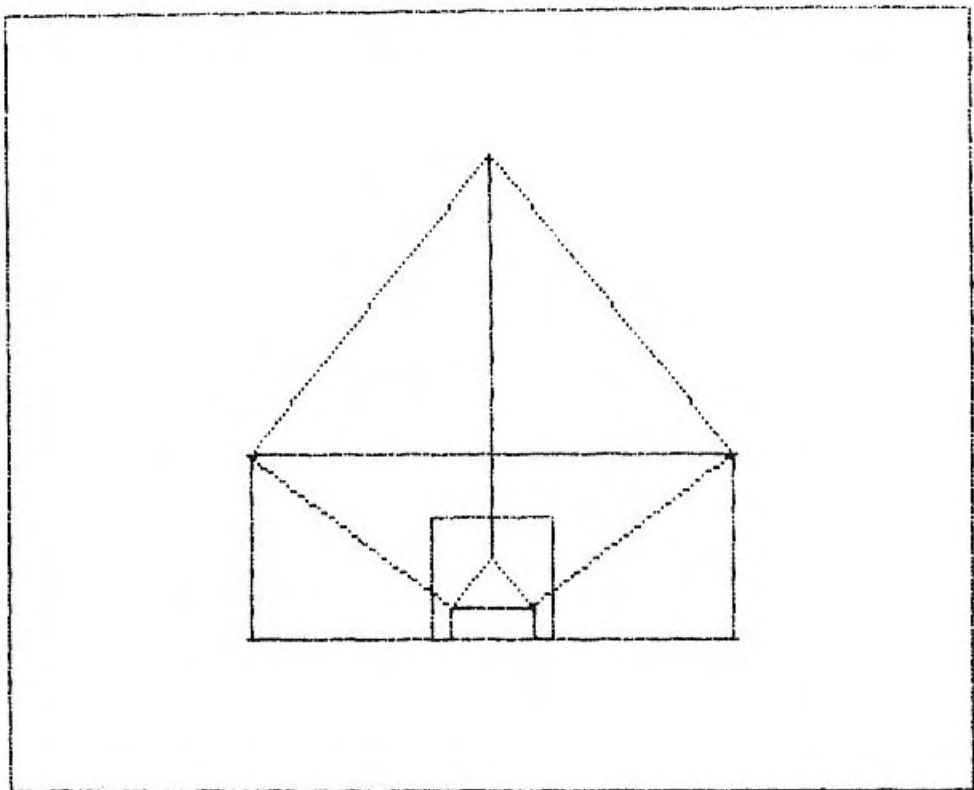


Fig. 27

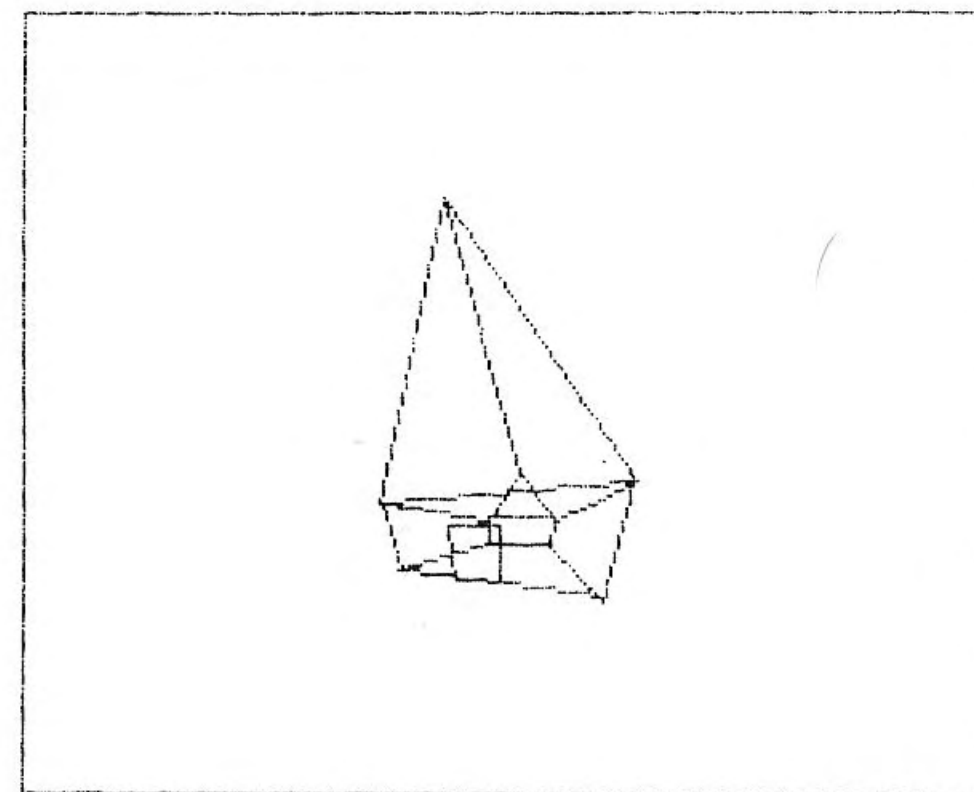


Fig. 28

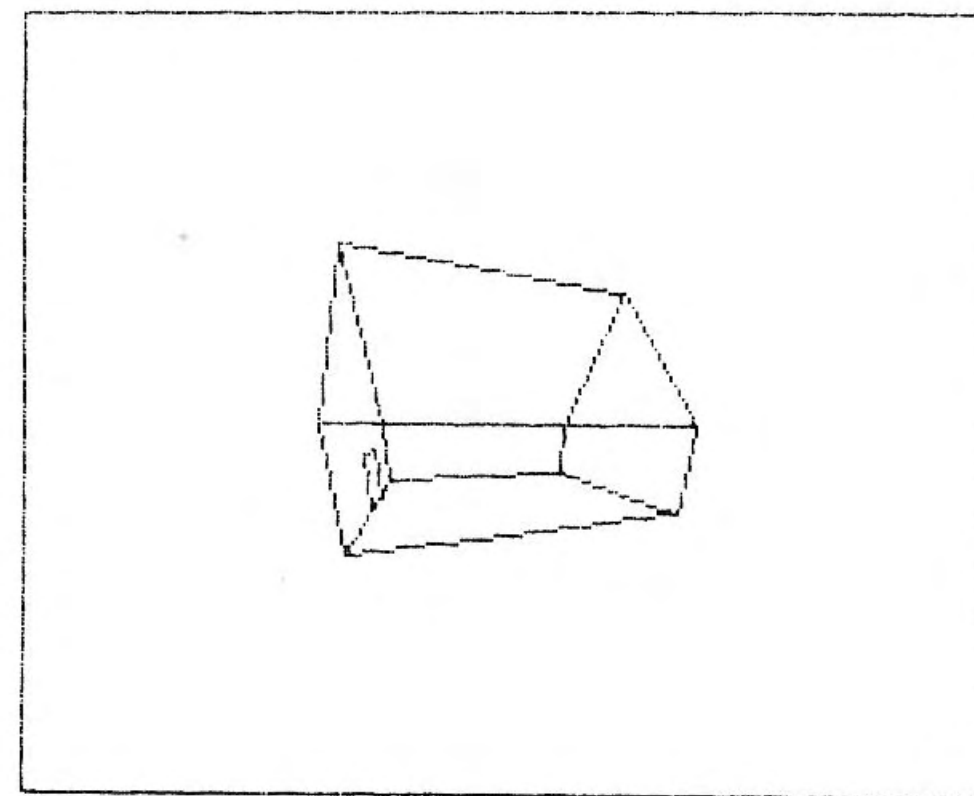


Fig. 29

Classificámos as obras citadas em cinco categorias.

1. Sobre os aspectos técnicos da perspectiva:

La Perspective, PUF, Colecção «Que sais-je?».
 Gaudefroy, J.-H., *La perspective dans le dessin technique*, Dunod, Paris, 1970.

2. Sobre a história da perspectiva:

Deforgue, Y., *Le graphisme technique, son histoire et son enseignement*, Éd. du Champ Vallon, Mâcon, 1981.
Image et imaginaires d'architecture, Centre Pompidou.
 Francastel, P., *Peinture et société*, Gonthier-Denoël, Paris, 1977.
 Panofsky, *La Perspective comme forme symbolique*, Minuit, Paris, 1975.
 Baltrúsaltis, J., *Anamorphoses*, Pygmalion, Paris, 1969.

3. Sobre os poliedros:

Holden, A., *Formes, espace et symétries*, Nathan/Cedic, Paris, 1977.

4. Sobre o grafismo 3D:

La réalisation des logiciels graphiques interactifs, obra colectiva, Eyrolles, Paris, 1982.
 Vuldy, J.-L., *Graphisme 3D sur votre ordinateur*, Eyrolles, Paris, 1983.
 Dony, R., *Graphisme scientifique*, Masson, Paris, 1984.
 Lehning, H., e Jakubowicz, D., *Mathématiques par l'informatique individuelle*, tomo 4: *Graphisme*, Masson, Paris, 1984.

5. Revistas:

Sciences et Techniques, número especial, Maio de 1984.
La Recherche, número especial, Maio de 1983.
Micro-Systèmes, números 36 e 37.

| | |
|---|----|
| PREFÁCIO | 9 |
| 1. GENERALIDADES SOBRE GRAFISMOS A TRÊS DIMENSÕES | 11 |
| 1. Descrição de um objecto | 15 |
| 2. O cálculo de uma imagem | 17 |
| 3. Produção da imagem | 18 |
| 4. Acção sobre a imagem | 18 |
| 5. O material | 19 |
| 2. COORDENADAS CARTESIANAS — VECTORES | 20 |
| 1. Coordenadas cartesianas | 20 |
| 2. Bases ortonormadas | 22 |
| 3. Coordenadas e norma de um vector | 23 |
| 4. Produto escalar | 23 |
| 5. Produto vectorial | 24 |
| 6. Mudança de referencial | 26 |
| 3. TRANSFORMAÇÕES PONTUAIS | 29 |
| 1. Definição analítica de uma transformação pontual | 29 |
| 2. Visualização de um ponto no espaço | 29 |
| 3. Enquadramento da imagem | 30 |
| 4. Deslocamentos do objecto a representar | 35 |
| 4. RECTAS E PLANOS NO ESPAÇO | 38 |
| 1. Rectas | 38 |
| 2. Planos | 40 |
| 3. Intersecções | 44 |
| 5. PROJECCÕES CILÍNDRICAS | 49 |
| 1. Definições | 49 |
| 2. Propriedades das projecções cilíndricas | 50 |
| 3. Coordenadas da projecção de um ponto | 53 |
| 4. Perspectiva ortográfica | 54 |
| 5. Perspectiva oblíqua | 57 |
| 6. Projecção de uma curva não contida num plano | 63 |
| 6. A PERSPECTIVA CAVALEIRA | 68 |
| 1. Representação de um poliedro | 69 |
| 2. Representação de um círculo | 70 |
| 3. Fórmulas de cálculo | 71 |

| | |
|--|-----|
| 4. Um exemplo detalhado: o cubo | 73 |
| 5. Perspectiva de uma curva | 79 |
| 7. PRISMAS E PIRÂMIDES | 82 |
| 1. Os prismas e os troncos de prisma | 82 |
| 2. Pirâmides e troncos de pirâmides | 84 |
| 3. Primeiro exemplo: prisma recto | 85 |
| 4. Segundo exemplo: prismas com partes curvas | 90 |
| 5. Terceiro exemplo: pirâmide | 95 |
| 8. PARTES ESCONDIDAS DE UM POLIEDRO CONVEXO | 99 |
| 1. Poliedros convexos e não convexos | 100 |
| 2. Orientação das facetas | 102 |
| 3. Como reconhecer as partes escondidas | 102 |
| 4. Utilização de um produto vectorial | 104 |
| 5. Um exemplo detalhado, o do cubo | 106 |
| 9. OS POLIEDROS REGULARES | 110 |
| 1. Definição | 110 |
| 2. Construção da imagem | 111 |
| 3. O tetraedro regular | 111 |
| 4. O octaedro | 113 |
| 5. O dodecaedro | 116 |
| 6. O icosaedro | 120 |
| 10. OS POLIEDROS CONVEXOS SEMI-REGULARES | 125 |
| 1. Os sólidos de Arquimedes | 125 |
| 2. Primeiro exemplo: o octaedro truncado | 126 |
| 3. Segundo exemplo: o cuboctaedro | 131 |
| 4. Prismas e antiprismas de Kepler | 134 |
| 11. AS SUPERFÍCIES DEFINIDAS POR UMA EQUAÇÃO $Z = F(X, Y)$ | 138 |
| 1. Princípio geral da representação | 138 |
| 2. Primeiro programa | 140 |
| 3. Exemplos | 142 |
| 4. Eliminação das partes escondidas | 144 |
| 5. Segundo programa | 148 |
| 6. Exemplos | 150 |
| 12. AS SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO | 153 |
| 1. Superfície de equação $x = f(x^2 + y^2)$ | 153 |
| 2. Superfícies de equação $x = f(r)$ | 159 |
| 3. Construção aproximada de uma superfície de revolução | 160 |
| 4. Construção aproximada de um cilindro recto | 162 |
| 5. Construção aproximada de um elipsóide | 166 |
| 13. CONES E CILINDROS | 169 |
| 1. Caso do cilindro | 170 |
| 2. Cone | 175 |

| | |
|---|-----|
| 14. REPRESENTAÇÕES PARAMÉTRICAS DAS SUPERFÍCIES | 181 |
| 1. As coordenadas cilíndricas | 181 |
| 2. Coordenadas esféricas | 187 |
| 3. Caso geral | 192 |
| 15. AS PROJEÇÕES CÓNICAS | 197 |
| 1. Definição e propriedades | 198 |
| 2. Fórmulas fundamentais | 199 |
| 3. Cálculo da imagem de um objecto | 201 |
| 4. Corte da imagem | 203 |
| 5. Programa simplificado | 209 |
| BIBLIOGRAFIA | 220 |