NILSSON | RIEDEL



CIRCUITOS ELÉTRICOS

8ª edição

PEARSON Prentice Hall

Site com material de apoio para professores e estudantes

CIRCUITOS ELÉTRICOS

8ª edição

Pearson Education

EMPRESA CIDADÃ

NILSSON | RIEDEL

CIRCUITOS ELÉTRICOS

8ª edição

James W. Nilsson

Professor Emérito
Iowa State University

Susan A. Riedel

Marquette University

Tradução
Arlete Simille Marques

Revisão Técnica
Prof. Antônio Emílio Angueth de Araújo, Ph.D.
Prof. Ivan José da Silva Lopes, Ph.D.
Professores do Departamento de Engenharia Elétrica da
Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG

PEARSON
Prentice
Hall

São Paulo

Brasil Argentina Colômbia Costa Rica Chile Espanha Guatemala México Peru Porto Rico Venezuela

ABDR

© 2009 Pearson Education do Brasil

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta publicação poderá ser reproduzida ou transmitida de qualquer modo ou por qualquer outro meio, eletrônico ou mecânico, incluindo fotocópia, gravação ou qualquer outro tipo de sistema de armazenamento e transmissão de informação, sem prévia autorização, por escrito, da Pearson Education do Brasil.

Diretor editorial: Roger Trimer
Gerente editorial: Sabrina Cairo
Supervisor de produção editorial: Marcelo Françozo
Editoras: Thelma Babaoka e Eugênia Pessotti
Preparação: Paula Brandão Perez Mendes
Revisão: Norma Gusukuma e Maria Aiko Nishijima
Capa: Rafael Mazzo sobre o projeto original de Corbis/RF, Royalty Free
Projeto gráfico e diagramação: AVIT'S Estúdio Gráfico Ltda.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Nilsson, James W.

Circuitos elétricos / James W. Nilsson, Susan A. Riedel ; revisão técnica Antônio Emílio Angueth de Araújo, Ivan José da Silva Lopes ; tradução Arlete Simille Marques. -- 8. ed. -- São Paulo : Pearson Prentice Hall, 2009.

Título original: Electric circuits.
ISBN 978-85-7605-159-6

I. Riedel, Susan A. II. Araújo, Antônio Emílio Angueth de. III. Lopes, Ivan José da Silva. IV. Título.

08-06667 CDD-621.319207

Índice para catálogo sistemático:

1. Circuitos elétricos : Engenharia elétrica : Estudo e ensino 621.319207

2008
Direitos exclusivos para a língua portuguesa cedidos à
Pearson Education do Brasil Ltda.,
uma empresa do grupo Pearson Education
Av. Ermano Marchetti, 1435
CEP: 05038-001 – São Paulo – SP
Tel.: (11) 2178-8686 Fax: (11) 2178-8688
e-mail: vendas@pearsoned.com

Para Anna

Sumário

Capítulo 1
Variáveis de circuitos 1

1.1 Engenharia elétrica: uma visão geral 1
1.2 O Sistema Internacional de Unidades 5
1.3 Análise de circuitos: uma visão geral 6
1.4 Tensão e corrente 7
1.5 O elemento básico ideal de circuito 7
1.6 Potência e energia 9
Resumo 10
Problemas 11

Capítulo 2
Elementos de circuitos 15

Perspectiva prática: Segurança elétrica 15
2.1 Fontes de tensão e corrente 16
2.2 Resistência elétrica (lei de Ohm) 18
2.3 Construção de um modelo de circuito 21
2.4 Leis de Kirchhoff 23
2.5 Análise de um circuito que contém fontes dependentes 28
Perspectiva prática: Segurança elétrica 30
Resumo 31
Problemas 32

Capítulo 3
Circuitos resistivos simples 38

Perspectiva prática: Um desembaçador de vidro traseiro 38
3.1 Resistores em série 39
3.2 Resistores em paralelo 39
3.3 Circuitos divisores de tensão e divisores de corrente 42
3.4 Divisão de tensão e divisão de corrente 44
3.5 Medição de tensão e corrente 46
3.6 Medição de resistência — a ponte de Wheatstone 49
3.7 Circuitos equivalentes triângulo-estrela (Δ-Y) ou pi-tê (π-T) 50
Perspectiva prática: Um desembaçador de vidro traseiro 52
Resumo 53
Problemas 54

Capítulo 4
Técnicas de análise de circuitos 64

Perspectiva prática: Circuitos com resistores reais 64
4.1 Terminologia 65
4.2 Introdução ao método das tensões de nó 67
4.3 O método das tensões de nó e as fontes dependentes 69
4.4 O método das tensões de nó: alguns casos especiais 70
4.5 Introdução ao método das correntes de malha 72
4.6 O método das correntes de malha e fontes dependentes 75
4.7 O método das correntes de malha: alguns casos especiais 76
4.8 Método das tensões de nó *versus* método das correntes de malha 78
4.9 Transformações de fonte 81
4.10 Equivalentes de Thévenin e Norton 83
4.11 Outros métodos para a obtenção de um equivalente de Thévenin 87
4.12 Máxima transferência de potência 89
4.13 Superposição 90
Perspectiva prática: Circuitos com resistores reais 93
Resumo 94
Problemas 95

Capítulo 5
O amplificador operacional 109

Perspectiva prática: Extensômetros 109

5.1 Terminais do amplificador operacional 110

5.2 Tensões e correntes terminais 111

5.3 Circuito amplificador inversor 114

5.4 Circuito amplificador somador 115

5.5 Circuito amplificador não-inversor 116

5.6 Circuito amplificador diferencial 116

5.7 Modelo mais realista para o amplificador operacional 119

Perspectiva prática: Extensômetros 121

Resumo 122

Problemas 122

Capítulo 6
Indutância, capacitância e indutância mútua 131

Perspectiva prática: Interruptores de proximidade 131

6.1 Indutor 132

6.2 Capacitor 137

6.3 Combinações de indutância e capacitância em série e em paralelo 140

6.4 Indutância mútua 142

6.5 Um exame mais detalhado da indutância mútua 145

Perspectiva prática: Interruptores de proximidade 149

Resumo 151

Problemas 152

Capítulo 7
Resposta de circuitos *RL* e *RC* de primeira ordem 160

Perspectiva prática: Circuito de luz intermitente 161

7.1 Resposta natural de um circuito *RL* 161

7.2 Resposta natural de um circuito *RC* 166

7.3 Resposta a um degrau de circuitos *RL* e *RC* 168

7.4 Solução geral para respostas a um degrau e natural 173

7.5 Chaveamento seqüencial 177

7.6 Resposta indefinidamente crescente 180

7.7 Amplificador-integrador 181

Perspectiva prática: Circuito de luz intermitente 184

Resumo 185

Problemas 185

Capítulo 8
Respostas natural e a um degrau de circuitos *RLC* 201

Perspectiva prática: Um circuito de ignição 202

8.1 Introdução à resposta natural de um circuito *RLC* em paralelo 202

8.2 Formas da resposta natural de um circuito *RLC* em paralelo 205

8.3 Resposta a um degrau de um circuito *RLC* em paralelo 211

8.4 Respostas natural e a um degrau de um circuito *RLC* em série 215

8.5 Circuitos com dois amplificadores-integradores 218

Perspectiva prática: Um circuito de ignição 220

Resumo 222

Problemas 223

Capítulo 9
Análise do regime permanente senoidal 230

Perspectiva prática: Um circuito de distribuição residencial 230

9.1 Fonte senoidal 231

9.2 Resposta senoidal 233

9.3 O conceito de fasor 234

9.4 Elementos passivos no domínio da freqüência 237

9.5 As leis de Kirchhoff no domínio da freqüência 239

9.6 Associações em série, em paralelo e transformações Δ-Y 240

9.7 Transformações de fonte e circuitos equivalentes de Thévenin-Norton 245

9.8 O método das tensões de nó 248

9.9 O método das correntes de malha 249

9.10 O transformador 250

9.11 O transformador ideal 253

9.12 Diagramas fasoriais 257

Perspectiva prática: Um circuito de distribuição residencial 259

Resumo 260

Problemas 260

Capítulo 10
Cálculos de potência em regime permanente senoidal 272

Perspectiva prática: Eletrodomésticos de aquecimento 272

10.1 Potência instantânea 273

10.2 Potência média e potência reativa 274

10.3 Valor eficaz e cálculos de potência 277

10.4 Potência complexa 279

10.5 Cálculos de potência 280

10.6 Máxima transferência de potência 285

Perspectiva prática: Eletrodomésticos de aquecimento 289

Resumo 291

Problemas 291

Capítulo 11
Circuitos trifásicos equilibrados 301

Perspectiva prática: Transmissão e distribuição de energia elétrica 301

11.1 Tensões trifásicas equilibradas 302

11.2 Fontes de tensão trifásicas 302

11.3 Análise do circuito Y-Y 303

11.4 Análise do circuito Y–Δ 307

11.5 Cálculos de potência em circuitos trifásicos equilibrados 309

11.6 Medição de potência média em circuitos trifásicos 313

Perspectiva prática: Transmissão e distribuição de energia elétrica 315

Resumo 316

Problemas 317

Capítulo 12
Introdução à transformada de Laplace 324

12.1 Definição da transformada de Laplace 324

12.2 A função degrau 325

12.3 A função impulso 327

12.4 Transformadas funcionais 329

12.5 Transformadas operacionais 330

12.6 Uma aplicação da transformada de Laplace 333

12.7 Transformadas inversas 334

12.8 Pólos e zeros de $F(s)$ 339

12.9 Teoremas do valor inicial e do valor final 340

Resumo 341

Problemas 342

Capítulo 13
A transformada de Laplace em análise de circuitos 347

Perspectiva prática: Supressores de surto 347

13.1 Elementos de circuito no domínio da freqüência 348

13.2 Análise de circuitos no domínio da freqüência 350

13.3 Exemplos 350

13.4 Função de transferência 359

13.5 Função de transferência em expansões por frações parciais 361

13.6 Função de transferência e integral de convolução 363

13.7 Função de transferência e resposta de regime permanente senoidal 367

13.8 Função impulso em análise de circuitos 369

Perspectiva prática: Supressores de surto 374

Resumo 374

Problemas 375

Capítulo 14
Introdução aos circuitos de seleção de freqüências 388

Perspectiva prática: Circuitos de telefone de teclas 388

14.1 Observações preliminares 389

14.2 Filtros passa-baixas 390

14.3 Filtros passa-altas 395

14.4 Filtros passa-faixa 399

14.5 Filtros rejeita-faixa 406

Perspectiva prática: Circuitos de telefone de teclas 409

Resumo 410

Problemas 410

Capítulo 15
Filtros ativos 416

Perspectiva prática: Controle de volume de graves 416

15.1 Filtros ativos passa-baixas e passa-altas de primeira ordem 417

15.2 Mudança de escala 420

15.3 Filtros ativos passa-faixa e rejeita-faixa 422

15.4 Filtros ativos de ordem superior 426

15.5 Filtros ativos passa-faixa e rejeita-faixa de banda estreita 434

Perspectiva prática: Controle de volume de graves 437

Resumo 438

Problemas 440

Capítulo 16
Séries de Fourier 448

16.1 Séries de Fourier: uma visão geral 449

16.2 Coeficientes de Fourier 450

16.3 Efeito da simetria sobre os coeficientes de Fourier 452

16.4 Forma trigonométrica alternativa da série de Fourier 455

16.5 Exemplo de aplicação 457

16.6 Cálculos de potência média de funções periódicas 460

16.7 Valor eficaz de uma função periódica 462

16.8 Forma exponencial da série de Fourier 462

16.9 Espectros de amplitude e de fase 464

Resumo 466

Problemas 466

Capítulo 17
A transformada de Fourier 475

17.1 Dedução da transformada de Fourier 475

17.2 Convergência da integral de Fourier 476

17.3 Uso de transformadas de Laplace para calcular transformadas de Fourier 478

17.4 Uso de limites para calcular transformadas de Fourier 479

17.5 Algumas propriedades matemáticas 480

17.6 Transformadas operacionais 481

17.7 Aplicações em análise de circuitos 483

17.8 Teorema de Parseval 485

Resumo 490

Problemas 490

Capítulo 18
Quadripolos 495

18.1 Equações terminais 495

18.2 Parâmetros do quadripolo 496

18.3 Quadripolos com carga em seus terminais 502

18.4 Interconexão de quadripolos 506

Resumo 508

Problemas 508

Apêndice A
Solução de equações lineares simultâneas 514

A.1 Etapas preliminares 514

A.2 Método de Cramer 514

A.3 O determinante característico 514

A.4 O determinante N_K 514

A.5 O valor de um determinante 515

A.6 Matrizes 516

A.7 Álgebra matricial 516

A.8 Matriz identidade, matriz adjunta e matriz inversa 518

A.9 Partição matricial 519

A.10 Aplicações 520

Apêndice B
Números complexos 525

B.1 Notação 525

B.2 Representação gráfica dos números complexos 525

B.3 Operações com números complexos 526

B.4 Identidades úteis 527

B.5 Potências inteiras de um número complexo 527

B.6 Raízes de um número complexo 527

Apêndice C
Tópicos adicionais sobre enrolamentos magneticamente acoplados 528

C.1 Circuitos equivalentes para enrolamentos magneticamente acoplados 528

C.2 A necessidade do uso de transformadores ideais em circuitos equivalentes 531

Apêndice D
O decibel 534

Apêndice E
Diagramas de Bode 536

E.1 Pólos e zeros reais de primeira ordem 536

E.2 Gráficos de amplitude 536

E.3 Gráficos de amplitude mais precisos 539

E.4 Gráficos de fase 539

E.5 Diagramas de Bode: pólos e zeros complexos 541

E.6 Gráficos de amplitude 541

E.7 Gráficos de amplitude mais precisos 542

E.8 Gráficos de fase 543

Apêndice F
Tabela resumida de identidades trigonométricas 546

Apêndice G
Tabela resumida de integrais 547

Apêndice H
Respostas dos problemas selecionados 548

Índice remissivo 562

Crédito das fotos 575

Prefácio

A oitava edição de *Circuitos elétricos* é uma revisão cuidadosamente planejada do livro didático de introdução a circuitos mais utilizado nos últimos 25 anos. O importante é que, apesar de este livro ter evoluído ao longo dos anos para atender às mudanças nos estilos de aprendizado dos estudantes, as abordagens e as filosofias de ensino subjacentes permaneceram inalteradas. As metas são:

- Utilizar o conhecimento obtido previamente para desenvolver o entendimento de conceitos e idéias.
- Enfatizar a relação entre abordagens de entendimento conceitual e de solução de problemas.
- Oferecer aos estudantes uma base forte de práticas de engenharia.

Principais características

Problemas

Os leitores de *Circuitos elétricos* consideraram a seção de problemas uma das principais características do livro. Na oitava edição há mais de 1.000 problemas, dos quais cerca de 80% são novos ou foram revisados. Eles estão organizados em seções e são apresentados ao final de cada capítulo.

Perspectivas práticas

Apresentada na abertura de cada capítulo, a seção "Perspectiva prática" oferece exemplos de circuitos reais, baseados em dispositivos existentes. Grande parte dos capítulos começa com uma breve descrição de uma aplicação prática do material a ser apresentado. Encerrada a apresentação, há uma análise quantitativa da aplicação, acompanhada de um problema referente à 'perspectiva prática' em questão. Isso possibilita que o estudante entenda como aplicar o conteúdo do capítulo à solução de um problema real.

Problemas para avaliação

Cada capítulo começa com um conjunto de objetivos do capítulo. Em certos pontos fundamentais, o estudante é convidado a avaliar seu domínio sobre um determinado objetivo mediante a solução de um ou mais problemas para avaliação. A correta resolução desses problemas indica que o estudante já tem domínio sobre o objetivo em questão.

Exemplos

Cada capítulo inclui muitos exemplos que ilustram os conceitos apresentados no texto. Há mais de 130 exemplos neste livro, cujo objetivo é ilustrar a aplicação de um determinado conceito e também testar o conhecimento dos estudantes na solução de problemas.

Equações e conceitos fundamentais

Você encontrará em todos os capítulos equações e conceitos fundamentais destacados no texto. Fizemos isso para ajudá-lo a gravar alguns dos princípios fundamentais de circuitos elétricos e facilitar sua consulta a tópicos importantes.

Integração de ferramentas para apoio

Ferramentas computacionais auxiliam os estudantes no processo de aprendizado ao oferecer uma representação visual do comportamento de um circuito, validar uma solução calculada, reduzir a carga de cálculo em circuitos mais complexos e levar à solução desejada utilizando variação de parâmetros. Esse tipo de apoio costuma ser inestimável no processo de projeto. A oitava edição inclui o suporte do PSpice, ferramenta muito conhecida. Em cada capítulo, os problemas adequados à exploração dessa ferramenta são devidamente marcados com a legenda *PSpice*.

Ênfase em projeto

Esta edição enfatiza o projeto de circuitos de várias maneiras. Em primeiro lugar, muitas das discussões na seção "Perspectiva prática" abordam diversos

aspectos de projeto dos circuitos, e os problemas referentes a esse assunto continuam a discussão por meio de exemplos práticos. Em segundo, os problemas de projeto estão devidamente destacados, o que facilita sua identificação. Em terceiro, os problemas adequados à exploração com Pspice, também identificados, garantem oportunidades de desenvolver projeto com a utilização desse software.

Apêndices

Há vários apêndices no final do livro para auxiliar os leitores no uso efetivo de sua formação matemática. O Apêndice A faz uma revisão do método de Cramer para a solução de equações lineares simultâneas e da álgebra matricial simples; o Apêndice B apresenta uma revisão de números complexos; o Apêndice C contém material adicional sobre enrolamentos magneticamente acoplados e transformadores ideais; o Apêndice D contém uma breve discussão sobre o decibel; o Apêndice E é dedicado aos diagramas de Bode; o Apêndice F apresenta uma tabela resumida de identidades trigonométricas úteis para análise de circuitos; já no Apêndice G é dada uma tabela resumida de integrais. Por fim, o Apêndice H apresenta respostas a problemas selecionados, que estão devidamente destacados com o símbolo *.

Material adicional

No Companion Website deste livro (www.prenhall.com/nilsson_br), professores e estudantes podem acessar materiais adicionais que auxiliarão a exposição das aulas e o aprendizado.



Para professores

- Galeria de imagens.
- Apresentações em PowerPoint para utilização em sala de aula.
- Manual de soluções (em inglês).

(*Esses materiais são de uso exclusivo dos professores e estão protegidos por senha. Para ter acesso a eles, os professores que adotam o livro devem entrar em contato com um representante Pearson ou enviar um e-mail para universitarios@pearsoned.com.*)

Para estudantes

- Exercícios adicionais.
- Manual de introdução ao PSpice (em inglês).

Agradecimentos

Não podemos deixar de expressar nosso apreço pela contribuição de Norman Wittels, do Worcester Polytechnic Institute. Sua contribuição à seção "Perspectiva prática" deu um grande realce a esta edição e às duas anteriores. Jacob Chacko, engenheiro especializado em transmissão e distribuição do Ames Municipal Electric System, também contribuiu para a seção "Perspectiva prática". Agradecimentos especiais a Robert Yahn (USAF), Stephen O'Conner (USAF) e William Oliver (Boston University) pelo contínuo interesse neste livro e pelas sugestões.

Há muita gente dedicada que trabalha nos bastidores de nossa editora e que merece nossos agradecimentos e gratidão pelo esforço devotado em favor da oitava edição. Na Prentice Hall, gostaríamos de agradecer a Michael McDonald, Rose Kernan, Xiaohong Zhu, Lisa McDowell, Jonathan Boylan, David A. George, Tim Galligan e Scott Disanno pelo apoio ininterrupto e pela tonelada de trabalho realmente árduo. Agradecemos, também, ao pessoal da GEX Publishing Services pela dedicação e esforço na composição deste texto.

Todas as revisões do texto foram orientadas pelo trabalho cuidadoso e minucioso de professores. Agradecemos de coração a:

- Paul Panayotatos, Rutgers University
- Evan Goldstein, University of Washington
- Kalpathy B. Sundaram, University of Central Florida
- Andrew K. Chan, Texas A&M University
- A. Safaai-Jazi, Virginia Polytechnic Institute and State University
- Clifford H. Grigg, Rose-Hulman Institute of Technology
- Karl Böhringer, University of Washington
- Carl Wells, Washington State University
- Aydin I. Karsilayan, Texas A&M University
- Ramakant Srivastava, University of Florida
- Michel M. Maharbiz, University of Michigan, Ann Arbor

- Christopher Hoople, Rochester Institute of Technology
- Sannasi Ramanan, Rochester Institute of Technology
- Gary A. Hallock, University of Texas at Austin

Além disso, gostaríamos de agradecer a Ramakant Srivastava da University of Florida e ao Accuracy Review Team da GEX Publishing Services pela ajuda na verificação do texto e de todos os problemas desta edição.

É grande a nossa dívida com os muitos professores e estudantes que ofereceram retorno positivo e sugestões de melhoria. Usamos o máximo possível dessas sugestões para continuar a melhorar o conteúdo, a pedagogia e a apresentação. Sentimo-nos honrados pela oportunidade de causar impacto à experiência educacional de milhares de engenheiros que percorrerão as páginas deste livro.

James W. Nilsson
Susan A. Riedel

CAPÍTULO

1

Variáveis de circuitos

SUMÁRIO DO CAPÍTULO

1.1 **Engenharia elétrica: uma visão geral**

1.2 **O Sistema Internacional de Unidades**

1.3 **Análise de circuitos: uma visão geral**

1.4 **Tensão e corrente**

1.5 **O elemento básico ideal de circuito**

1.6 **Potência e energia**

✔ OBJETIVOS DO CAPÍTULO

1 Entender e saber utilizar as unidades do SI e os prefixos padronizados para potências de 10.

2 Conhecer e saber utilizar as definições de tensão e corrente.

3 Conhecer e saber utilizar as definições de potência e energia.

4 Saber utilizar a convenção passiva para calcular a potência para um elemento básico ideal de circuito dadas suas tensão e corrente.

A engenharia elétrica é uma profissão interessante e desafiadora para todos os que têm um interesse genuíno em ciências aplicadas e matemática (além de aptidão para essas áreas). Nos últimos 150 anos, engenheiros eletricistas desempenharam um papel dominante no desenvolvimento de sistemas que mudaram o modo como as pessoas vivem e trabalham. Sistemas de comunicação por satélite, telefones, computadores digitais, televisões, equipamentos médicos cirúrgicos e de diagnóstico, robôs de linhas de montagem e ferramentas elétricas são componentes representativos de sistemas que definem uma sociedade tecnológica moderna. Como engenheiro eletricista, você pode participar dessa revolução tecnológica contínua, melhorando e refinando esses sistemas existentes e descobrindo e desenvolvendo novos sistemas para atender às necessidades de nossa sociedade em constante mudança.

Ao iniciar o estudo de análise de circuitos, você precisa ter uma idéia do lugar que esse estudo ocupa na hierarquia de tópicos que compreende uma introdução à engenharia elétrica. Por isso, começamos apresentando uma visão geral da engenharia elétrica, algumas idéias sobre um ponto de vista de engenharia relacionado com a análise de circuitos, além de uma revisão do sistema internacional de unidades.

Em seguida, descrevemos, de modo geral, em que consiste a análise de circuitos e apresentamos os conceitos de tensão e corrente. Discutimos ainda um elemento básico ideal e a necessidade de um sistema de referência de polaridade. Concluímos o capítulo descrevendo como corrente e tensão estão relacionadas com potência e energia.

1.1 Engenharia elétrica: uma visão geral

O engenheiro eletricista é o profissional que se preocupa com sistemas que produzem, transmitem e medem sinais elétricos. A engenharia elétrica combina os modelos de fenômenos naturais desenvolvidos pelos físicos com as ferramentas dos matemáticos para produzir sistemas que atendem a necessidades práticas. Sistemas elétricos estão sempre presentes em nossa vida; são encontrados em lares, escolas, locais de trabalho e veículos de transporte em todos os lugares. Começamos apresentando alguns exemplos de cada uma das cinco principais classificações de sistemas elétricos:

- sistemas de comunicação;
- sistemas de computação;
- sistemas de controle;
- sistemas de potência;
- sistemas de processamento de sinais.

Em seguida, descrevemos como os engenheiros eletricistas analisam e projetam tais sistemas.

Sistemas de comunicação são sistemas elétricos que geram, transmitem e distribuem informações. Entre os exemplos bem conhecidos estão os equipamentos de televisão, como câmeras, transmissores, receptores e aparelhos de videocassete; radiotelescópios, usados para explorar o universo; sistemas de satélites, que enviam e recebem imagens de outros planetas e do nosso; sistemas de radar, usados para coordenar vôos de aviões; e sistemas telefônicos.

A Figura 1.1 representa os principais componentes de um sistema telefônico moderno. Começando pelo lado inferior esquerdo da figura, um microfone instalado dentro de um aparelho telefônico transforma ondas sonoras em sinais elétricos. Esses sinais são transportados até uma central de comutação onde são combinados com os sinais de dezenas, centenas ou milhares de outros telefones. Os sinais combinados saem da central de comutação; sua forma depende da distância que têm de percorrer. Em nosso exemplo, eles são enviados por fios dentro de cabos coaxiais subterrâneos até

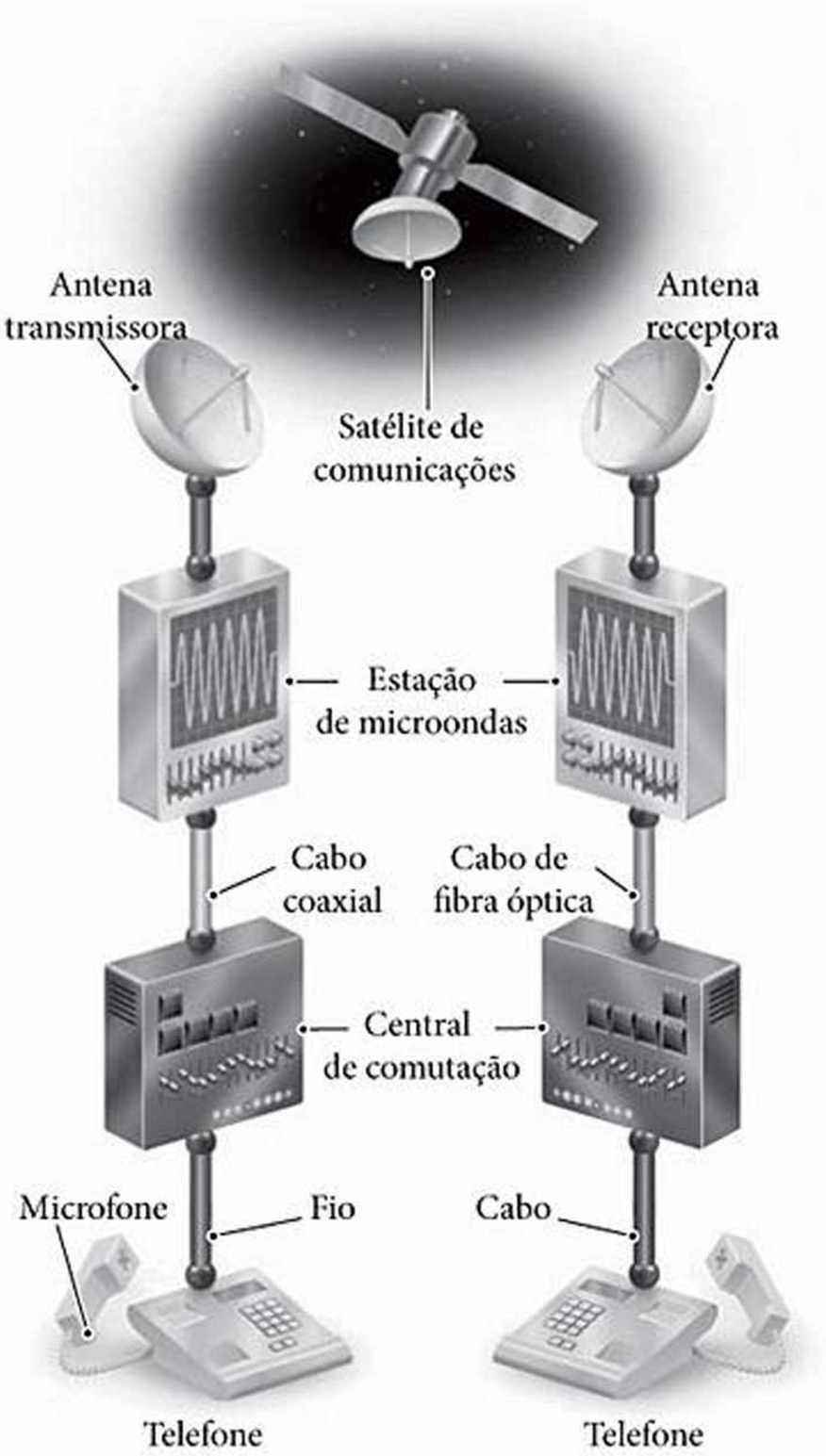


Figura 1.1 ▲ Sistema telefônico.

uma estação de transmissão de microondas. Ali, os sinais são transformados em freqüências de microondas e transmitidos a partir de uma antena transmissora, pelo ar e pelo espaço, passando por um satélite de comunicações, até uma antena receptora. A estação receptora de microondas transforma os sinais de forma a adequá-los a uma transmissão posterior, talvez em pulsos de luz, para serem enviados por cabos de fibra óptica. Ao chegarem à segunda central de comutação, os sinais combinados são separados, e cada um é dirigido para o telefone apropriado, no qual um fone de ouvido age como um alto-falante para converter os sinais elétricos novamente em ondas sonoras. Em cada estágio do processo, circuitos elétricos agem sobre os sinais. Imagine o desafio envolvido em projetar, construir e operar cada circuito de um modo que garanta que todas as centenas de milhares de telefonemas simultâneos tenham conexões de alta qualidade.

Sistemas de computação usam sinais elétricos para processar informações, desde palavras até cálculos matemáticos. O tamanho e a potência desses sistemas abrangem desde calculadoras de bolso e computadores pessoais até supercomputadores que executam tarefas complexas como processamento de dados meteorológicos e modelagem de interações químicas de moléculas orgânicas complexas. Entre esses sistemas citamos as redes de microcircuitos, ou circuitos integrados — conjuntos de centenas, milhares ou milhões de componentes elétricos montados sobre uma base do tamanho de um selo postal, que muitas vezes funcionam em níveis de velocidade e potência próximos dos limites da física fundamental, incluindo a velocidade da luz e as leis da termodinâmica.

Sistemas de controle usam sinais elétricos para regular processos. Como exemplos citamos o controle de temperaturas, pressões e velocidades de escoamento em uma refinaria de petróleo; a mistura combustível–ar no sistema eletrônico de injeção de um motor de automóvel; mecanismos como os motores, portas e luzes de elevadores; e as comportas do Canal do Panamá. Os sistemas de piloto automático e aterrissagem por instrumentos que ajudam aviões a voar e aterrissar também são conhecidos sistemas de controle.

Sistemas de potência geram e distribuem energia elétrica. A energia elétrica, que é o fundamento de nossa sociedade baseada em tecnologia, normalmente é gerada em grandes quantidades por geradores nucleares, hidrelétricos e térmicos (a carvão, a óleo e a gás) e distribuída por uma rede de condutores que entrecruzam o país. O grande desafio no projeto e operação de tal tipo de sistema é prover redundância e controle suficientes de modo que, se qualquer parte do equipamento falhar, uma cidade, um estado ou uma região não fique completamente sem eletricidade.

Sistemas de processamento de sinais agem sobre sinais elétricos que representam informação. Eles transformam os sinais e a informação neles contida em uma forma mais adequada. Há muitas maneiras diferentes de processar os sinais e suas informações. Por exemplo, sistemas de processamento de imagens coletam quantidades maciças de dados de satélites meteorológicos orbitais, reduzem essas quantidades a um nível tratável e transformam os dados restantes em uma imagem de vídeo que é apresentada no telejornal da noite. Uma tomografia computadorizada (TC) é outro exemplo de sistema de processamento de imagens. Esse equipamento usa sinais gerados por uma máquina especial de raios X e os transforma em uma imagem. Embora os sinais originais de raios X sejam de pouca utilidade para um médico, uma vez processados e transformados em uma imagem reconhecível, as informações que contêm podem ser usadas para diagnosticar doenças e lesões.

Uma grande interação ocorre entre as disciplinas da engenharia envolvidas no projeto e na operação dessas cinco classes de sistemas. Assim, engenheiros de comunicação usam computadores digitais para controlar o fluxo de informações. Computadores contêm sistemas de controle, e sistemas de controle contêm computadores. Sistemas de potência requerem extensos sistemas de comunicação para coordenar com segurança e confiabilidade a operação de componentes que podem estar dispersos por todo um continente. Um sistema de processamento de sinais pode envolver um sistema de comunicações, um computador e um sistema de controle.

Um bom exemplo da interação entre sistemas é o avião comercial. Um sofisticado sistema de comunicações possibilita que o piloto e o controlador de tráfego aéreo monitorem a localização da aeronave, permitindo que o controlador de-

termine uma rota de vôo segura para todas as aeronaves próximas e habilitando o piloto a manter o avião em sua rota designada. Nos aviões comerciais mais novos, um sistema de computador de bordo é usado para gerenciar funções do motor, implementar os sistemas de controle de navegação e controle de vôo e gerar telas de informação em vídeo na cabine. Um complexo sistema de controle utiliza comandos de cabine para ajustar a posição e a velocidade do avião, produzindo os sinais adequados para os motores e superfícies de controle (como os flaps de asas, ailerons e leme) para assegurar que o avião permaneça no ar com segurança e na rota de vôo desejada. O avião deve ter seu próprio sistema de fornecimento de eletricidade para se manter no ar e gerar e distribuir a energia elétrica necessária para manter as luzes da cabine acesas, fazer o café e exibir o filme. Sistemas de processamento de sinais reduzem o ruído nas comunicações de tráfego aéreo e transformam informações sobre a localização do avião para uma forma mais significativa, por meio de imagens em uma tela de vídeo na cabine. São muitos os desafios de engenharia envolvidos no projeto de cada um desses sistemas e em sua integração para um todo coerente. Por exemplo, esses sistemas devem operar em condições ambientais muito variáveis e imprevisíveis. Talvez o mais importante desafio da engenharia seja garantir que os projetos incorporem redundância suficiente para assegurar que os passageiros cheguem com segurança e na hora certa aos destinos desejados.

Embora o interesse primordial dos engenheiros eletricistas possa estar restrito a uma única área, eles também têm de conhecer as outras áreas que interagem com a de seu interesse. Essa interação é parte do que torna a engenharia elétrica uma profissão desafiadora e estimulante. A ênfase da engenharia é fazer com que as coisas funcionem, portanto um engenheiro está livre para aprender e utilizar qualquer técnica, de qualquer campo, que o ajude a fazer o que tem de ser feito.

Teoria de circuitos

Em um campo tão amplo quanto o da engenharia elétrica, muitos podem se perguntar se todas as ramificações dessa área têm alguma coisa em comum. A resposta é sim — os circuitos elétricos. Um *circuito elétrico* é um modelo matemático que se comporta aproximadamente como um sistema elétrico real. Como tal, proporciona uma fundamentação importante para aprender — nos cursos que você fará mais tarde e também em sua prática da engenharia — os detalhes de como projetar e operar sistemas como os que acabamos de descrever. Os modelos, as técnicas matemáticas e a linguagem da teoria de circuitos formarão a estrutura intelectual para seus futuros empreendimentos na engenharia.

Observe que o termo *circuito elétrico* costuma ser utilizado para referir-se a um sistema elétrico propriamente dito, bem como ao modelo que o representa. Neste livro, quando falarmos de um circuito elétrico, isso sempre significará um modelo, a menos que se afirme o contrário. É o aspecto de modelagem da teoria de circuitos que tem ampla aplicação em todas as disciplinas da engenharia.

A teoria de circuitos é um caso especial da teoria eletromagnética: o estudo de cargas elétricas estáticas e em movimento. Embora aparentemente a teoria geral do campo seja um ponto de partida adequado para investigar sinais elétricos, sua aplicação, além de ser difícil, também requer a utilização de matemática avançada. Por conseqüência, um curso de teoria eletromagnética não é um pré-requisito para entender o material apresentado neste livro. No entanto, supomos que você já tenha feito um curso de introdução à física, no qual os fenômenos elétricos e magnéticos foram discutidos.

Três premissas básicas nos permitem utilizar a teoria de circuitos, em vez da teoria eletromagnética, para estudar um sistema físico representado por um circuito elétrico. Essas premissas são as seguintes:

1. *Efeitos elétricos acontecem instantaneamente em todo o sistema*. Podemos adotar essa premissa porque sabemos que sinais elétricos se propagam à velocidade da luz ou próximo dela. Assim, se o sistema for suficientemente pequeno em termos físicos,[1] sinais elétricos o percorrem com tanta rapidez que podemos considerar que afetam todos os pontos do sistema simultaneamente. Um sistema que é pequeno o suficiente para permitir que adotemos essa premissa é denominado *sistema de parâmetros concentrados*.
2. *A carga líquida em cada componente do sistema é sempre zero*. Desse modo, nenhum componente pode acumular um excesso líquido de carga, embora alguns componentes, como você aprenderá mais adiante, possam conter cargas separadas iguais, porém opostas.
3. *Não há nenhum acoplamento magnético entre os componentes de um sistema*. Como demonstraremos mais adiante, o acoplamento magnético pode ocorrer dentro de um componente.

É isso; não há outras premissas. A utilização da teoria de circuitos proporciona soluções simples (com precisão suficiente) para problemas que se tornariam irremediavelmente complicados se usássemos a teoria eletromagnética. Esses benefícios são tão grandes que, às vezes, os engenheiros projetam sistemas elétricos especificamente para garantir que essas premissas sejam cumpridas. A importância das premissas 2 e 3 ficará evidente após apresentarmos os elementos básicos de circuito e as regras para analisar elementos interconectados.

Contudo, precisamos examinar mais de perto a premissa 1. A pergunta é: "Que tamanho um sistema físico deve ter para ser qualificado como um sistema de parâmetros concentrados?" Podemos responder à pergunta pelo lado quantitativo, observando que sinais elétricos se propagam como ondas. Se o comprimento de onda do sinal for grande em comparação às dimensões físicas do sistema, temos um sistema de parâmetros concentrados. O comprimento de onda λ é a velocidade dividida pela taxa de repetição, ou *freqüência*, do sinal; isto é, $\lambda = c/f$. A freqüência f é medida em hertz

[1]Essa afirmação deve ser lida tendo-se em vista o que se afirma no último parágrafo desta página (N.RT.).

(Hz). Por exemplo, sistemas de distribuição de energia elétrica nos Estados Unidos funcionam a 60 Hz. Se usarmos a velocidade da luz ($c = 3 \times 10^8$ m/s) como a velocidade de propagação, o comprimento de onda será 5×10^6 m. Se a dimensão física do sistema em questão for menor do que esse comprimento de onda, podemos representá-lo como um sistema de parâmetros concentrados e usar a teoria de circuitos para analisar seu comportamento. Como definimos *menor*? Uma boa regra é a *regra do 1/10:* se a dimensão do sistema for 1/10 (ou menos) da dimensão do comprimento de onda, temos um sistema de parâmetros concentrados. Assim, contanto que a dimensão física do sistema de potência seja menor do que 5×10^5 m, podemos tratá-lo como um sistema de parâmetros concentrados.

Por outro lado, a freqüência de propagação de sinais de rádio é da ordem de 10^9 Hz. Portanto, o comprimento de onda é 0,3 m. Usando a regra do 1/10, as dimensões relevantes de um sistema de comunicação que envia ou recebe sinais de rádio devem ser menores do que 3 cm para qualificá-lo como um sistema de parâmetros concentrados. Sempre que qualquer das dimensões físicas pertinentes a um sistema sob estudo se aproximar do comprimento de onda de seus sinais, devemos usar a teoria eletromagnética para analisá-lo. Neste livro, estudamos circuitos derivados de sistemas de parâmetros concentrados.

Resolução de problemas

Como engenheiro, ninguém lhe pedirá para resolver problemas que já foram resolvidos. Caso deseje melhorar o desempenho de um sistema existente ou criar um novo sistema, você trabalhará com problemas não resolvidos. Entretanto, como estudante, você devotará muito de sua atenção à discussão de problemas que já foram resolvidos. Ao ler sobre esses problemas, discutir como foram solucionados no passado e resolver sozinho problemas relacionados, em casa ou em exames, você começará a desenvolver as habilidades para atacar com sucesso os problemas não resolvidos que encontrará como engenheiro.

Apresentamos a seguir alguns procedimentos gerais para a resolução de problemas. Muitos deles se referem a pensar em sua estratégia de solução e organizá-la *antes* de partir para os cálculos.

1. *Identifique o que é dado e o que tem de ser encontrado.* Ao resolver problemas, você precisa saber qual é seu destino antes de escolher um caminho para chegar lá. O que o problema está pedindo que você resolva ou determine? Às vezes, o objetivo do problema é óbvio; outras vezes, pode ser que você precise parafrasear o problema ou organizar listas ou tabelas de informações conhecidas e desconhecidas para perceber seu objetivo.

   O enunciado do problema pode conter informações irrelevantes que você precisa filtrar e descartar antes de prosseguir. Por outro lado, pode oferecer informações incompletas ou complexidades maiores do que se pode considerar com os métodos de solução à sua disposição. Nesse caso, você precisará adotar premissas para complementar as informações ou simplificar o contexto do problema. Caso seus cálculos fiquem 'emperrados' ou produzam uma resposta que aparentemente não tem sentido, esteja preparado para voltar e reconsiderar informações e/ou premissas que você achou que eram irrelevantes.
2. *Desenhe um diagrama do circuito ou outro modelo visual.* Traduzir a descrição verbal de um problema em um modelo visual costuma ser uma etapa útil no processo de solução. Se já houver um diagrama do circuito, pode ser que você tenha de acrescentar informações a ele, tais como rótulos, valores ou direções de referência. Talvez você também tenha de desenhar novamente o circuito em uma forma mais simples, porém equivalente. Mais adiante, neste livro, você aprenderá os métodos para desenvolver tais circuitos equivalentes simplificados.
3. *Considere vários métodos de solução e decida como escolher um.* Este curso o ajudará a montar um conjunto de ferramentas analíticas, muitas das quais poderão funcionar em um dado problema. No entanto, um método pode produzir um número menor de equações a serem resolvidas do que outro, ou exigir apenas cálculo algébrico em vez de cálculo diferencial ou integral para achar a solução. Se você puder prever tais procedimentos eficientes, também poderá organizar seus cálculos de um modo muito melhor. Ter um método alternativo em mente pode ser útil caso sua primeira tentativa de solução não funcione.
4. *Encontre uma solução.* Seu planejamento até este ponto deve tê-lo ajudado a identificar um bom método analítico e as equações corretas para o problema. Agora vem a solução dessas equações. Há métodos que utilizam lápis e papel, calculadora e computadores, e todos estão disponíveis para executar os cálculos propriamente ditos da análise de circuitos. A eficiência e as preferências de seu instrutor indicarão quais ferramentas você deve usar.
5. *Use sua criatividade.* Se você suspeitar que sua resposta não tem base ou que seus cálculos aparentemente não o estão levando a uma solução, pare e pense em alternativas. Talvez você tenha de rever suas premissas ou selecionar um método de solução diferente. Ou, então, pode ser que você precise adotar uma abordagem menos convencional para a resolução do problema, como trabalhar no sentido inverso, partindo de uma solução. Este livro dá as respostas para todos os Problemas para Avaliação e para muitos dos problemas de final de capítulo, de modo que você pode trabalhar no sentido inverso quando emperrar em algum ponto. No mundo real, você não terá respostas com antecedência, mas poderá ter em mente um resultado desejado a partir do qual poderá trabalhar em sentido inverso. Entre outras abordagens criativas, podem-se fazer comparações com outros tipos de problemas que você já resolveu com sucesso, seguir sua intuição ou pressentimento sobre como prosseguir, ou simplesmente deixar o problema de lado por um tempo e voltar a ele mais tarde.

6. *Teste sua solução.* Pergunte a si mesmo se a solução que obteve faz sentido. A magnitude da resposta parece razoável? A solução pode ser realizada em termos físicos? Talvez você queira ir mais fundo e resolver novamente o problema usando um método alternativo. Isso não somente testará a validade de sua resposta original, mas também o ajudará a desenvolver sua intuição sobre os métodos de solução mais eficientes para vários tipos de problemas. No mundo real, projetos em que a segurança é crítica são sempre verificados por vários meios independentes. Adquirir o hábito de verificar suas respostas só lhe trará benefícios, seja como estudante ou como engenheiro.

Essas etapas de resolução de problemas não podem ser usadas como uma receita para resolver todo problema que aparecer neste ou em outro curso qualquer. Talvez você tenha de pular ou mudar a ordem de alguma etapa, ou ainda elaborar outras etapas para resolver determinado problema. Use essas etapas como uma diretriz para desenvolver um estilo de resolução de problemas que funcione para você.

1.2 O Sistema Internacional de Unidades

Engenheiros comparam resultados teóricos com resultados experimentais e comparam projetos de engenharia concorrentes usando medidas quantitativas. A engenharia moderna é uma profissão multidisciplinar na qual equipes de engenheiros trabalham juntas em projetos e só podem comunicar seus resultados de modo significativo se todos usarem as mesmas unidades de medida. O Sistema Internacional de Unidades (abreviado como SI) é usado por todas as principais sociedades de engenharia e pela maioria dos engenheiros em todo o mundo; por conseqüência, nós o usamos neste livro.

As unidades do SI são baseadas em sete quantidades *definidas:*

- comprimento;
- massa;
- tempo;
- corrente elétrica;
- temperatura termodinâmica;
- quantidade de substância;
- intensidade luminosa.

Essas quantidades, juntamente com a unidade básica e o símbolo para cada uma, são apresentadas na Tabela 1.1. Embora não sejam unidades do SI em sentido estrito, as conhecidas unidades de tempo, como o minuto (60 s), a hora (3.600 s) e assim por diante, são freqüentemente usadas em cálculos de engenharia. Além disso, quantidades definidas são combinadas para formar unidades *derivadas.* Algumas, como força, energia, potência e carga elétrica, você já conhece de outros cursos de física. A Tabela 1.2 apresenta uma lista das unidades derivadas usadas neste livro.

Em muitos casos, a unidade do SI é muito pequena ou muito grande para ser usada convenientemente. Então, prefixos padronizados, correspondentes a potências de 10, são aplicados à unidade básica, como mostra a Tabela 1.3. Todos esses prefixos são corretos, mas os engenheiros costumam usar apenas os que representam potências divisíveis por 3; assim, centi, deci, deca e hecto são raramente usados. Ademais, eles freqüentemente selecionam o prefixo que traz o número base para a faixa entre 1 e 1.000. Suponha que um cálculo de tempo dê como resultado 10^{-5} s, isto é, 0,00001 s. A maioria dos engenheiros descreveria essa quantidade como 10 μs, isto é, $10^{-5} = 10 \times 10^{-6}$ s, em vez de 0,01 ms ou 10.000.000 ps.

TABELA 1.1 O sistema Internacional de Unidades (SI)

Quantidade	Unidade básica	Símbolo
Comprimento	metro	m
Massa	quilograma	kg
Tempo	segundo	s
Corrente elétrica	ampère	A
Temperatura termodinâmica	grau kelvin	K
Quantidade de substância	mol	mol
Intensidade luminosa	candela	cd

✔ PROBLEMAS PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 1 — Entender e saber utilizar as unidades do SI e os prefixos padronizados para potências de 10

1.1 Quantos dólares por milissegundo o Governo Federal teria de arrecadar para cobrir um déficit de $ 100 bilhões em um ano?

Resposta: $ 3,17/ms.

1.2 Se um sinal pode percorrer um cabo a 80% da velocidade da luz, qual comprimento de cabo, em polegadas, representa 1 ns?

Resposta: 9,45".

NOTA: Tente resolver também os problemas 1.1, 1.3 e 1.6, apresentados no final deste capítulo.

TABELA 1.2 Unidades derivadas no SI

Quantidade	Nome da unidade (Símbolo)	Fórmula
Freqüência	hertz (Hz)	s^{-1}
Força	newton (N)	$kg \cdot m/s^2$
Energia ou trabalho	joule (J)	$N \cdot m$
Potência	watt (W)	J/s
Carga elétrica	coulomb (C)	$A \cdot s$
Potencial elétrico	volt (V)	J/C
Resistência elétrica	ohm (Ω)	V/A
Condutância elétrica	siemens (S)	A/V
Capacitância elétrica	farad (F)	C/V
Fluxo magnético	weber (Wb)	$V \cdot s$
Indutância	henry (H)	Wb/A

TABELA 1.3 Prefixos padronizados que representam potências de 10

Prefixo	Símbolo	Potência
atto	a	10^{-18}
femto	f	10^{-15}
pico	p	10^{-12}
nano	n	10^{-9}
micro	μ	10^{-6}
mili	m	10^{-3}
centi	c	10^{-2}
deci	d	10^{-1}
deca	da	10
hecto	h	10^{2}
quilo	k	10^{3}
mega	M	10^{6}
giga	G	10^{9}
tera	T	10^{12}

1.3 Análise de circuitos: uma visão geral

Antes de nos envolvermos nos detalhes da análise de circuitos, precisamos obter uma visão geral do que é um projeto de engenharia e, especificamente, um projeto de circuitos elétricos. A finalidade disso é fornecer uma perspectiva do lugar que a análise de circuitos ocupa no contexto total do projeto de circuitos. Embora este livro focalize a análise de circuitos, tentamos oferecer oportunidades para projetos de circuito, quando adequado.

Todos os projetos de engenharia começam com uma necessidade, como mostra a Figura 1.2. Essa necessidade pode surgir do desejo de melhorar um projeto existente ou pode ser algo totalmente novo. Uma cuidadosa avaliação da necessidade resulta em especificações de projeto, que são características mensuráveis de um projeto proposto. Uma vez proposto um projeto, suas especificações nos permitem avaliar se ele realmente atende ou não à necessidade.

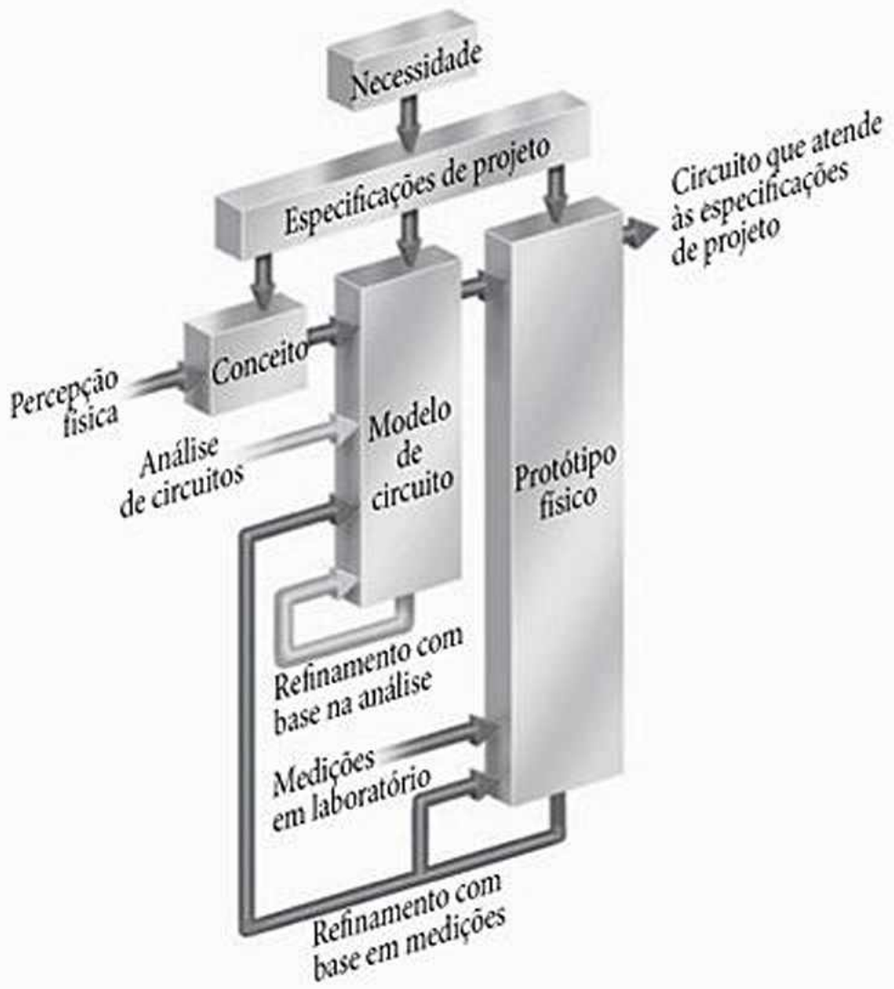


Figura 1.2 ▲ Modelo conceitual para projeto de engenharia elétrica.

Em seguida, vem o conceito para o projeto. O conceito deriva de um entendimento completo das especificações de projeto, aliado a uma percepção da necessidade, que vem da educação e da experiência. O conceito pode ser materializado como um esboço, como uma descrição por escrito ou de alguma outra forma. Geralmente, a etapa seguinte é traduzir o conceito em um modelo matemático. O modelo matemático que costuma ser usado para sistemas elétricos é um *modelo de circuito*.

Os elementos que compreendem o modelo de circuito são denominados *componentes ideais de circuito*. Um componente ideal de circuito é um modelo matemático de um componente elétrico propriamente dito, como uma bateria ou uma lâmpada elétrica. É importante que o componente ideal usado em um modelo represente o comportamento do componente elétrico real com um grau de precisão aceitável. Então, as ferramentas de análise de circuitos, foco deste livro, são aplicadas ao circuito. Essa análise é baseada em técnicas matemáticas e usada para prever o comportamento do modelo e de seus componentes ideais. Uma comparação entre o comportamento desejado, dado pelas especificações de projeto, e o comportamento previsto, a partir da *análise de circuitos*, pode resultar no refinamento do modelo e seus elementos ideais. Uma vez que os comportamentos desejados e previstos estejam em concordância, pode-se construir um protótipo físico.

O *protótipo físico* é um sistema elétrico real, construído com componentes elétricos reais. Técnicas de medição são utilizadas para determinar o comportamento quantitativo, real, do sistema físico. Esse comportamento real é comparado com o comportamento desejado dado pelas especificações de projeto e com o comportamento previsto pela análise de circuitos. As comparações podem resultar em refinamentos

do protótipo físico, do modelo de circuito ou de ambos. A certa altura, esse processo iterativo, pelo qual modelos, componentes e sistemas são continuamente refinados, pode produzir um projeto que cumpre, com precisão, as especificações de projeto e, portanto, atende à necessidade.

Essa descrição deixa claro que a análise de circuitos desempenha um papel muito importante no processo de projeto. Como a análise de circuitos é aplicada a modelos de circuito, engenheiros profissionais procuram usar modelos de circuitos já testados, de modo que os projetos resultantes atenderão às especificações na primeira iteração. Neste livro, usamos modelos que foram testados durante um período de 20 a 100 anos; podemos supor que são modelos maduros. A capacidade de modelar sistemas elétricos reais com elementos ideais de circuito torna a teoria de circuitos muito útil para os engenheiros.

Afirmar que a interconexão de elementos ideais de circuito pode ser usada para fazer uma previsão quantitativa do comportamento de um sistema implica que podemos descrever a interconexão por meio de equações matemáticas. Para que as equações matemáticas sejam úteis, devemos escrevê-las em termos de grandezas mensuráveis. No caso de circuitos, essas grandezas são tensão e corrente, que discutiremos na Seção 1.4. O estudo da análise de circuitos envolve entender o comportamento de cada elemento ideal de circuito em termos de sua tensão e sua corrente e entender as restrições impostas a elas como resultado da interconexão dos elementos ideais.

1.4 Tensão e corrente

O conceito de carga elétrica é a base para descrever todos os fenômenos elétricos. Vamos revisar algumas características da carga elétrica.

- A carga é bipolar, o que significa que efeitos elétricos são descritos em termos de cargas positivas e negativas.
- A carga elétrica existe em quantidades discretas, que são múltiplos inteiros da carga eletrônica, $1{,}6022 \times 10^{-19}$ C.
- Efeitos elétricos são atribuídos tanto à separação entre cargas quanto a cargas em movimento.

Na teoria de circuitos, a separação entre cargas dá origem a uma força elétrica (tensão), e seu movimento dá origem a um fluxo elétrico (corrente).

Os conceitos de tensão e corrente são úteis do ponto de vista da engenharia porque podem ser expressos quantitativamente. Sempre que cargas positivas e negativas estão separadas, há gasto de energia. *Tensão* é a energia por unidade de carga criada pela separação. Expressamos essa razão em forma diferencial como

$$v = \frac{dw}{dq}, \tag{1.1}$$

(Definição de tensão)

onde

v = a tensão em volts,
w = a energia em joules,
q = a carga em coulombs.

Os efeitos elétricos causados por cargas em movimento dependem da variação temporal de carga. Essa variação de carga é conhecida como *corrente elétrica* e é expressa como

$$i = \frac{dq}{dt}, \tag{1.2}$$

(Definição de corrente)

onde

i = a corrente elétrica em ampères,
q = a carga em coulombs,
t = o tempo em segundos.

As equações 1.1 e 1.2 são definições para a magnitude de tensão e corrente, respectivamente. A natureza bipolar da carga elétrica requer que designemos referências de polaridade a essas variáveis, o que faremos na Seção 1.5.

Embora a corrente seja composta de elétrons discretos em movimento, não precisamos considerá-los individualmente por causa de sua enorme quantidade. Mais exatamente, podemos imaginar elétrons e suas cargas correspondentes como uma única entidade fluindo suavemente. Assim, i é tratada como uma grandeza contínua.

Uma vantagem de usar modelos de circuito é que podemos modelar um componente estritamente em termos da tensão e da corrente em seus terminais. Por isso, dois componentes com estruturas físicas diferentes podem ter a mesma relação entre a tensão e a corrente no terminal. Se isso ocorrer, no que concerne à análise de circuitos, eles são idênticos. Uma vez que sabemos como um componente se comporta em seus terminais, podemos analisar seu comportamento em um circuito. Contudo, quando desenvolvemos modelos de circuitos, estamos interessados no comportamento interno de um componente. Por exemplo, poderíamos querer saber se a condução de carga está ocorrendo porque há elétrons livres se movimentando pela estrutura cristalina de um metal ou se é por causa de elétrons que estão se movimentando dentro das ligações covalentes de um material semicondutor. Todavia, essas questões estão além do domínio da teoria de circuitos. Neste livro, usamos modelos de circuitos que já foram desenvolvidos; não discutimos como são desenvolvidos modelos de componentes.

1.5 O elemento básico ideal de circuito

Um *elemento básico ideal de circuito* tem três atributos: (1) tem apenas dois terminais, que são pontos de conexão com outros componentes de circuito; (2) é descrito matematicamente em termos de corrente e/ou tensão e (3) não

pode ser subdividido em outros elementos. Usamos a palavra *ideal* para indicar que um elemento básico de circuito não existe como um componente físico materializável. Contudo, como discutimos na Seção 1.3, elementos ideais podem ser conectados para modelar dispositivos e sistemas reais. Usamos a palavra *básico* para indicar que o elemento de circuito não pode ser reduzido ainda mais ou subdividido em outros elementos. Assim, os elementos básicos de circuito são os blocos construtivos para a elaboração de modelos de circuitos, mas, por si sós, eles não podem ser modelados com qualquer outro tipo de elemento.

A Figura 1.3 é uma representação de um elemento básico ideal de circuito. O quadrado está em branco porque nesse momento não nos interessa que tipo de elemento de circuito ele é. Nessa figura, a tensão nos terminais do quadrado é denotada por v, e a corrente no elemento de circuito é denotada por i. A referência de polaridade para a tensão é indicada pelos sinais de mais e menos, e a direção de referência para a corrente é mostrada pela seta que aponta o sentido de seu fluxo. A interpretação dessas referências, quando são dados valores numéricos positivos ou negativos para v e para i, está resumida na Tabela 1.4. Note que, em linguagem algébrica, a noção de uma carga positiva que flui em uma direção é equivalente à de uma carga negativa que flui na direção oposta.

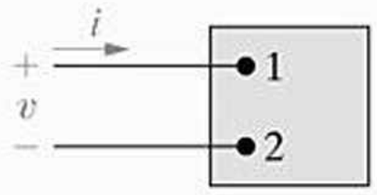


Figura 1.3 ◀ Elemento básico ideal de circuito.

As designações da polaridade de referência para tensão e da direção de referência para corrente são inteiramente arbitrárias. Contudo, uma vez designadas as referências, você deve escrever todas as equações subseqüentes em concordância com as referências escolhidas. A convenção de sinal mais amplamente usada para essas referências é denominada *convenção passiva,* utilizada neste livro. A convenção passiva pode ser enunciada da seguinte maneira:

Convenção passiva: Sempre que a direção de referência para a corrente em um elemento estiver na direção da queda da tensão de referência no elemento (como na Figura 1.3), use um sinal positivo em qualquer expressão que relacione a tensão com a corrente. Caso contrário, use um sinal negativo.

Aplicamos essa convenção de sinal em todas as análises seguintes. Nosso objetivo de apresentá-la antes mesmo de apresentar os diferentes tipos de elementos básicos de circuito é que você grave o fato de que a seleção de referências de polaridade com a adoção da convenção passiva *não* é uma função dos elementos básicos, nem do tipo de interconexões feitas com os elementos básicos. Apresentaremos a aplicação e a interpretação da convenção passiva em cálculos de potência na Seção 1.6.

TABELA 1.4 Interpretação das direções de referência na Figura 1.3

	Valor positivo	Valor negativo
v	queda de tensão do terminal 1 para o terminal 2 *ou* elevação de tensão do terminal 2 para o terminal 1	elevação de tensão do terminal 1 para o terminal 2 *ou* queda de tensão do terminal 2 para o terminal 1
i	fluxo de carga positiva do terminal 1 para o terminal 2 *ou* fluxo de carga negativa do terminal 2 para o terminal 1	fluxo de carga positiva do terminal 2 para o terminal 1 *ou* fluxo de carga negativa do terminal 1 para o terminal 2

✔ PROBLEMAS PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 2 — Conhecer e saber utilizar as definições de tensão e corrente

1.3 A corrente nos terminais do elemento da Figura 1.3 é

$$i = 0, \qquad t < 0$$
$$i = 20e^{-5.000t}\ \text{A}, \qquad t \geq 0$$

Calcule a carga total (em microcoulombs) que entra no elemento em seu terminal superior.

Resposta: 4.000 μC.

1.4 A expressão para a carga que entra no terminal superior da Figura 1.3 é

$$q = \frac{1}{\alpha^2} - \left(\frac{t}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}\right)e^{-\alpha t}\ \text{C}.$$

Determine o valor máximo da corrente elétrica que entra no terminal se $\alpha = 0{,}03679\ \text{s}^{-1}$.

Resposta: 10 A.

NOTA: Tente resolver também o Problema 1.9, apresentado no final deste capítulo.

1.6 Potência e energia

Cálculos de potência e energia também são importantes na análise de circuitos. Uma razão é que, embora tensão e corrente sejam variáveis úteis na análise e no projeto de sistemas que utilizam a eletricidade, muitas vezes o resultado útil do sistema não é expresso em termos elétricos, mas em termos de potência ou energia. Outra razão é que todos os dispositivos práticos têm uma limitação para a quantidade de potência que podem manipular. Por conseqüência, no processo de projeto os cálculos de tensão e corrente não são suficientes por si sós.

Agora, relacionaremos potência e energia com tensão e corrente e, ao mesmo tempo, utilizaremos o cálculo de potência para ilustrar a convenção passiva. Com base na física básica, lembre-se de que potência é a taxa de variação temporal do gasto ou da absorção de energia. (Uma bomba d'água de 75 kW pode bombear mais litros por segundo do que uma de 7,5 kW.) Em linguagem matemática, a energia por unidade de tempo é expressa na forma de uma derivada, ou

$$p = \frac{dw}{dt}, \tag{1.3}$$

(Definição de potência)

onde

p = a potência em watts,
w = a energia em joules,
t = o tempo em segundos.

Assim, 1 W é equivalente a 1 J/s.

A potência associada ao fluxo de carga decorre diretamente da definição de tensão e corrente nas equações 1.1 e 1.2, ou

$$p = \frac{dw}{dt} = \left(\frac{dw}{dq}\right)\left(\frac{dq}{dt}\right),$$

portanto

$$p = vi \tag{1.4}$$

(Equação de potência)

onde

p = a potência em watts,
v = a tensão em volts,
i = a corrente em ampères.

A Equação 1.4 mostra que a *potência* associada ao elemento básico de circuito é simplesmente o produto da corrente no elemento pela tensão em seus terminais. Por conseqüência, potência é uma quantidade associada a um par de terminais, e temos de saber determinar, por nossos cálculos, se a potência está sendo fornecida ao par de terminais ou extraída deles. Essa informação se origina da correta aplicação e interpretação da convenção passiva.

Se usarmos a convenção passiva, a Equação 1.4 estará correta se o sentido escolhido para a corrente for o mesmo que o da queda de tensão entre os terminais do elemento. Caso contrário, a Equação 1.4 deve ser escrita com um sinal de menos. Em outras palavras, se o sentido escolhido para a corrente corresponder ao do aumento de tensão, a expressão para a potência deverá ser

$$p = -vi \tag{1.5}$$

O sinal algébrico da potência é baseado no movimento de cargas e em quedas e elevações de tensão. Quando cargas positivas se movimentam através de uma queda de tensão, perdem energia; quando se movimentam através de uma elevação de tensão, ganham energia. A Figura 1.4 resume a relação entre as referências de polaridade para tensão e corrente e a expressão para potência.

Agora podemos enunciar a regra para interpretar o sinal algébrico de potência:

Interpretação do sinal algébrico de potência: Se a potência for positiva (isto é, se $p > 0$), o circuito dentro do quadrado está absorvendo potência. Se a potência for negativa (isto é, se $p < 0$), o circuito dentro do quadrado está fornecendo potência.

Por exemplo, suponha que selecionamos as referências de polaridade mostradas na Figura 1.4(b). Admita ainda que nossos cálculos da corrente e da tensão dão os seguintes resultados numéricos:

$$i = 4 \text{ A} \quad \text{e} \quad v = -10 \text{ V}.$$

Então, a potência associada ao par de terminais 1,2 é

$$p = -(-10)(4) = 40 \text{ W}.$$

Assim, o circuito dentro do quadrado está absorvendo 40 W.

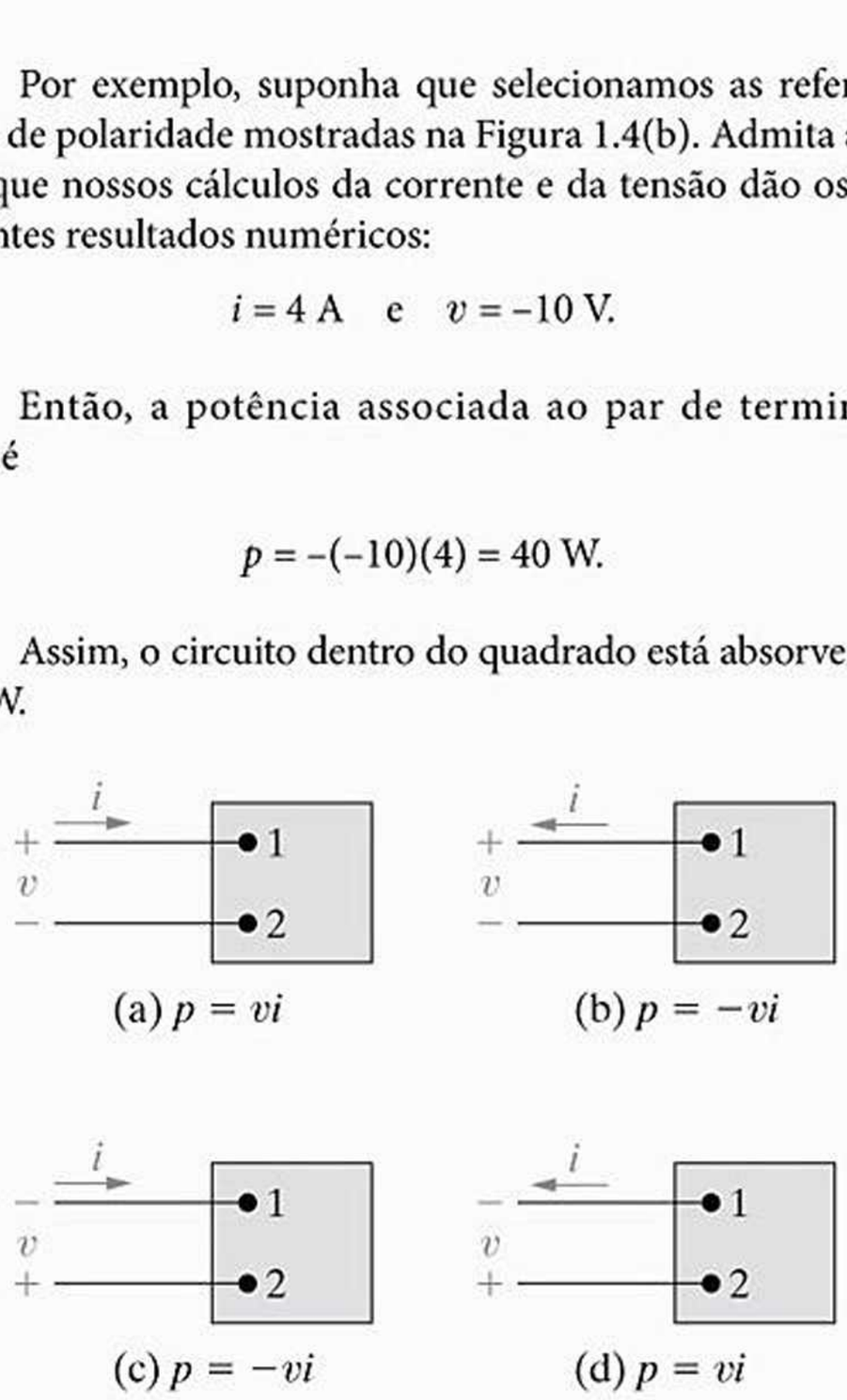


Figura 1.4 ▲ Referências de polaridade e a expressão para potência.

Para levar essa análise mais adiante, suponha que um colega esteja resolvendo o mesmo problema, mas escolheu as polaridades de referência mostradas na Figura 1.4(c). Os valores numéricos resultantes são

$$i = -4 \text{ A}, \quad v = 10 \text{ V} \quad \text{e} \quad p = 40 \text{ W}.$$

Observe que, interpretando esses resultados em termos desse sistema de referência, chegamos às mesmas conclusões que obtivemos antes — ou seja, que o circuito dentro do quadrado está absorvendo 40 W. Na verdade, qualquer dos sistemas de referência da Figura 1.4 leva ao mesmo resultado.

✔ PROBLEMAS PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 3 — Conhecer e saber utilizar as definições de potência e energia; Objetivo 4 — Saber utilizar a convenção passiva

1.5 Suponha que ocorra uma queda de tensão de 20 V em um elemento do terminal 2 para o terminal 1 e que uma corrente elétrica de 4 A entre no terminal 2.

a) Especifique os valores de v e i para as referências de polaridade mostradas na Figura 1.4(a)–(d).
b) Diga se o circuito dentro do quadrado está absorvendo ou liberando potência.
c) Quanta potência o circuito está absorvendo?

Resposta: (a) Circuito 1.4(a): $v = -20$ V, $i = -4$ A;
circuito 1.4(b): $v = -20$ V, $i = 4$ A;
circuito 1.4(c): $v = 20$ V, $i = -4$ A;
circuito 1.4(d): $v = 20$ V, $i = 4$ A;
(b) absorvendo;
(c) 80 W.

1.6 Suponha que a tensão nos terminais do elemento da Figura 1.3, correspondente à corrente elétrica do Problema para Avaliação 1.3, seja

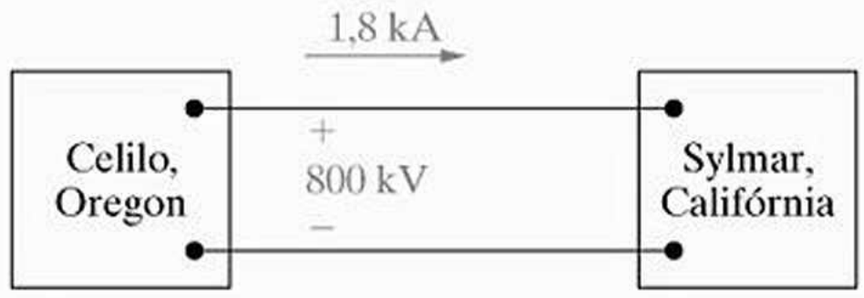
$$v = 0, \ t < 0;$$

$$v = 10e^{-5.000t} \text{ kV}, \ t \geq 0.$$

Calcule a energia total (em joules) fornecida ao elemento de circuito.

Resposta: 20 J.

1.7 Uma linha de transmissão de alta tensão em corrente contínua (CC) entre Celilo, Oregon e Sylmar, na Califórnia está funcionando a 800 kV e transportando 1.800 A, como mostra a figura. Calcule a potência (em megawatts) no terminal de Oregon e indique a direção do fluxo de potência.



Resposta: 1.440 MW, de Celilo para Sylmar.

NOTA: Tente resolver também os problemas 1.12, 1.17, 1.24 e 1.26, apresentados no final deste capítulo.

Resumo

- O Sistema Internacional de Unidades (SI) habilita engenheiros a comunicarem significativamente resultados quantitativos. A Tabela 1.1 resume as unidades básicas do SI; a Tabela 1.2 apresenta algumas unidades derivadas do SI.
- A análise de circuitos é baseada nas variáveis tensão e corrente.
- *Tensão* é a energia por unidade de carga criada pela separação entre cargas e sua unidade do SI é o volt ($v = dw/dq$).
- *Corrente* é a taxa de fluxo de carga e sua unidade do SI é o ampère ($i = dq/dt$).
- O *elemento básico ideal de circuito* é um componente com dois terminais que não pode ser subdividido; ele pode ser descrito matematicamente em termos da tensão e da corrente em seus terminais.
- A *convenção passiva* usa um sinal positivo na expressão que relaciona a tensão e a corrente nos terminais de um elemento quando a direção de referência para a corrente que passa pelo elemento está na direção da queda de tensão de referência no elemento.
- *Potência* é a energia por unidade de tempo e é igual ao produto da tensão e da corrente nos terminais; sua unidade do SI é o watt ($p = dw/dt = vi$).
- O sinal algébrico da potência é interpretado da seguinte forma:
  - Se $p > 0$, ocorre absorção de potência pelo circuito ou pelo componente de circuito.
  - Se $p < 0$, ocorre fornecimento de potência pelo circuito ou pelo componente de circuito.

Problemas

Seção 1.2

1.1* Há aproximadamente 250 milhões de veículos de passageiros registrados nos Estados Unidos. Suponha que a bateria do veículo médio armazene 440 watts-horas (Wh) de energia. Estime (em gigawatts-horas) a energia total armazenada nos veículos de passageiros nos Estados Unidos.

1.2 O comprimento da linha descrita no Problema para Avaliação 1.7 é 845 milhas. A linha contém quatro condutores, cada um pesando 2.526 libras por 1.000 pés. Há quantos quilogramas de condutor na linha?

1.3* O chip de memória flash de 4 gigabytes (GB = 10^9 bytes) de um aparelho de MP3 mede 32 mm por 24 mm por 2,1 mm. Esse chip tem capacidade para armazenar 1.000 músicas de três minutos de duração.

a) Quantos segundos de música cabem em um cubo cujos lados medem 1 mm?

b) Quantos bytes de memória são armazenados em um cubo com lados de 100 μm?

1.4 Um aparelho portátil de vídeo apresenta elementos de imagem de 320 × 240 pixels em cada quadrado do vídeo. Cada pixel requer 2 bytes de memória. Vídeos são apresentados a uma taxa de 30 quadros por segundo. Quantos minutos de vídeo caberão em uma memória de 30 gigabytes?

1.5 Algumas espécies de bambu podem crescer 250 mm/dia. Suponha que as células individuais da planta tenham 10 μm de comprimento.

a) Quanto tempo demora, em média, para que um caule de bambu cresça o equivalente ao comprimento de uma célula?

b) Quantas células são adicionadas em uma semana, em média?

1.6* Um litro (L) de tinta cobre aproximadamente 10 m^2 de parede. Qual é a espessura da camada antes de secar? (*Sugestão*: 1 L = 1 × 10^6 mm^3.)

Seção 1.4

1.7 Uma corrente de 1.200 A flui em um fio de cobre de seção transversal circular (raio = 1,5 mm). A corrente se deve a elétrons livres que se movimentam pelo fio a uma velocidade média de v metros/segundo. Se a concentração de elétrons é 10^{29} elétrons por metro cúbico e se eles estão uniformemente dispersos pelo fio, qual é a velocidade média de um elétron?

1.8 Não é incomum encontrar correntes na faixa de microampère em circuitos eletrônicos. Suponha uma corrente de 35 μA, devido ao fluxo de elétrons. Qual é o número médio de elétrons por segundo que fluem através de uma seção transversal de referência fixa perpendicular à direção do fluxo?

1.9* A corrente que entra no terminal superior da Figura 1.3 é

$$i = 24 \cos 4.000t \text{ A}.$$

Suponha que a carga no terminal superior seja zero no instante em que a corrente está passando por seu valor máximo. Determine a expressão para $q(t)$.

1.10 Quanta energia é extraída de um elétron enquanto ele flui por uma bateria de 6 V do terminal positivo para o terminal negativo? Expresse sua resposta em attojoules.

Seções 1.5–1.6

1.11 Uma bateria de 9 V fornece 100 mA a uma lanterna de camping. Quanta energia a bateria fornece em 5 horas?

1.12* Dois circuitos elétricos, representados pelos quadrados A e B, estão conectados como mostra a Figura P1.12. A direção de referência para a corrente i e a polaridade de referência para a tensão v na interconexão são mostradas na figura. Para cada um dos seguintes conjuntos de valores numéricos, calcule a potência na interconexão e indique se a potência está fluindo de A para B ou vice-versa.

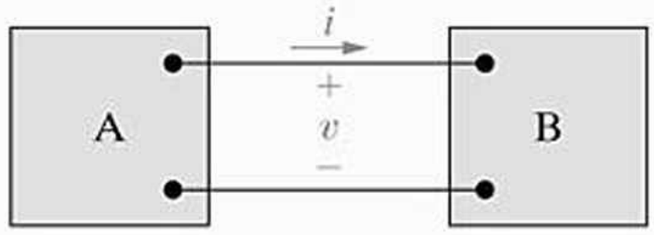
a) $i = 5$ A, $v = 120$ V

b) $i = -8$ A, $v = 250$ V

c) $i = 16$ A, $v = -150$ V

d) $i = -10$ A, $v = -480$ V

Figura P1.12



1.13 As referências para a tensão e a corrente nos terminais de um elemento de circuito são mostradas na Figura 1.4(d). Os valores numéricos para v e i são 40 V e –10 A.

a) Calcule a potência nos terminais e indique se ela está sendo absorvida ou fornecida pelo elemento no quadrado.

b) Dado que a corrente é devida ao fluxo de elétrons, indique se os elétrons estão entrando ou saindo do terminal 2.

c) Os elétrons ganham ou perdem energia quando passam pelo elemento no quadrado?

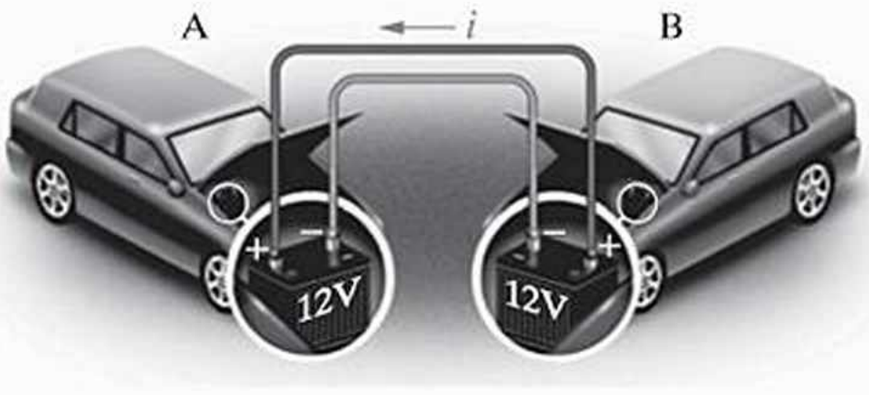
1.14 Repita o Problema 1.13 com uma tensão de –60 V.

1.15 Quando a bateria de um carro está descarregada, pode ser possível fazê-lo dar a partida conectando os terminais de sua bateria aos terminais da bateria de outro carro. Os terminais positivo e negativo de uma bateria são ligados aos terminais positivo e negativo da outra, respectivamente. A conexão é ilustrada na Figura P1.15. Suponha que a corrente i na Figura P1.15 seja 30 A.

a) Qual dos carros está com a bateria descarregada?

b) Se essa conexão for mantida por 1 minuto, quanta energia será transferida para a bateria descarregada?

Figura P1.15



1.16 O fabricante de uma pilha alcalina de lanterna, de 9 V, afirma que a pilha fornecerá 20 mA durante 80 horas contínuas. Durante esse tempo, a tensão cairá de 9 V para 6 V. Suponha que a queda de tensão seja linear em relação ao tempo. Quanta energia a pilha fornecerá nesse intervalo de 80 horas?

1.17* A tensão e a corrente nos terminais do elemento de circuito da Figura 1.3 são zero para $t < 0$. Para $t \geq 0$, elas são

$$v = e^{-500t} - e^{-1.500t}\ \text{V}$$

$$i = 30 - 40e^{-500t} + 10e^{-1.500t}\ \text{mA}$$

a) Determine a potência em $t = 1$ ms.
b) Quanta energia é fornecida ao elemento de circuito entre 0 e 1 ms?
c) Ache a energia total fornecida ao elemento.

1.18 PSPICE A tensão e a corrente nos terminais do elemento de circuito da Figura 1.3 são zero para $t < 0$. Para $t \geq 0$, elas são

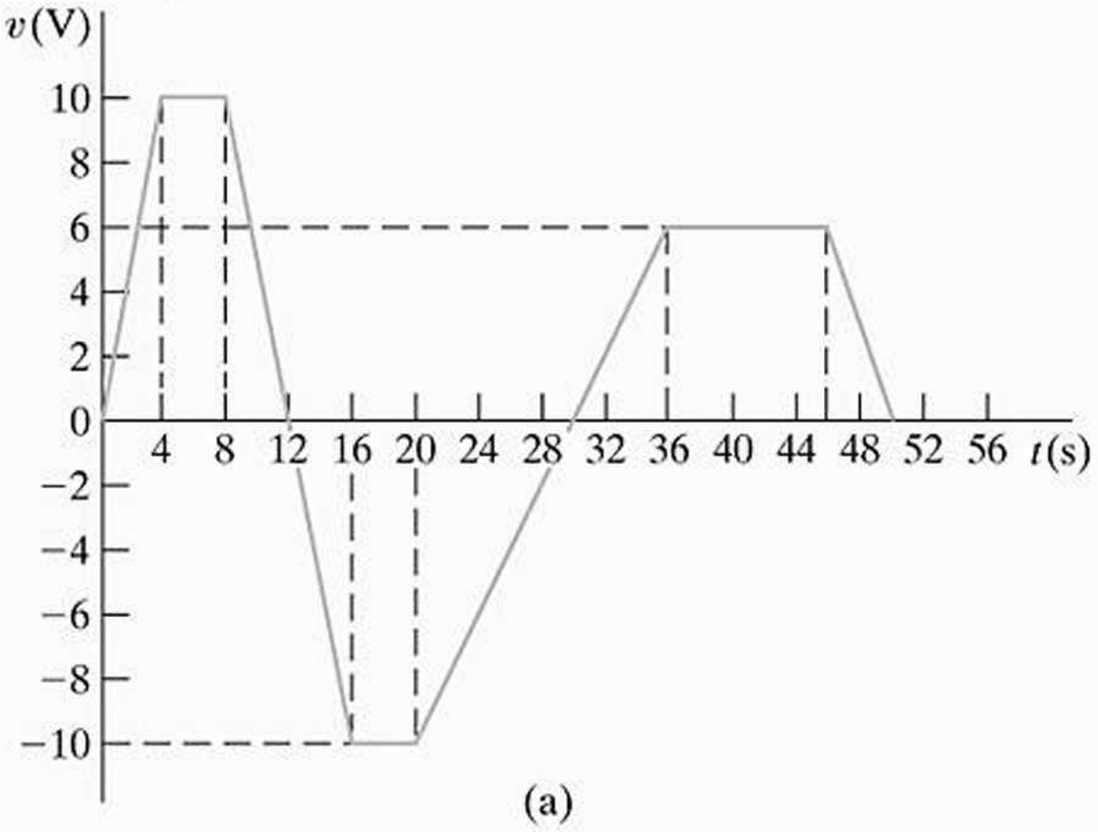
$$v = 400e^{-100t}\ \text{sen}\ 200t\ \text{V},$$

$$i = 5e^{-100t}\ \text{sen}\ 200t\ \text{A}.$$

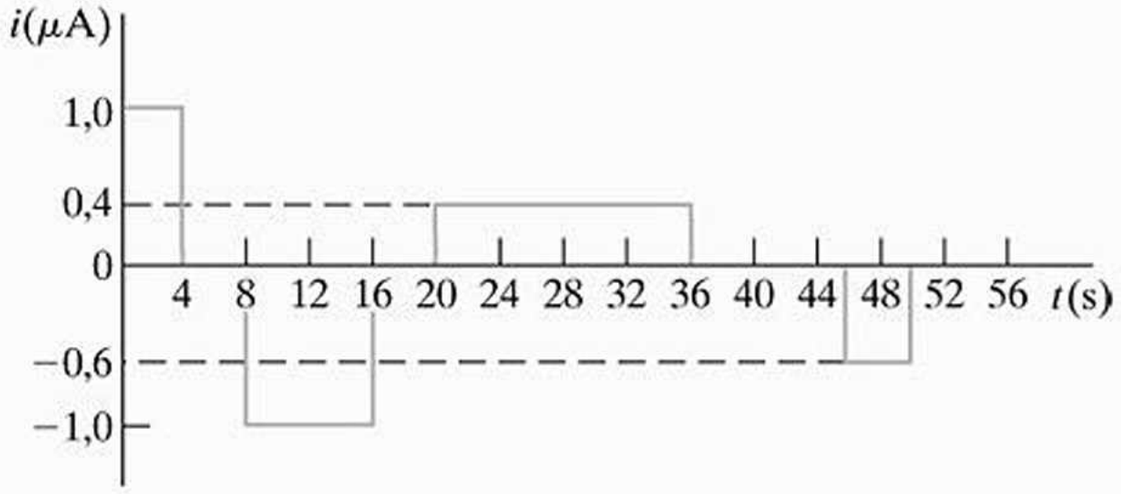
a) Determine a potência absorvida pelo elemento em $t = 10$ ms.
b) Determine a energia total absorvida pelo elemento.

1.19 A tensão e a corrente nos terminais do elemento de circuito da Figura 1.3 são mostradas na Figura P1.19.
a) Desenhe o gráfico da potência *versus* t para $0 \leq t \leq 50$ s.
b) Calcule a energia fornecida ao elemento de circuito em $t = 4$, 12, 36 e 50 s.

Figura P1.19



(a)



(b)

1.20 PSPICE A tensão e a corrente nos terminais do elemento de circuito da Figura 1.3 são zero para $t < 0$. Para $t \geq 0$, elas são

$$v = 75 - 75e^{-1.000t}\ \text{V}$$

$$i = 50e^{-1.000t}\ \text{mA}$$

a) Determine o valor máximo da potência fornecida ao circuito.
b) Determine a energia total fornecida ao elemento.

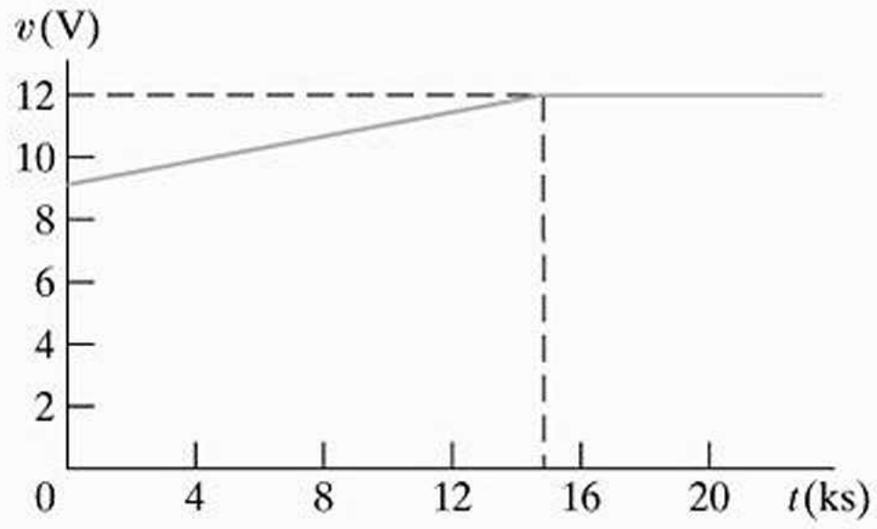
1.21 PSPICE A tensão e a corrente nos terminais do elemento de circuito da Figura 1.3 são

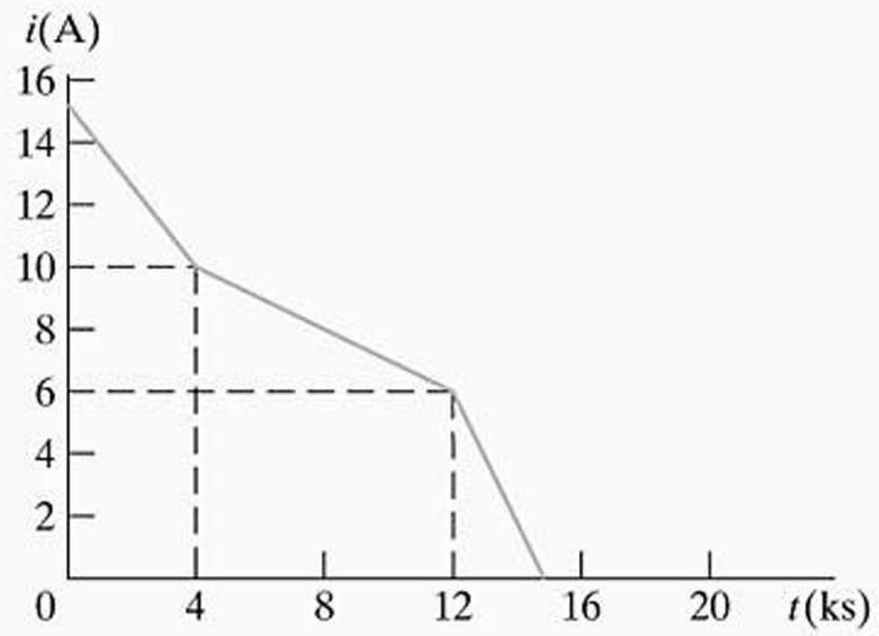
$$v = 36\ \text{sen}\ 200\pi t\ \text{V}, \qquad i = 25\ \cos 200\pi t\ \text{A}.$$

a) Determine o valor máximo da potência fornecida ao elemento.
b) Determine o valor máximo da potência extraída do elemento.
c) Determine o valor médio de p no intervalo $0 \leq t \leq 5$ ms.
d) Determine o valor médio de p no intervalo $0 \leq t \leq 6{,}25$ ms.

1.22 PSPICE A tensão e a corrente nos terminais de uma bateria de automóvel durante um ciclo de carga são mostradas na Figura P1.22.
a) Calcule a carga total transferida para a bateria.
b) Calcule a energia total transferida para a bateria.

Figura P1.22





1.23 PSPICE A tensão e a corrente nos terminais do elemento de circuito da Figura 1.3 são zero para $t < 0$. Para $t \geq 0$, elas são

$$v = (16.000t + 20)e^{-800t}\ \text{V},$$

$$i = (128t + 0{,}16)e^{-800t}\ \text{A}.$$

a) Em que instante a potência máxima é fornecida ao elemento?

b) Determine a potência máxima em watts.

c) Determine a energia total fornecida ao elemento em milijoules.

1.24* PSPICE A tensão e a corrente nos terminais do elemento de circuito da Figura 1.3 são zero para $t < 0$ e $t > 3$ s. No intervalo entre 0 e 3 s, as expressões são

$$v = t(3 - t)\ \text{V}, 0 < t < 3\ \text{s};$$

$$i = 6 - 4t\ m\text{A}, 0 < t < 3\ \text{s}.$$

a) Em que instante a potência que está sendo fornecida ao elemento de circuito é máxima?

b) Qual é a potência no instante encontrado na parte (a)?

c) Em que instante a potência que está sendo extraída do elemento de circuito é máxima?

d) Qual é a potência no instante encontrado na parte (c)?

e) Calcule a energia líquida fornecida ao circuito em 0, 1, 2 e 3 s.

1.25 PSPICE A tensão e a corrente nos terminais do elemento de circuito da Figura 1.3 são zero para $t < 0$. Para $t \geq 0$, elas são:

$$v = (10.000t + 5)e^{-400t}\ \text{V}, \quad t \geq 0;$$

$$i = (40t + 0{,}05)e^{-400t}\ \text{A}, \quad t \geq 0.$$

a) Determine o instante (em milissegundos) em que a potência fornecida ao elemento de circuito é máxima.

b) Determine o valor máximo de p em miliwatts.

c) Determine a energia total fornecida ao elemento de circuito em milijoules.

1.26* Os valores numéricos para as correntes e tensões no circuito da Figura P1.26 são dados na Tabela P1.26. Determine a potência total desenvolvida no circuito.

Figura P1.26

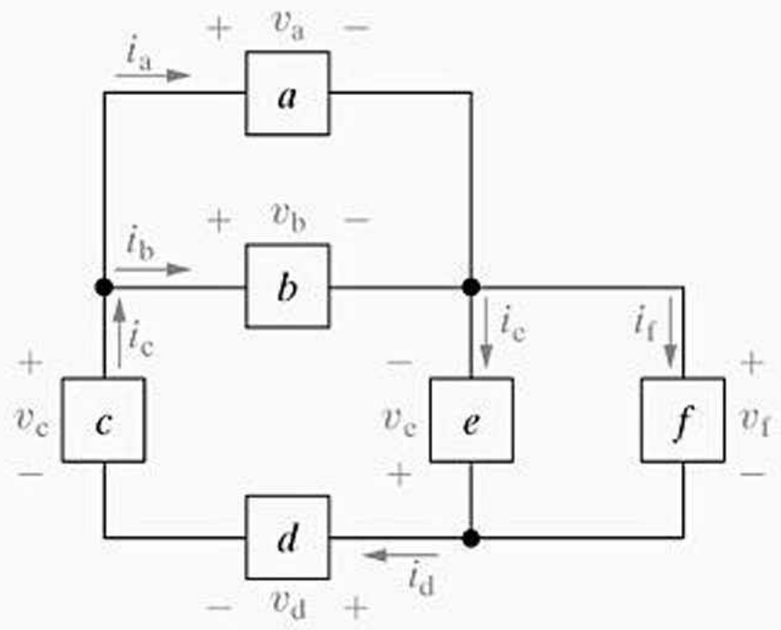


TABELA P1.26

Elemento	Tensão (mV)	Corrente (A)
a	150	0,6
b	150	−1,4
c	100	−0,8
d	250	−0,8
e	300	−2,0
f	−300	1,2

1.27 Suponha que você seja o engenheiro encarregado de um projeto e um de seus engenheiros subordinados informe que a interconexão da Figura P1.27 não passa no teste de potência. Os dados para a interconexão são fornecidos na Tabela P1.27.

a) O subordinado está certo? Explique por quê.

b) Se o subordinado estiver certo, você pode determinar o erro nos dados?

Figura P1.27

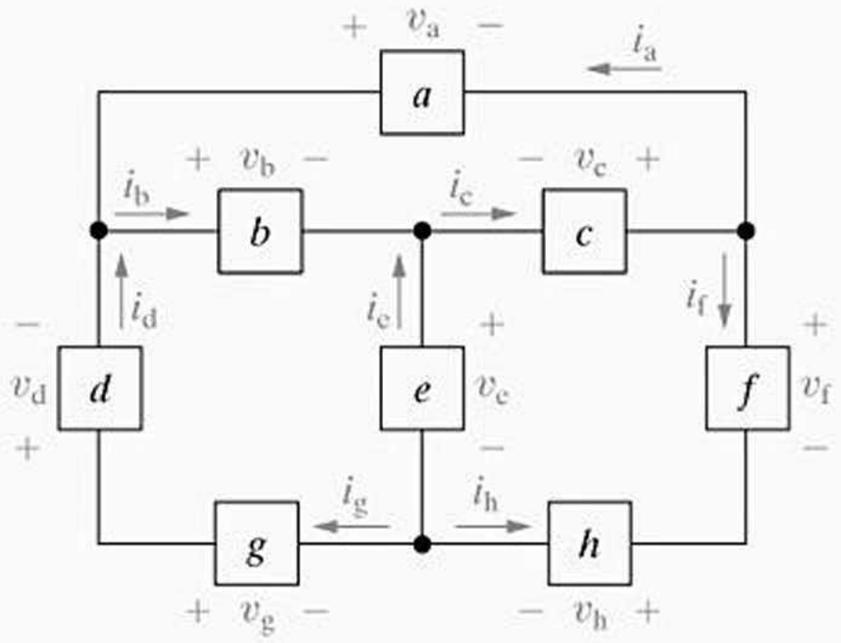


TABELA P1.27

Elemento	Tensão (kV)	Corrente (mA)
a	5,0	–150
b	2,0	250
c	3,0	200
d	–5,0	400
e	1,0	– 50
f	4,0	350
g	–2,0	400
h	–6,0	–350

1.28 Os valores numéricos das tensões e correntes na interconexão apresentada na Figura P1.28 são dados na Tabela P1.28. A interconexão satisfaz o teste de potência?

Figura P1.28

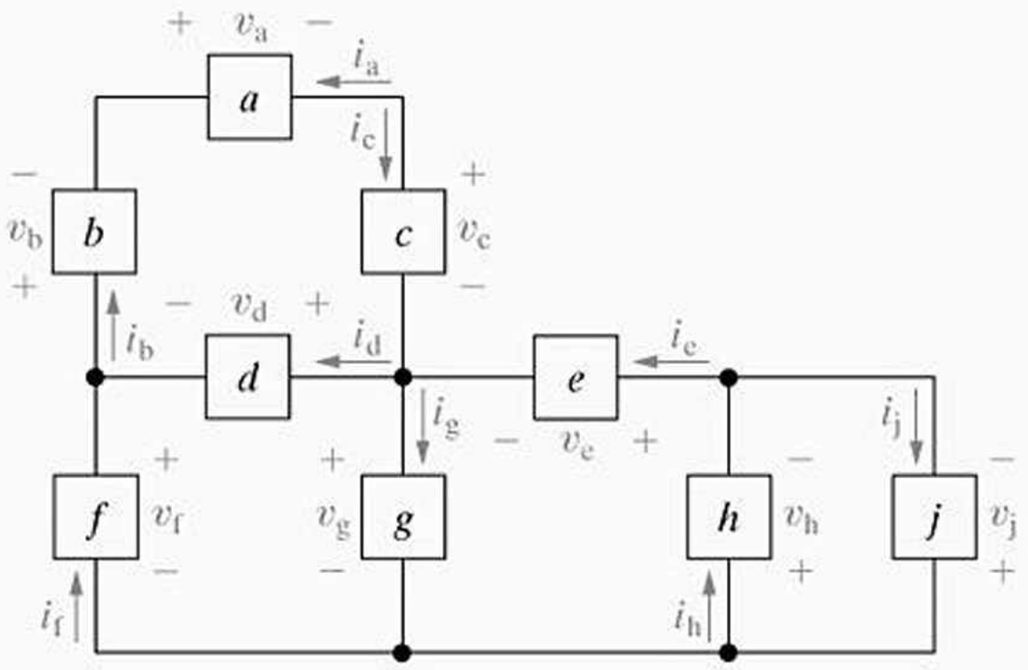


TABELA P1.28

Elemento	Tensão (V)	Corrente (μA)
a	36	250
b	44	–250
c	28	–250
d	–108	100
e	– 32	150
f	60	–350
g	– 48	–200
h	80	–150
j	80	–300

1.29 Um método de verificar cálculos que envolvem elementos de circuito é ver se a potência total fornecida é igual à potência total absorvida (princípio da conservação da energia). Com isso em mente, verifique a interconexão da Figura P1.29 e indique se ela satisfaz essa verificação de potência. Os valores de corrente e tensão para cada elemento são dados na Tabela P1.29.

Figura P1.29

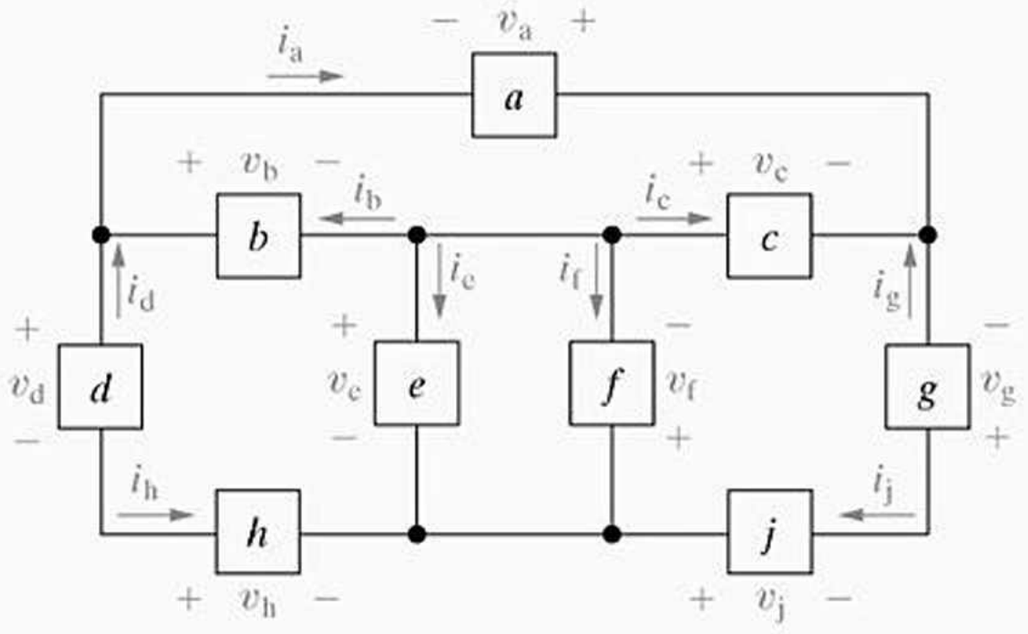


TABELA P1.29

Elemento	Tensão (V)	Corrente (mA)
a	1,6	80
b	2,6	60
c	–4,2	–50
d	1,2	20
e	1,8	30
f	–1,8	–40
g	–3,6	–30
h	3,2	–20
j	–2,4	30

1.30 a) No circuito mostrado na Figura P1.30, identifique quais são os elementos que estão absorvendo potência e quais estão fornecendo potência, usando a convenção passiva.

b) Os valores numéricos das correntes e tensões para cada elemento são dados na Tabela P1.30. Qual é a potência total absorvida e fornecida nesse circuito?

Figura P1.30

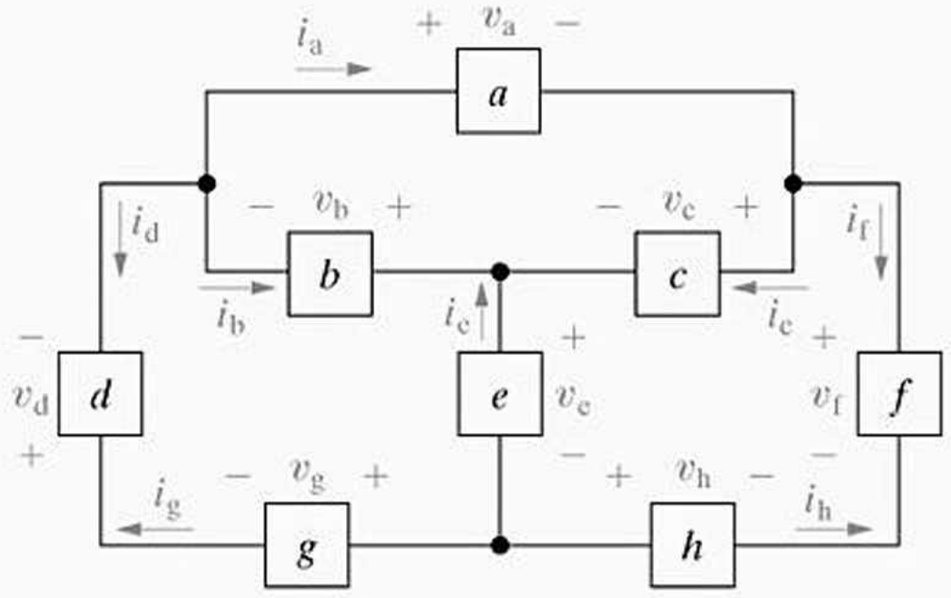


TABELA P1.30

Elemento	Tensão (mV)	Corrente (μA)
a	300	25
b	–100	10
c	–200	15
d	–200	–35
e	350	–25
f	200	10
g	–250	35
h	50	–10

CAPÍTULO

2

Elementos de circuitos

SUMÁRIO DO CAPÍTULO

2.1 **Fontes de tensão e corrente**
2.2 **Resistência elétrica (lei de Ohm)**
2.3 **Construção de um modelo de circuito**
2.4 **Leis de Kirchhoff**
2.5 **Análise de um circuito que contém fontes dependentes**

✔ OBJETIVOS DO CAPÍTULO

1 Entender os símbolos e o comportamento dos seguintes elementos básicos ideais de circuitos: fontes independentes de tensão e corrente, fontes dependentes de tensão e corrente e resistores.

2 Saber enunciar a lei de Ohm, a lei das tensões de Kirchhoff, a lei das correntes de Kirchhoff e saber usá-las para analisar circuitos simples.

3 Saber como calcular a potência para cada elemento de um circuito simples e o equilíbrio de potência para todo o circuito.

Há cinco elementos básicos ideais de circuitos: fontes de tensão, fontes de corrente, resistores, indutores e capacitores. Neste capítulo, discutimos as características de fontes de tensão, fontes de corrente e resistores. Embora esse número de elementos possa parecer pequeno para se começar a analisar circuitos, muitos sistemas práticos podem ser modelados apenas com fontes e resistores. Eles também são um ponto de partida útil por causa de sua relativa simplicidade: as relações matemáticas entre tensão e corrente em fontes e resistores são algébricas. Assim, você poderá começar a aprender as técnicas básicas de análise de circuitos apenas com manipulações algébricas.

Adiaremos a apresentação de indutores e capacitores até o Capítulo 6, pois sua utilização requer a resolução de equações integrais e diferenciais. Contudo, as técnicas analíticas básicas para resolver circuitos com indutores e capacitores são as mesmas apresentadas neste capítulo. Portanto, no momento de manipular equações mais difíceis, você provavelmente estará muito familiarizado com os métodos para escrevê-las.

Perspectiva prática

Segurança elétrica

"Perigo — Alta tensão." Este aviso muito conhecido é enganador. Todas as formas de energia, incluindo a elétrica, podem ser perigosas. Mas não é só a tensão que pode machucar. O choque de eletricidade estática que você recebe quando anda sobre um carpete e toca em uma maçaneta é irritante, mas não machuca. No entanto, aquela faísca é causada por uma tensão centenas ou milhares de vezes maior do que as tensões que podem causar danos.

A energia elétrica que realmente pode causar ferimentos é devida à corrente elétrica e ao modo como ela flui pelo corpo. Então, por que o sinal de aviso de alta tensão? Porque, do modo como a energia elétrica é produzida e distribuída, é mais fácil determinar tensões do que correntes. Além disso, a maioria das fontes elétricas produz tensões constantes, especificadas. Portanto, os cartazes advertem do que é fácil de medir. Determinar se uma fonte pode fornecer correntes potencialmente perigosas e sob quais condições isso pode acontecer é mais difícil porque isso requer que se entenda de engenharia elétrica.

Antes de podermos examinar esse aspecto da segurança elétrica, temos de aprender como tensões e correntes são produzidas e a relação entre elas. O comportamento elétrico de objetos, como o corpo humano, é bastante complexo e, muitas vezes, está além de uma compreensão completa. Para podermos prever e controlar fenômenos elétricos, usamos modelos simplificadores nos quais uma simples relação matemática entre tensão e corrente aproxima as verdadeiras relações existentes entre objetos reais. Tais modelos e métodos analíticos formam o núcleo das técnicas de engenharia elétrica, que nos permitirão entender todos os fenômenos elétricos, incluindo os que se referem à segurança elétrica.

No final deste capítulo, usaremos um modelo de circuito elétrico simples para descrever como e por que as pessoas são feridas por correntes elétricas. Ainda que não seja possível desenvolvermos uma explicação exata e completa do comportamento elétrico do corpo humano, podemos obter uma ótima aproximação, usando modelos de circuitos simples para avaliar e melhorar a segurança de sistemas e dispositivos elétricos. Desenvolver modelos que proporcionem um entendimento imperfeito, porém adequado, para solucionar problemas práticos é o âmago da engenharia. Grande parte da arte da engenharia elétrica, que você aprenderá por experiência, está em saber quando e como resolver problemas difíceis usando modelos simplificadores.

2.1 Fontes de tensão e corrente

Antes de discutirmos fontes ideais de tensão e de corrente, precisamos considerar a natureza geral das fontes elétricas. Uma *fonte elétrica* é um dispositivo capaz de converter energia não elétrica em energia elétrica e vice-versa. Quando uma pilha se descarrega, converte energia química em energia elétrica, ao passo que, quando ela se carrega, converte energia elétrica em energia química. Um dínamo é uma máquina que converte energia mecânica em energia elétrica e vice-versa. Quando o dispositivo funciona no modo mecânico-para-elétrico, é denominado gerador. Se estiver transformando energia elétrica em energia mecânica, nós o denominamos motor. É importante lembrar que essas fontes podem liberar ou absorver energia elétrica, em geral mantendo a tensão ou corrente. Esse comportamento é de particular interesse para a análise de circuitos e resultou na criação da fonte ideal de tensão e da fonte ideal de corrente como elementos básicos de circuito. O desafio é modelar fontes práticas em termos dos elementos básicos ideais de circuito.

Uma *fonte ideal de tensão* é um elemento de circuito que mantém uma tensão prescrita em seus terminais independentemente da corrente que flui neles. De maneira semelhante, uma *fonte ideal de corrente* é um elemento de circuito que mantém uma corrente prescrita em seus terminais independentemente da tensão neles. Esses elementos de circuito não existem como dispositivos práticos — são modelos idealizados de fontes de tensão e corrente reais.

Usar um modelo ideal para fontes de corrente e tensão impõe uma restrição importante ao modo como podemos descrevê-lo em linguagem matemática. Como uma fonte ideal de tensão proporciona uma tensão estável, mesmo que a corrente no elemento varie, é impossível especificar a corrente de uma fonte ideal de tensão como uma função de sua tensão. Da mesma forma, se a única informação que você tiver sobre uma fonte ideal de corrente for o valor da corrente fornecida, será impossível determinar a tensão daquela fonte de corrente. Sacrificamos nossa capacidade de relacionar tensão e corrente em uma fonte prática pela simplicidade de usar fontes ideais em análise de circuitos.

Fontes ideais de tensão e corrente podem ainda ser descritas como fontes independentes ou fontes dependentes. Uma *fonte independente* estabelece uma tensão ou corrente em um circuito sem depender de tensões ou correntes existentes em outros lugares do circuito. O valor da tensão ou corrente fornecida é especificado apenas pelo valor da fonte independente. Ao contrário, uma *fonte dependente* estabelece uma tensão ou corrente cujo valor depende do valor de uma tensão ou corrente em outro lugar do circuito. Você não pode especificar o valor de uma fonte dependente a menos que conheça o valor da tensão ou corrente da qual ela depende.

Os símbolos de circuito para as fontes ideais independentes são mostrados na Figura 2.1. Observe que é usado um círculo para representar uma fonte independente. Para especificar completamente uma fonte de tensão ideal independente em um circuito, você tem de incluir o valor da tensão fornecida e a polaridade de referência, como mostra a Figura 2.1(a). De modo semelhante, para especificar completamente uma fonte de corrente ideal independente, você deve incluir o valor da corrente fornecida e sua direção de referência, como mostra a Figura 2.1(b).

Os símbolos de circuito para as fontes ideais dependentes são mostrados na Figura 2.2. Um losango é usado para representar uma fonte dependente. Tanto a fonte de corrente dependente quanto a fonte de tensão dependente podem ser controladas por uma tensão ou por uma corrente existente em outro lugar do circuito, resultando, portanto, num total de quatro variações, como indicam os símbolos na Figura 2.2. Fontes dependentes às vezes são denominadas *fontes controladas*.

Para especificar completamente uma fonte de tensão ideal dependente com controle de tensão, você deve identificar a tensão de controle, a equação que permite calcular a tensão fornecida a partir da tensão de controle e a polaridade de referência para a tensão fornecida. Na Figura 2.2(a), a

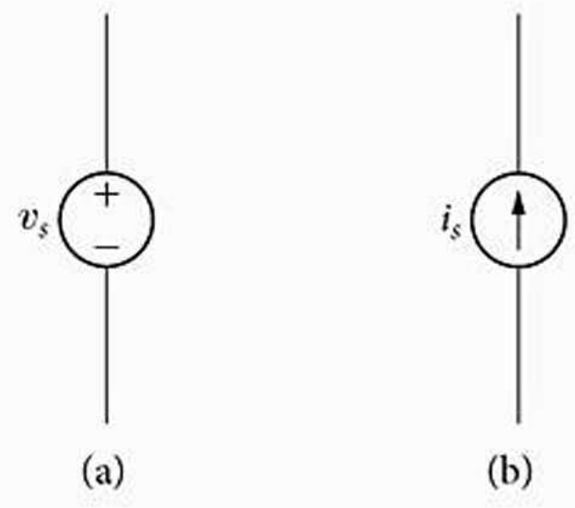


Figura 2.1 ▲ Símbolos de circuito para (a) uma fonte de tensão ideal independente e (b) uma fonte de corrente ideal independente.

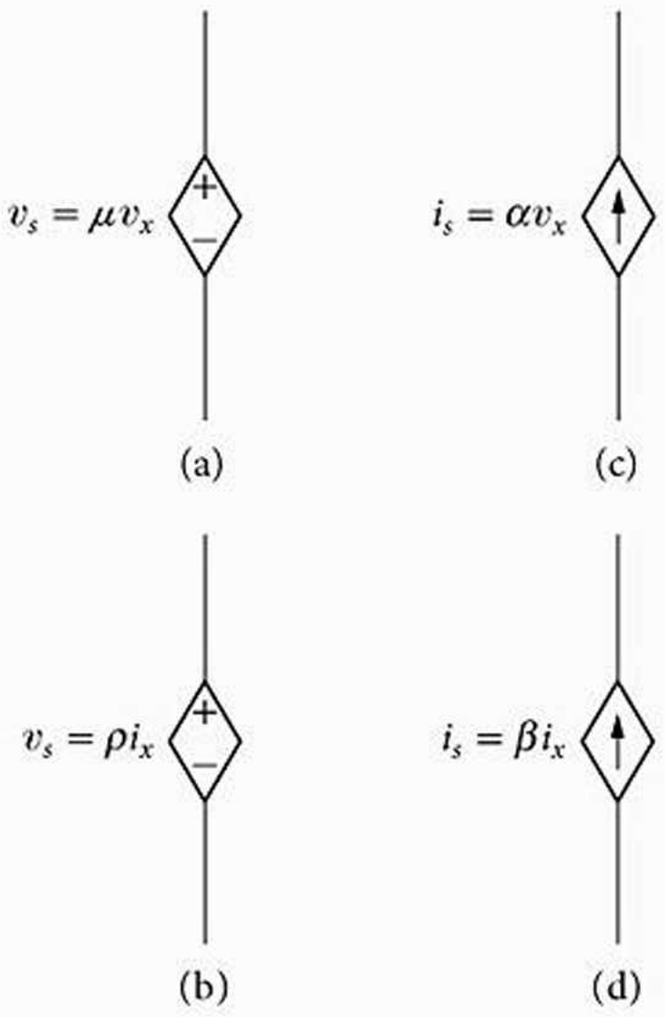


Figura 2.2 ▲ Símbolos de circuito para (a) uma fonte ideal de tensão com controle de tensão, (b) uma fonte ideal de tensão com controle de corrente, (c) uma fonte ideal de corrente com controle de tensão e (d) uma fonte ideal de corrente com controle de corrente.

tensão de controle é denominada v_x, a equação que determina a tensão fornecida v_s é

$$v_s = \mu v_x,$$

e a polaridade de referência para v_s é a indicada. Observe que μ é uma constante multiplicativa adimensional.

Existem requisitos semelhantes para especificar completamente as outras fontes ideais dependentes. Na Figura 2.2(b), a corrente de controle é i_x, a equação para a tensão fornecida v_s é

$$v_s = \rho i_x,$$

a polaridade de referência é a indicada e a constante multiplicativa ρ tem a dimensão volts por ampère. Na Figura 2.2(c), a tensão de controle é v_x, a equação para a corrente fornecida i_s é

$$i_s = \alpha v_x,$$

a direção de referência é a indicada e a constante multiplicativa α tem a dimensão ampères por volt. Na Figura 2.2(d), a corrente de controle é i_x, a equação para a corrente fornecida i_s é

$$i_s = \beta i_x,$$

a direção de referência é a indicada e a constante multiplicativa β é adimensional.

Por fim, em nossa discussão sobre fontes ideais, observamos que elas são exemplos de elementos ativos de circuito. Um *elemento ativo* é aquele que modela um dispositivo capaz de gerar energia elétrica. *Elementos passivos* modelam dispositivos físicos que não podem gerar energia elétrica. Resistores, indutores e capacitores são exemplos de elementos passivos de circuito. Os exemplos 2.1 e 2.2 ilustram como as características de fontes ideais independentes e dependentes limitam os tipos de interconexões permissíveis das fontes.

Exemplo 2.1 Teste de interconexões de fontes ideais

Usando as definições de fontes de tensão e corrente ideais independentes, diga quais das interconexões da Figura 2.3 são permissíveis e quais infringem as restrições impostas pelas fontes ideais.

Solução

A conexão (a) é válida. Cada fonte fornece tensão pelo mesmo par de terminais, denominados *a*,*b*. Isso exige que cada uma delas forneça a mesma tensão com a mesma polaridade, que é o que elas fazem.

A conexão (b) é válida. Cada fonte fornece corrente pelo mesmo par de terminais, denominados *a*,*b*. Isso requer que cada uma delas forneça a mesma corrente na mesma direção, que é o que elas fazem.

A conexão (c) não é permissível. Cada fonte fornece tensão pelo mesmo par de terminais, denominados *a*,*b*. Isso exige que cada uma delas forneça a mesma tensão com a mesma polaridade, e isso elas não fazem.

A conexão (d) não é permissível. Cada fonte fornece corrente pelo mesmo par de terminais, denominados *a*,*b*. Isso exige que cada uma delas forneça a mesma corrente, na mesma direção, o que elas não fazem.

A conexão (e) é válida. A fonte de tensão fornece tensão pelo par de terminais, denominados *a*,*b*. A fonte de corrente fornece corrente pelo mesmo par de terminais. Como uma fonte ideal de tensão fornece a mesma tensão independentemente da corrente e uma fonte ideal de corrente fornece a mesma corrente independentemente da tensão, esta é uma conexão permissível.

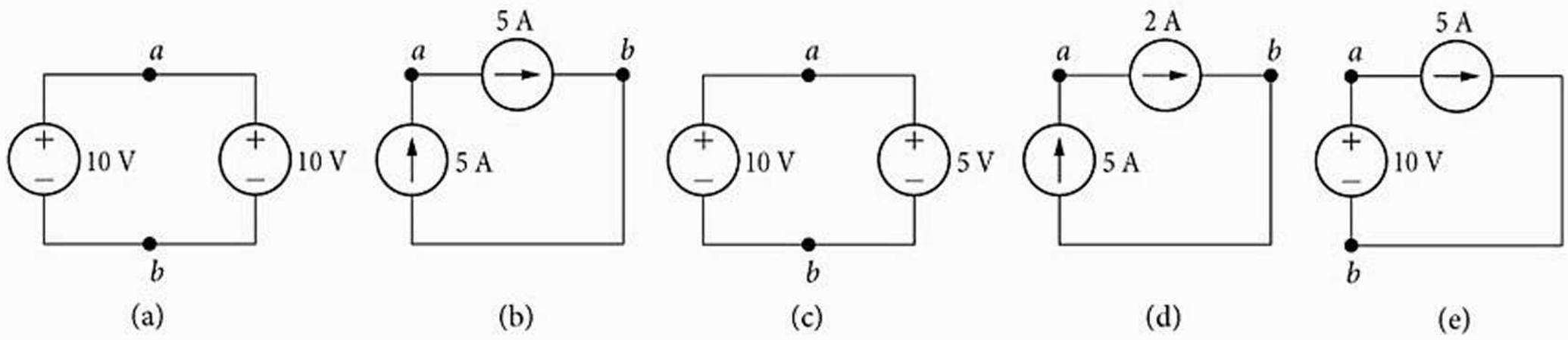


Figura 2.3 ▲ Circuitos para o Exemplo 2.1.

Exemplo 2.2 Teste de interconexões de fontes ideais independentes e dependentes

Usando as definições de fontes ideais independentes e dependentes, diga quais das interconexões da Figura 2.4 são válidas e quais infringem as restrições impostas pelas fontes ideais.

Solução

A conexão (a) é inválida. Tanto a fonte independente quanto a dependente fornecem tensão pelo mesmo par

de terminais, denominados *a*,*b*. Isso requer que cada uma delas forneça a mesma tensão com a mesma polaridade. A fonte independente fornece 5 V, mas a fonte dependente fornece 15 V.

A conexão (b) é válida. A fonte de tensão independente fornece tensão pelo par de terminais denominados *a*,*b*. A fonte de corrente dependente fornece corrente pelo mesmo par de terminais. Como uma fonte ideal de tensão fornece a mesma tensão independentemente da corrente, e uma fonte ideal de corrente fornece a mesma corrente independentemente de tensão, essa é uma conexão permissível.

A conexão (c) é válida. A fonte de corrente independente fornece corrente pelo par de terminais denominados *a*,*b*. A fonte de tensão dependente fornece tensão pelo mesmo par de terminais. Como uma fonte ideal de corrente fornece a mesma corrente independentemente da tensão, e uma fonte ideal de tensão fornece a mesma tensão independentemente da corrente, essa é uma conexão permissível.

A conexão (d) é inválida. Tanto a fonte independente quanto a dependente fornecem corrente pelo mesmo par de terminais, denominados *a*,*b*. Isso requer que cada uma delas forneça a mesma corrente na mesma direção de referência. A fonte independente fornece 2 A, mas a fonte dependente fornece 6 A na direção oposta.

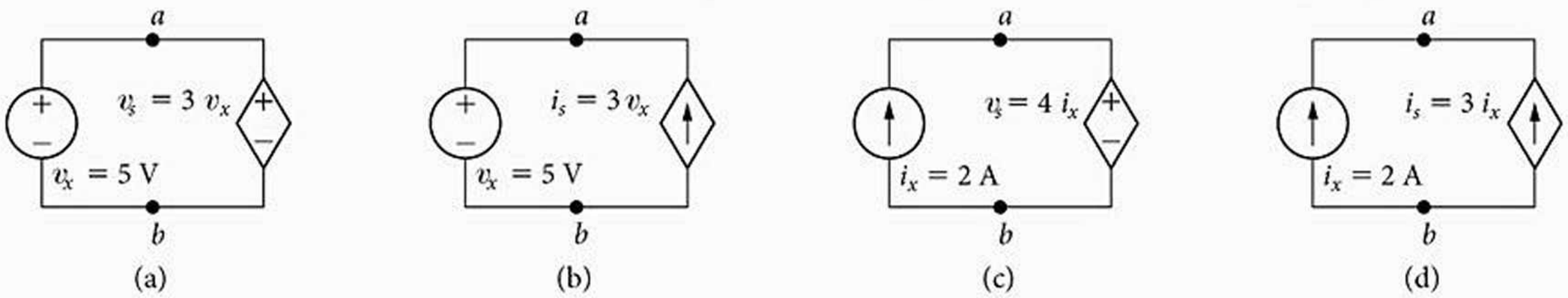


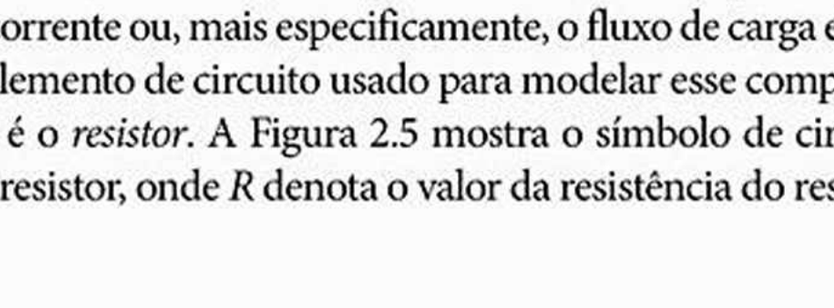
Figura 2.4 ▲ Circuitos para o Exemplo 2.2.

✔ PROBLEMAS PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 1 — Entender elementos básicos ideais de circuito

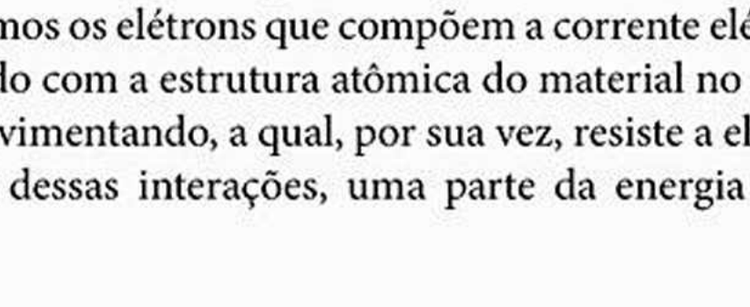
2.1 Para o circuito mostrado,
a) Qual é o valor de v_g requerido para que a interconexão seja válida?
b) Para esse valor de v_g, determine a potência associada à fonte de 8 A.

Resposta: (a) –2 V;
(b) –16 W (16 W fornecidos).



2.2 Para o circuito mostrado,
a) Qual é o valor de α requerido para que a interconexão seja válida?
b) Para o valor de α calculado na parte (a), determine a potência associada à fonte de 25 V.

Resposta: (a) 0,6 A/V;
(b) 375 W (375 W absorvidos).



NOTA: Tente resolver também os problemas 2.2 e 2.3, apresentados no final deste capítulo.

2.2 Resistência elétrica (lei de Ohm)

Resistência é a capacidade dos materiais de impedir o fluxo de corrente ou, mais especificamente, o fluxo de carga elétrica. O elemento de circuito usado para modelar esse comportamento é o *resistor*. A Figura 2.5 mostra o símbolo de circuito para o resistor, onde *R* denota o valor da resistência do resistor.

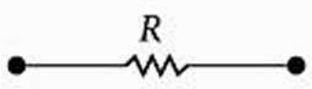


Figura 2.5 ▲ Símbolo de circuito para um resistor com uma resistência *R*.

Como conceito, podemos entender resistência se imaginarmos os elétrons que compõem a corrente elétrica interagindo com a estrutura atômica do material no qual estão se movimentando, a qual, por sua vez, resiste a eles. No decurso dessas interações, uma parte da energia elétrica é

convertida em energia térmica e dissipada sob a forma de calor. Esse efeito pode ser indesejável. Contudo, muitos dispositivos elétricos úteis aproveitam o aquecimento de resistências, tais como fogões, torradeiras, ferros de passar e aquecedores de ambientes.

A maioria dos materiais exibe resistência mensurável à corrente. A quantidade de resistência depende do material. Metais como cobre e alumínio têm valores pequenos de resistência, tornando-os boas opções de fiação para condução de corrente elétrica. Na verdade, quando condutores de cobre ou alumínio são representados em um diagrama do circuito, eles, em geral, não são modelados como resistores; a resistência do fio é tão pequena em comparação com a resistência de outros elementos no circuito que podemos desprezá-la para simplificar o diagrama.

Para fins de análise de circuitos, devemos referir a corrente no resistor à tensão terminal. Podemos fazer isso de dois modos: na direção da queda de tensão no resistor ou na direção da elevação de tensão no resistor, como mostra a Figura 2.6. Se escolhermos a primeira, a relação entre a tensão e a corrente é

$$v = iR \tag{2.1}$$

(Lei de Ohm)

onde

v = a tensão em volts,
i = a corrente em ampères,
R = a resistência em ohms.

Se escolhermos o segundo método, devemos escrever

$$v = -iR, \tag{2.2}$$

onde v, i e R são, como antes, medidas em volts, ampères e ohms, respectivamente. Os sinais algébricos utilizados nas equações 2.1 e 2.2 são uma conseqüência direta da convenção passiva, que apresentamos no Capítulo 1.

As equações 2.1 e 2.2 são conhecidas como *lei de Ohm,* nome que se deve a Georg Simon Ohm, um físico alemão que demonstrou a validade delas no início do século XIX. A lei de Ohm é a relação algébrica entre tensão e corrente para um resistor. Em unidades do SI, a resistência é medida em ohms. A letra grega ômega (Ω) é o símbolo padrão para o ohm. O diagrama de circuito para um resistor de 8 Ω é mostrado na Figura 2.7.

A lei de Ohm expressa a tensão como uma função da corrente. Contudo, expressar a corrente como uma função da tensão também é conveniente. Assim, pela Equação 2.1,

$$i = \frac{v}{R}, \tag{2.3}$$

ou, pela Equação 2.2,

$$i = -\frac{v}{R}. \tag{2.4}$$

O inverso da resistência é denominado *condutância,* simbolizada pela letra G e medida em siemens (S). Assim,

$$G = \frac{1}{R}\,\text{S}. \tag{2.5}$$

Um resistor de 8 Ω tem um valor de condutância de 0,125 S. Em grande parte da literatura profissional a unidade usada para condutância é o mho (ohm ao contrário), que é simbolizada por um ômega invertido (℧). Portanto, também pode mos afirmar que um resistor de 8 Ω tem uma condutância de 0.125 mho, (℧).

Usamos resistores ideais em análise de circuitos para modelar o comportamento de dispositivos físicos. Usar o adjetivo *ideal* nos faz lembrar que o modelo do resistor adota várias premissas simplificadoras sobre o comportamento dos dispositivos resistivos reais. A mais importante dessas premissas simplificadoras é que a resistência do resistor ideal é constante e seu valor não varia ao longo do tempo. A maioria dos dispositivos resistivos reais não tem resistência constante e, na verdade, suas resistências variam com o tempo. O modelo do resistor ideal pode ser usado para representar um dispositivo físico cuja resistência não varia muito em relação a algum valor constante, no período de tempo de interesse da análise de circuitos. Neste livro, admitimos que as premissas simplificadoras adotadas para dispositivos de resistência são válidas e, assim, usamos resistores ideais em análise de circuitos.

Podemos calcular a potência nos terminais de um resistor de várias maneiras. A primeira abordagem é usar a equação definidora e simplesmente calcular o produto entre tensão e corrente no terminal. Para os sistemas de referência mostrados na Figura 2.6, escrevemos

$$p = vi \tag{2.6}$$

quando $v = i\,R$ e

$$p = -vi \tag{2.7}$$

quando $v = -i\,R$.

Um segundo método para expressar a potência nos terminais de um resistor expressa potência em termos da corrente e da resistência. Substituindo a Equação 2.1 na Equação 2.6, obtemos

$$p = vi = (i\,R)i$$

portanto

$$p = i^2 R. \tag{2.8}$$

(Potência em um resistor em termos de corrente)

Da mesma forma, substituindo a Equação 2.2 na Equação 2.7, temos

$$p = -vi = -(-i\,R)i = i^2R. \tag{2.9}$$

As Equações 2.8 e 2.9 são idênticas e demonstram claramente que, independentemente da polaridade da tensão e da direção da corrente, a potência nos terminais de um resistor é positiva. Por conseguinte, um resistor absorve potência do circuito.

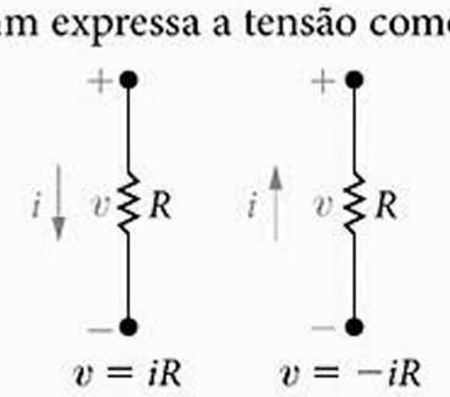


Figura 2.6 ▲ Duas possíveis opções de referência para a corrente e a tensão nos terminais de um resistor, e as equações resultantes.

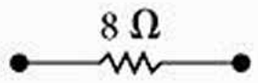


Figura 2.7 ▲ Diagrama de circuito para um resistor de 8 Ω.

Um terceiro método de expressar a potência nos terminais de um resistor é em termos da tensão e da resistência. A expressão é independente das referências de polaridade, portanto

$$p = \frac{v^2}{R}. \tag{2.10}$$

(Potência em um resistor em termos de tensão)

Às vezes o valor de um resistor será expresso como uma condutância em vez de uma resistência. Usando a relação entre resistência e condutância dada na Equação 2.5, também podemos escrever as Equações 2.9 e 2.10 em termos da condutância, ou

$$p = \frac{i^2}{G}, \tag{2.11}$$

$$p = v^2 G. \tag{2.12}$$

As equações 2.6–2.12 proporcionam uma variedade de métodos para calcular a potência absorvida por um resistor. Todos dão a mesma resposta. Quando analisar um circuito, examine as informações dadas e escolha a equação de potência que usa essas informações diretamente.

O Exemplo 2.3 ilustra a aplicação da lei de Ohm em conjunto com uma fonte ideal e um resistor. Também são ilustrados cálculos de potência nos terminais de um resistor

Agora que já apresentamos as características gerais de fontes e resistores ideais, mostraremos como utilizar esses elementos para construir o modelo de circuito de um sistema prático.

Exemplo 2.3 Cálculo de tensão, corrente e potência para um circuito resistivo simples

Em cada circuito da Figura 2.8, o valor de v ou de i é desconhecido.

a) Calcule os valores de v e i.

b) Determine a potência consumida em cada resistor.

Solução

a) A tensão v_a na Figura 2.8(a) é uma queda na direção da corrente no resistor. Portanto,

$$v_a = (1)(8) = 8 \text{ V}.$$

A corrente i_b no resistor que tem uma condutância de 0,2 S na Figura 2.8(b) está na direção da queda de tensão no resistor. Assim,

$$i_b = (50)(0{,}2) = 10 \text{ A}.$$

A tensão v_c na Figura 2.8(c) é uma elevação na direção da corrente no resistor. Daí,

$$v_c = -(1)(20) = -20 \text{ V}.$$

A corrente i_d no resistor de 25 Ω da Figura 2.8(d) está na direção da elevação de tensão no resistor. Portanto

$$i_d = -\frac{50}{25} = -2 \text{ A}.$$

b) A potência consumida em cada um dos quatro resistores é

$$p_{8\Omega} = \frac{(8)^2}{8} = (1)^2(8) = 8 \text{ W},$$

$$p_{0,2S} = (50)^2(0{,}2) = 500 \text{ W},$$

$$p_{20\Omega} = \frac{(-20)^2}{20} = (1)^2(20) = 20 \text{ W},$$

$$p_{25\Omega} = \frac{(50)^2}{25} = (-2)^2(25) = 100 \text{ W}..$$

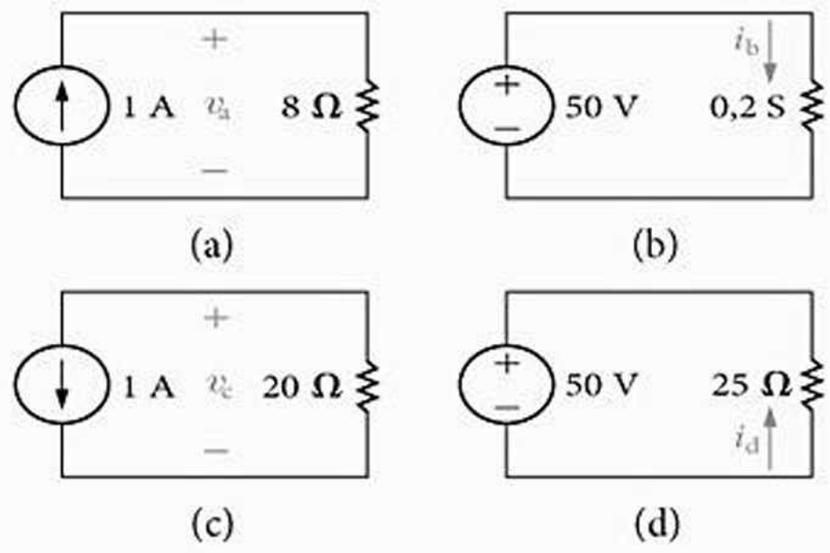


Figura 2.8 ▲ Circuitos para o Exemplo 2.3.

✔ PROBLEMAS PARA AVALIAÇÃO

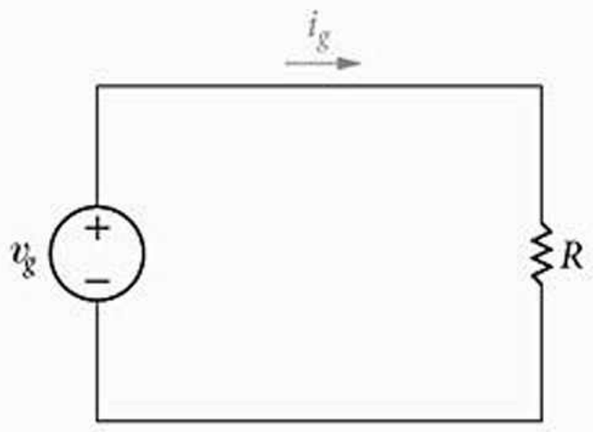
Objetivo 2 — Saber enunciar e utilizar a lei de Ohm

2.3 Para o circuito mostrado,

a) Se $v_g = 1$ kV e $i_g = 5$ mA, determine o valor de R e a potência absorvida pelo resistor.

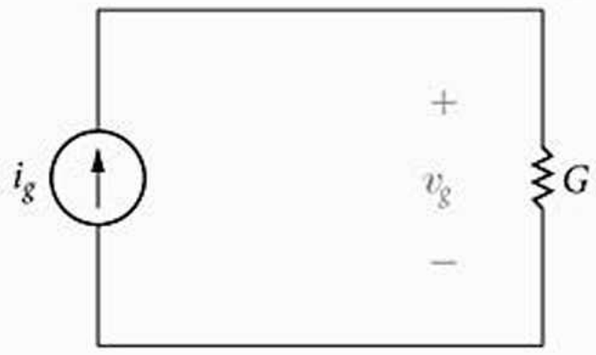
b) Se $i_g = 75$ mA e a potência liberada pela fonte de tensão é 3 W, determine v_g, R e a potência absorvida pelo resistor.

c) Se $R = 300\ \Omega$ e a potência absorvida por R é 480 mW, determine i_g e v_g.



Resposta: (a) 200 kΩ, 5 W;
(b) 40 V, 533,33 Ω, 3 W;
(c) 40 mA, 12 V.

2.4 Para o circuito mostrado,
a) Se $i_g = 0{,}5$ A e $G = 50$ mS, determine v_g e a potência liberada pela fonte de corrente.
b) Se $v_g = 15$ V e a potência entregue ao condutor é 9 W, determine a condutância G e a corrente da fonte i_g.
c) Se $G = 200\ \mu$S e a potência liberada para a condutância é 8 W, determine i_g e v_g.



Resposta: (a) 10 V, 5 W;
(b) 40 mS, 0,6 A;
(c) 40 mA, 200 V.

NOTA: Tente resolver também os problemas 2.6 e 2.8, apresentados no final deste capítulo.

2.3 Construção de um modelo de circuito

Já afirmamos que uma das razões do interesse nos elementos básicos de circuito é que eles podem ser utilizados para construir modelos de sistemas práticos. O trabalho para desenvolver um modelo de um dispositivo ou sistema é tão complexo quanto o exigido para resolver o circuito derivado. Embora este livro dê ênfase às habilidades requeridas para resolver circuitos, você também precisará de outras habilidades na prática da engenharia elétrica, e uma das mais importantes é a de modelagem.

Desenvolvemos modelos de circuitos nos dois exemplos seguintes. No Exemplo 2.4, construímos um modelo de circuito baseado no conhecimento do comportamento dos componentes do sistema e no modo como eles estão interconectados. No Exemplo 2.5, criamos um modelo de circuito medindo o comportamento do terminal de um dispositivo.

Exemplo 2.4 Construção de um modelo de circuito para uma lanterna

Solução

Escolhemos a lanterna para ilustrar um sistema prático porque seus componentes são bem conhecidos.

Quando uma lanterna é considerada como um sistema elétrico, os componentes de interesse primordial são as pilhas, a lâmpada, o conector, o invólucro e o interruptor. Vamos considerar o modelo de circuito para cada componente.

Uma pilha alcalina mantém uma tensão razoavelmente constante no terminal, se a demanda de corrente não for excessiva. Assim, se a pilha estiver funcionando dentro dos limites pretendidos, podemos modelá-la como uma fonte ideal de tensão. Então, a tensão prescrita é constante e igual à soma dos valores de duas pilhas alcalinas.

O objetivo principal de uma lâmpada é emitir energia luminosa, obtida pelo aquecimento do seu filamento a uma temperatura alta o suficiente para provocar radiação na faixa da luz visível. Podemos modelar a lâmpada com um resistor ideal. Observe que, nesse caso, embora o resistor seja o responsável pela quantidade de energia elétrica convertida em energia térmica, ele não prevê quanto da energia térmica é convertido em energia luminosa. No entanto, o resistor usado para representar a lâmpada prevê a drenagem contínua de corrente das pilhas, uma característica do sistema que também é de interesse. Neste modelo, R_l simboliza a resistência da lâmpada.

O conector usado na lanterna desempenha um duplo papel. Em primeiro lugar, fornece um caminho elétrico condutivo entre as pilhas e o invólucro. Em segundo lugar, ele é formado por uma mola, de modo que também pode aplicar pressão mecânica ao contato entre as pilhas e a lâmpada. O propósito dessa pressão mecânica é manter o contato entre as duas pilhas e entre as pilhas e a lâmpada. Por conseqüência, ao escolher o material condutivo do conector, poderemos perceber que suas propriedades mecânicas são mais importantes, para o projeto da lanterna, do que suas propriedades elétricas. Sob o ponto de vista elétrico, podemos modelar o conector como um resistor ideal, denominado R_1.

O invólucro também cumpre uma finalidade mecânica e uma finalidade elétrica. Do ponto de vista mecâni-

co, ele contém todos os outros componentes e proporciona ao usuário um modo fácil de segurar a lanterna. Do ponto de vista elétrico, ele proporciona uma conexão entre os outros elementos da lanterna. Se o invólucro for de metal, ele conduz a corrente entre as pilhas e a lâmpada. Se for de plástico, uma chapa estreita de metal dentro dele conecta o conector de mola ao interruptor. Seja como for, um resistor ideal, que denominamos R_c, modela a conexão elétrica fornecida pelo invólucro.

O componente final é o interruptor. Em termos de eletricidade, ele é um dispositivo de dois estados: está LIGADO (ON) ou DESLIGADO (OFF). Um interruptor ideal não oferece resistência à corrente quando está no estado LIGADO (ON), mas oferece resistência infinita à corrente quando está no estado DESLIGADO (OFF). Esses dois estados representam os valores-limites de um resistor; isto é, o estado LIGADO (ON) corresponde a um resistor com valor numérico zero, e o estado DESLIGADO (OFF) corresponde a um resistor com valor numérico infinito. Os dois valores extremos recebem os nomes descritivos *curto-circuito* ($R = 0$) e *circuito aberto* ($R = \infty$). As Figuras 2.9(a) e (b) mostram a representação gráfica de um curto-circuito e de um circuito aberto, respectivamente. O símbolo mostrado na Figura 2.9(c) representa o fato de que um interruptor pode ser um curto-circuito ou um circuito aberto, dependendo da posição de seus contatos.

Construiremos agora o modelo de circuito da lanterna. Começando com as pilhas, o terminal positivo da primeira é conectado ao terminal negativo da segunda, como mostra a Figura 2.10. O terminal positivo da segunda é conectado a um dos terminais da lâmpada. O outro terminal da lâmpada faz contato com um lado do interruptor, e o outro lado do interruptor está conectado ao invólucro metálico da lanterna. Então, o invólucro metálico é conectado ao terminal negativo da primeira pilha, por meio de uma mola de metal. Observe que os elementos formam um caminho, ou circuito, fechado. Você pode ver o caminho fechado formado pelos elementos conectados na Figura 2.10. A Figura 2.11 mostra um modelo de circuito para a lanterna.

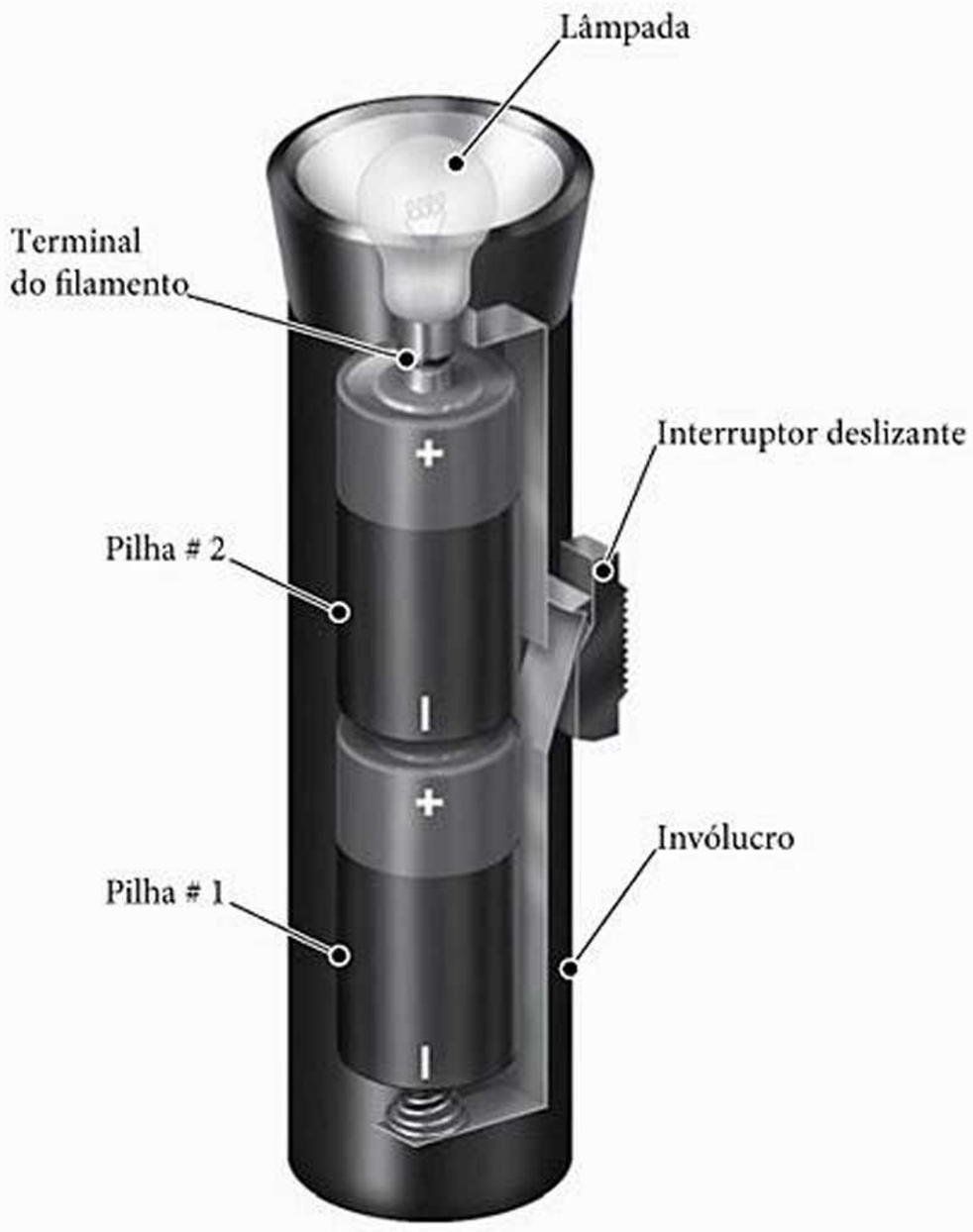


Figura 2.10 ▲ O arranjo dos componentes da lanterna.

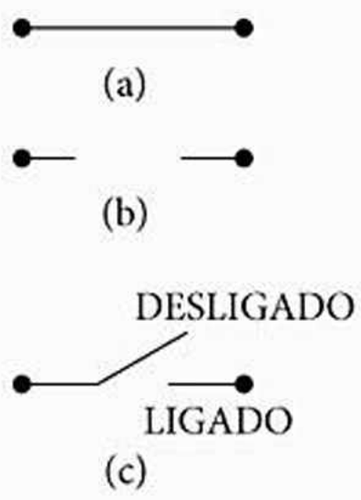


Figure 2.9 ▲ Símbolos de circuito. (a) Curto-circuito. (b) Circuito aberto. (c) Interruptor.

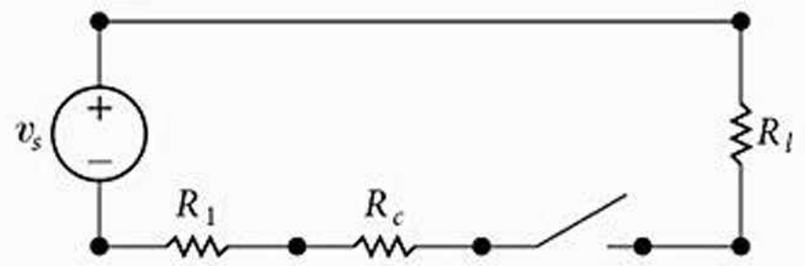


Figura 2.11 ▲ Modelo de circuito para uma lanterna.

Podemos, com o nosso exemplo da lanterna, fazer algumas observações gerais sobre modelagem: em primeiro lugar, ao desenvolver um modelo de circuito, o comportamento *elétrico* de cada componente físico é de primordial interesse. No modelo da lanterna, três componentes físicos muito diferentes — uma lâmpada, uma mola e um invólucro de metal — são todos representados pelo mesmo elemento de circuito (um resistor) porque o fenômeno elétrico que ocorre em cada um deles é o mesmo. Cada um apresenta uma resistência à passagem da corrente pelo circuito.

Em segundo lugar, modelos de circuitos talvez precisem levar em conta efeitos elétricos indesejáveis, bem como desejáveis. Por exemplo, o calor resultante da resistência da lâmpada produz a luz, um efeito desejado. Todavia, o calor resultante da resistência do invólucro e da mola representa um efeito indesejado ou parasita. O calor drena as pilhas e não produz nenhum resultado útil. Tais efeitos parasitas devem ser considerados sob pena de o modelo resultante não representar adequadamente o sistema.

Por fim, modelagem requer aproximação. Mesmo no sistema básico representado pela lanterna, adotamos premissas simplificadoras no desenvolvimento do modelo de circuito. Por exemplo, admitimos um interruptor ideal mas, na prática, a resistência de contato pode ser alta o suficiente para interferir com o funcionamento adequado do sistema. Nosso modelo não prevê esse comportamento. Além disso, admitimos que a mola conectora exerce pressão suficiente para eliminar qualquer resistência de contato entre as pilhas. Nosso modelo não prevê pressão inadequada. Utilizamos uma fonte ideal de tensão, portanto ignoramos qualquer dissipação interna de energia nas pilhas, que poderia resultar no aquecimento parasita que acabamos de mencionar. Poderíamos levar isso em conta adicionando um resistor ideal entre a fonte e o resistor da lâmpada. Em nosso modelo, admitimos que a perda interna é desprezível.

Ao modelar a lanterna como um circuito, tínhamos entendimento básico e acesso aos componentes internos do sistema. No entanto, às vezes só conhecemos o comportamento do terminal de um dispositivo e temos de usar essa informação para construir o modelo. O Exemplo 2.5 examina tal problema de modelagem.

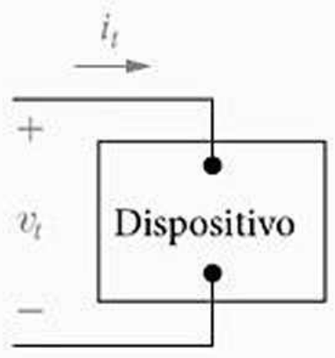
2.4 Leis de Kirchhoff

Diz-se que um circuito está resolvido quando a tensão nos terminais de cada elemento e a corrente correspondente foram determinadas. A lei de Ohm é uma equação importante para derivar essas soluções. Contudo, essa lei pode não ser suficiente para dar uma solução completa. Como veremos ao tentar resolver o circuito da lanterna do Exemplo 2.4, precisamos usar duas relações algébricas mais importantes, conhecidas como leis de Kirchhoff, para resolver a maioria dos circuitos.

Começamos desenhando novamente o circuito como mostra a Figura 2.14, com o interruptor no estado LIGADO (ON). Observe que também rotulamos as variáveis corrente e tensão associadas a cada resistor e a corrente associada à fonte de tensão. O rótulo inclui também as polaridades de referência, como sempre. Por conveniência, acrescentamos aos rótulos de tensão e corrente o mesmo índice dos rótulos dos resistores. Na Figura 2.14, também eliminamos alguns dos pontos que representavam terminais na Figura 2.11 e inserimos nós. Pontos terminais são os pontos iniciais e finais de um elemento individual de circuito. Um *nó* é um ponto no qual dois ou

Exemplo 2.5 Construção de um modelo de circuito baseado em medições em terminais

A tensão e a corrente são medidas nos terminais do dispositivo ilustrado na Figura 2.12(a) e os valores de v_t e i_t estão tabulados na Figura 2.12(b). Construa um modelo de circuito do dispositivo que está dentro do quadrado.



(a)

v_t (V)	i_t (A)
−40	−10
−20	−5
0	0
20	5
40	10

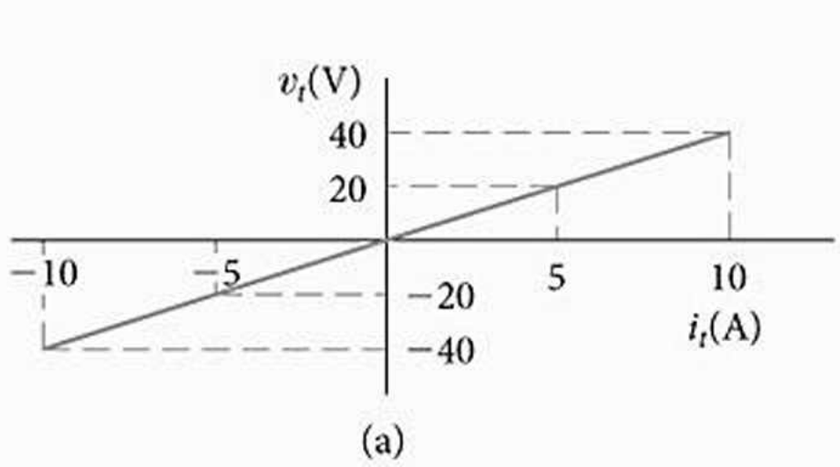
(b)

Figure 2.12 ▲ (a) Dispositivo e (b) dados para o Exemplo 2.5.

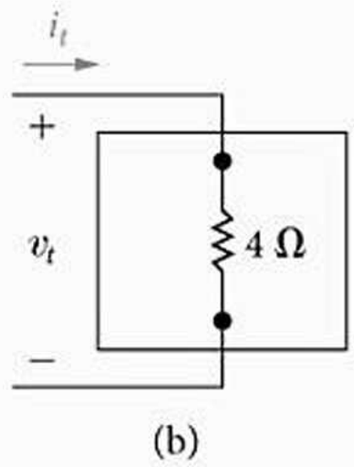
Solução

A representação gráfica da tensão como uma função da corrente resulta no gráfico mostrado na Figura 2.13(a). A equação da reta nessa figura ilustra que a tensão no terminal é diretamente proporcional à corrente, $v_t = 4i_t$. Em termos da lei de Ohm, o dispositivo dentro do quadrado se comporta como um resistor de 4 Ω. Portanto, o modelo para esse dispositivo é um resistor de 4 Ω, como vemos na Figura 2.13(b).

Voltaremos a essa técnica de utilização das características terminais para construir um modelo de circuito depois da apresentação das leis de Kirchhoff e da análise de circuitos.



(a)



(b)

Figura 2.13 ▲ (a) Valores de v_t *versus* i_t para o dispositivo da Figura 2.12. (b) Modelo de circuito para o dispositivo da Figura 2.12.

NOTA: Avalie seu entendimento desse exemplo tentando resolver os problemas 2.10 e 2.11, apresentados no final deste capítulo.

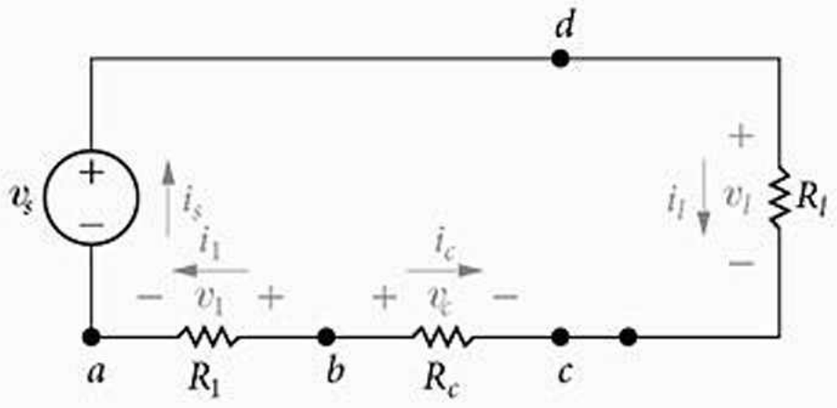


Figura 2.14 ▲ Modelo de circuito da lanterna com variáveis designadas de tensão e corrente.

mais elementos de circuito se unem. Para usar a lei das correntes de Kirchhoff é necessário identificar nós, como veremos em breve. Na Figura 2.14, os nós são rotulados *a*, *b*, *c* e *d*. O nó *d* conecta a pilha e a lâmpada e se estende até a parte superior do diagrama, embora tenhamos rotulado um único ponto por conveniência. Os pontos dos dois lados do interruptor indicam seus terminais, mas precisamos apenas de um para representar um nó, portanto só um é denominado nó *c*.

No circuito mostrado na Figura 2.14, podemos identificar sete incógnitas: i_s, i_1, i_c, i_l, v_1, v_c e v_l. Lembre-se de que v_s é uma tensão conhecida porque representa a soma das tensões nos terminais das duas pilhas, uma tensão constante de 3 V. O problema é determinar as sete variáveis desconhecidas. Pela álgebra, você sabe que, para determinar n quantidades desconhecidas, ou incógnitas, você tem de resolver n equações simultâneas independentes. Pela nossa discussão da lei de Ohm na Seção 2.2, você sabe que três das equações necessárias são:

$$v_1 = i_1 R_1, \tag{2.13}$$

$$v_c = i_c R_c, \tag{2.14}$$

$$v_l = i_l R_l. \tag{2.15}$$

E as outras quatro equações?

A interconexão de elementos de circuito impõe limitações à relação entre as tensões e correntes nos terminais. Essas limitações são denominadas leis de Kirchhoff, nome que se deve a Gustav Kirchhoff, o primeiro a enunciá-las em um artigo publicado em 1848. As duas leis que determinam as limitações em linguagem matemática são conhecidas como a lei das correntes de Kirchhoff e a lei das tensões de Kirchhoff.

Agora, podemos enunciar a *lei das correntes de Kirchhoff:*

Lei das correntes de Kirchhoff (LCK): A soma algébrica de todas as correntes em qualquer nó de um circuito é igual a zero.

Para usar a lei das correntes de Kirchhoff, deve-se designar um sinal algébrico, correspondente à direção de referência, para cada corrente no nó. Atribuir um sinal positivo a uma corrente que sai de um nó significa atribuir um sinal negativo a uma corrente que entra em um nó. De outra forma, atribuir um sinal negativo a uma corrente que sai de um nó significa atribuir um sinal positivo a uma corrente que entra em um nó.

A aplicação da lei das correntes de Kirchhoff aos quatro nós do circuito mostrado na Figura 2.14, usando a convenção de que correntes que saem de um nó são consideradas positivas, resulta em quatro equações:

$$\text{nó } a \qquad i_s - i_1 = 0, \tag{2.16}$$

$$\text{nó } b \qquad i_1 + i_c = 0, \tag{2.17}$$

$$\text{nó } c \qquad -i_c - i_l = 0, \tag{2.18}$$

$$\text{nó } d \qquad i_l - i_s = 0. \tag{2.19}$$

Observe que as Equações 2.16–2.19 não são um conjunto independente porque qualquer uma das quatro pode ser derivada das outras três. Em qualquer circuito com n nós, $n - 1$ equações independentes podem ser derivadas da lei das correntes de Kirchhoff[1]. Vamos desprezar a Equação 2.19 para termos seis equações independentes, ou seja, equações 2.13–2.18. Precisamos de mais uma, que podemos derivar da lei das tensões de Kirchhoff.

Antes de enunciar a lei das tensões de Kirchhoff, devemos definir um *caminho fechado* ou *laço*. Começando em um nó escolhido arbitrariamente, traçamos um caminho fechado percorrendo um trajeto que passa pelos elementos básicos de circuito selecionados e retorna ao nó original sem passar por qualquer nó intermediário mais de uma vez. O circuito mostrado na Figura 2.14 tem somente um caminho fechado ou laço. Por exemplo, escolhendo o nó *a* como ponto de partida e fazendo o trajeto no sentido horário, formamos o caminho fechado passando pelos nós *d*, *c*, *b* e voltando ao nó *a*. Agora podemos enunciar a *lei das tensões de Kirchhoff:*

Lei das tensões de Kirchhoff (LTK): A soma algébrica de todas as tensões ao longo de qualquer caminho fechado em um circuito é igual a zero.

Para usar a lei das tensões de Kirchhoff, devemos designar um sinal algébrico (direção de referência) a cada tensão no laço. À medida que traçamos um caminho fechado, aparecerá uma queda ou uma elevação de tensão na direção que escolhemos. Atribuir um sinal positivo a uma elevação de tensão significa atribuir um sinal negativo a uma queda de tensão. De outra forma, atribuir um sinal negativo a uma elevação de tensão significa atribuir um sinal positivo a uma queda de tensão.

Aplicamos, agora, a lei das tensões de Kirchhoff ao circuito mostrado na Figura 2.14. Escolhemos traçar o caminho fechado em sentido horário, designando um sinal algébrico positivo às quedas de tensão. Começando no nó *d*, temos a expressão

$$v_l - v_c + v_1 - v_s = 0 \tag{2.20}$$

que representa a sétima equação independente necessária para encontrar as sete variáveis desconhecidas mencionadas anteriormente.

Pensar em ter de resolver sete equações simultâneas para determinar a corrente fornecida por um par de pilhas à lâmpada de uma lanterna não é muito animador. Portanto, nos próximos capítulos apresentamos técnicas analíticas que

[1]Falaremos mais sobre essa observação no Capítulo 4.

o habilitarão a resolver um circuito simples de um só laço escrevendo uma única equação. Contudo, antes de passarmos para a discussão dessas técnicas de circuito, precisamos fazer várias observações sobre a análise detalhada do circuito da lanterna. Em geral, essas observações são válidas e, por conseguinte, importantes para as discussões nos capítulos subseqüentes. Elas também dão sustentação à afirmativa de que o circuito da lanterna pode ser resolvido definindo-se uma única incógnita.

Em primeiro lugar, observe que, se você conhecer a corrente em um resistor, também conhecerá sua tensão, pois corrente e tensão estão diretamente relacionadas pela lei de Ohm. Assim, você pode associar uma única variável desconhecida a cada resistor, seja a corrente ou a tensão. Digamos que você escolha a corrente como variável desconhecida. Então, tão logo resolva a corrente desconhecida no resistor, poderá determinar a tensão no resistor. Em geral, se você conhecer a corrente em um elemento passivo, poderá achar a tensão em seus terminais, o que reduz bastante o número de equações simultâneas a resolver. Por exemplo, no circuito da lanterna, eliminamos as tensões v_c, v_l e v_1 como incógnitas. Assim, já de saída, reduzimos a tarefa analítica à resolução de quatro equações simultâneas, em vez de sete.

A segunda observação geral está relacionada às conseqüências de conectar somente dois elementos para formar um nó. De acordo com a lei das correntes de Kirchhoff, quando apenas dois elementos estão conectados a um nó, se conhecermos a corrente em um dos elementos, também poderemos conhecer a do segundo elemento. Em outras palavras, você só precisa definir uma única corrente desconhecida para os dois elementos. Quando apenas dois elementos se conectam em um único nó, diz-se que eles estão *em série*. A importância dessa segunda observação é óbvia quando você observa que cada nó no circuito mostrado na Figura 2.14 envolve somente dois elementos. Assim, você precisa definir apenas uma corrente desconhecida. A razão é que as equações 2.16–2.18 levam diretamente à equação

$$i_s = i_1 = -i_c = i_l, \tag{2.21}$$

que afirma que, se você conhecer a corrente de qualquer um dos elementos, conhecerá todas. Por exemplo, optar por i_s como incógnita elimina i_1, i_c e i_l. O problema é reduzido a determinar uma incógnita, ou seja, i_s.

Os exemplos 2.6 e 2.7 ilustram como escrever equações de circuito baseadas nas leis de Kirchhoff. O Exemplo 2.8 ilustra como usar as leis de Kirchhoff e a lei de Ohm para determinar uma corrente desconhecida. O Exemplo 2.9 amplia a técnica apresentada no Exemplo 2.5 para construir um modelo de circuito para um dispositivo cujas características terminais são conhecidas.

Exemplo 2.6 Utilização da lei das correntes de Kirchhoff

Some as correntes em cada nó do circuito mostrado na Figura 2.15. Observe que não há nenhum ponto de conexão (•) no centro do diagrama, onde o ramo de 4 Ω cruza o ramal que contém a fonte ideal de corrente i_a.

Solução

Ao escrever as equações, usamos um sinal positivo para uma corrente que sai do nó. As quatro equações são

nó a $\quad i_1 + i_4 - i_2 - i_5 = 0,$
nó b $\quad i_2 + i_3 - i_1 - i_b - i_a = 0,$
nó c $\quad i_b - i_3 - i_4 - i_c = 0,$
nó d $\quad i_5 + i_a + i_c = 0.$

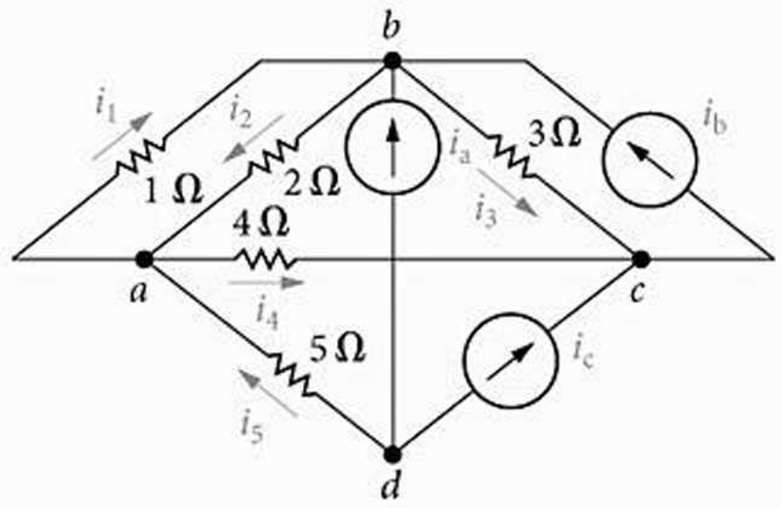


Figura 2.15 ▲ Circuito para o Exemplo 2.6.

Exemplo 2.7 Utilização da lei das tensões de Kirchhoff

Some as tensões ao redor de cada caminho designado no circuito mostrado na Figura 2.16.

Solução

Ao escrever as equações, usamos um sinal positivo para uma queda de tensão. As quatro equações são

caminho a $\quad -v_1 + v_2 + v_4 - v_b - v_3 = 0,$
caminho b $\quad -v_a + v_3 + v_5 = 0,$
caminho c $\quad v_b - v_4 - v_c - v_6 - v_5 = 0,$
caminho d $\quad -v_a - v_1 + v_2 - v_c + v_7 - v_d = 0.$

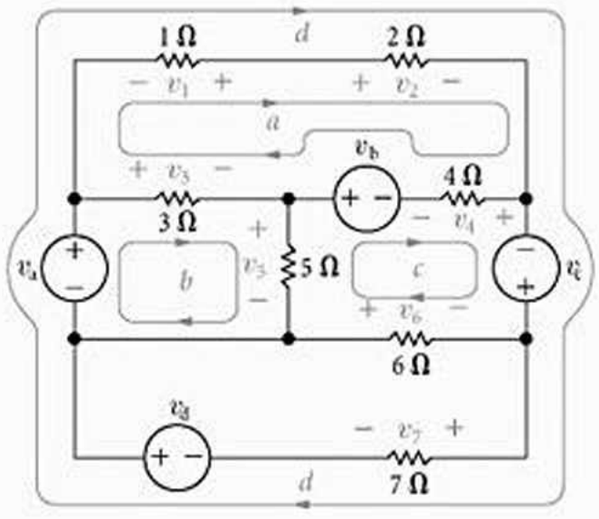


Figura 2.16 ▲ Circuito para o Exemplo 2.7.

Exemplo 2.8 Aplicação da lei de Ohm e das leis de Kirchhoff para determinar uma corrente desconhecida

a) Use as leis de Kirchhoff e a lei de Ohm para determinar i_o no circuito mostrado na Figura 2.17.

b) Teste a solução para i_o verificando se a potência total gerada é igual à potência total dissipada.

Solução

a) Começamos desenhando novamente o circuito e designando uma corrente desconhecida ao resistor de 50 Ω e tensões desconhecidas nos resistores de 10 Ω e 50 Ω. A Figura 2.18 mostra o circuito. Os nós são rotulados *a*, *b* e *c* para auxiliar a discussão.

Como i_o também é a corrente na fonte de 120 V, temos duas correntes desconhecidas e, portanto, devemos derivar duas equações simultâneas envolvendo i_o e i_1. Obtemos uma das equações aplicando a lei das correntes de Kirchhoff ao nó *b* ou *c*. Somando as correntes no nó *b* e designando um sinal positivo às correntes que saem do nó, temos

$$i_1 - i_o - 6 = 0.$$

Obtemos a segunda equação pela lei das tensões de Kirchhoff combinada com a lei de Ohm. Sabendo que pela lei de Ohm v_o é $10i_o$ e v_1 é $50i_1$, somamos as tensões ao redor do caminho fechado *cabc*, obtendo

$$-120 + 10i_o + 50i_1 = 0.$$

Quando escrevemos essa equação, designamos um sinal positivo às quedas no sentido horário. Resolvendo essas duas equações para i_o e i_1, temos

$$i_o = -3 \text{ A} \quad \text{e} \quad i_1 = 3 \text{ A}.$$

b) A potência dissipada no resistor de 50 Ω é

$$p_{50\Omega} = (3)^2(50) = 450 \text{ W}.$$

A potência dissipada no resistor de 10 Ω é

$$p_{10\Omega} = (-3)^2(10) = 90 \text{ W}.$$

A potência entregue à fonte de 120 V é

$$p_{120\text{V}} = -120i_o = -120(-3) = 360 \text{ W}.$$

A potência entregue à fonte de 6 A é

$$p_{6A} = -v_1(6), \text{ mas } v_1 = 50i_1 = 150 \text{ V}.$$

Portanto,

$$p_{6A} = -150(6) = -900 \text{ W}.$$

A fonte de 6 A está fornecendo 900 W e a fonte de 120 V está absorvendo 360 W. A potência total absorvida é 360 + 450 + 90 = 900 W. Portanto, a solução confirma que a potência fornecida é igual à potência absorvida.

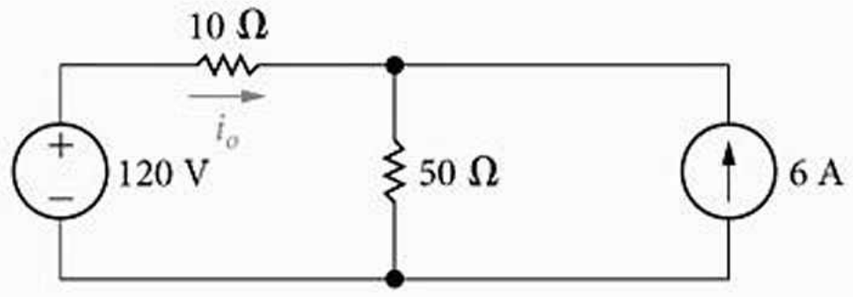


Figura 2.17 ▲ O circuito para o Exemplo 2.8.

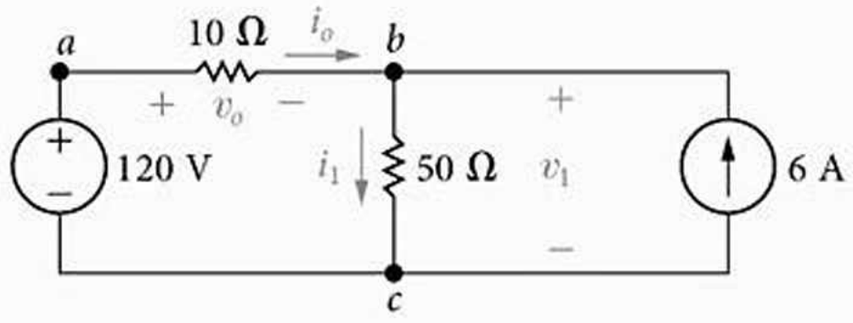


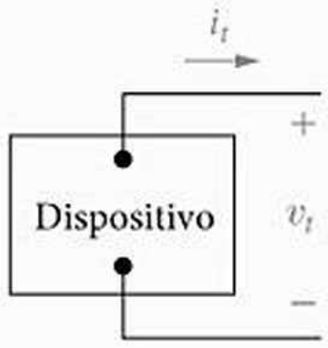
Figura 2.18 ▲ O circuito mostrado na Figura 2.17, com as incógnitas i_1, v_o e v_1 definidas.

Exemplo 2.9 Construção de um modelo de circuito baseado em medições terminais

A tensão e a corrente terminais foram medidas no dispositivo mostrado na Figura 2.19(a), e os valores encontrados de v_t e i_t estão tabulados na Figura 2.19(b).

a) Construa um modelo de circuito para o dispositivo dentro do quadrado.

b) Usando esse modelo determine a potência que esse dispositivo fornecerá a um resistor de 10 Ω.



(a)

v_t (V)	i_t (A)
30	0
15	3
0	6

(b)

Figura 2.19 ▲ (a) Dispositivo e (b) dados para o Exemplo 2.9.

Solução

a) A representação gráfica da tensão como uma função da corrente é mostrada na Figura 2.20(a). A equação da reta representada é

$$v_t = 30 - 5i_t.$$

Precisamos identificar agora os componentes de um modelo que produzirão a mesma relação entre tensão e corrente. A lei das tensões de Kirchhoff nos diz que as quedas de tensão em dois componentes em série são somadas. Pela equação, um desses componentes produz uma queda de 30 V independentemente da corrente. Esse componente pode ser modelado como uma fonte de tensão ideal independente. O outro componente produz uma queda de tensão positiva na direção da corrente i_t. Como a queda de tensão é proporcional à corrente, a lei de Ohm nos diz que esse componente pode ser mo-

delado como um resistor ideal com um valor de 5 Ω. O modelo de circuito resultante é representado em linhas tracejadas no retângulo da Figura 2.20(b).

b) Anexamos agora um resistor de 10 Ω ao dispositivo da Figura 2.20(b) para completar o circuito. A lei das correntes de Kirchhoff nos diz que a corrente no resistor de 10 Ω é igual à corrente no resistor de 5 Ω. Usando a lei das tensões de Kirchhoff e a lei de Ohm, podemos escrever a equação para as quedas de tensão ao longo do circuito, começando na fonte de tensão e prosseguindo em sentido horário:

$$-30 + 5i + 10i = 0.$$

Resolvendo para i, obtemos

$$i = 2 \text{ A}.$$

Uma vez que esse é o valor da corrente que flui no resistor de 10 Ω, podemos usar a equação de potência $p = i^2R$ para calcular a potência fornecida a esse resistor:

$$p_{10\Omega} = (2)^2(10) = 40 \text{ W}.$$

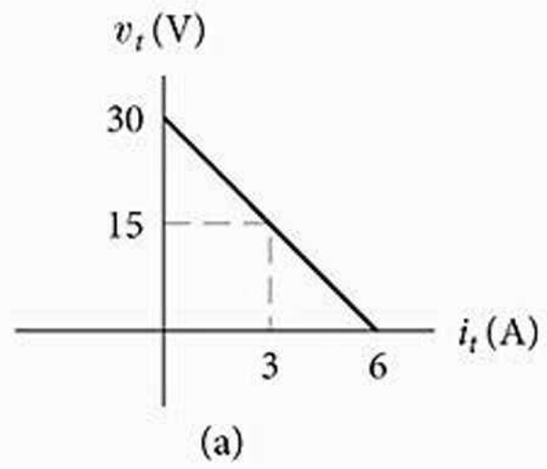


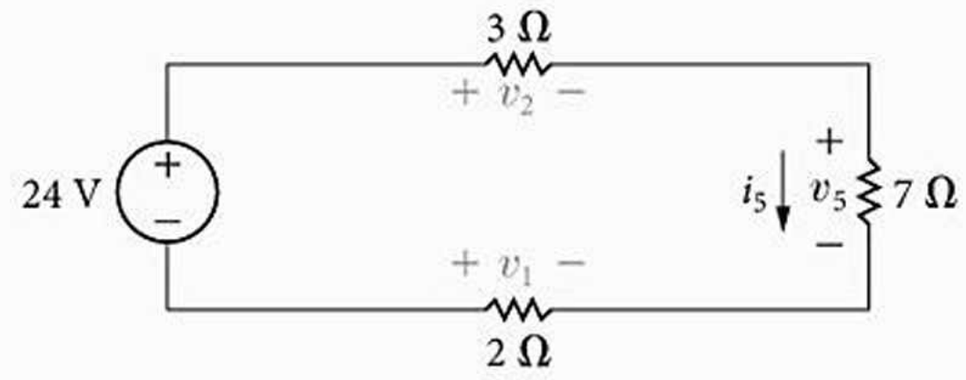
Figura 2.20 ▲ (a) Gráfico de v_t versus i_t para o dispositivo da Figura 2.19(a). (b) Modelo de circuito resultante para o dispositivo da Figura 2.19(a), conectado a um resistor de 10 Ω.

✔ PROBLEMAS PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 2 — Saber enunciar e usar a lei de Ohm e as leis de correntes e tensões de Kirchhoff

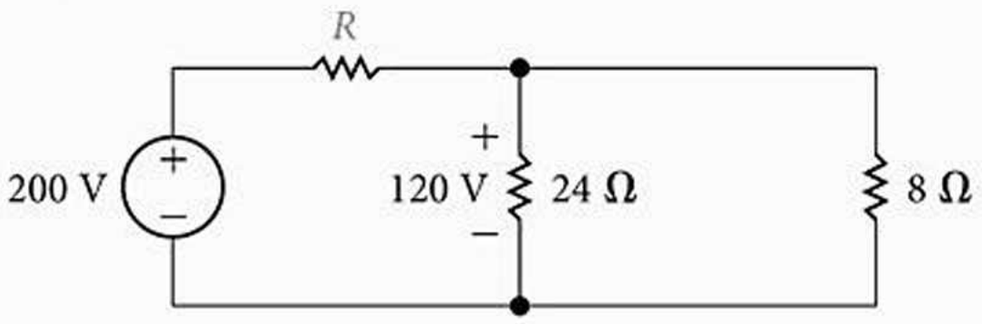
2.5 Para o circuito mostrado, calcule (a) i_5; (b) v_1; (c) v_2; (d) v_5 e (e) a potência entregue pela fonte de 24 V.

Resposta: (a) 2 A;
(b) −4 V;
(c) 6 V;
(d) 14 V;
(e) 48 W.



2.6 Use a lei de Ohm e as leis de Kirchhoff para determinar o valor de R no circuito mostrado.

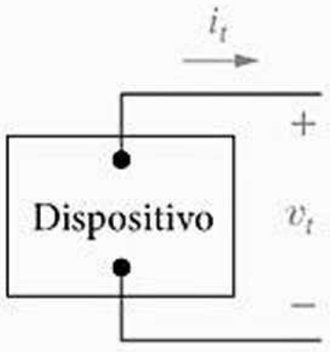
Resposta: $R = 4\ \Omega$.



2.7 a) A tensão e a corrente terminais foram medidas no dispositivo mostrado. Os valores de v_t e i_t são dados na tabela. Usando esses valores, crie o gráfico da reta v_t *versus* i_t. Calcule a equação da reta e use-a para construir um modelo para o dispositivo, usando uma fonte ideal de tensão e um resistor.

b) Use o modelo construído em (a) para prever a potência que o dispositivo fornecerá a um resistor de 25 Ω.

Resposta: (a) Uma fonte de 25 V em série com um resistor de 100 Ω;
(b) 1 W.



(a)

v_t (V)	i_t (A)
25	0
15	0,1
5	0,2
0	0,25

(b)

2.8 Repita o Problema de Avaliação 2.7, utilizando a equação da reta representada no gráfico para construir um modelo contendo uma fonte ideal de corrente e um resistor.

Resposta: (a) Uma fonte de corrente de 0,25 A conectada entre os terminais de um resistor de 100 Ω;
(b) 1 W.

NOTA: Tente resolver também os problemas 2.14, 2.17, 2.18 e 2.19, apresentados no final deste capítulo.

2.5 Análise de um circuito que contém fontes dependentes

Concluímos esta introdução à análise elementar de circuitos com a discussão de um circuito que contém uma fonte dependente, como mostra a Figura 2.21.

Queremos usar as leis de Kirchhoff e a lei de Ohm para determinar v_o nesse circuito. Antes de escrever as equações, uma boa prática é examinar atentamente o diagrama de circuito. Isso nos ajudará a identificar as informações conhecidas e as informações que devemos obter por meio de cálculos. Também nos ajudará a elaborar uma estratégia para resolver o circuito usando apenas alguns cálculos.

Um exame do circuito da Figura 2.21 revela que:

- Tão logo conheçamos i_o, poderemos calcular v_o usando a lei de Ohm.
- Tão logo conheçamos i_Δ, conheceremos também a corrente fornecida pela fonte independente $5i_\Delta$.
- A corrente na fonte de 500 V é i_Δ.

Assim, há duas correntes desconhecidas, i_Δ e i_o. Precisamos construir e resolver duas equações independentes que envolvam essas duas correntes para determinar o valor de v_o.

Observe, no circuito, o caminho fechado que contém a fonte de tensão, o resistor de 5 Ω e o resistor de 20 Ω. Podemos aplicar a lei das tensões de Kirchhoff ao longo desse caminho fechado. A equação resultante contém as duas correntes desconhecidas:

$$500 = 5i_\Delta + 20i_o. \tag{2.22}$$

Precisamos agora gerar uma segunda equação contendo essas duas correntes. Considere o caminho fechado formado pelo resistor de 20 Ω e a fonte de corrente dependente. Se tentarmos aplicar a lei das tensões de Kirchhoff a esse laço, não conseguiremos desenvolver uma equação útil porque não conhecemos o valor da tensão nos terminais da fonte de corrente dependente. Na verdade, essa tensão é v_o, que é a tensão que estamos tentando calcular. Escrever uma equação para esse laço não nos aproxima de uma solução. Por essa mesma razão, não usamos o caminho fechado que contém a fonte de tensão, o resistor de 5 Ω, e a fonte dependente.

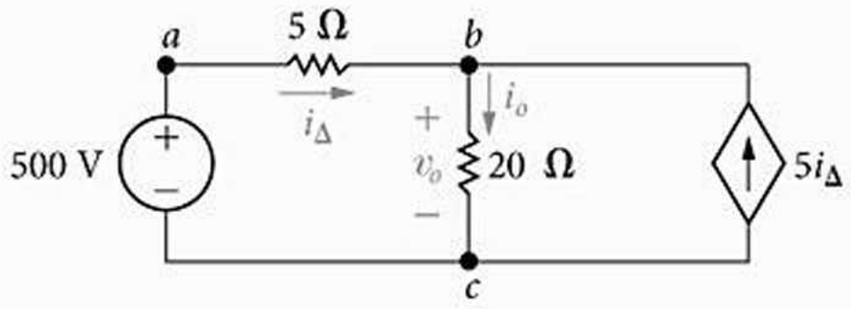


Figura 2.21 ▲ Circuito com uma fonte dependente.

Há três nós no circuito, portanto recorremos à lei das correntes de Kirchhoff para gerar a segunda equação. O nó *a* conecta a fonte de tensão e o resistor de 5 Ω; como já havíamos observado, a corrente nesses dois elementos é a mesma. O nó *b* ou o nó *c* podem ser usados para construir a segunda equação, por meio da lei das correntes de Kirchhoff. Selecionando o nó *b*, temos a seguinte equação:

$$i_o = i_\Delta + 5i_\Delta = 6i_\Delta. \tag{2.23}$$

Resolvendo as equações 2.22 e 2.23 para as correntes, obtemos

$$i_\Delta = 4 \text{ A},$$

$$i_o = 24 \text{ A}. \tag{2.24}$$

Usando a Equação 2.24 e a lei de Ohm para o resistor de 20 Ω, podemos resolver para a tensão v_o:

$$v_o = 20i_o = 480 \text{ V}.$$

Pense em uma estratégia de análise de circuito antes de começar a escrever equações. Como demonstramos, nem todo caminho fechado oferece uma oportunidade de escrever uma equação útil baseada na lei das tensões de Kirchhoff. Nem todo nó proporciona uma aplicação útil da lei das correntes de Kirchhoff. Uma consideração preliminar do problema pode ajudar a selecionar a abordagem mais proveitosa e as ferramentas de análise mais úteis para um determinado problema. Escolher uma boa abordagem e as ferramentas adequadas normalmente reduz a quantidade e a complexidade das equações a resolver. O Exemplo 2.10 ilustra outra aplicação da lei de Ohm e das leis de Kirchhoff a um circuito com uma fonte dependente. O Exemplo 2.11 envolve um circuito muito mais complicado, porém, com uma cuidadosa escolha das ferramentas, a análise fica relativamente descomplicada.

Exemplo 2.10 Aplicação da lei de Ohm e das leis de Kirchhoff para determinar uma tensão desconhecida

a) Use as leis de Kirchhoff e a lei de Ohm para determinar a tensão v_o como mostrada na Figura 2.22.
b) Mostre que sua solução é consistente com a restrição de que a potência total fornecida ao circuito é igual à potência total consumida.

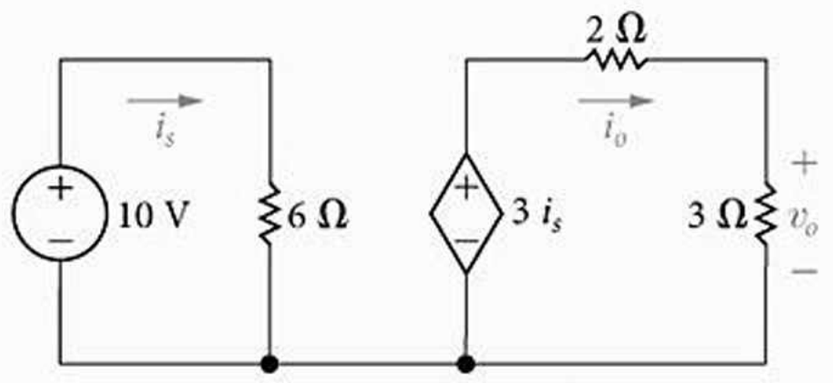


Figura 2.22 ▲ Circuito para o Exemplo 2.10.

Solução

a) Um exame minucioso do circuito da Figura 2.22 revela que:
   - Há dois caminhos fechados, o da esquerda, com a corrente i_s, e o da direita com a corrente i_o.
   - Uma vez conhecida i_o, podemos calcular v_o.

Precisamos de duas equações para as duas correntes. Como há dois caminhos fechados e ambos têm fontes de tensão, podemos aplicar a lei das tensões de Kirchhoff a cada um deles para obter as seguintes equações:

$$10 = 6i_s,$$
$$3i_s = 2i_o + 3i_o.$$

Resolvendo para as correntes, temos

$$i_s = 1{,}67 \text{ A},$$
$$i_o = 1 \text{ A}.$$

Aplicando a lei Ohm ao resistor de 3 Ω, obtemos a tensão desejada:

$$v_o = 3i_o = 3 \text{ V}.$$

b) Para calcular a potência fornecida às fontes de tensão, usamos a equação de potência na forma $p = vi$. A potência fornecida à fonte de tensão independente é

$$p = (10)(-1{,}67) = -16{,}7 \text{ W}.$$

A potência fornecida à fonte de tensão dependente é

$$p = (3i_s)(-i_o) = (5)(-1) = -5 \text{ W}.$$

Ambas as fontes estão fornecendo potência, e a potência total é 21,7 W.

Para calcular a potência fornecida aos resistores, usamos a equação de potência na forma $p = i^2R$. A potência entregue ao resistor de 6 Ω é

$$p = (1{,}67)^2(6) = 16{,}7 \text{ W}.$$

A potência fornecida ao resistor de 2 Ω é

$$p = (1)^2(2) = 2 \text{ W}.$$

A potência fornecida ao resistor de 3 Ω é

$$p = (1)^2(3) = 3 \text{ W}.$$

Todos os resistores dissipam potência, e a potência total consumida é 21,7 W, igual à potência total fornecida pelas fontes.

Exemplo 2.11 Aplicação da lei de Ohm e das leis de Kirchhoff em um circuito amplificador

O circuito da Figura 2.23 representa uma configuração comum encontrada na análise e no projeto de amplificadores transistorizados. Admita que os valores de todos os elementos do circuito — R_1, R_2, R_C, R_E, V_{CC} e V_0 — sejam conhecidos.

a) Escreva as equações necessárias para determinar a corrente em cada elemento desse circuito.
b) A partir das equações, obtenha uma fórmula para calcular i_B com base nos valores dos elementos de circuito.

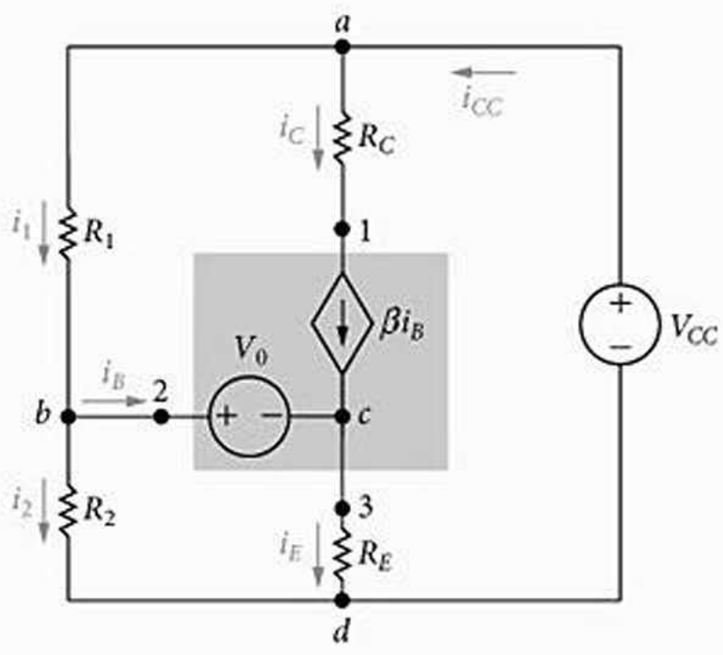


Figura 2.23 ▲ Circuito para o Exemplo 2.11.

Solução

Um exame cuidadoso do circuito revela um total de seis correntes desconhecidas, designadas por i_1, i_2, i_B, i_C, i_E e i_{CC}. Para definir essas seis correntes desconhecidas, usamos a observação de que o resistor R_C está em série como a fonte de corrente dependente βi_B. Devemos agora deduzir seis equações independentes envolvendo essas seis incógnitas.

a) Podemos deduzir três equações aplicando a lei das correntes de Kirchhoff a quaisquer três dos nós *a*, *b*, *c* e *d*. Vamos usar os nós *a*, *b* e *c* e considerar as correntes que saem desses nós como positivas:

$$(1)\ i_1 + i_C - i_{CC} = 0,$$
$$(2)\ i_B + i_2 - i_1 = 0,$$
$$(3)\ i_E - i_B - i_C = 0.$$

Uma quarta equação resulta da imposição da restrição apresentada pela conexão em série de R_C com a fonte dependente:

$$(4)\ i_C = \beta i_B.$$

Recorremos à lei das tensões de Kirchhoff para deduzir as duas equações restantes. Precisamos selecionar dois caminhos fechados para usar a lei das tensões de Kirchhoff. Observe que a tensão na fonte de corrente dependente é desconhecida e não pode ser determinada pela corrente da fonte βi_B. Portanto, temos de selecionar dois caminhos fechados que não contenham essa fonte de corrente dependente.

Escolhemos os circuitos *bcdb* e *badb* e especificamos as quedas de tensão como positivas para obter

$$(5)\ V_0 + i_E R_E - i_2 R_2 = 0$$
$$(6)\ -i_1 R_1 + V_{CC} - i_2 R_2 = 0$$

b) Para obter uma única equação para i_B em termos das variáveis de circuito conhecidas, você pode seguir estas etapas:

- Resolver a Equação (6) para i_1 e substituir i_1 na Equação (2).

- Resolver a Equação transformada (2) para i_2 e substituir i_2 na Equação (5).
- Resolver a Equação transformada (5) para i_E e substituir i_E na Equação (3). Usar a Equação (4) para eliminar i_C na Equação (3).
- Resolver a Equação transformada (3) para i_B e rearranjar os termos para obter

$$i_B = \frac{(V_{CC}R_2)/(R_1 + R_2) - V_0}{(R_1R_2)/(R_1 + R_2) + (1 + \beta)R_E}. \qquad (2.25)$$

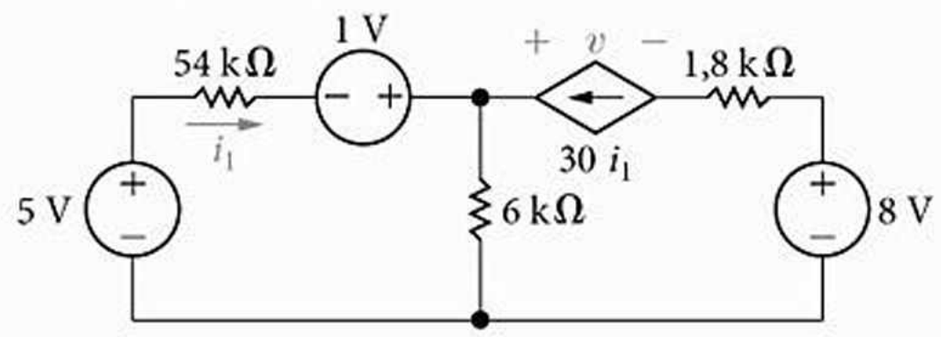
O Problema 2.27 pede que você verifique essas etapas. Note que, uma vez conhecida i_B, é fácil obter as correntes restantes.

✔ PROBLEMAS PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 3 — Saber como calcular a potência para cada elemento em um circuito simples

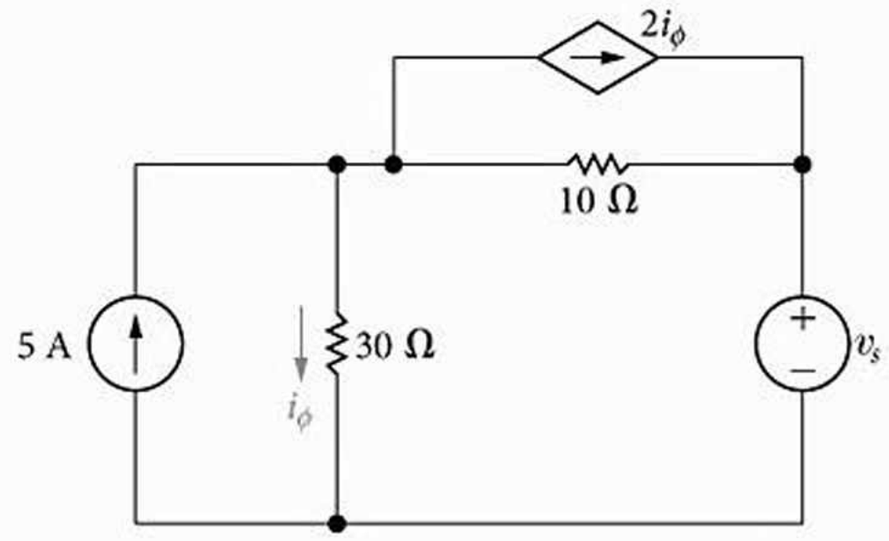
2.9 Para o circuito mostrado, determine (a) a corrente i_1 em microampères, (b) a tensão v em volts, (*c*) a potência total gerada, e (*d*) a potência total absorvida.

Resposta: (a) 25 μA;
(b) –2 V;
(c) 6150 μW;
(d) 6150 μW.



2.10 A corrente i_ϕ no circuito mostrado é 2 A. Determine
a) v_s,
b) a potência absorvida pela fonte de tensão independente,
c) a potência fornecida pela fonte de corrente independente,
d) a potência fornecida pela fonte de corrente controlada,
e) a potência total consumida nos dois resistores.

Resposta: (a) 70 V; (d) 40 W;
(b) 210 W; (e) 130 W.
(c) 300 W;



NOTA: Tente resolver também os problemas 2.24 e 2.28, apresentados no final deste capítulo.

Perspectiva prática

Segurança elétrica

No início deste capítulo, dissemos que a corrente que passa pelo corpo pode causar ferimentos. Vamos examinar esse aspecto da segurança pessoal.

É bem possível que você ache que os ferimentos causados pela eletricidade são queimaduras, mas nem sempre esse é o caso. O dano mais comum causado pela eletricidade é no sistema nervoso. Os nervos utilizam sinais eletromagnéticos, e correntes elétricas podem perturbar esses sinais. Quando o caminho percorrido pela corrente passa somente por músculos, os efeitos podem ser, entre outros, paralisia temporária (cessação de sinais nervosos) ou contrações musculares involuntárias que, de modo geral, não são uma ameaça à vida. Entretanto, quando o caminho percorrido pela corrente passa por nervos e músculos que controlam o suprimento de oxigênio ao cérebro, o problema é muito mais sério. A paralisia temporária desses músculos pode impedir uma pessoa de respirar, e uma contração muscular repentina pode interromper os sinais que regulam o batimento cardíaco. O resultado é uma parada no fluxo de sangue oxigenado para o cérebro, o que causa a morte em alguns minutos, a menos que a pessoa seja socorrida imediatamente. A Tabela 2.1 mostra algumas reações fisiológicas em função dos vários níveis de corrente. Os números nessa tabela são aproximados; foram obtidos

TABELA 2.1 Reações fisiológicas a níveis de corrente em seres humanos

Reação fisiológica	Corrente
Apenas perceptível	3–5 mA
Dor extrema	35–50 mA
Paralisia muscular	50–70 mA
Parada cardíaca	500 mA

Nota: Dados obtidos de W. F. Cooper, *Electrical safety engineering*, 2. ed. (Londres: Butterworth, 1986); C. D. Winburn, *Practical electrical safety* (Monticello, N.Y.: Marcel Dekker, 1988).

por uma análise de acidentes porque é óbvio que realizar experimentos elétricos com pessoas não é ético. Um bom projeto elétrico limitará a corrente a uns poucos miliampères ou menos sob todas as condições possíveis.

Desenvolveremos agora um modelo elétrico simplificado do corpo humano. Como o corpo age como um condutor de corrente, um ponto de partida razoável é modelar o corpo usando resistores. A Figura 2.24 mostra uma situação potencialmente perigosa. Existe uma diferença de tensão entre um braço e uma perna de um ser humano. A Figura 2.24(b) mostra um modelo elétrico do corpo humano da Figura 2.24(a). Os braços, pernas, pescoço e tronco (peito e abdomen) têm, cada um, uma resistência característica. Observe que o caminho da corrente é pelo tronco, que contém o coração, um arranjo potencialmente letal.

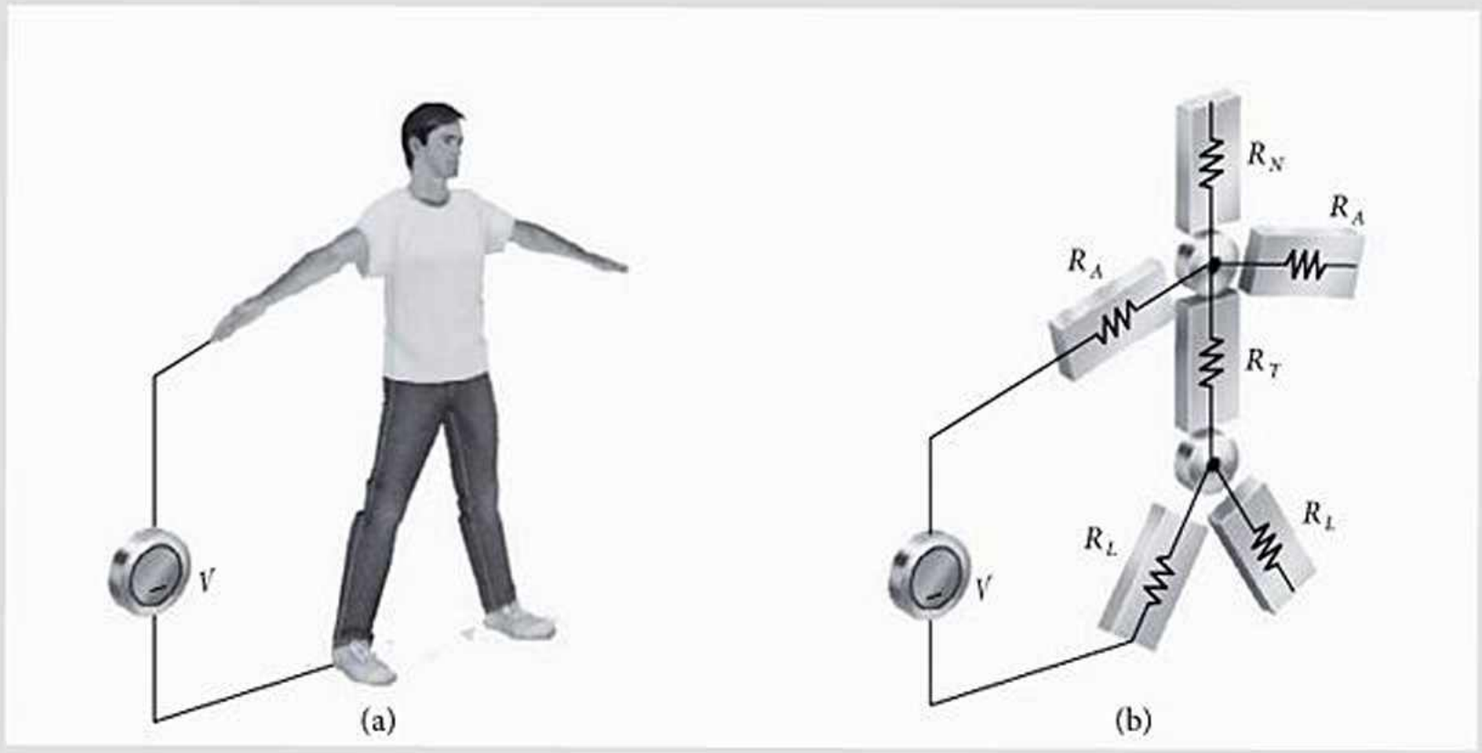


Figura 2.24 ◀ (a) Corpo humano com uma diferença de tensão entre um braço e uma perna. (b) Modelo simplificado do corpo humano com uma diferença de tensão entre um braço e uma perna.

NOTA: Avalie seu entendimento da "Perspectiva prática" resolvendo os problemas 2.34–2.38, apresentados no final deste capítulo.

Resumo

- Os elementos de circuito apresentados neste capítulo são fontes de tensão, fontes de corrente e resistores:
  - Uma *fonte ideal de tensão* mantém uma tensão entre seus terminais independentemente da corrente que flui por ela. Uma *fonte ideal de corrente* mantém uma corrente fluindo por ela independentemente da tensão em seus terminais. Fontes de tensão e corrente são ditas *independentes* quando não são influenciadas por qualquer outra corrente ou tensão no circuito; ou *dependentes,* quando seus valores são determinados por alguma outra corrente ou tensão no circuito.
  - Um *resistor* impõe proporcionalidade entre a tensão em seus terminais e a corrente que flui por ele. O valor da constante de proporcionalidade é denominado *resistência* e é medido em ohms.
- A *lei de Ohm* estabelece a proporcionalidade entre tensão e corrente em um resistor. Especificamente,

$$v = iR \tag{2.26}$$

  se o fluxo de corrente no resistor estiver na direção da queda da tensão que lhe é aplicada, ou

$$v = -iR \tag{2.27}$$

  se o fluxo de corrente no resistor estiver na direção da elevação da tensão que lhe é aplicada.
- Combinando a equação de potência, $p = vi$, com a lei de Ohm, podemos determinar a potência absorvida por um resistor:

$$p = i^2R = v^2/R. \tag{2.28}$$

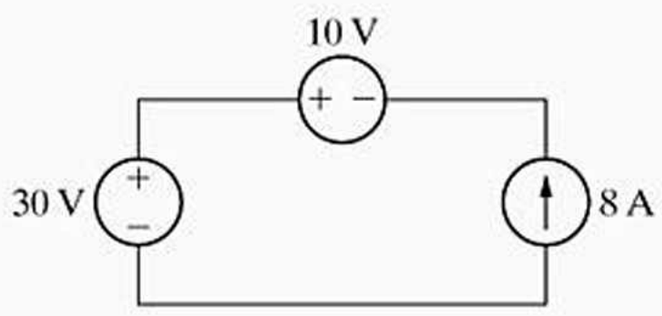
- Circuitos são descritos por nós e caminhos fechados. Um *nó* é um ponto no qual dois ou mais elementos de circuito se unem. Quando apenas dois elementos se conectam para formar um nó, diz-se que estão *em série.* Um *caminho fechado* é um laço que passa por elementos conectados, começa e termina no mesmo nó e passa por cada nó intermediário apenas uma vez.
- As tensões e correntes de elementos de circuito interconectados obedecem às leis de Kirchhoff:
  - *Lei das correntes de Kirchhoff* estabelece que a soma algébrica de todas as correntes em qualquer nó de um circuito seja igual a zero.
  - *Lei das tensões de Kirchhoff* estabelece que a soma algébrica de todas as tensões ao longo de qualquer caminho fechado em um circuito seja igual a zero.
- Um circuito é resolvido quando são determinadas a tensão e a corrente de cada elemento que o compõe. Combinando o entendimento de fontes independentes e dependentes, a lei de Ohm e as leis de Kirchhoff, podemos resolver muitos circuitos simples.

Problemas

Seção 2.1

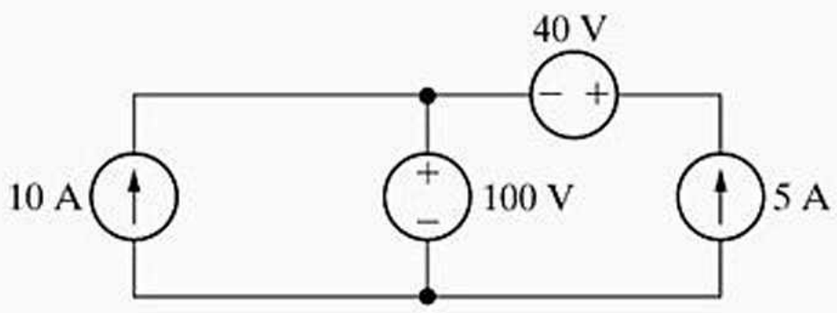
2.1 a) A interconexão de fontes ideais no circuito da Figura P2.1 é válida? Explique.
b) Identifique as fontes que estão fonecendo potência e as fontes que estão absorvendo potência.
c) Verifique se a potência total fornecida no circuito é igual à potência total absorvida.
d) Repita (a)–(c), invertendo a polaridade da fonte de 10 V.

Figura P2.1



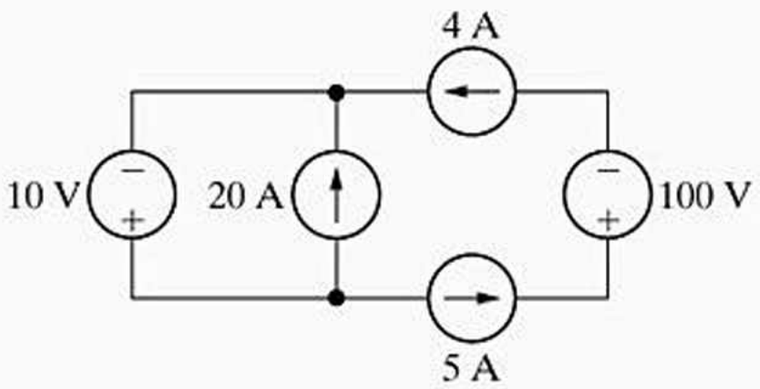
2.2* Se a interconexão na Figura P2.2 é válida, determine a potência fornecida pelas fontes de corrente. Se a interconexão não é válida, explique a razão.

Figura P2.2



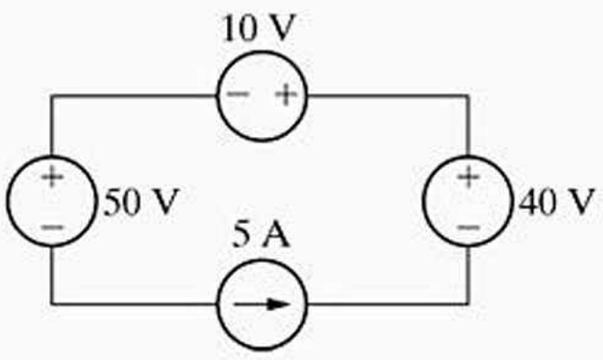
2.3* Se a interconexão na Figura P2.3 é válida, determine a potência total fornecida pelas fontes de tensão. Se a interconexão não é válida, explique a razão.

Figura P2.3



2.4 Se a interconexão na Figura P2.4 é válida, determine a potência total fornecida ao circuito. Se a interconexão não é válida, explique a razão.

Figura P2.4

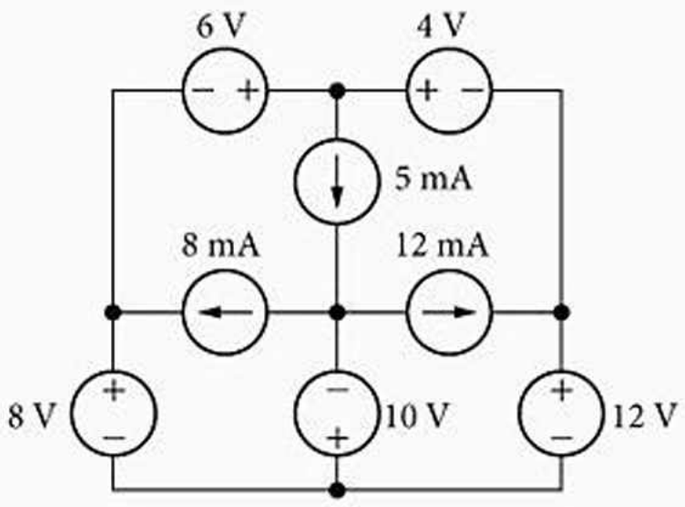


2.5 A interconexão de fontes ideais pode resultar em uma solução indeterminada. Com isso em mente, explique por que as soluções para v_1 e v_2 no circuito da Figura P2.5 não são únicas.

Figura P2.5

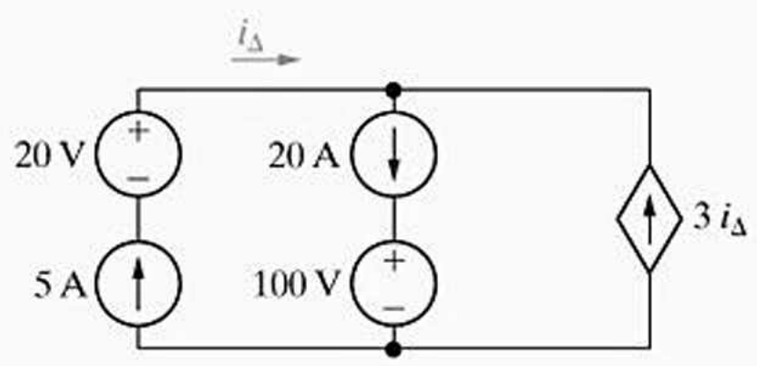
2.6* Se a interconexão na Figura P2.6 é válida, determine a potência total fornecida ao circuito. Se a interconexão não é válida, explique a razão.

Figura P2.6



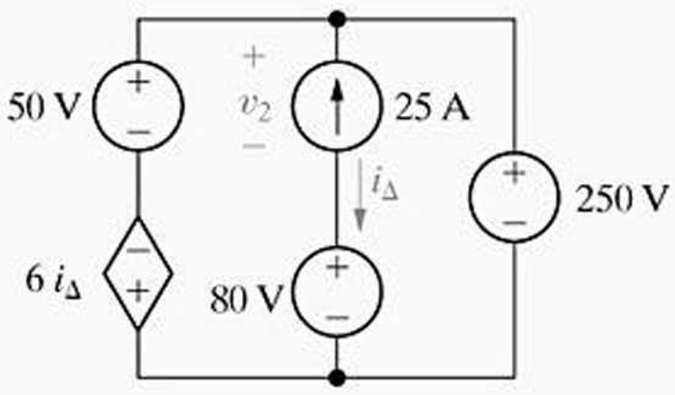
2.7 a) A interconexão na Figura P2.7 é válida? Explique.
b) Você pode determinar a energia total relacionada ao circuito? Explique.

Figura P2.7



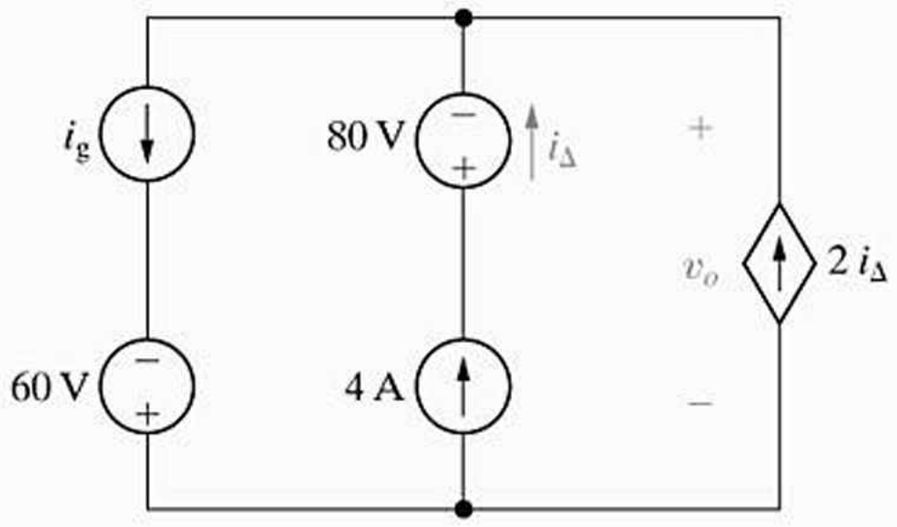
2.8* Se a interconexão na Figura P2.8 é válida, determine a potência total fornecida ao circuito. Se a interconexão não é válida, explique a razão.

Figura P2.8



2.9 Determine a potência total fornecida ao circuito da Figura P2.9 se $v_o = 100$ V e $i_g = 12$ A.

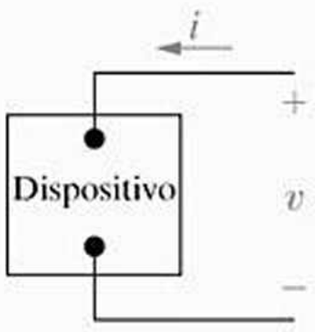
Figura P2.9



Seções 2.2–2.3

2.10* A tensão e a corrente foram medidas nos terminais do dispositivo mostrado na Figura P2.10(a). Os valores de v e i são dados na tabela da Figura P2.10(b). Use os valores da tabela para construir um modelo para o dispositivo consistindo-se de um único resistor.

Figura P2.10



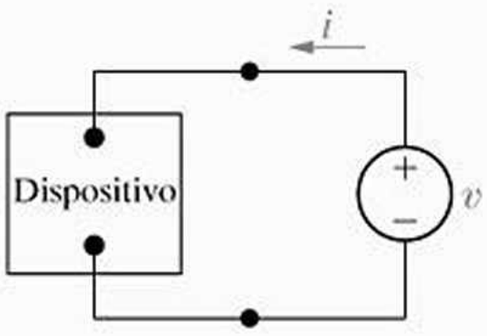
(a)

i (mA)	v (V)
−20	−160
−10	−80
10	80
20	160
30	240

(b)

2.11* Fontes de tensão de vários valores foram aplicadas ao dispositivo mostrado na Figura P2.11(a). A potência absorvida pelo dispositivo, para cada valor de tensão, está registrada na Figura P2.11(b). Use os valores da tabela para construir um modelo para o dispositivo consistindo-se de um único resistor.

Figura P2.11



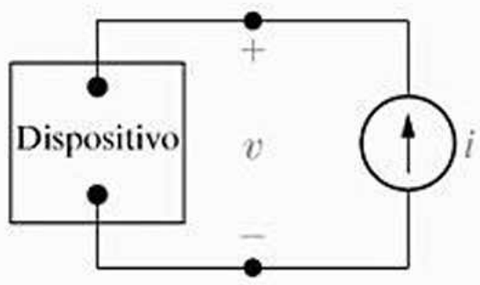
(a)

v (V)	p (mW)
−10	25,0
−5	6,25
5	6,25
10	25,0
15	56,25
20	100

(b)

2.12 Fontes de corrente de vários valores foram aplicadas ao dispositivo mostrado na Figura P2.12(a). A potência absorvida pelo dispositivo para cada valor de corrente está registrada na Figura P2.12(b). Use os valores da tabela para construir um modelo para o dispositivo consistindo-se de um único resistor.

Figura P2.12



(a)

i (A)	p (W)
2	100
4	400
6	900
8	1.600
10	2.500
12	3.600

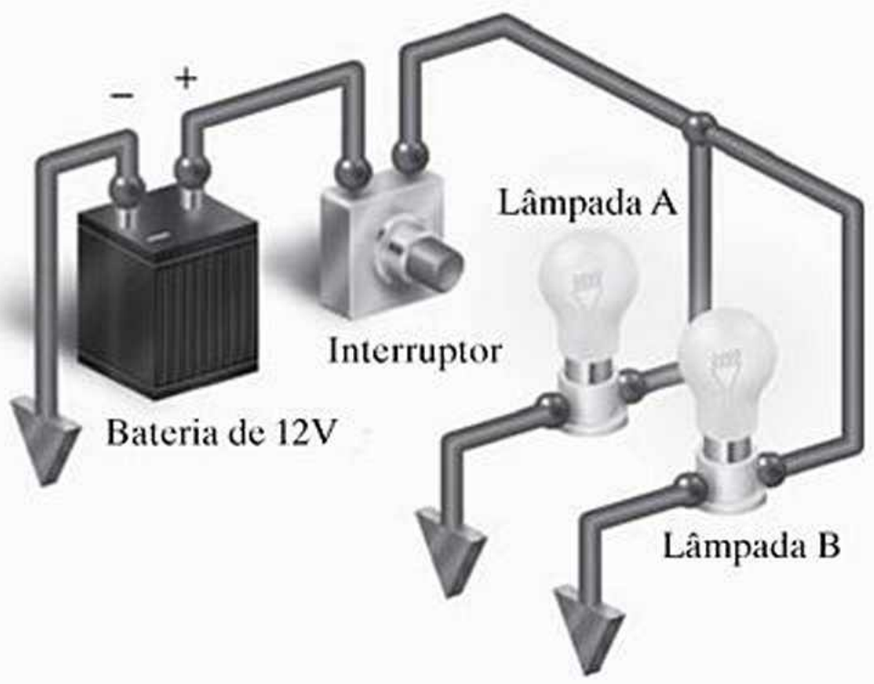
(b)

2.13 Um par de lâmpadas de farol de automóvel está conectado a uma bateria de 12 V por meio do arranjo mostrado na Figura P2.13. Na figura, o símbolo triangular ▼ é usado para indicar que o terminal está conectado diretamente à estrutura metálica do carro.

a) Construa um modelo de circuito usando resistores e uma fonte de tensão independente.

b) Identifique a correspondência entre o elemento ideal de circuito e o símbolo do componente que ele representa.

Figura P2.13

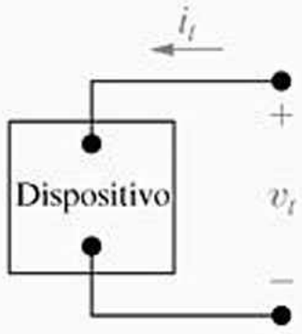


2.14* A tensão e a corrente foram medidas nos terminais do dispositivo mostrado na Figura P2.14(a). Os resultados estão tabulados na Figura P2.14(b).

a) Construa um modelo de circuito para esse dispositivo usando uma fonte ideal de corrente e um resistor.

b) Use o modelo para prever a potência que o dispositivo fornecerá a um resistor de 5 Ω.

Figura P2.14



(a)

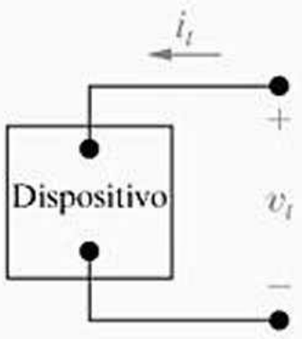
v_t (V)	i_t (A)
100	0
180	4
260	8
340	12
420	16

(b)

2.15 A tensão e a corrente foram medidas nos terminais do dispositivo mostrado na Figura P2.15(a). Os resultados estão tabulados na Figura P2.15(b).

a) Construa um modelo de circuito para esse dispositivo usando uma fonte ideal de tensão e um resistor.
b) Use o modelo para prever o valor de i_t quando v_t é zero.

Figura P2.15



(a)

v_t (V)	i_t (A)
50	0
58	2
66	4
74	6
82	8
90	10

(b)

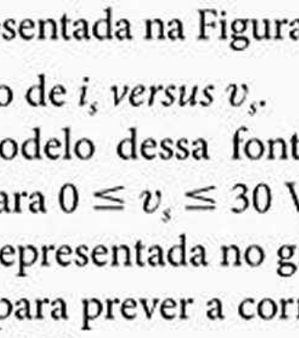
2.16 A tabela da Figura P2.16(a) mostra a relação entre a corrente e a tensão nos terminais da fonte real de corrente constante representada na Figura P2.16(b).

a) Monte um gráfico de i_s *versus* v_s.
b) Construa um modelo dessa fonte de corrente que seja válido para $0 \leq v_s \leq 30$ V, com base na equação da reta representada no gráfico em (a).
c) Use seu modelo para prever a corrente entregue a um resistor de 3 kΩ.
d) Use seu modelo para prever a tensão de circuito aberto da fonte de corrente.
e) Qual é a tensão real de circuito aberto?
f) Explique por que as respostas para (d) e (e) não são iguais.

Figura P2.16

i_s (mA)	v_s (V)
40	0
35	10
30	20
25	30
18	40
8	50
0	55

(a)



(b)

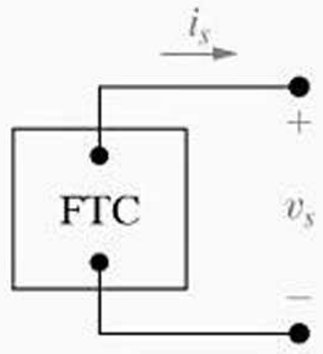
2.17* A tabela da Figura P2.17(a) mostra a relação entre a tensão e a corrente nos terminais da fonte real de tensão constante representada na Figura P2.17(b).

a) Faça um gráfico de v_s *versus* i_s.
b) Construa um modelo da fonte real que seja válido para $0 \leq i_s \leq 225$ mA, com base na equação da reta representada no gráfico em (a). (Use uma fonte ideal de tensão em série com um resistor ideal.)
c) Use seu modelo de circuito para prever a corrente fornecida a um resistor de 400 Ω conectado aos terminais de sua fonte real.
d) Use seu modelo de circuito para prever a corrente fornecida a um curto-circuito nos terminais da fonte real.
e) Qual é a tensão real do curto-circuito?
f) Explique por que as respostas para (d) e (e) não são iguais.

Figura P2.17

v_s (V)	i_s (mA)
75	0
60	75
45	150
30	225
20	300
10	400
0	500

(a)



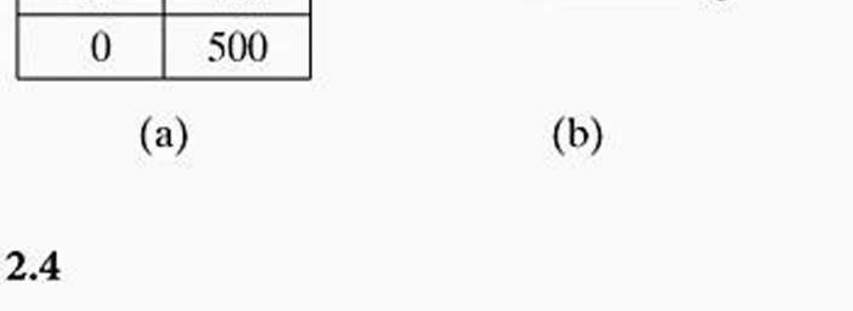
(b)

Seção 2.4

2.18* PSPICE Dado o circuito mostrado na Figura P2.18, determine

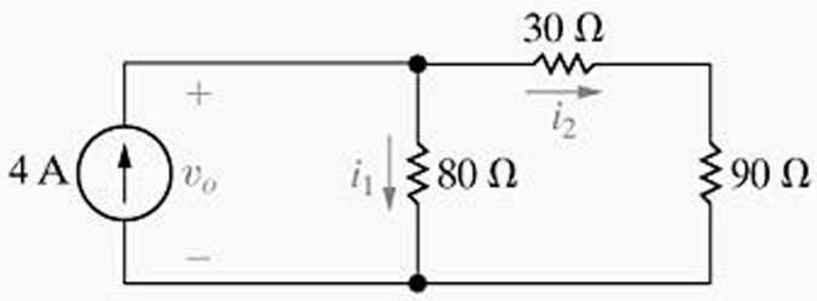
a) o valor de i_a,
b) o valor de i_b,
c) o valor de v_o,
d) a potência dissipada em cada resistor,
e) a potência fornecida pela fonte de 50 V.

Figura P2.18



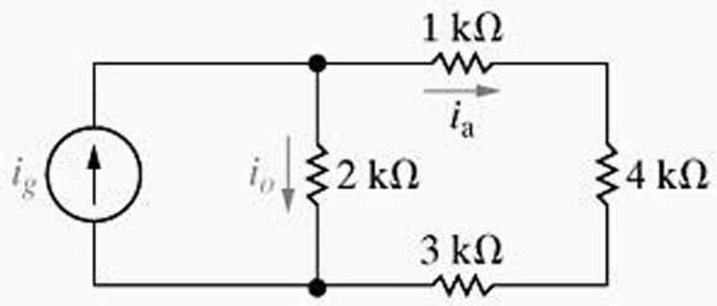
2.19* PSPICE a) Determine as correntes i_1 e i_2 no circuito da Figura P2.19.
b) Determine a tensão v_o.
c) Verifique se a potência total fornecida é igual à potência total consumida.

Figura P2.19



2.20 PSPICE A corrente i_a no circuito mostrado na Figura P2.20 é 2 mA. Determine (a) i_o; (b) i_g e (c) a potência fornecida pela fonte de corrente independente.

Figura P2.20



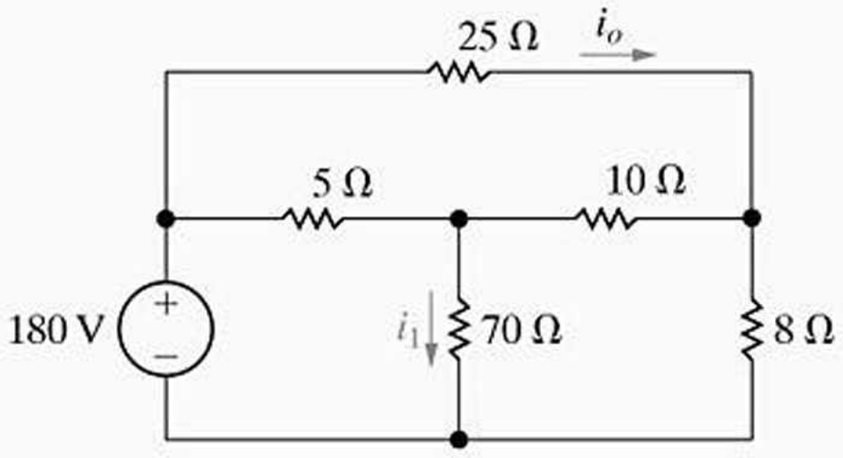
2.21 PSPICE A corrente i_o no circuito da Figura P2.21 é 4 A.

a) Determine i_1.

b) Determine a potência dissipada em cada resistor.

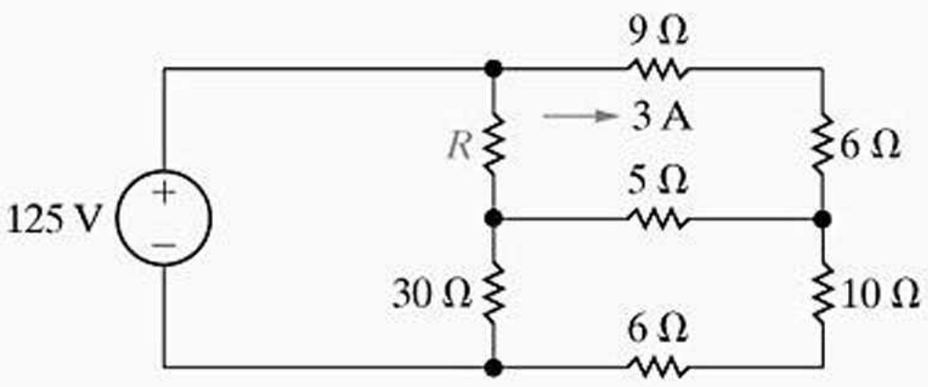
c) Verifique se a potência total dissipada no circuito é igual à potência fornecida pela fonte de 180 V.

Figura P2.21



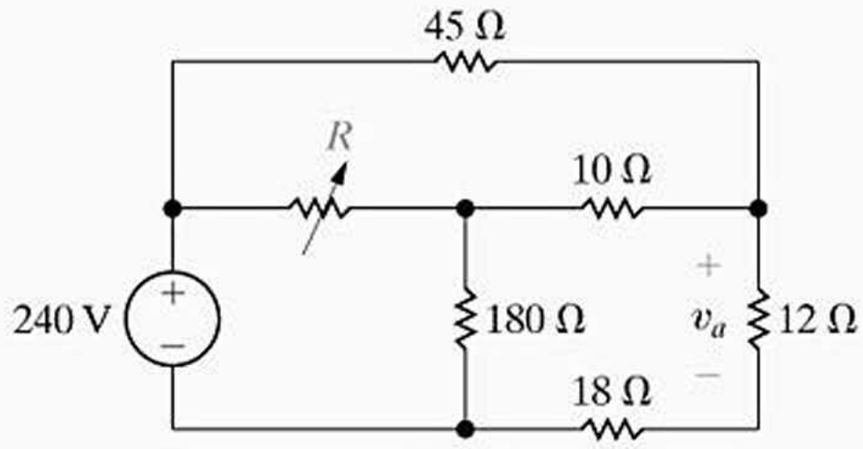
2.22 PSPICE Para o circuito mostrado na Figura P2.22, determine (a) R e (b) a potência fornecida pela fonte de 125 V.

Figura P2.22



2.23 PSPICE O resistor variável R no circuito da Figura P2.23 é ajustado até que v_a seja igual a 60 V. Determine o valor de R.

Figura P2.23



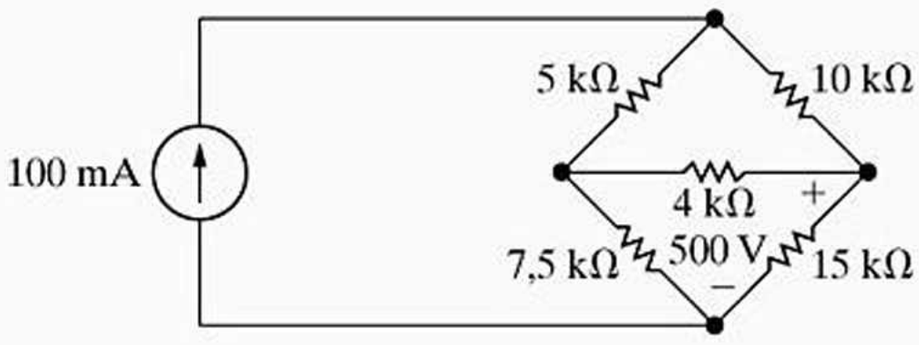
2.24* PSPICE A tensão no resistor de 15 kΩ no circuito da Figura P2.24 é 500 V, positiva no terminal superior.

a) Determine a potência dissipada em cada resistor.

b) Determine a potência fornecida pela fonte ideal de corrente 100 mA .

c) Verifique se a potência fornecida é igual à potência total dissipada.

Figura P2.24



2.25 PSPICE As correntes i_a e i_b no circuito da Figura P2.25 são 4 A e 2 A, respectivamente.

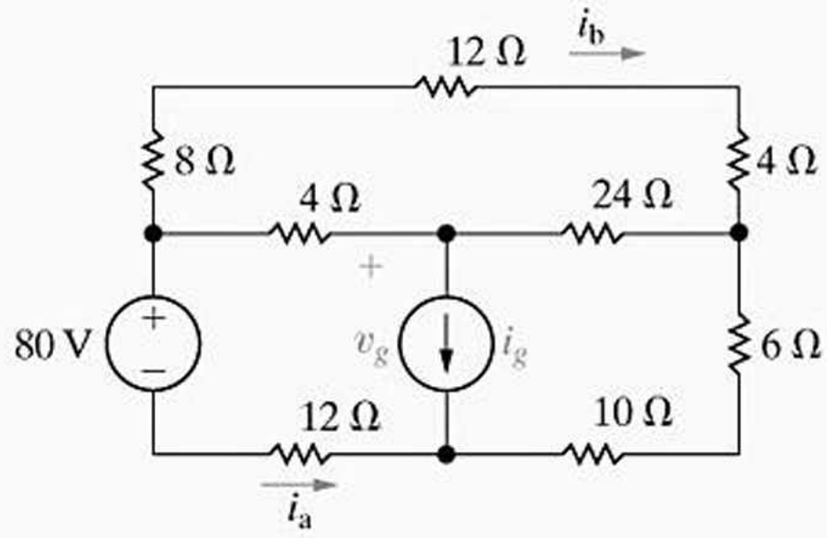
a) Determine i_g.

b) Determine a potência dissipada em cada resistor.

c) Determine v_g.

d) Mostre que a potência fornecida pela fonte de corrente é igual à potência absorvida por todos os outros elementos.

Figura P2.25

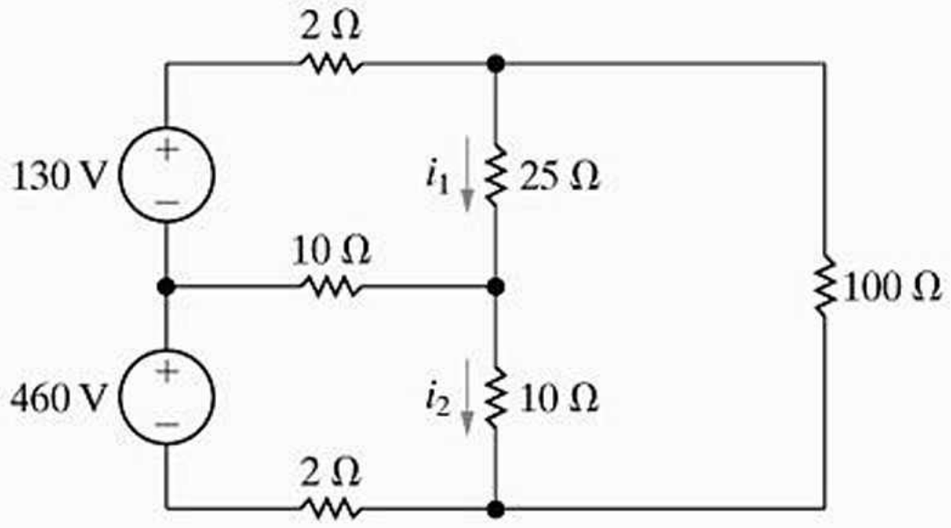


2.26 As correntes i_1 e i_2 no circuito da Figura P2.26 são 10 A e 25 A, respectivamente.

a) Determine a potência fornecida por cada fonte de tensão.

b) Mostre que a potência total fornecida é igual à potência total dissipada nos resistores.

Figura P2.26



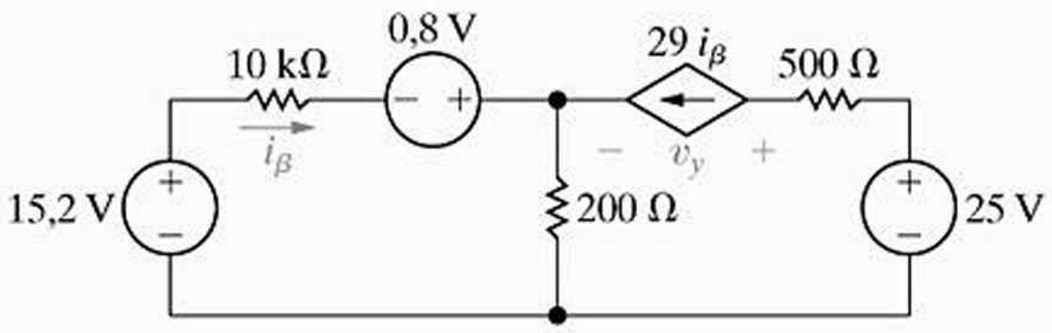
Seção 2.5

2.27 Deduza a Equação 2.25. *Sugestão:* use as equações (3) e (4) do Exemplo 2.11 para expressar i_E como uma função de i_B. Resolva a Equação (2) para i_2 e substitua o resultado nas equações (5) e (6). Resolva a 'nova' Equação (6) para i_1 e substitua esse resultado na 'nova' Equação (5). Substitua i_E na 'nova' Equação (5) e resolva para i_B. Observe que, como i_{CC} aparece apenas na Equação (1), a solução para i_B envolve a manipulação de apenas cinco equações.

2.28* PSPICE a) Determine a tensão v_y no circuito da Figura P2.28.

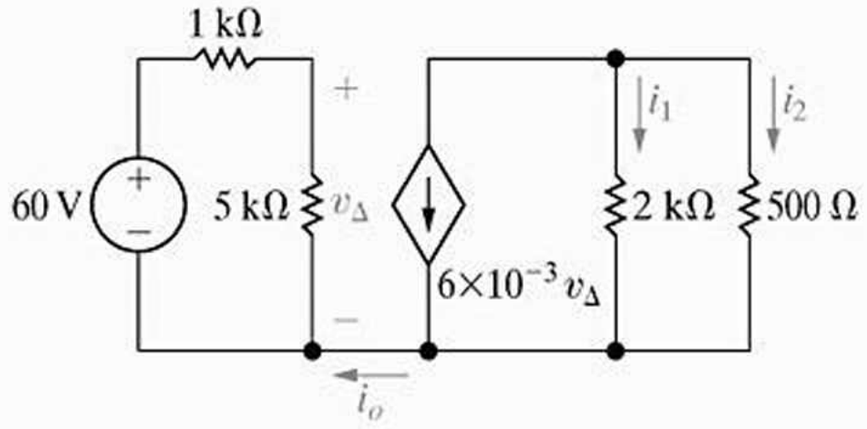
b) Mostre que a potência total gerada no circuito é igual à potência total absorvida.

Figura P2.28



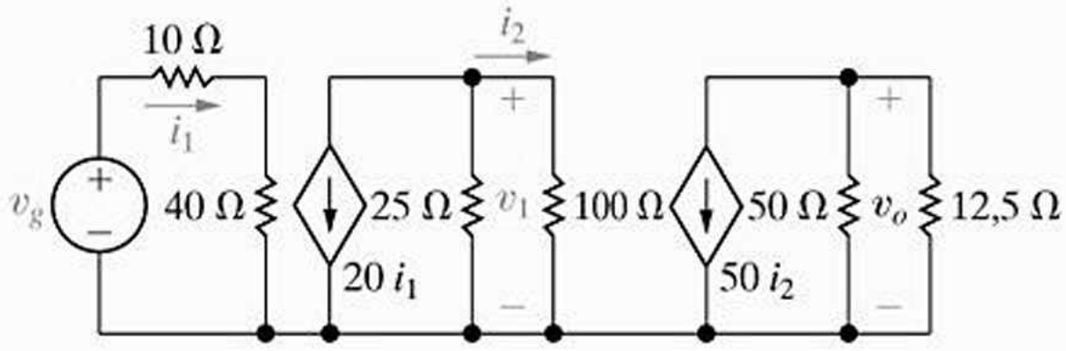
2.29 PSPICE Determine (a) i_o, (b) i_1 e (c) i_2 no circuito da Figura P2.29.

Figura P2.29



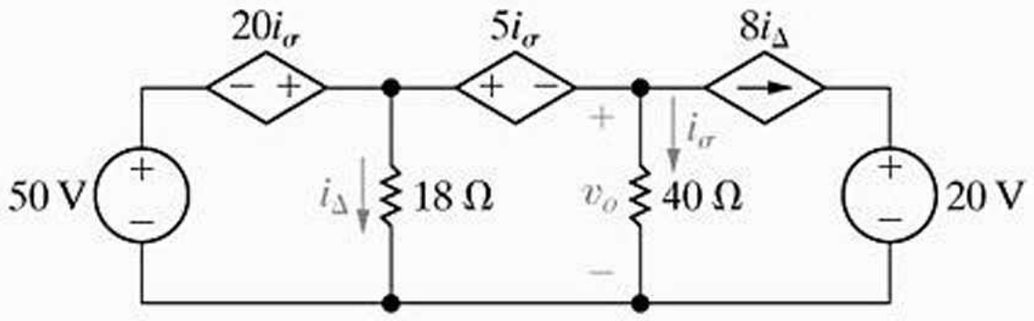
2.30 PSPICE Determine v_1 e v_g no circuito mostrado na Figura P2.30 quando v_0 é igual a 250 mV. (*Sugestão:* comece na extremidade direita do circuito e trabalhe no sentido inverso em direção a v_g.)

Figura P2.30



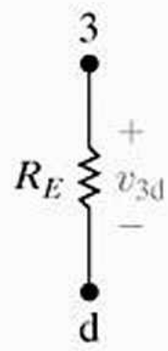
2.31 PSPICE Para o circuito representado na Figura P2.31, (a) calcule i_Δ e v_o e (b) mostre que a potência fornecida é igual à potência absorvida.

Figura P2.31



2.32 PSPICE Para o circuito mostrado na Figura 2.24, $R_1 = 20\ \text{k}\Omega$, $R_2 = 80\ \text{k}\Omega$, $R_C = 500\ \Omega$, $R_E = 100\ \Omega$, $V_{CC} = 15$ V, $V_0 = 200$ mV e $\beta = 39$. Calcule i_B, i_C, i_E, v_{3d}, v_{bd}, i_2, i_1, v_{ab}, i_{CC} e v_{13}. (*Observação:* na notação das tensões variáveis com dois índices, o primeiro é positivo em relação ao segundo. Veja Figura P2.32.)

Figura P2.32



Seções 2.1–2.5

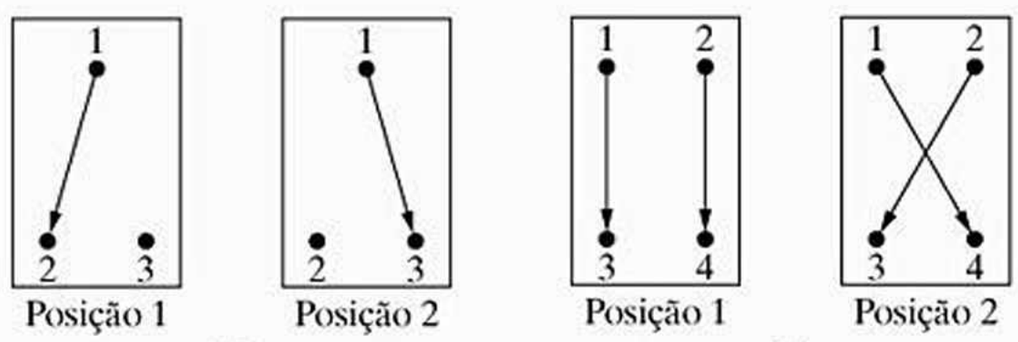
2.33 PROBLEMA DE PROJETO Muitas vezes é desejável projetar uma instalação elétrica que permita controlar um único equipamento de dois ou mais lugares, por exemplo, um interruptor de luz na parte de cima e na parte de baixo de uma escada. Nas instalações residenciais, esse tipo de controle é implementado com interruptores '3-way' ou '4-way'[2]. Um interruptor '3-way' tem três terminais e duas posições, e um '4-way' tem quatro terminais e duas posições. Os esquemas dos interruptores são mostrados nas Figuras P2.33(a), que ilustra um interruptor '3-way', e P2.33(b), que ilustra um interruptor '4-way'.

a) Mostre como dois interruptores '3-way' podem ser conectados entre *a* e *b* no circuito da Figura P2.33(c) de modo que a lâmpada *l* possa ser LIGADA (ON) ou DESLIGADA (OFF) em dois lugares diferentes.

[2]Embora essa seja a denominação mais comumente adotada, de acordo com a norma ABNT 5459, a denominação para os interruptores '3-way' e '4-way' deve ser 'interruptor paralelo' e 'interruptor intermediário', respectivamente (N.RT.).

b) Se a lâmpada (equipamento) tiver de ser controlada de mais de dois lugares diferentes, são usados interruptores '4-way' em conjunto com dois interruptores '3-way'. É necessário um interruptor '4-way' para cada dupla de interruptores '3-way'. Mostre como um interruptor '4-way' e dois '3-way' podem ser conectados entre *a* e *b* na Figura P2.33(c) para controlar a lâmpada em três lugares diferentes. (*Sugestão:* o interruptor '4-way' é colocado entre os dois '3-way').

Figura P2.33



2.34* PERSPECTIVA PRÁTICA Suponha que uma concessionária de energia elétrica instale algum equipamento que poderia dar um choque de 250 V em um ser humano. A corrente que resulta é perigosa o suficiente para justificar a colocação de um aviso e tomar outras precauções para evitar tal choque? Admita que a fonte é de 250 V, a resistência do braço é 400 Ω, a resistência do tronco é 50 Ω e a resistência da perna é 200 Ω. Use o modelo dado na Figura 2.24(b).

2.35* PERSPECTIVA PRÁTICA Com base no modelo e no circuito mostrados na Figura 2.24, desenhe um modelo de circuito do caminho da corrente que passa pelo corpo humano, para uma pessoa que tocar uma fonte de tensão com as duas mãos quando seus pés estiverem no mesmo potencial que o terminal negativo da fonte de tensão.

2.36* PERSPECTIVA PRÁTICA a) Usando os valores de resistência para braço, perna e tronco dados no Problema 2.34, calcule a potência dissipada no braço, perna e tronco.

b) O calor específico da água é $4{,}18 \times 10^3$ J/kg °C, portanto uma massa de água M (em quilogramas) aquecida por uma potência P (em watts) sofre uma elevação de temperatura a uma taxa dada por

$$\frac{dT}{dt} = \frac{2{,}39 \times 10^{-4} P}{M}\ ^\circ\text{C/s}.$$

Admitindo que a massa de um braço é 4 kg, a massa de uma perna é 10 kg e a massa de um tronco é 25 kg e que grande parte do corpo humano é água, em quantos segundos a temperatura do braço, da perna e do tronco aumenta os 5 °C que põem em perigo o tecido vivo?

c) Compare os valores calculados em (b) com os poucos minutos necessários para que a ausência de oxigênio prejudique o cérebro.

2.37* PERSPECTIVA PRÁTICA Por acidente, uma pessoa toca com as mãos as extremidades (uma mão em cada extremidade) de condutores ligados a uma fonte de tensão contínua.

a) Usando os valores de resistência para o corpo humano dados no Problema 2.34, qual é tensão minima da fonte que pode produzir um choque elétrico suficiente para causar paralisia, impedindo que a pessoa se solte dos condutores?

b) Há um risco significativo de ocorrer esse tipo de acidente durante o conserto de um computador pessoal, cujas fontes típicas são de 5 V e 12 V?

2.38* PERSPECTIVA PRÁTICA Para entender por que o nível de tensão não é o único determinante do dano potencial devido a um choque elétrico, considere o caso de um choque de eletricidade estática mencionado na Perspectiva Prática no início deste capítulo. Quando você arrasta os pés por um carpete, seu corpo fica carregado. O efeito dessa carga é que todo seu corpo fica a um determinado potencial elétrico. Quando sua mão se aproxima de uma maçaneta de metal, a diferença de potencial entre esta e sua mão faz fluir uma corrente elétrica — mas o material de condução é o ar, e não o seu corpo!

Suponha que o modelo do espaço entre sua mão e a maçaneta é uma resistência de 1 MΩ. Qual é a diferença de potencial (tensão) existente entre sua mão e a maçaneta, se a corrente que está causando o leve choque é de 3 mA?

CAPÍTULO

3 Circuitos resistivos simples

SUMÁRIO DO CAPÍTULO

3.1 **Resistores em série**
3.2 **Resistores em paralelo**
3.3 **Circuitos divisores de tensão e divisores de corrente**
3.4 **Divisão de tensão e divisão de corrente**
3.5 **Medição de tensão e corrente**
3.6 **Medição de resistência — a ponte de Wheatstone**
3.7 **Circuitos equivalentes triângulo-estrela (Δ-Y) ou pi-tê (π-T)**

✔ OBJETIVOS DO CAPÍTULO

1. Saber reconhecer resistores ligados em série e em paralelo e utilizar as regras para combiná-los em série e em paralelo para obter a resistência equivalente.
2. Saber projetar circuitos divisores de tensão e divisores de corrente simples.
3. Saber usar adequadamente a divisão de tensão e de corrente para resolver circuitos simples.
4. Saber determinar a leitura de um amperímetro quando inserido em um circuito para medir corrente; saber determinar a leitura de um voltímetro quando inserido em um circuito para medir tensão.
5. Entender como uma ponte de Wheatstone é usada para medir resistência.
6. Saber quando e como usar circuitos equivalentes Δ-Y para resolver circuitos simples.

Nossa caixa de ferramentas analíticas agora contém a lei de Ohm e as leis de Kirchhoff. No Capítulo 2, usamos essas ferramentas para resolver circuitos simples. Neste capítulo, continuamos a aplicar essas ferramentas, porém em circuitos mais complexos. A maior complexidade se encontra em um número maior de elementos com interligações mais complicadas. Este capítulo focaliza a redução de tais circuitos para circuitos equivalentes mais simples. Continuamos a focalizar circuitos relativamente simples por duas razões: (1) isso nos dá a oportunidade de conhecer completamente as leis subjacentes aos métodos mais sofisticados e (2) permite-nos tomar conhecimento de alguns circuitos que têm importantes aplicações na engenharia.

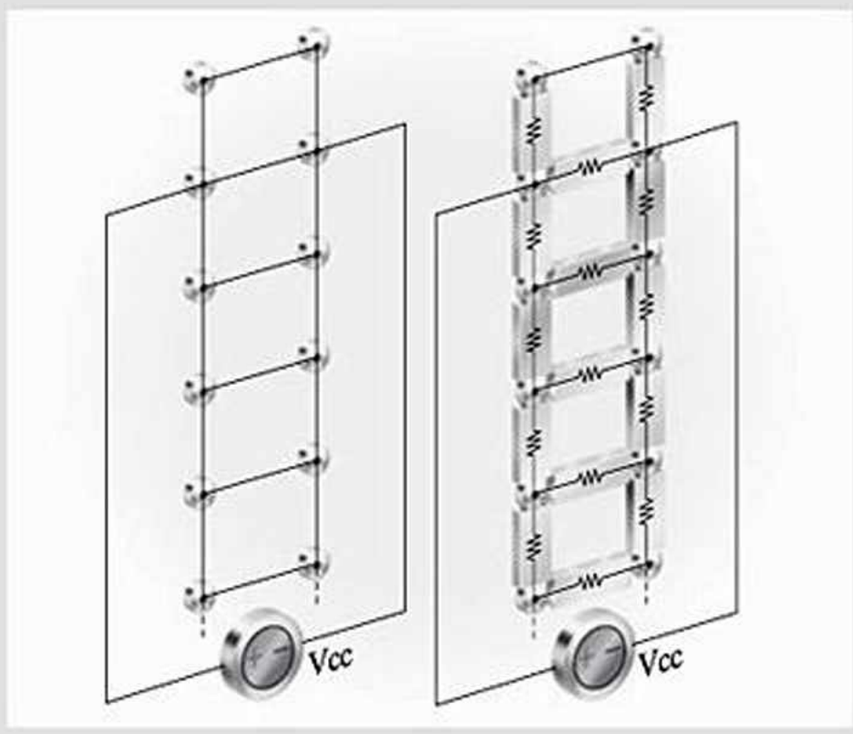
As fontes dos circuitos discutidos neste capítulo estão limitadas às fontes de tensão e corrente que geram tensões ou correntes constantes; isto é, tensões e correntes que não variam ao longo do tempo. Fontes constantes costumam ser denominadas *fontes cc*, sendo que *cc* quer dizer *corrente contínua*, uma denominação que tem uma origem histórica, mas que hoje pode parecer enganosa. Historicamente, uma corrente contínua era definida como uma corrente produzida por uma tensão constante. Portanto, uma tensão constante ficou conhecida como uma tensão de corrente contínua, ou cc. A utilização de *cc* para *constante* se fixou e os termos *corrente cc* e *tensão cc* agora são universalmente aceitos na ciência e na engenharia, com o significado de corrente constante e tensão constante.

Perspectiva prática

Um desembaçador de vidro traseiro

A rede do desembaçador do vidro traseiro de um automóvel é um exemplo de circuito resistivo que executa uma função útil. Uma dessas estruturas em forma de rede é mostrada na figura ao lado. Os condutores da rede podem ser modelados como resistores, como mostrado no lado direito da figura. O número de condutores horizontais varia com a marca e o modelo do carro, mas normalmente fica entre 9 a 16.

Como essa rede funciona para desembaçar o vidro traseiro? Como são determinadas as propriedades da rede? Responderemos a essas perguntas na seção "Perspectiva prática", no final deste capítulo. A análise de circuitos requerida para responder a essas perguntas é orientada pela necessidade de se obter um desembaçamento uniforme nas direções horizontal e vertical.



3.1 Resistores em série

No Capítulo 2, dissemos que, quando apenas dois elementos estão ligados a um único nó, eles estão em série. *Elementos de circuito ligados em série* conduzem a mesma corrente. Os resistores do circuito mostrado na Figura 3.1 estão ligados em série. Podemos mostrar que esses resistores conduzem a mesma corrente aplicando a lei das correntes de Kirchhoff a cada nó do circuito. A interligação em série da Figura 3.1 requer que

$$i_s = i_1 = -i_2 = i_3 = i_4 = -i_5 = -i_6 = i_7, \tag{3.1}$$

o que significa que, se conhecermos qualquer uma das sete correntes, conheceremos todas. Assim, podemos desenhar novamente a Figura 3.1 como mostra a Figura 3.2, conservando a identidade de corrente única i_s.

Para determinar i_s, aplicamos a lei das tensões de Kirchhoff ao único circuito fechado. Definindo a tensão em cada resistor como uma queda na direção de i_s, temos:

$$-v_s + i_sR_1 + i_sR_2 + i_sR_3 + i_sR_4 + i_sR_5 + i_sR_6 + i_sR_7 = 0, \tag{3.2}$$

ou

$$v_s = i_s(R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6 + R_7). \tag{3.3}$$

A importância da Equação 3.3 para o cálculo de i_s é que os sete resistores podem ser substituídos por um único resistor cuja resistência é a soma das resistências dos resistores individuais, isto é,

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6 + R_7 \tag{3.4}$$

e

$$v_s = i_sR_{eq}. \tag{3.5}$$

Assim, podemos desenhar novamente a Figura 3.2 conforme mostrado na Figura 3.3.

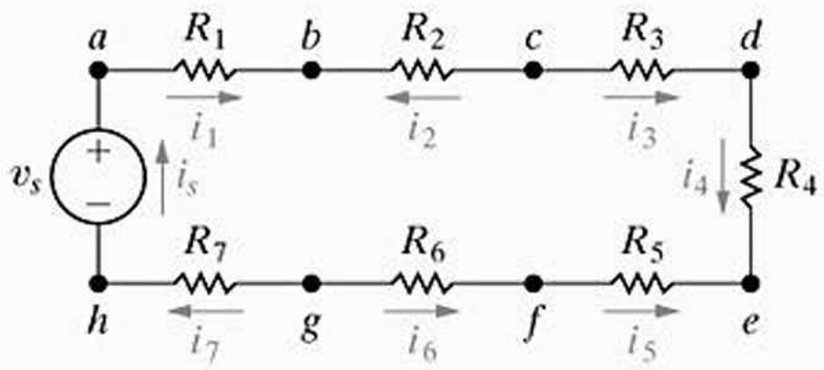


Figura 3.1 ▲ Resistores ligados em série.

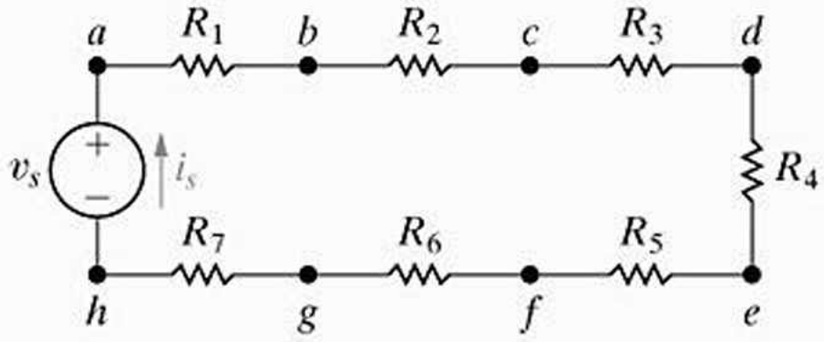


Figura 3.2 ▲ Resistores em série com uma única corrente desconhecida i_s.

Em geral, se k resistores estão ligados em série, o resistor único equivalente tem uma resistência igual à soma das k resistências, ou

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^{k} R_i = R_1 + R_2 + \cdots + R_k. \tag{3.6}$$

(Combinação de resistores em série)

Observe que a resistência do resistor equivalente é sempre maior do que a do maior resistor na ligação em série.

Outro modo de pensar no conceito de resistência equivalente é visualizar uma fileira de resistores dentro de uma caixa preta. (Um engenheiro eletricista usa o termo *caixa preta* com o significado de um recipiente opaco; isto é, o conteúdo não pode ser visto. Então, o engenheiro é desafiado a modelar o conteúdo da caixa, estudando a relação entre a tensão e a corrente em seus terminais.) Determinar se a caixa contém k resistores ou um único resistor equivalente é impossível. A Figura 3.4 ilustra esse método ao se estudar o circuito mostrado na Figura 3.2.

3.2 Resistores em paralelo

Quando dois elementos estão ligados a um único par de nós, diz-se que estão em paralelo. *Elementos de circuito ligados em paralelo* têm a mesma tensão em seus terminais. O circuito mostrado na Figura 3.5 ilustra resistores ligados em paralelo. Não cometa o erro de supor que dois elementos estão ligados em paralelo só porque estão alinhados em paralelo em um diagrama do circuito. Na Figura 3.6, você pode ver que R_1 e R_3 não estão ligados em paralelo porque não estão conectados ao mesmo par de terminais; existe entre eles o resistor R_2.

Resistores em paralelo podem ser reduzidos a um único resistor equivalente usando a lei das correntes de Kirchhoff e a lei de Ohm, como demonstraremos agora. No circuito mostrado na Figura 3.5, i_1, i_2, i_3 e i_4 representam as

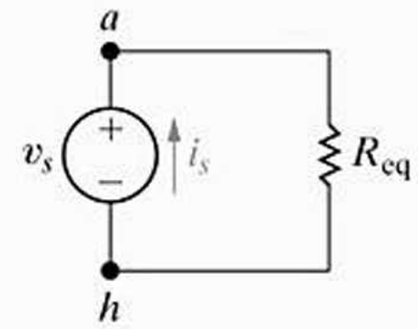


Figura 3.3 ▲ Versão simplificada do circuito mostrado na Figura 3.2.

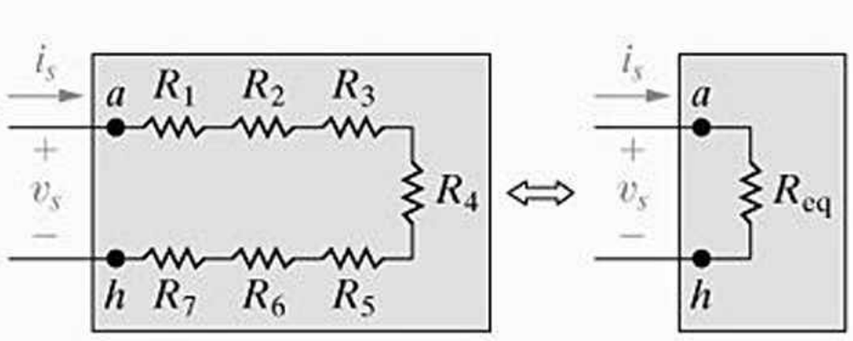


Figura 3.4 ▲ A caixa preta equivalente do circuito mostrado na Figura 3.2.

correntes nos resistores R_1 a R_4, respectivamente. A direção de referência positiva para a corrente em cada resistor é de cima para baixo, isto é, do nó *a* ao nó *b*. Pela lei das correntes de Kirchhoff,

$$i_s = i_1 + i_2 + i_3 + i_4. \tag{3.7}$$

A ligação paralela dos resistores implica que eles estejam ligados a um único par de nós, assim a tensão em cada um deles deve ser a mesma. Por conseguinte, pela lei de Ohm,

$$i_1R_1 = i_2R_2 = i_3R_3 = i_4R_4 = v_s. \tag{3.8}$$

Portanto,

$$i_1 = \frac{v_s}{R_1},$$

$$i_2 = \frac{v_s}{R_2},$$

$$i_3 = \frac{v_s}{R_3}, \quad \text{e}$$

$$i_4 = \frac{v_s}{R_4}. \tag{3.9}$$

A substituição da Equação 3.9 na Equação 3.7 resulta em

$$i_s = v_s\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right), \tag{3.10}$$

da qual

$$\frac{i_s}{v_s} = \frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}. \tag{3.11}$$

A Equação 3.11 sintetiza o que queríamos mostrar: que os quatro resistores no circuito representado na Figura 3.5 podem ser substituídos por um único resistor equivalente. O circuito mostrado na Figura 3.7 ilustra a substituição. Para *k* resistores ligados em paralelo, a Equação 3.11 torna-se

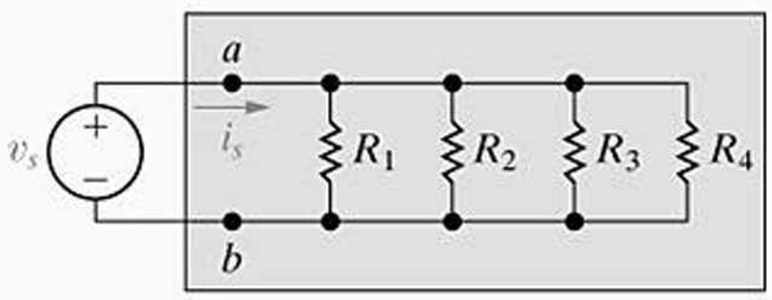


Figura 3.5 ▲ Resistores em paralelo.

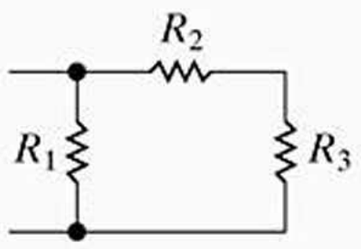


Figura 3.6 ▲ Resistores não paralelos.

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{R_i} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_k}. \tag{3.12}$$

(Combinação de resistores em paralelo)

Observe que, na ligação em paralelo, a resistência do resistor equivalente é sempre menor do que a resistência do menor resistor. Às vezes, é mais conveniente usar a condutância ao lidar com resistores ligados em paralelo. Nesse caso, a Equação 3.12 torna-se

$$G_{\text{eq}} = \sum_{i=1}^{k} G_i = G_1 + G_2 + \cdots + G_k. \tag{3.13}$$

Muitas vezes, apenas dois resistores estão ligados em paralelo. A Figura 3.8 ilustra esse caso especial. Calculamos a resistência equivalente pela Equação 3.12:

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_2 + R_1}{R_1R_2}, \tag{3.14}$$

ou

$$R_{\text{eq}} = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}. \tag{3.15}$$

Assim, para apenas dois resistores em paralelo a resistência equivalente é igual ao produto das resistências dividido por sua soma. Lembre-se de que você só pode usar esse resultado no caso especial de apenas dois resistores em paralelo. O Exemplo 3.1 ilustra a utilidade desses resultados.

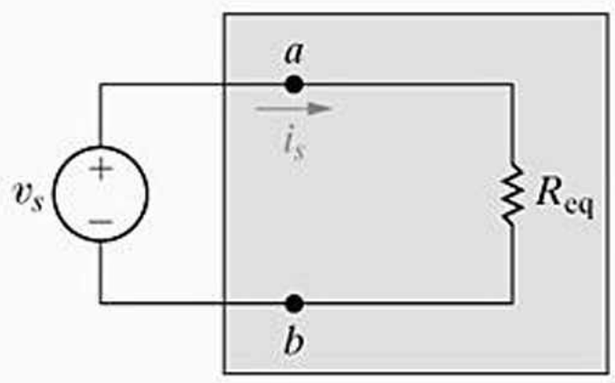


Figura 3.7 ▲ Substituição dos quatro resistores em paralelo, mostrados na Figura 3.5, por um único resistor equivalente.

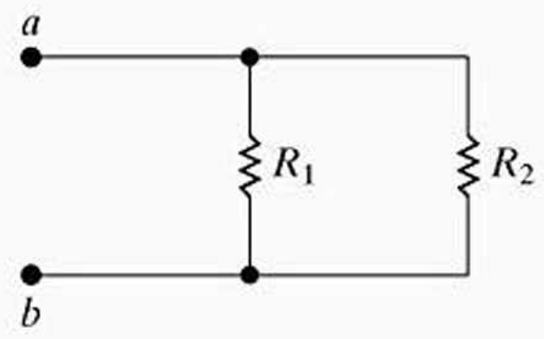


Figura 3.8 ▲ Dois resistores ligados em paralelo.

Exemplo 3.1 Aplicação da simplificação série-paralelo

Determine i_s, i_1 e i_2 no circuito mostrado na Figura 3.9.

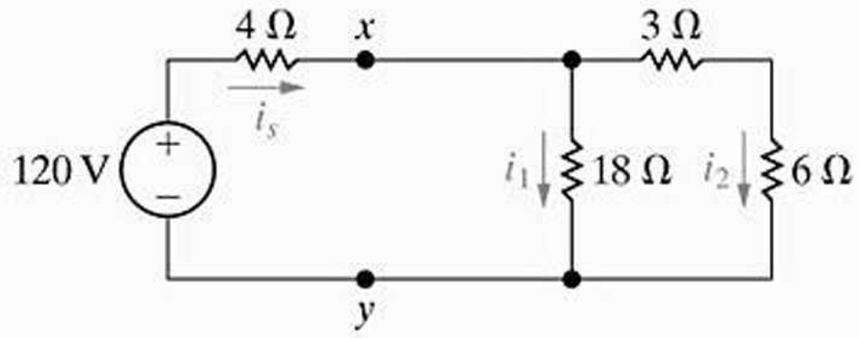


Figura 3.9 ▲ Circuito para o Exemplo 3.1.

Solução

Começamos observando que o resistor de 3 Ω está em série com o resistor de 6 Ω. Portanto, substituímos essa combinação em série por um resistor de 9 Ω, reduzindo o circuito ao mostrado na Figura 3.10(a). Agora, podemos substituir a combinação em paralelo dos resistores de 9 Ω e de 18 Ω por uma única resistência de (18 × 9)/(18 + 9), ou 6 Ω. A Figura 3.10(b) mostra essa redução adicional do circuito. Os nós *x* e *y*, marcados em todos os diagramas, facilitam a percepção da redução do circuito.

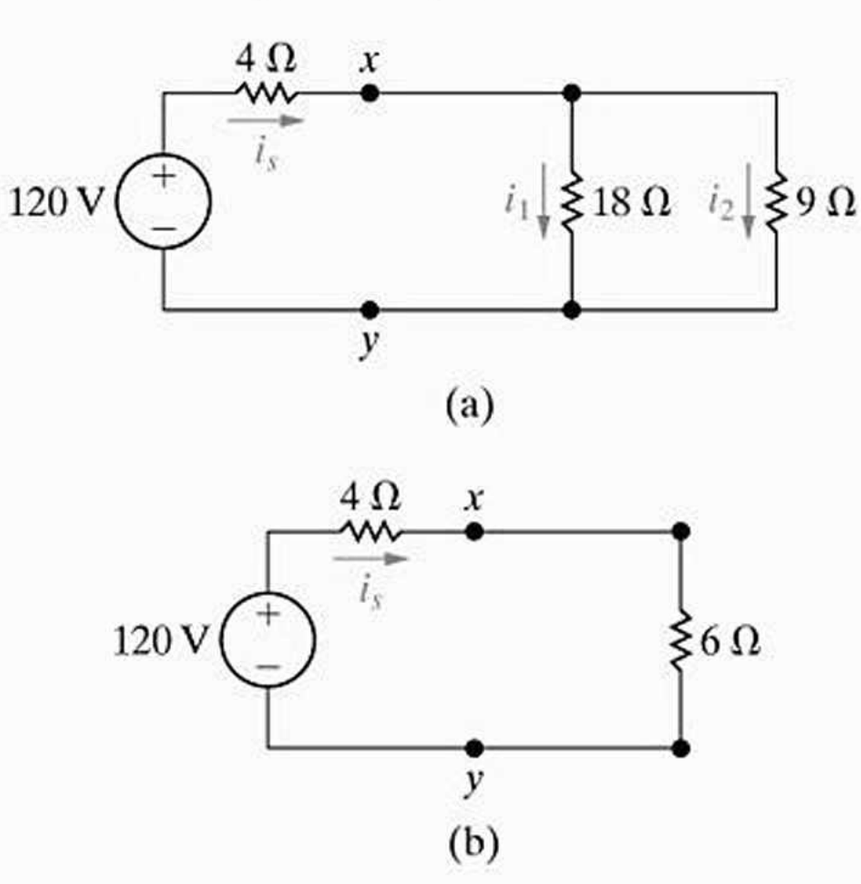


Figura 3.10 ▲ Simplificação do circuito mostrado na Figura 3.9.

Pela Figura 3.10(b) você pode verificar que i_s é igual a 120/10, ou 12 A. A Figura 3.11 mostra o resultado neste ponto da análise. Acrescentamos a tensão v_1 para ajudar a esclarecer a discussão subseqüente. Usando a lei de Ohm, calculamos o valor de v_1:

$$v_1 = (12)(6) = 72 \text{ V}. \tag{3.16}$$

Mas v_1 é a queda de tensão do nó *x* ao nó *y*, portanto podemos voltar ao circuito mostrado na Figura 3.10(a) e usar novamente a lei de Ohm para calcular i_1 e i_2. Assim,

$$i_1 = \frac{v_1}{18} = \frac{72}{18} = 4 \text{ A}, \tag{3.17}$$

$$i_2 = \frac{v_1}{9} = \frac{72}{9} = 8 \text{ A}. \tag{3.18}$$

Determinamos as três correntes especificadas usando reduções série-paralelo em combinação com a lei de Ohm.

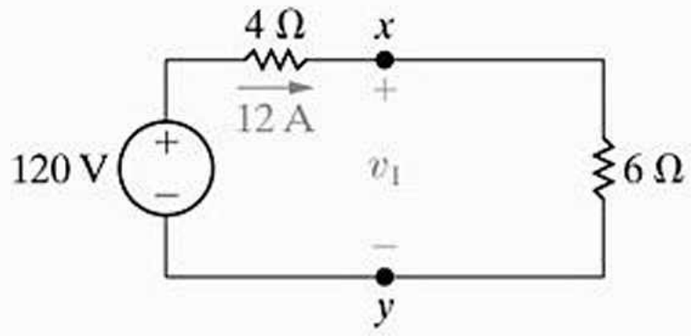


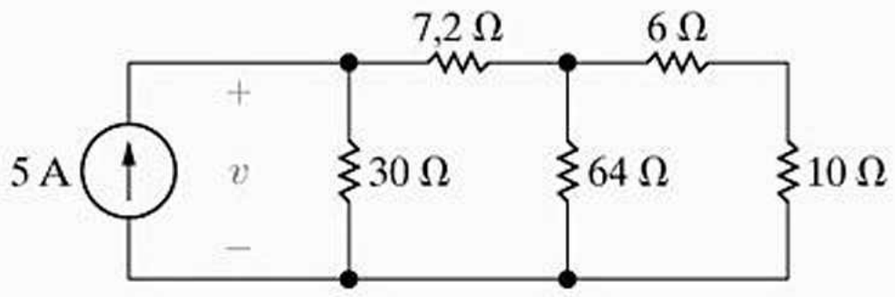
Figura 3.11 ▲ Circuito da Figura 3.10(b) mostrando o valor numérico de i_s.

Antes de prosseguirmos, sugerimos que você dedique um pouco de tempo para mostrar que a solução satisfaz a lei das correntes de Kirchhoff, em todos os nós, e a lei das tensões de Kirchhoff, ao longo de todos os caminhos fechados. (Observe que há três caminhos fechados que podem ser testados.) É também importante mostrar que a potência fornecida pela fonte de tensão é igual à potência total dissipada nos resistores. (Veja os problemas 3.3 e 3.4.)

✔ PROBLEMA PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 1 — Saber reconhecer resistores ligados em série e em paralelo

3.1 Para o circuito mostrado, determine (a) a tensão *v*, (b) a potência fornecida ao circuito pela fonte de corrente e (c) a potência dissipada no resistor de 10 Ω.



Resposta: (a) 60 V; (b) 300 W; (c) 57,6 W.

NOTA: Tente resolver também os problemas 3.1, 3.2, 3.5 e 3.6, apresentados no final deste capítulo.

3.3 Circuitos divisores de tensão e divisores de corrente

Às vezes — em especial em circuitos eletrônicos — é necessário existir mais de um nível de tensão a partir de uma única fonte de alimentação. Um modo de fazer isso é utilizar um *circuito divisor de tensão*, como o da Figura 3.12.

Analisemos esse circuito, aplicando diretamente a lei de Ohm e as leis de Kirchhoff. Para auxiliar a análise, introduzimos a corrente i como mostrado na Figura 3.12(b). Pela lei das correntes de Kirchhoff, R_1 e R_2 conduzem a mesma corrente. Aplicando a lei das tensões de Kirchhoff ao caminho fechado, temos

$$v_s = iR_1 + iR_2, \tag{3.19}$$

ou

$$i = \frac{v_s}{R_1 + R_2}. \tag{3.20}$$

Agora, podemos usar a lei de Ohm para calcular v_1 e v_2.

$$v_1 = iR_1 = v_s \frac{R_1}{R_1 + R_2}, \tag{3.21}$$

$$v_2 = iR_2 = v_s \frac{R_2}{R_1 + R_2}. \tag{3.22}$$

As equações 3.21 e 3.22 mostram que v_1 e v_2 são frações de v_s. Cada fração é a razão entre a resistência nos terminais da qual a tensão é definida e a soma das duas resistências. Como essa razão é sempre menor do que 1,0, as tensões divididas v_1 e v_2 são sempre menores do que a tensão da fonte, v_s.

Se você quiser um valor particular de v_2, e v_s for especificada, há um número infinito de combinações de R_1 e R_2 que dão a razão adequada. Por exemplo, suponha que v_s seja igual a 15 V e que v_2 deva ser 5 V. Então, $v_2/v_s = 1/3$ e, pela Equação 3.22, constatamos que essa razão é satisfeita sempre que $R_2 = 1/2\ R_1$. Entre outros fatores que podem entrar na seleção de R_1 e, por conseqüência, de R_2, estão as perdas de potência que ocorrem devido à divisão da tensão da fonte e aos efeitos da ligação do circuito divisor de tensão a outros componentes de circuito.

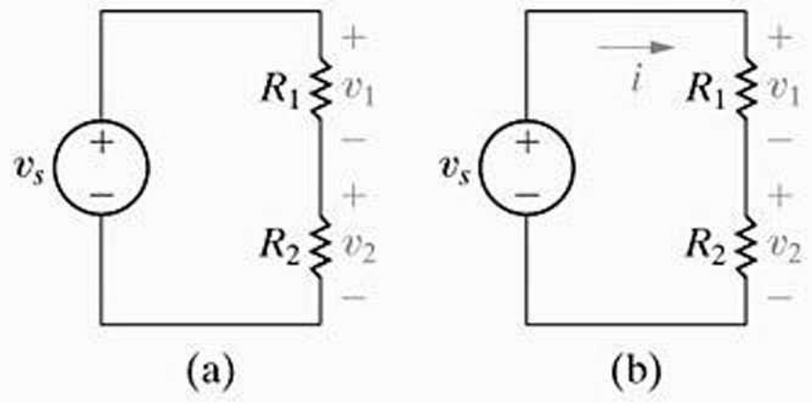


Figura 3.12 ▲ (a) Circuito divisor de tensão e (b) circuito divisor de tensão com corrente i indicada.

Considere ligar um resistor R_L em paralelo com R_2, como mostrado na Figura 3.13. O resistor R_L age como uma carga para o circuito divisor de tensão. A *carga*, para qualquer circuito, consiste em um ou mais elementos que drenam potência do circuito. Com a carga R_L ligada, a expressão para a tensão de saída torna-se

$$v_o = \frac{R_{\text{eq}}}{R_1 + R_{\text{eq}}} v_s, \tag{3.23}$$

onde

$$R_{\text{eq}} = \frac{R_2 R_L}{R_2 + R_L}. \tag{3.24}$$

Substituindo a Equação 3.24 na Equação 3.23, obtemos

$$v_o = \frac{R_2}{R_1[1 + (R_2/R_L)] + R_2} v_s. \tag{3.25}$$

Observe que a Equação 3.25 se reduz à Equação 3.22, desde que $R_L \to \infty$, como esperado. A Equação 3.25 mostra que, contanto que $R_L >> R_2$, a razão de tensões v_o/v_s permanece, em essência, inalterada pelo acréscimo da carga no divisor.

Outra característica importante do circuito divisor de tensão é sua sensibilidade às tolerâncias dos resistores. Aqui, *tolerância* significa uma faixa de valores possíveis. As resistências de resistores disponíveis no comércio sempre apresentam certa porcentagem de variação em relação a seu valor declarado. O Exemplo 3.2 ilustra o efeito das tolerâncias de resistores em um circuito de divisão de tensão.

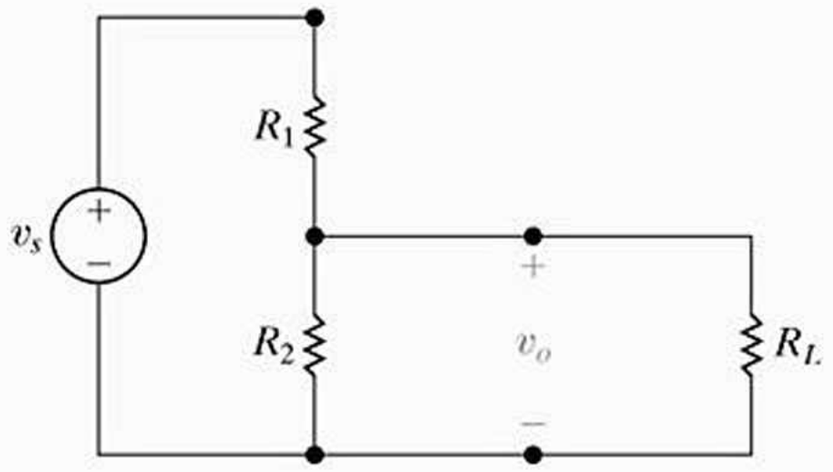


Figura 3.13 ▲ Divisor de tensão ligado a uma carga R_L.

Exemplo 3.2 Análise do circuito divisor de tensão

A resistência dos resistores usados no circuito divisor de tensão mostrado na Figura 3.14 tem uma tolerância de ±10%. Determine os valores máximo e mínimo de v_o.

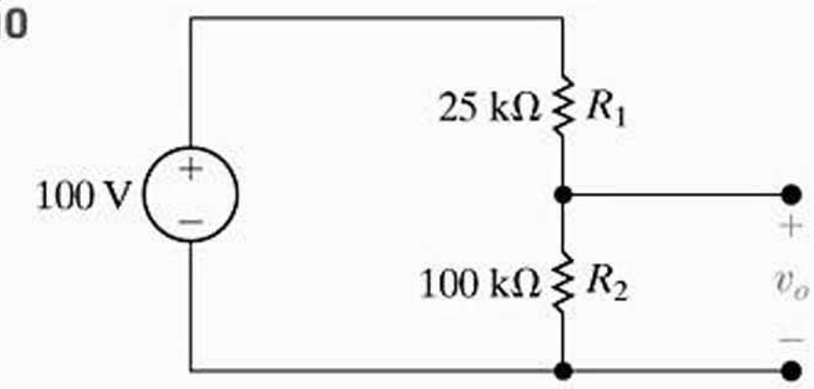


Figura 3.14 ▲ Circuito para o Exemplo 3.2.

Solução

Pela Equação 3.22, o valor máximo de v_o ocorre quando R_2 é 10% mais alto e R_1 é 10% mais baixo, e o valor mínimo de v_o ocorre quando R_2 é 10% mais baixo e R_1 é 10% mais alto. Portanto

$$v_o(\text{max}) = \frac{(100)(110)}{110 + 22{,}5} = 83{,}02 \text{ V},$$

$$v_o(\text{min}) = \frac{(100)(90)}{90 + 27{,}5} = 76{,}60 \text{ V}.$$

Assim, ao tomar a decisão de usar, nesse divisor de tensão, resistores cujas resistências possuem tolerâncias de 10%, aceitamos que a tensão de saída, sem nenhuma carga, encontre-se entre 76,60 e 83,02 V.

Circuito divisor de corrente

O *circuito divisor de corrente* mostrado na Figura 3.15 consiste de dois resistores ligados em paralelo a uma fonte de corrente. O divisor de corrente é projetado para dividir a corrente i_s entre R_1 e R_2. Determinamos a relação entre a corrente i_s e a corrente em cada resistor (isto é, i_1 e i_2) aplicando diretamente a lei de Ohm e a lei das correntes de Kirchhoff. A tensão nos resistores em paralelo é

$$v = i_1R_1 = i_2R_2 = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}i_s. \tag{3.26}$$

Pela Equação 3.26,

$$i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}i_s, \tag{3.27}$$

$$i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2}i_s. \tag{3.28}$$

As equações 3.27 e 3.28 mostram que a corrente se divide entre dois resistores em paralelo, de modo tal que a corrente em um resistor é igual à corrente que entra no par paralelo multiplicada pela resistência do outro resistor e dividida pela soma das resistências dos resistores. O Exemplo 3.3 ilustra a utilização do divisor de corrente.

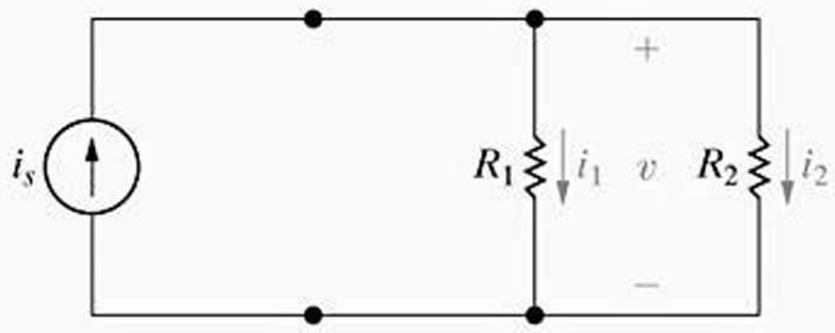


Figura 3.15 ▲ Circuito do divisor de corrente.

Exemplo 3.3 Análise do circuito divisor de corrente

Determine a potência dissipada no resistor de 6 Ω mostrado na Figura 3.16.

Solução

Em primeiro lugar, precisamos determinar a corrente no resistor simplificando o circuito com reduções série-paralelo. Assim, o circuito mostrado na Figura 3.16 se reduz ao mostrado na Figura 3.17. Determinamos a corrente i_o usando a fórmula para divisão de corrente:

$$i_o = \frac{16}{16 + 4}(10) = 8 \text{ A}.$$

Observe que i_o é a corrente no resistor de 1,6 Ω da Figura 3.16. Agora, podemos continuar a dividir i_o entre os resistores de 6 Ω e 4 Ω. A corrente no resistor de 6 Ω é

$$i_6 = \frac{4}{6 + 4}(8) = 3{,}2 \text{ A},$$

e a potência dissipada no resistor de 6 Ω é $p = (3{,}2)^2(6) = 61{,}44$ W.

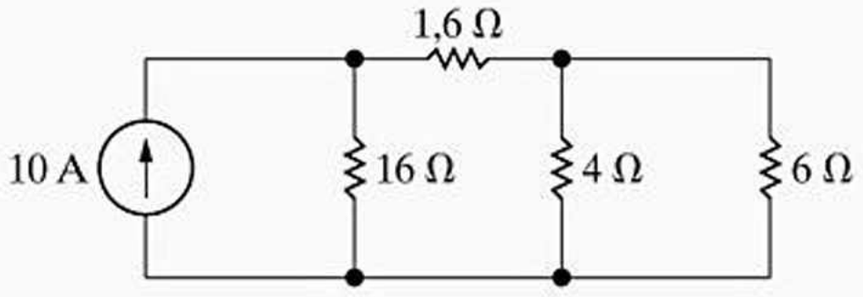


Figura 3.16 ▲ Circuito para o Exemplo 3.3.

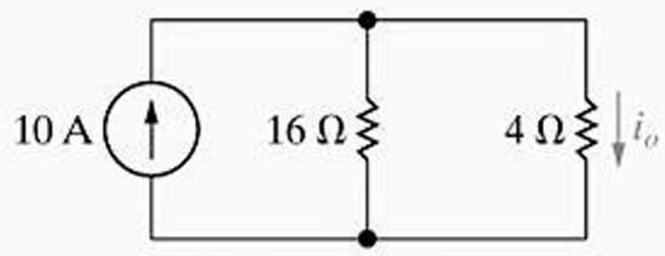
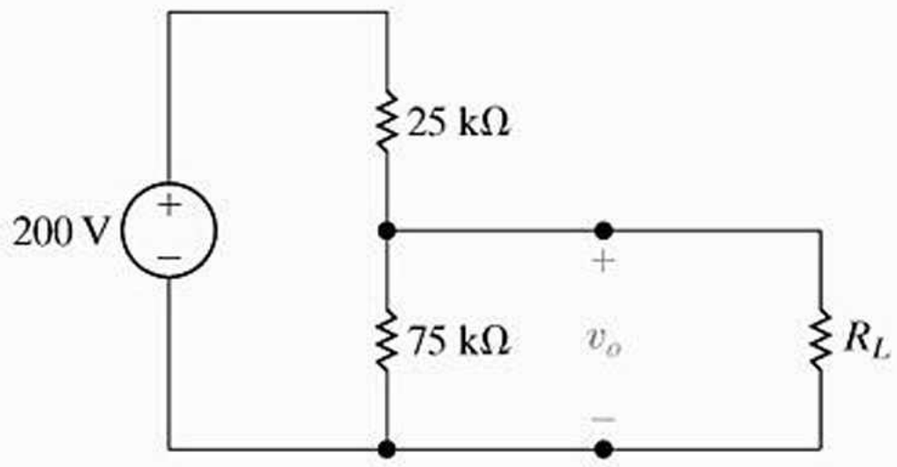


Figura 3.17 ▲ Uma simplificação do circuito mostrado na Figura 3.16.

✔ PROBLEMAS PARA AVALIAÇÃO

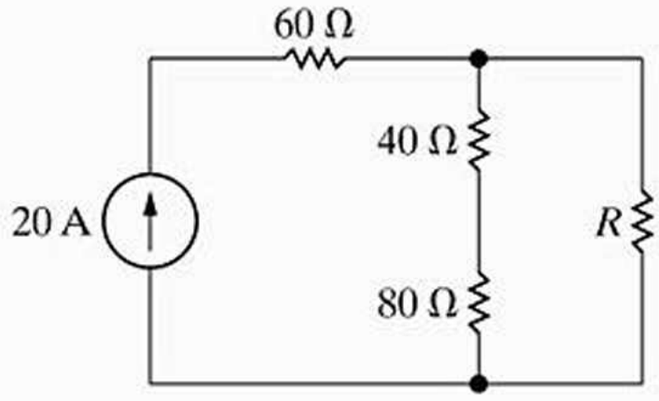
Objetivo 2 — Saber projetar divisores de tensão e divisores de corrente simples

3.2 a) Determine o valor de v_o sem nenhuma carga no circuito mostrado.
b) Determine v_o quando R_L for 150 kΩ.
c) Qual será a potência dissipada no resistor de 25 kΩ se os terminais de carga entrarem acidentalmente em curto-circuito?
d) Qual é a máxima potência dissipada no resistor de 75 kΩ?



Resposta: (a) 150 V; (c) 1,6 W;
(b) 133,33 V; (d) 0,3 W.

3.3 a) Determine o valor de R que fará com que 4 A de corrente percorram o resistor de 80 Ω no circuito mostrado.
b) Qual é a potência que o resistor R da parte (a) precisará dissipar?
c) Qual é a potência que a fonte de corrente fornece para o valor de R encontrado na parte (a)?



Resposta: (a) 30 Ω;
(b) 7.680 W;
(c) 33.600 W.

NOTA: Tente resolver também os problemas 3.13, 3.15 e 3.21, apresentados no final deste capítulo.

3.4 Divisão de tensão e divisão de corrente

Podemos generalizar, agora, os resultados da análise do circuito divisor de tensão da Figura 3.12 e do circuito divisor de corrente da Figura 3.15. As generalizações resultarão em mais duas técnicas de análise de circuitos muito úteis, conhecidas como *divisão de tensão* e *divisão de corrente*. Considere o circuito mostrado na Figura 3.18.

O retângulo da esquerda pode conter uma única fonte de tensão ou qualquer outra combinação dos elementos básicos de circuito que resulte na tensão v mostrada na figura. À direita do retângulo há n resistores ligados em série. Estamos interessados em determinar a queda de tensão v_j em um resistor arbitrário R_j, em termos da tensão v. Começamos usando a lei de Ohm para calcular i, a corrente que passa por todos os resistores em série, em termos da tensão v e dos n resistores:

$$i = \frac{v}{R_1 + R_2 + \cdots + R_n} = \frac{v}{R_{\text{eq}}}, \tag{3.29}$$

A resistência equivalente, R_{eq}, é a soma dos valores de resistência dos n resistores porque os resistores estão em série, como mostra a Equação 3.6. Aplicamos a lei de Ohm, uma segunda vez, para calcular a queda de tensão v_j no resistor R_j, usando a corrente i calculada na Equação 3.29:

$$v_j = iR_j = \frac{R_j}{R_{\text{eq}}}v. \tag{3.30}$$

(Equação de divisão de tensão)

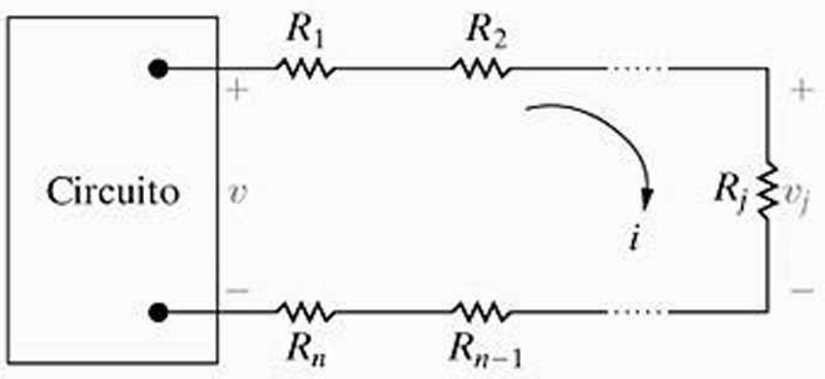


Figura 3.18 ▲ Circuito usado para ilustrar a divisão de tensão.

Observe que usamos a Equação 3.29 para obter o lado direito da Equação 3.30. A Equação 3.30 é a equação de divisão de tensão. Ela diz que a queda de tensão v_j nos terminais de determinado resistor R_j, de um conjunto de resistores ligados em série, é proporcional à queda total de tensão v nos terminais do conjunto de resistores ligados em série. A constante de proporcionalidade é a razão entre a resistên-

cia do resistor em questão e a resistência equivalente do conjunto de resistores ligados em série, ou R_j/R_{eq}.

Considere, agora, o circuito mostrado na Figura 3.19. O retângulo da esquerda pode conter uma única fonte de corrente ou qualquer outra combinação de elementos básicos de circuito que resulte na corrente i mostrada na figura. À direita do retângulo há n resistores ligados em paralelo. Estamos interessados em determinar a corrente i_j que passa por um resistor arbitrário R_j, em termos da corrente i. Começamos usando a lei de Ohm para calcular v, a queda de tensão em cada um dos resistores em paralelo, em termos da corrente i e dos n resistores:

$$v = i(R_1 \| R_2 \| \ldots \| R_n) = iR_{eq}. \tag{3.31}$$

A resistência equivalente de n resistores em paralelo, R_{eq}, pode ser calculada usando a Equação 3.12. Aplicamos a lei de Ohm, uma segunda vez, para calcular a corrente i_j que passa pelo resistor R_j, usando a tensão v calculada na Equação 3.31:

$$i_j = \frac{v}{R_j} = \frac{R_{eq}}{R_j} i. \tag{3.32}$$

(Equação de divisão de corrente)

Observe que usamos a Equação 3.31 para obter o lado direito da Equação 3.32. A Equação 3.32 é a equação de divisão de corrente. Ela diz que a corrente i em determinado resistor R_j, de um conjunto de resistores ligados em paralelo, é proporcional à corrente total i fornecida ao conjunto de resistores ligados em paralelo. A constante de proporcionalidade é a razão entre a resistência equivalente do conjunto de resistores ligados em paralelo e a resistência do resistor em questão, ou R_{eq}/R_j. Observe que a constante de proporcionalidade na equação de divisão de corrente é o inverso da constante de proporcionalidade na equação de divisão de tensão!

O Exemplo 3.4 usa a divisão de tensão e a divisão de corrente para determinar as tensões e correntes em um circuito.

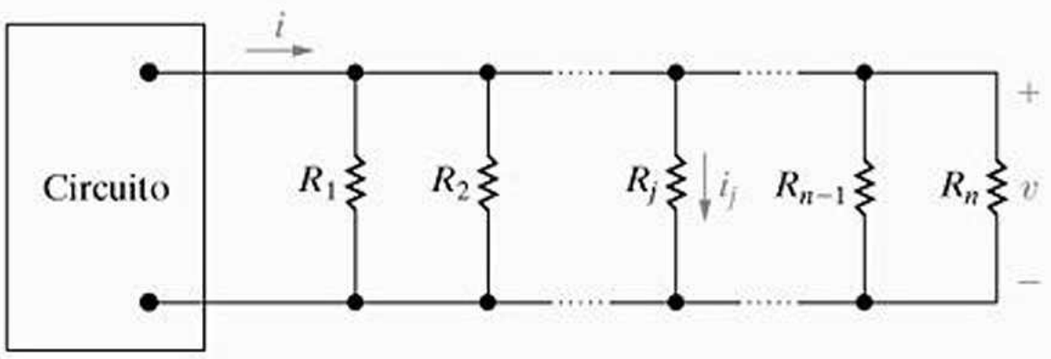


Figura 3.19 ▲ Circuito usado para ilustrar a divisão de corrente.

Exemplo 3.4 Utilização da divisão de tensão e da divisão de corrente para resolver um circuito

Use a divisão de corrente para determinar a corrente i_o e a divisão de tensão para determinar a tensão v_o para o circuito da Figura 3.20.

Solução

Podemos usar a Equação 3.32 se pudermos determinar a resistência equivalente dos quatro ramos em paralelo que contêm resistores. Em linguagem simbólica,

$$R_{eq} = (36 + 44) \| 10 \| (40 + 10 + 30) \| 24$$

$$= 80 \| 10 \| 80 \| 24 = \frac{1}{\frac{1}{80} + \frac{1}{10} + \frac{1}{80} + \frac{1}{24}} = 6\ \Omega.$$

Usando a Equação 3.32,

$$i_o = \frac{6}{24}(8\text{ A}) = 2\text{ A}.$$

Podemos usar a lei de Ohm para determinar a queda de tensão no resistor de 24 Ω:

$$v = (24)(2) = 48\text{ V}.$$

Essa é também a queda de tensão no ramo que contém os resistores de 40 Ω, 10 Ω e 30 Ω em série. Então, podemos usar a divisão de tensão para determinar a queda de tensão v_o no resistor de 30 Ω, dado que conhecemos a queda de tensão nos resistores ligados em série, usando a Equação 3.30. Para isso, reconhecemos que a resistência equivalente dos resistores ligados em série é 40 + 10 + 30 = 80 Ω:

$$v_o = \frac{30}{80}(48\text{ V}) = 18\text{ V}.$$

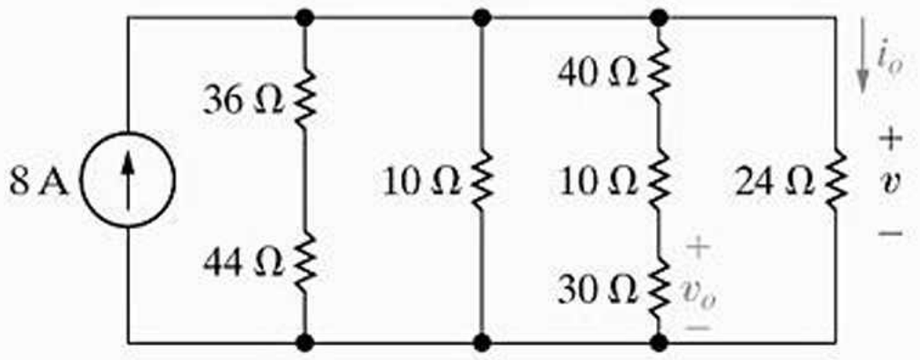


Figura 3.20 ▲ Circuito para o Exemplo 3.4.

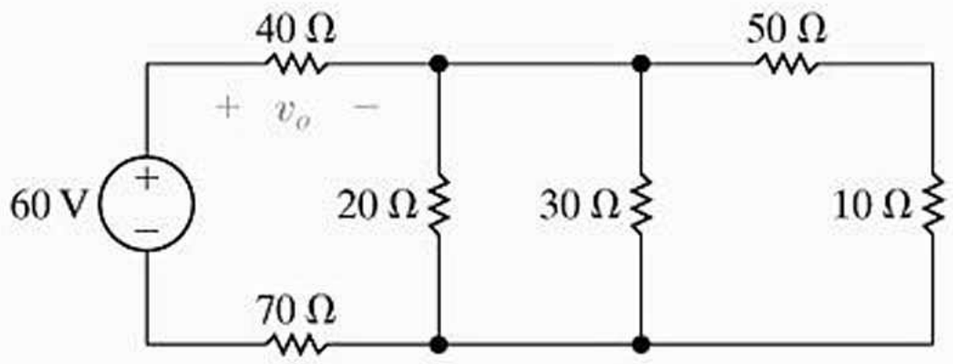
✔ PROBLEMA PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 3 — Saber usar a divisão de tensão e a divisão de corrente para resolver circuitos simples

3.4 a) Use a divisão de tensão para determinar a tensão v_o no resistor de 40 Ω no circuito mostrado.

b) Use v_o da parte (a) para determinar a corrente no resistor de 40 Ω. Depois, use essa corrente e a divisão de corrente para calcular a corrente no resistor de 30 Ω.

c) Qual é a potência absorvida pelo resistor de 50 Ω?



Resposta: (a) 20 V;
(b) 166,67 mA;
(c) 347,22 mW.

NOTA: Tente resolver também os problemas 3.22 e 3.23, apresentados no final deste capítulo.

3.5 Medição de tensão e corrente

Ao trabalhar com circuitos reais, muitas vezes você precisará medir tensões e correntes. Dedicaremos algum tempo à discussão de vários instrumentos de medida nesta e na próxima seção, porque eles são relativamente simples de analisar e oferecem exemplos práticos das configurações de divisor de corrente e divisor de tensão que acabamos de estudar.

O *amperímetro* é um instrumento projetado para medir corrente; ele é inserido em série com o elemento de circuito cuja corrente está sendo medida. O *voltímetro* é um instrumento projetado para medir tensão; ele é colocado em paralelo com o elemento cuja tensão está sendo medida. Um amperímetro ou voltímetro ideal não provoca nenhum efeito sobre a variável de circuito que se deve medir. Isto é, um amperímetro ideal tem uma resistência equivalente de 0 Ω e funciona como um curto-circuito em série com o elemento cuja corrente está sendo medida. Um voltímetro ideal tem uma resistência equivalente infinita e, por isso, funciona como um circuito aberto em paralelo com o elemento cuja tensão está sendo medida. As configurações para um amperímetro, usado para medir a corrente em R_1, e para um voltímetro, usado para medir a tensão em R_2, são representadas na Figura 3.21. Os modelos ideais para esses medidores, no mesmo circuito, são mostrados na Figura 3.22.

Há duas categorias gerais de medidores usados para tensões e correntes contínuas: medidores digitais e medidores analógicos. *Medidores digitais* medem o sinal de tensão ou corrente contínua em pontos discretos do tempo, denominados tempos de amostragem. Portanto, o sinal analógico, contínuo em relação ao tempo, é convertido para um sinal digital, que existe somente em instantes discretos no tempo. Uma explicação mais detalhada do funcionamento de medidores está fora do escopo deste livro e deste curso. Contudo, é provável que você encontre e use medidores digitais em ambientes de laboratório, pois eles oferecem várias vantagens em relação aos medidores analógicos. Eles introduzem menos resistência no circuito ao qual estão ligados, são mais fáceis de ligar e a precisão da medição é maior, por causa da natureza do mecanismo de leitura.

Medidores analógicos são baseados no medidor de movimento de d'Arsonval, que implementa o mecanismo de leitura. Um medidor de movimento de d'Arsonval consiste em uma bobina móvel colocada no campo de um ímã permanente. Quando uma corrente flui pela bobina, cria nela um torque e faz com que ela gire e mova um ponteiro sobre uma escala calibrada. Por projeto, a deflexão do ponteiro é diretamente proporcional à corrente na bobina móvel. A bobina é caracterizada por uma calibração de tensão e uma calibração de corrente. Por exemplo, as calibrações de um medidor de movimento disponível no comércio são 50 mV e 1 mA. Isso significa que, quando a bobina está conduzindo 1 mA, a queda de tensão na bobina é de 50 mV, e o ponteiro é defletido até a posição final da escala. Uma ilustração esquemática do medidor de d'Arsonval é mostrada na Figura 3.23.

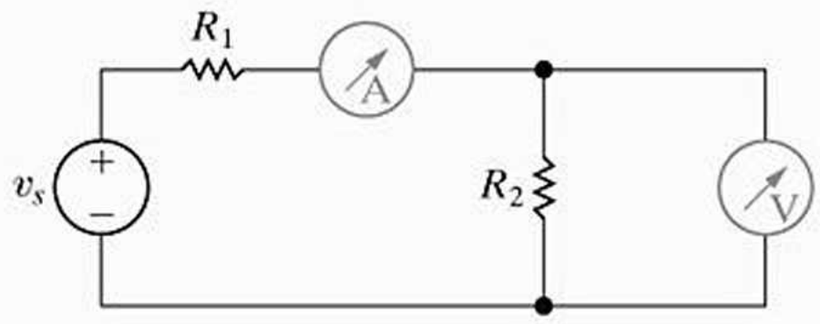


Figura 3.21 ▲ Um amperímetro ligado para medir a corrente em R_1 e um voltímetro ligado para medir a tensão em R_2.

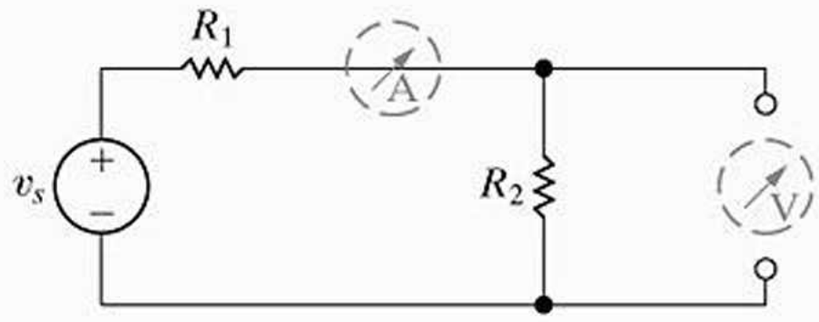


Figura 3.22 ▲ Modelo de curto-circuito para o amperímetro ideal e um modelo de circuito aberto para o voltímetro ideal.

Um amperímetro analógico consiste em um medidor de d'Arsonval em paralelo com um resistor, como mostra a Figura 3.24. A finalidade do resistor em paralelo é limitar a quantidade de corrente na bobina do medidor, derivando um pouco dela por R_A. Um voltímetro analógico consiste em um medidor de d'Arsonval em série com um resistor, como mostra a Figura 3.25. Nesse caso, o resistor é usado para limitar a queda de tensão na bobina do medidor. Em ambos os medidores, o resistor adicionado determina a escala total de leitura do medidor.

Por essas descrições, vemos que um medidor real não é um medidor ideal; tanto o resistor adicionado quanto o medidor introduzem resistências no circuito ao qual o medidor está ligado. Na verdade, qualquer instrumento usado para fazer medições físicas extrai energia do sistema enquanto executa as medições. Quanto maior a energia ex-traída pelos instrumentos, mais séria será a interferência na medida. Um amperímetro real tem uma resistência equivalente que não é zero e, por isso, adiciona resistência ao circuito em série com o elemento cuja corrente o amperímetro está medindo. Um voltímetro real tem uma resistência equivalente que não é infinita, portanto adiciona resistência ao circuito em paralelo com o elemento cuja tensão está sendo lida.

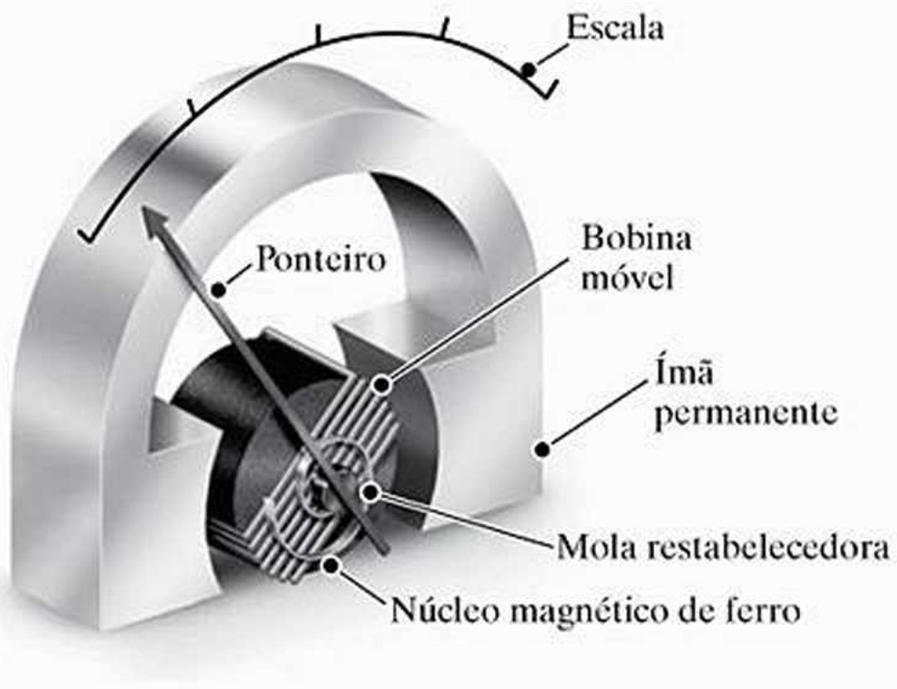


Figura 3.23 ▲ Diagrama esquemático de um medidor de d'Arsonval.

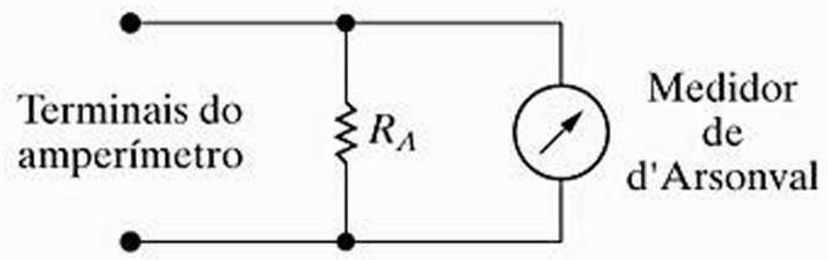


Figura 3.24 ▲ Circuito de um amperímetro cc.

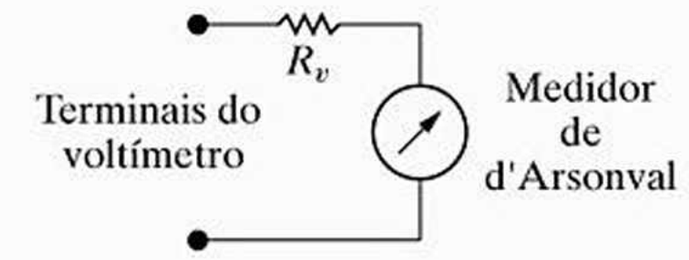


Figura 3.25 ▲ Circuito de um voltímetro cc.

O grau de interferência desses medidores no circuito que está sendo medido depende da resistência efetiva dos medidores, em comparação com a resistência no circuito. Por exemplo, usando a regra do 1/10, a resistência efetiva de um amperímetro não deve ser maior do que 1/10 do valor da menor resistência do circuito, para se ter certeza de que a corrente que está sendo medida é aproximadamente a mesma com ou sem o amperímetro. No entanto, em um medidor analógico, o valor da resistência é determinado pela leitura máxima que desejamos fazer e não pode ser escolhido arbitrariamente. Os exemplos a seguir ilustram os cálculos envolvidos na determinação da resistência necessária em um amperímetro ou voltímetro analógico. Os exemplos também consideram a resistência efetiva resultante do medidor quando ele é inserido em um circuito.

Exemplo 3.5 Utilização de um amperímetro de d'Arsonval

a) Um medidor de d'Arsonval de 50 mV, 1 mA deve ser usado em um amperímetro, cuja leitura máxima é 10 mA. Determine R_A.

b) Repita (a) para uma leitura máxima de 1 A.

c) Qual é a resistência adicionada ao circuito quando o amperímetro de 10 mA é inserido para medir a corrente?

d) Repita (c) para o amperímetro de 1 A.

Solução

a) Pelo enunciado do problema, sabemos que quando a corrente nos terminais do amperímetro é 10 mA, 1 mA está fluindo pela bobina do medidor, o que significa que 9 mA devem ser desviados por R_A. Sabemos também que, quando o medidor conduz 1 mA, a queda em seus terminais é de 50 mV. A lei de Ohm requer que

$$9 \times 10^{-3} R_A = 50 \times 10^{-3},$$

ou

$$R_A = 50/9 = 5{,}555\ \Omega.$$

b) Quando a deflexão máxima do amperímetro for 1 A, R_A deverá conduzir 999 mA, enquanto o medidor conduzirá 1 mA. Então, nesse caso,

$$999 \times 10^{-3} R_A = 50 \times 10^{-3},$$

ou

$$R_A = 50/999 \approx 50{,}05\ \text{m}\Omega.$$

c) Usando R_m para representar a resistência equivalente do amperímetro, para o amperímetro de 10 mA,

$$R_m = \frac{50\ \text{mV}}{10\ \text{mA}} = 5\ \Omega\,,$$

ou, alternativamente,

$$R_m = \frac{(50)(50/9)}{50 + (50/9)} = 5\ \Omega\,.$$

d) Para o amperímetro de 1 A

$$R_m = \frac{50\ \text{mV}}{1\ \text{A}} = 0{,}050\ \Omega\,,$$

ou, alternativamente,

$$R_m = \frac{(50)(50/999)}{50 + (50/999)} = 0{,}050\ \Omega\,.$$

Exemplo 3.6 Utilização de um voltímetro de d'Arsonval

a) Um medidor de d'Arsonval de 50 mV, 1 mA deve ser usado em um voltímetro cuja leitura máxima é 150 V. Determine R_v.

b) Repita (a) para uma leitura máxima de 5 V.

c) Qual é a resistência que o medidor de 150 V insere no circuito?

d) Repita (c) para o medidor de 5 V.

Solução

a) A deflexão máxima requer 50 mV e o medidor tem uma resistência de 50 Ω. Portanto, aplicamos a Equação 3.22 com $R_1 = R_v$, $R_2 = 50\ \Omega$, $v_s = 150$ V e $v_2 = 50$ mV:

$$50 \times 10^{-3} = \frac{50}{R_v + 50}(150)\cdot$$

Resolvendo para R_v, obtemos

$$R_v = 149.950\ \Omega\,.$$

b) Para uma leitura máxima de 5 V,

$$50 \times 10^{-3} = \frac{50}{R_v + 50}(5),$$

ou

$$R_v = 4950\ \Omega$$

c) Usando R_m para representar a resistência equivalente do medidor, temos

$$R_m = \frac{150\ \text{V}}{10^{-3}\ \text{A}} = 150.000\ \Omega$$

ou, alternativamente,

$$R_m = 149.950 + 50 = 150.000\ \Omega$$

d) Então,

$$R_m = \frac{5\ \text{V}}{10^{-3}\ \text{A}} = 5.000\Omega\,,$$

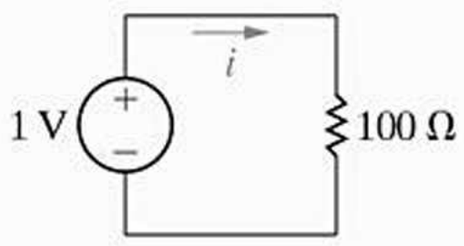
ou, alternativamente,

$$R_m = 4.950 + 50 = 5.000\Omega.$$

✔ PROBLEMAS PARA AVALIAÇÃO

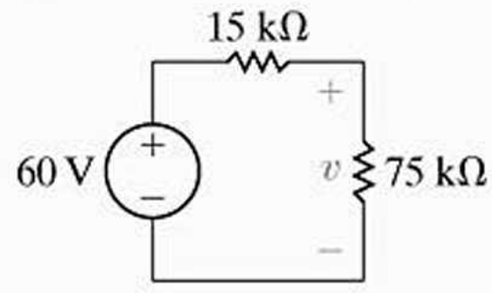
Objetivo 4 — Saber determinar a leitura de amperímetros e voltímetros

3.5 a) Determine a corrente no circuito mostrado.
b) Se o amperímetro do Exemplo 3.5(a) for usado para medir a corrente, qual será sua leitura?



Resposta: (a) 10 mA;
(b) 9,524 mA.

3.6 a) Determine a tensão v no resistor de 75 kΩ do circuito mostrado.
b) Se o voltímetro de 150 V do Exemplo 3.6(a) for usado para medir a tensão, qual será sua leitura?



Resposta: (a) 50 V; (b) 46,15 V.

NOTA: Tente resolver também os problemas 3.30 e 3.33, apresentados no final deste capítulo.

3.6 Medição de resistência — a ponte de Wheatstone

Muitas configurações de circuito diferentes são usadas para medir a resistência. Aqui, focalizaremos somente uma, a ponte de Wheatstone. O circuito da ponte de Wheatstone é usado para medir, com precisão, resistências de valores médios, isto é, na faixa de 1 Ω a 1 MΩ. Em modelos comerciais da ponte de Wheatstone são possíveis precisões da ordem de ±0,1%. O circuito da ponte consiste em quatro resistores, uma fonte de tensão cc e um detector. A resistência de um dos quatro resistores pode ser variada, o que é indicado na Figura 3.26 pela seta que atravessa R_3. Em geral, a fonte de tensão cc é uma bateria, o que é indicado pelo símbolo de bateria para a fonte de tensão v da Figura 3.26. Em geral, o detector é um medidor de d'Arsonval que absorve uma corrente na faixa dos microampères, denominado galvanômetro. A Figura 3.26 mostra o arranjo do circuito das resistências, bateria e detector, no qual R_1, R_2 e R_3 são resistores conhecidos e R_x é o resistor desconhecido.

Para determinar o valor de R_x, ajustamos o resistor variável R_3 até não haver mais corrente no galvanômetro. Então, calculamos o resistor desconhecido pela simples expressão

$$R_x = \frac{R_2}{R_1} R_3. \tag{3.33}$$

A derivação da Equação 3.33 decorre diretamente da aplicação das leis de Kirchhoff ao circuito da ponte. Desenhamos novamente o circuito da ponte na Figura 3.27 para mostrar as correntes adequadas à derivação da Equação 3.33. Quando i_g é zero, isto é, quando a ponte está equilibrada, a lei das correntes de Kirchhoff requer que

$$i_1 = i_3, \tag{3.34}$$

$$i_2 = i_x. \tag{3.35}$$

Agora, como i_g é zero, não há nenhuma queda de tensão no detector e, portanto, os pontos a e b estão no mesmo potencial. Assim, quando a ponte está equilibrada, a lei das tensões de Kirchhoff requer que

$$i_3 R_3 = i_x R_x, \tag{3.36}$$

$$i_1 R_1 = i_2 R_2. \tag{3.37}$$

Combinando as equações 3.34 e 3.35 com a Equação 3.36, temos

$$i_1 R_3 = i_2 R_x. \tag{3.38}$$

Obtemos a Equação 3.33 dividindo, primeiro, a Equação 3.38 pela Equação 3.37 e, então, resolvendo a expressão resultante para R_x:

$$\frac{R_3}{R_1} = \frac{R_x}{R_2}, \tag{3.39}$$

pela qual

$$R_x = \frac{R_2}{R_1} R_3. \tag{3.40}$$

Agora que já verificamos a validade da Equação 3.33, podemos fazer vários comentários sobre o resultado. Em primeiro lugar, observe que, se a razão R_2/R_1 for igual à unidade, o resistor desconhecido R_x será igual a R_3. Nesse caso, o resistor da ponte R_3 deve variar dentro de uma faixa que inclua o valor R_x. Por exemplo, se a resistência desconhecida fosse de 1.000 Ω, e R_3 pudesse ser variado de 0 a 100 Ω, a ponte nunca poderia se equilibrar. Assim, para cobrir uma ampla faixa de resistores desconhecidos, devemos poder variar a razão R_2/R_1. Em uma ponte de Wheatstone comercial, R_1 e R_2 assumem valores cujas razões são múltiplos de 10. Normalmente, os valores decimais são 1, 10, 100 e 1.000 Ω, de modo que a razão R_2/R_1 pode ser variada de 0,001 a 1.000 em incrementos decimais. De modo geral, o resistor variável R_3 pode ser ajustado em valores inteiros de resistência de 1 a 11.000 Ω.

Embora a Equação 3.33 implique que R_x possa variar de zero a infinito, a faixa prática de R_x é, aproximadamente, de 1 Ω a 1 MΩ. Resistências mais baixas são difíceis de medir em uma ponte de Wheatstone padrão por causa das tensões termoelétricas geradas nas junções de metais diferentes e por causa dos efeitos do aquecimento térmico — isto é, efeitos i^2R. Resistências mais altas são difíceis de medir com precisão por causa das correntes de fuga. Em outras palavras, se R_x for grande, a fuga de corrente no isolamento elétrico pode ser comparável à corrente nos ramos do circuito da ponte.

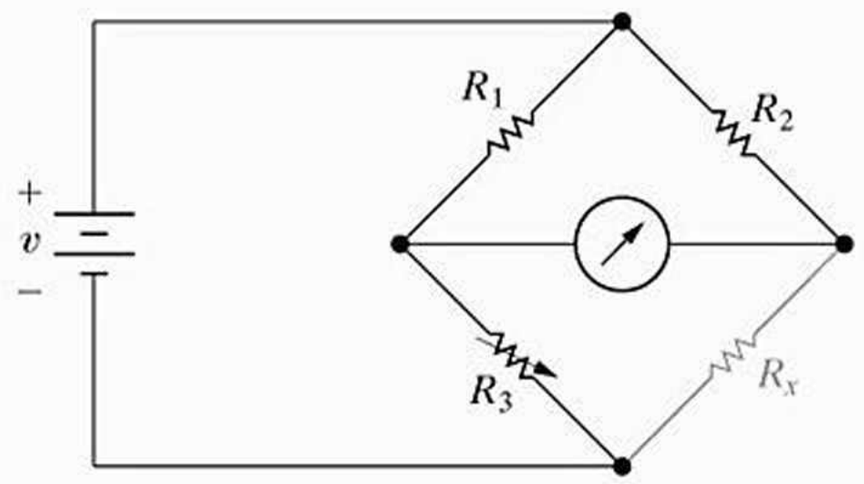


Figura 3.26 ▲ Circuito da ponte de Wheatstone.

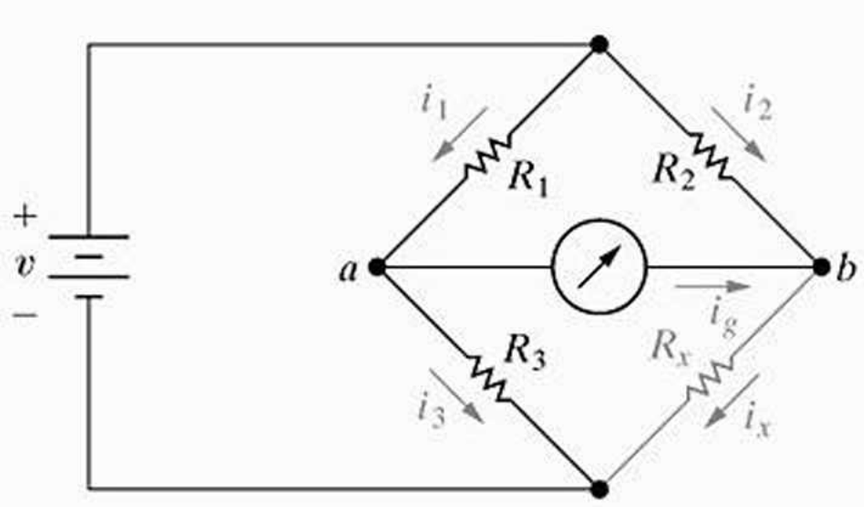


Figura 3.27 ▲ Ponte de Wheatstone equilibrada ($i_g = 0$).

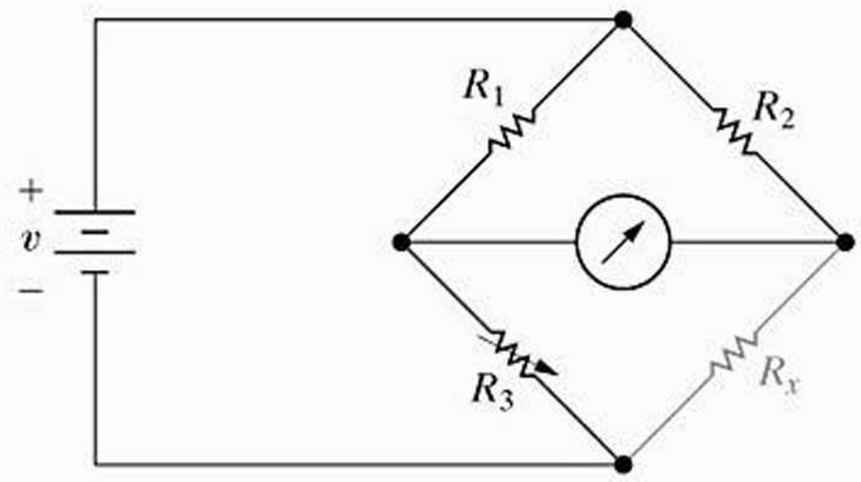
✔ PROBLEMA PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 5 — Entender como uma ponte de Wheatstone é usada para medir resistência

3.7 O circuito da ponte mostrado está equilibrado quando $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = 1.000\ \Omega$ e $R_3 = 150\ \Omega$. A ponte é alimentada por uma fonte de 5 V cc.

a) Qual é o valor de R_x?

b) Suponha que cada resistor da ponte seja capaz de dissipar 250 mW. A ponte pode ser equilibrada sem ultrapassar a capacidade de dissipação de potência dos resistores, ou seja, sem se danificar?



Resposta (a) 1.500 Ω; (b) sim.

NOTA: Tente resolver também o Problema 3.48, apresentado no final deste capítulo.

3.7 Circuitos equivalentes triângulo-estrela (Δ-Y) ou pi-tê (π-T)

A configuração da ponte da Figura 3.26 introduz uma interligação de resistores que justifica mais discussão. Se substituirmos o galvanômetro por sua resistência equivalente R_m, poderemos desenhar o circuito mostrado na Figura 3.28. Não podemos reduzir os resistores interligados desse circuito a um único resistor equivalente nos terminais da bateria se nos restringirmos aos simples circuitos equivalentes em série ou em paralelo, apresentados logo no início deste capítulo. Os resistores interligados podem ser reduzidos a um único resistor equivalente por meio de um circuito equivalente triângulo-estrela (Δ-Y) ou pi-tê (π-T).[1]

A conexão dos resistores R_1, R_2 e R_m (ou R_3, R_m e R_x) no circuito mostrado na Figura 3.28 é *denominada interligação em triângulo* (Δ) porque ela é parecida com a letra grega Δ. Também é denominada *interligação em pi* porque o Δ pode ser transformado em um π sem interferir na equivalência elétrica das duas configurações. A equivalência elétrica entre as interligações Δ e π fica clara com o auxílio da Figura 3.29.

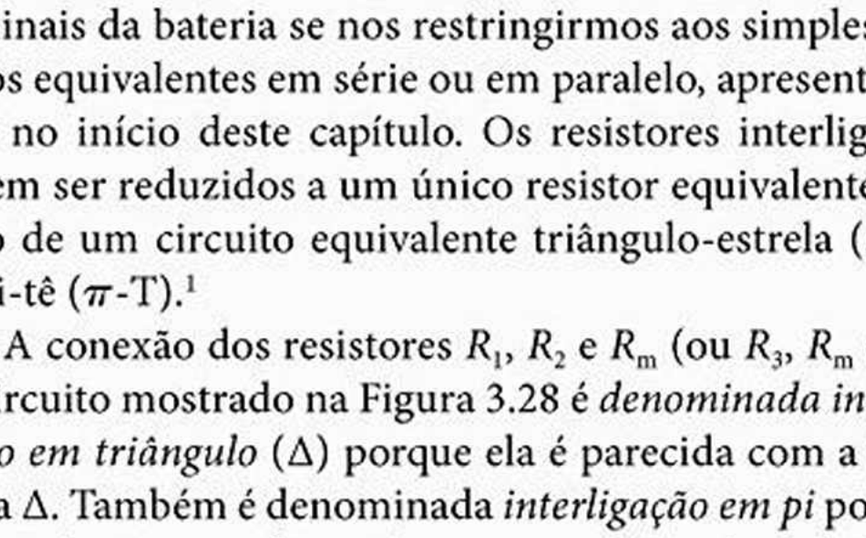


Figura 3.28 ▲ Rede resistiva gerada por uma ponte de Wheatstone.

A conexão dos resistores R_1, R_m e R_3 (ou R_2, R_m e R_x) no circuito mostrado na Figura 3.28 é denominada *interligação em estrela*, ou *em Y*, porque a ela pode ser dada a forma da letra Y (estrela). É mais fácil ver a forma em Y quando a interligação é desenhada como na Figura 3.30. A configuração em Y também é denominada *interligação em tê* (T), porque a estrutura em Y pode ser transformada em uma estrutura em T sem interferir na equivalência elétrica das duas estruturas. A equivalência elétrica das configurações em Y e em T fica clara com o auxílio da Figura 3.30.

A Figura 3.31 ilustra a transformação de circuito Δ-Y. Observe que não podemos transformar a interligação em Δ em uma interligação em Y simplesmente mudando seu formato. Dizer que o circuito ligado em Δ é equivalente ao circuito ligado em Y significa que a configuração em Δ pode ser substituída por uma configuração em Y e, mesmo assim, manter idêntico o

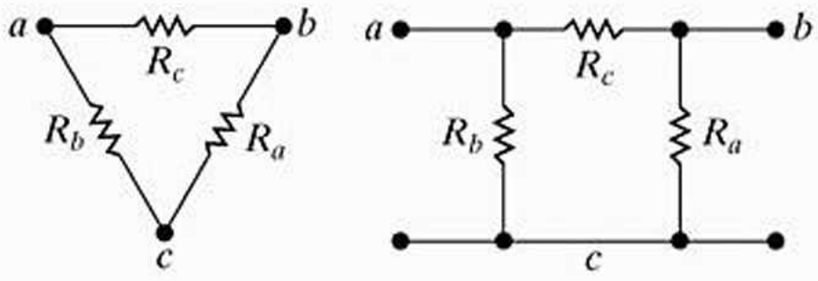


Figura 3.29 ▲ Configuração em Δ vista como uma configuração em π.

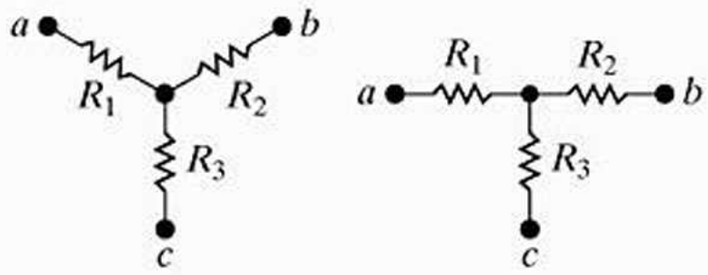


Figura 3.30 ▲ Uma estrutura em Y vista como uma estrutura em T.

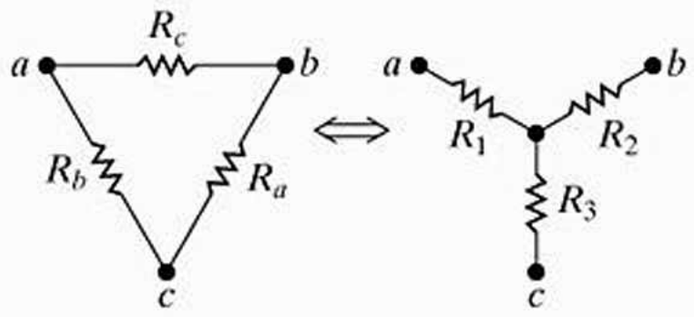


Figura 3.31 ▲ Transformação Δ-Y.

[1] Estruturas em Δ e Y estão presentes em uma variedade de circuitos úteis, não apenas em redes resistivas. Conseqüentemente, a transformação Δ-Y é uma ferramenta útil em análise de circuitos.

comportamento no terminal das duas configurações. Portanto, se cada circuito for colocado dentro de uma caixa preta, não poderemos determinar, por medições externas, se a caixa contém um conjunto de resistores ligados em Δ ou um conjunto de resistores ligados em Y. Essa condição só é válida se a resistência entre os pares de terminais correspondentes for a mesma para cada caixa preta. Por exemplo, a resistência entre os terminais *a* e *b* deve ser a mesma, quer utilizemos o conjunto ligado em Δ ou o conjunto ligado em Y. Para cada par de terminais no circuito ligado em Δ, a resistência equivalente pode ser calculada usando simplificações em série e em paralelo para obter

$$R_{ab} = \frac{R_c(R_a + R_b)}{R_a + R_b + R_c} = R_1 + R_2, \tag{3.41}$$

$$R_{bc} = \frac{R_a(R_b + R_c)}{R_a + R_b + R_c} = R_2 + R_3, \tag{3.42}$$

$$R_{ca} = \frac{R_b(R_c + R_a)}{R_a + R_b + R_c} = R_1 + R_3. \tag{3.43}$$

A manipulação algébrica direta das equações 3.41–3.43 possibilita o cálculo dos valores dos resistores ligados em Y em termos dos resistores ligados em Δ equivalente:

$$R_1 = \frac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c}, \tag{3.44}$$

$$R_2 = \frac{R_c R_a}{R_a + R_b + R_c}, \tag{3.45}$$

$$R_3 = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b + R_c}. \tag{3.46}$$

Inverter a transformação Δ-Y também é possível. Isto é, podemos começar com a estrutura em Y e substituí-la por uma estrutura equivalente em Δ. As expressões para as resistências dos três resistores ligados em Δ, como funções das resistências dos três resistores ligados em Y, são

$$R_a = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_1}, \tag{3.47}$$

$$R_b = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_2}, \tag{3.48}$$

$$R_c = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_3}. \tag{3.49}$$

O Exemplo 3.7 ilustra a utilização de uma transformação Δ-Y para simplificar a análise de um circuito.

Exemplo 3.7 Aplicação de uma transformação Δ-Y

Determine a corrente e a potência fornecidas pela fonte de 40 V no circuito mostrado na Figura 3.32.

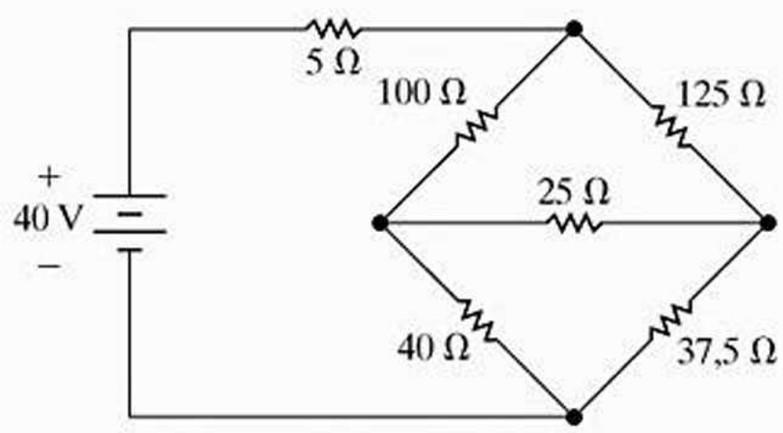


Figura 3.32 ▲ Circuito para o Exemplo 3.7.

Solução

Estamos interessados apenas na corrente e na potência da fonte de 40 V. Portanto, o problema estará resolvido quando obtivermos a resistência equivalente nos terminais da fonte. Podemos determinar essa resistência equivalente, com facilidade, depois de substituirmos o Δ superior (100, 125, 25 Ω) ou o Δ inferior (40, 25, 37,5 Ω) por sua Y equivalente. Optamos por substituir o Δ superior. Então, calculamos as três resistências em Y, definidas na Figura 3.33, pelas equações 3.44 a 3.46. Assim,

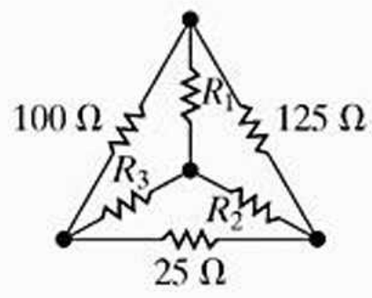


Figura 3.33 ▲ Resistores equivalentes em estrela.

$$R_1 = \frac{100 \times 125}{250} = 50\ \Omega,$$

$$R_2 = \frac{125 \times 25}{250} = 12{,}5\ \Omega,$$

$$R_3 = \frac{100 \times 25}{250} = 10\ \Omega.$$

A substituição dos resistores em Y da Figura 3.32 produz o circuito mostrado na Figura 3.34. Pela Figura 3.34, fica fácil calcular a resistência nos terminais da fonte de 40 V, por simplificações série-paralelo:

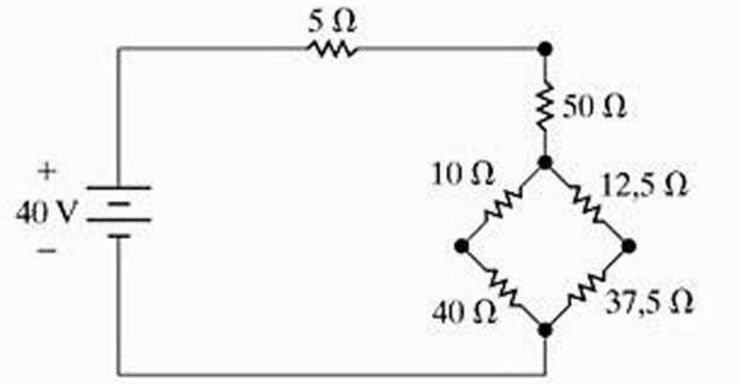


Figura 3.34 ▲ Versão transformada do circuito mostrado na Figura 3.32.

$$R_{eq} = 55 + \frac{(50)\,(50)}{100} = 80\ \Omega.$$

A etapa final consiste em observar que o circuito se reduz a um resistor de 80 Ω e uma fonte de 40 V, como mostra a Figura 3.35, pela qual fica evidente que a fonte de 40 V fornece 0,5 A e 20 W ao circuito.

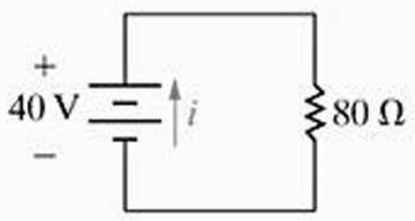
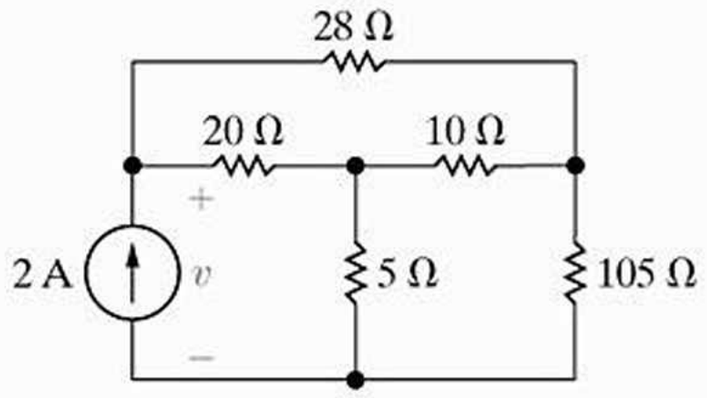


Figura 3.35 ▲ Etapa final na simplificação do circuito mostrado na Figura 3.32.

✔ PROBLEMA PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 6 — Saber quando e como usar circuitos equivalentes Δ-Y

3.8 Use uma transformação Δ-Y para determinar a tensão no circuito mostrado.



Resposta: 35 V.

NOTA: Tente resolver também os problemas 3.52, 3.53 e 3.54, apresentados no final deste capítulo.

Perspectiva prática

Um desembaçador de vidro traseiro

Um modelo da rede resistiva de um desembaçador é mostrado na Figura 3.36, onde x e y denotam o espaçamento horizontal e vertical dos elementos da rede. Dadas as dimensões da rede, precisamos determinar expressões para cada um de seus resistores, de modo que a potência dissipada por unidade de comprimento seja a mesma em cada condutor. Isso garantirá o aquecimento uniforme do vidro traseiro em ambas as direções x e y. Assim, precisamos determinar valores para as resistências dos resistores da rede que satisfaçam às seguintes relações:

$$i_1^2\left(\frac{R_1}{x}\right) = i_2^2\left(\frac{R_2}{x}\right) = i_3^2\left(\frac{R_3}{x}\right) = i_4^2\left(\frac{R_4}{x}\right) = i_5^2\left(\frac{R_5}{x}\right), \quad (3.50)$$

$$i_1^2\left(\frac{R_a}{y}\right) = i_1^2\left(\frac{R_1}{x}\right), \quad (3.51)$$

$$i_1^2\left(\frac{R_a}{y}\right) = i_b^2\left(\frac{R_b}{y}\right) = i_c^2\left(\frac{R_c}{y}\right) = i_5^2\left(\frac{R_d}{y}\right), \quad (3.52)$$

$$i_5^2\left(\frac{R_d}{y}\right) = i_5^2\left(\frac{R_5}{x}\right). \quad (3.53)$$

Começamos a análise da rede aproveitando sua estrutura. Observe que, se desligamos a porção inferior do circuito (isto é, os resistores R_c, R_d, R_4 e R_5), as correntes i_1, i_2, i_3 e i_b não são afetadas. Portanto, em vez de analisar o circuito da Figura 3.36, podemos analisar o circuito mais simples da Figura 3.37. Observe ainda que, após determinar R_1, R_2, R_3, R_a e R_b no circuito da Figura 3.37, também determinamos os valores dos resistores remanescentes, pois

$$\begin{aligned} R_4 &= R_2 \\ R_5 &= R_1 \\ R_c &= R_b \\ R_d &= R_a. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Comece a análise do circuito simplificado da rede da Figura 3.37 escrevendo expressões para as correntes i_1, i_2, i_3 e i_b. Para determinar i_b, descreva a resistência equivalente em paralelo com R_3:

$$\begin{aligned} R_e &= 2R_b + \frac{R_2(R_1 + 2R_a)}{R_1 + R_2 + 2R_a} \\ &= \frac{(R_1 + 2R_a)(R_2 + 2R_b) + 2R_2R_b}{(R_1 + R_2 + 2R_a)}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

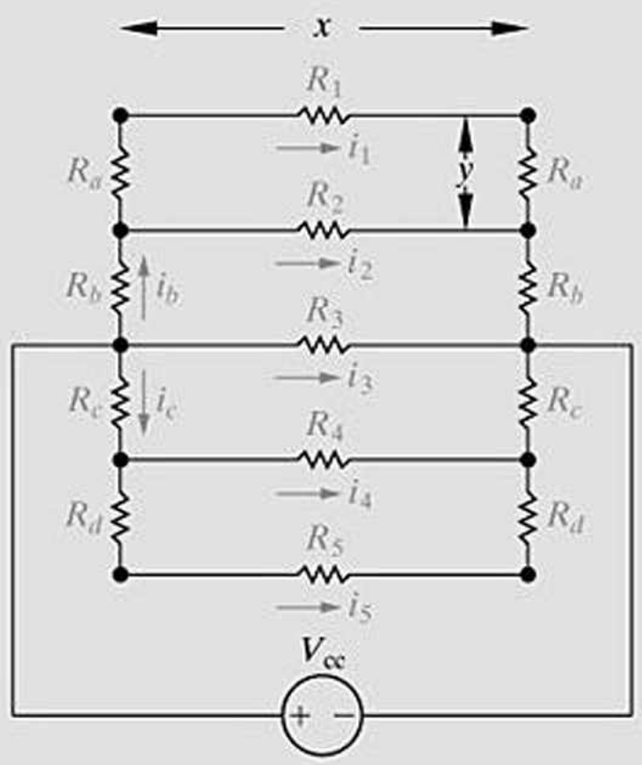


Figura 3.36 ▲ Modelo de uma rede de desembaçador.

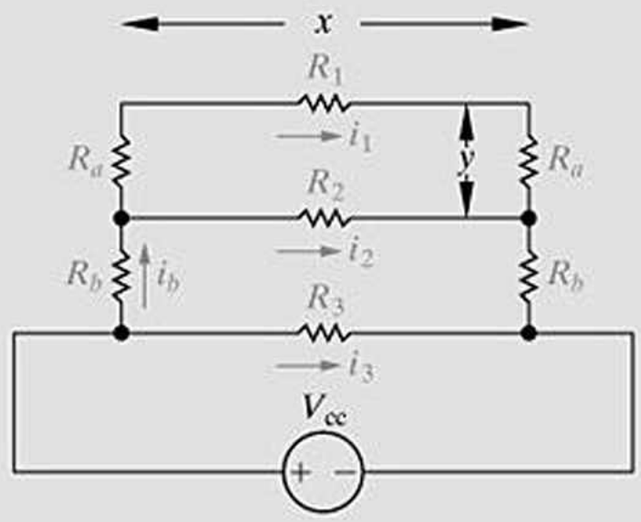


Figura 3.37 ▲ Um modelo simplificado da rede do desembaçador.

Por conveniência, defina o numerador da Equação 3.55 como

$$D = (R_1 + 2R_a)(R_2 + 2R_b) + 2R_2R_b, \tag{3.56}$$

e, portanto,

$$R_e = \frac{D}{(R_1 + R_2 + 2R_a)}. \tag{3.57}$$

Daí, decorre diretamente que

$$i_b = \frac{V_{dc}}{R_e} = \frac{V_{dc}(R_1 + R_2 + 2R_a)}{D}. \tag{3.58}$$

Podemos determinar expressões para i_1 e i_2 diretamente, utilizando a divisão de corrente. Portanto,

$$i_1 = \frac{i_b R_2}{R_1 + R_2 + 2R_a} = \frac{V_{cc}R_2}{D}, \tag{3.59}$$

e

$$i_2 = \frac{i_b(R_1 + 2R_a)}{(R_1 + R_2 + 2R_a)} = \frac{V_{cc}(R_1 + 2R_a)}{D}. \tag{3.60}$$

A expressão para i_3 é simplesmente

$$i_3 = \frac{V_{cc}}{R_3}. \tag{3.61}$$

A seguir, usamos as restrições das equações 3.50–3.52 para derivar expressões para R_a, R_b, R_2 e R_3, como funções de R_1. Pela Equação 3.51,

$$\frac{R_a}{x} = \frac{R_1}{x},$$

ou

$$R_a = \frac{y}{x}R_1 = \sigma R_1,$$

onde

$$\sigma = y/x. \tag{3.62}$$

Então, pela Equação 3.50 temos

$$R_2 = \left(\frac{i_1}{i_2}\right)^2 R_1. \tag{3.63}$$

A razão (i_1/i_2) é obtida diretamente das equações 3.59 e 3.60:

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{R_2}{R_1 + 2R_a} = \frac{R_2}{R_1 + 2\sigma R_1}. \tag{3.64}$$

Quando a Equação 3.64 é substituída na Equação 3.63, obtemos, após algumas manipulações algébricas (veja o Problema 3.69),

$$R_2 = (1 + 2\sigma)^2 R_1. \tag{3.65}$$

A expressão para R_b como uma função de R_1 é derivada da restrição imposta pela Equação 3.52, ou seja, que

$$R_b = \left(\frac{i_1}{i_b}\right)^2 R_a. \tag{3.66}$$

A razão (i_1/i_b) é derivada das equações 3.58 e 3.59. Assim,

$$\frac{i_1}{i_b} = \frac{R_2}{(R_1 + R_2 + 2R_a)}. \tag{3.67}$$

Quando a Equação 3.67 é substituída na Equação 3.66 obtemos, após algumas manipulações algébricas (veja o Problema 3.69),

$$R_b = \frac{(1 + 2\sigma)^2 \sigma R_1}{4(1 + \sigma)^2}. \tag{3.68}$$

Por fim, a expressão para R_3 pode ser obtida da restrição dada na Equação 3.50, ou

$$R_3 = \left(\frac{i_1}{i_3}\right)^2 R_1, \tag{3.69}$$

onde

$$\frac{i_1}{i_3} = \frac{R_2 R_3}{D}.$$

Mais uma vez, após algumas manipulações algébricas (veja o Problema 3.70), a expressão para R_3 pode ser reduzida para

$$R_3 = \frac{(1 + 2\sigma)^4}{(1 + \sigma)^2} R_1. \tag{3.70}$$

Os resultados de nossa análise estão resumidos na Tabela 3.1.

TABELA 3.1 Resumo de equações de resistência para a rede do desembaçador

Resistência	Expressão
R_a	σR_1
R_b	$\frac{(1 + 2\sigma)^2 \sigma R_1}{4(1 + \sigma)^2}$
R_2	$(1 + 2\sigma)^2 R_1$
R_3	$\frac{(1 + 2\sigma)^4}{(1 + \sigma)^2} R_1$

onde $\sigma = y/x$

NOTA: Avalie o que você entendeu da "Perspectiva prática" tentando resolver os problemas 3.71–3.73, apresentados no final deste capítulo.

Resumo

- *Resistores em série* podem ser combinados para obter um único resistor equivalente, de acordo com a equação

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^{k} R_i = R_1 + R_2 + \cdots + R_k.$$

- *Resistores em paralelo* podem ser combinados para obter um único resistor equivalente, de acordo com a equação

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{R_i} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_k}.$$

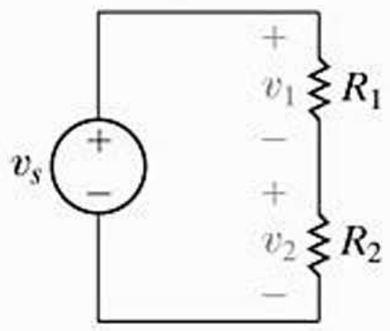
Quando apenas dois resistores estão em paralelo, a equação para a resistência equivalente pode ser simplificada para dar

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

- Quando a tensão é dividida entre resistores em série, como mostra a figura, a tensão em cada resistor pode ser encontrada de acordo com as equações

$$v_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_s,$$

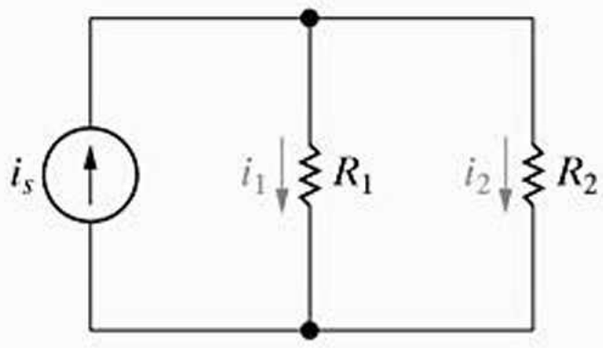
$$v_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_s.$$



- Quando a corrente é dividida entre resistores em paralelo, como mostra a figura, a corrente que passa em cada resistor pode ser encontrada de acordo com as equações

$$i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i_s.$$

$$i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i_s.$$



- *Divisão de tensão* é uma ferramenta de análise de circuitos usada para especificar a queda de tensão em determinado resistor de um conjunto de resistores ligados em série quando a queda de tensão nos terminais do conjunto é conhecida:

$$v_j = \frac{R_j}{R_{\text{eq}}} v,$$

onde v_j é a queda de tensão na resistência R_j e v é a queda de tensão nas resistências ligadas em série, cuja resistência equivalente é R_{eq}.

- *Divisão de corrente* é uma ferramenta de análise de circuitos usada para determinar a corrente em um dado resistor de um conjunto de resistores ligados em paralelo, quando a corrente de entrada no conjunto é conhecida:

$$I_j = \frac{R_{\text{eq}}}{R_j} i,$$

onde i_j é a corrente que passa pela resistência R_j e i é a corrente que flui pelos resistores ligados em paralelo cuja resistência equivalente é R_{eq}.

- Um *voltímetro* mede a tensão e deve ser inserido em paralelo com a tensão a ser medida. Um voltímetro ideal tem resistência interna infinita e, por isso, não altera a tensão que está sendo medida.
- Um *amperímetro* mede a corrente e deve ser inserido em série com a corrente a ser medida. Um amperímetro ideal tem resistência interna zero e, por isso, não altera a corrente que está sendo medida.
- *Medidores digitais* e *medidores analógicos* têm resistência interna, o que influencia o valor da variável de circuito que está sendo medida. Medidores baseados no medidor de d'Arsonval incluem deliberadamente uma resistência interna como um meio de limitar a corrente na bobina do medidor.
- O circuito da *ponte de Wheatstone* é utilizado para fazer medições precisas do valor da resistência de um resistor usando quatro resistores, uma fonte de tensão cc e um galvanômetro. Uma ponte de Wheatstone está equilibrada quando os valores dos resistores obedecem à Equação 3.33, resultando em uma leitura de 0 A no galvanômetro.
- Um circuito com três resistores ligados em uma configuração em Δ (ou em uma configuração em π) pode ser transformado em um circuito equivalente no qual os três resistores estão ligados em Y (ou ligados em T). A transformação Δ-Y é dada pelas equações 3.44–3.46; a transformação Y-Δ é dada pelas equações 3.47–3.49.

Problemas

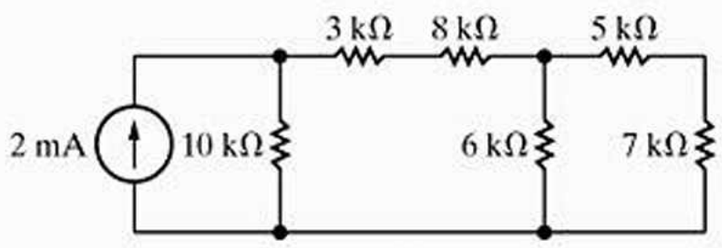
Seções 3.1–3.2

3.1* Para cada um dos circuitos mostrados,

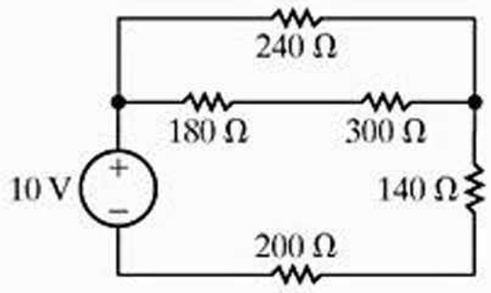
a) identifique os resistores ligados em série,

b) simplifique o circuito, substituindo os resistores ligados em série por resistores equivalentes.

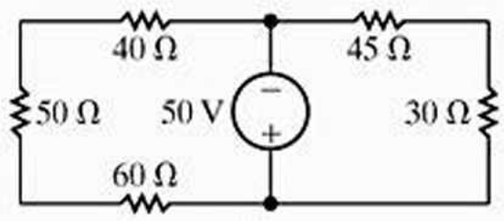
Figura P3.1



(a)



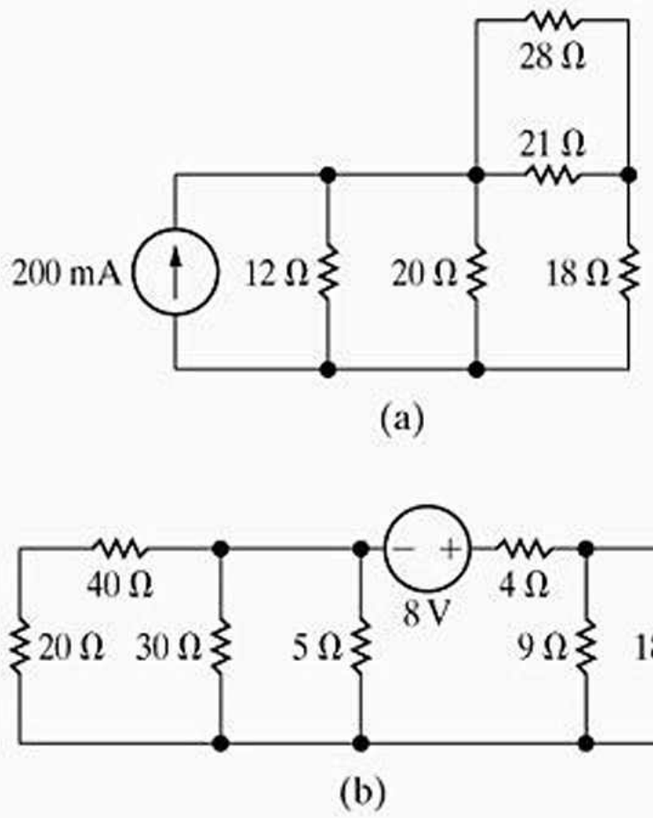
(b)



(c)

3.2* Para cada um dos circuitos mostrados na Figura P3.2,
a) identifique os resistores ligados em paralelo,
b) simplifique o circuito substituindo os resistores ligados em paralelo por resistores equivalentes.

Figura P3.2



3.3 PSPICE a) Determine a potência dissipada em cada resistor do circuito da Figura 3.9.
b) Determine a potência fornecida pela fonte de 120 V.
c) Mostre que a potência fornecida é igual à potência dissipada.

3.4 PSPICE a) Mostre que a solução do circuito da Figura 3.9 (veja o Exemplo 3.1) satisfaz a lei das correntes de Kirchhoff nas junções x e y.
b) Mostre que a solução do circuito da Figura 3.9 satisfaz a lei das tensões de Kirchhoff em todos os caminhos fechados.

3.5* Determine a resistência equivalente, vista pela fonte, em cada um dos circuitos do Problema 3.1.

3.6* Determine a resistência equivalente, vista pela fonte, em cada um dos circuitos do Problema 3.2.

3.7 PSPICE Determine a resistência equivalente R_{ab} para cada um dos circuitos da Figura P3.7.

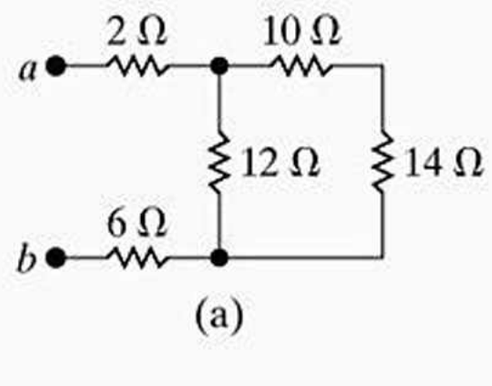
3.8 PSPICE Determine a resistência equivalente R_{ab} para cada um dos circuitos da Figura P3.8.

3.9 PSPICE a) Nos circuitos da Figura P3.9(a)–(c), determine a resistência equivalente R_{ab}.
b) Para cada circuito, determine a potência fornecida pela fonte.

Seções 3.3–3.4

3.10 PSPICE Determine a potência dissipada no resistor de 30 Ω, do circuito da Figura P3.10.

Figura P3.7



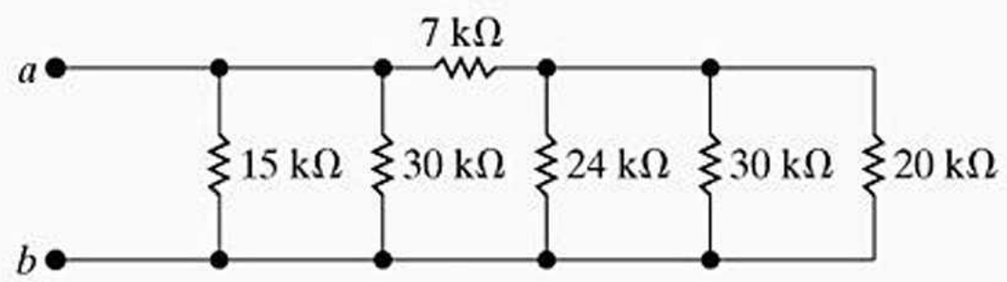
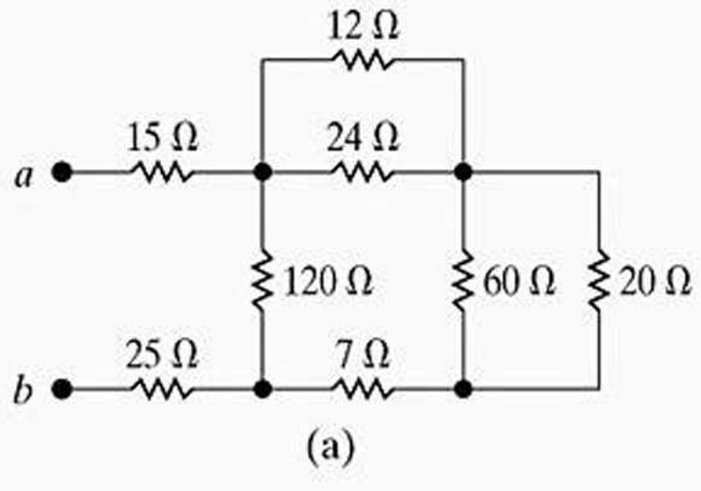
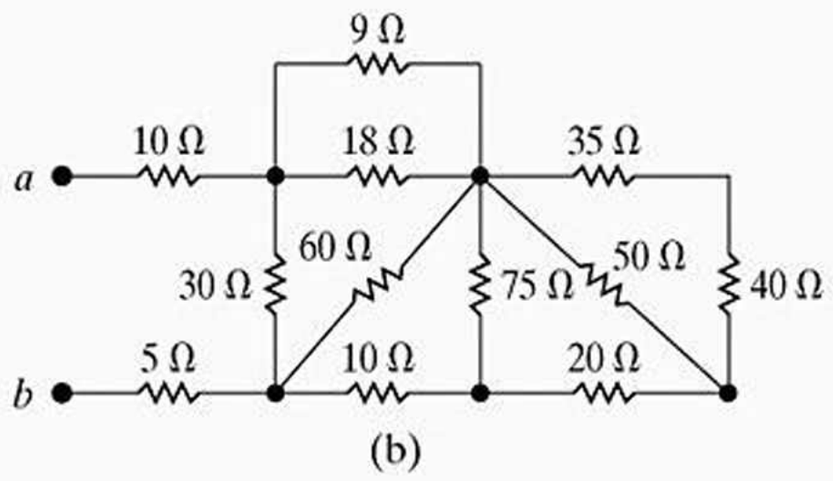


Figura P3.8





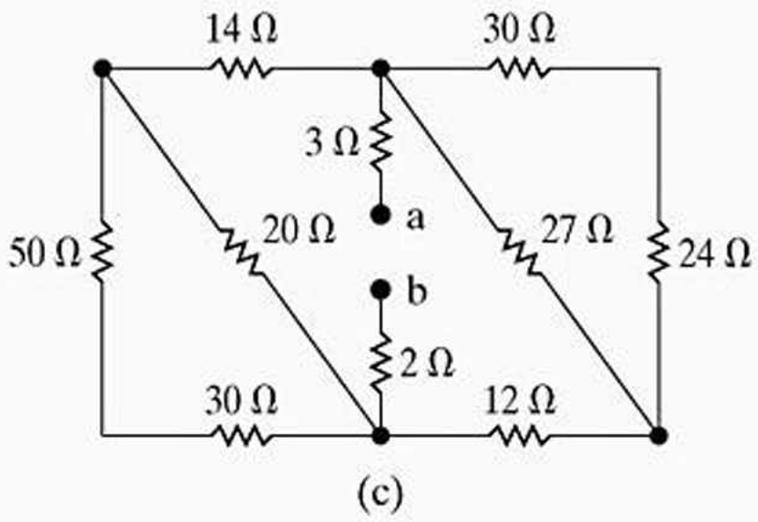
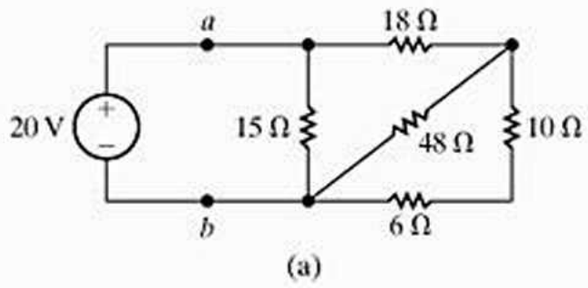
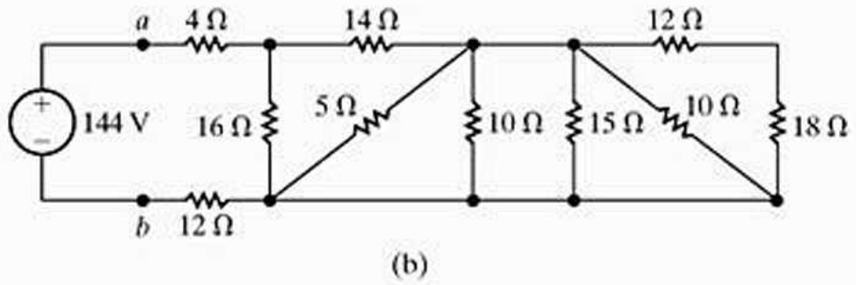


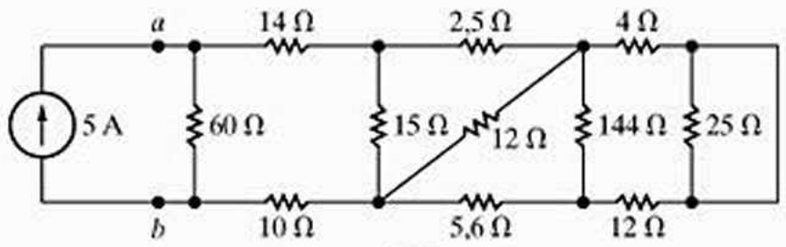
Figura P3.9



(a)

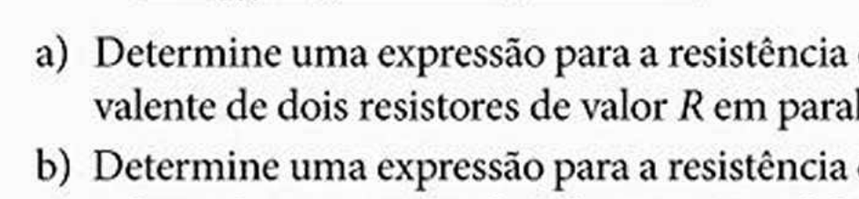


(b)



(c)

Figura P3.10



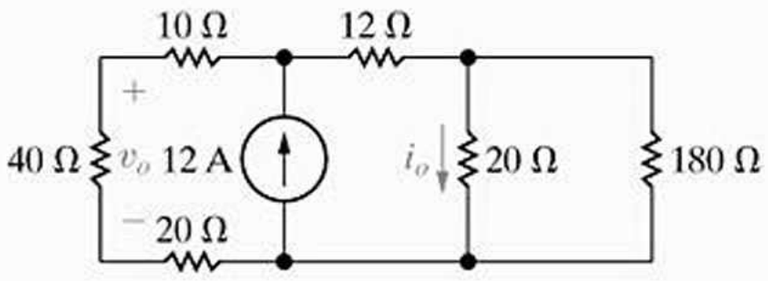
3.11 PSPICE Para o circuito da Figura P3.11, calcule

a) v_o e i_o.

b) a potência dissipada no resistor de 12 Ω.

c) a potência fornecida pela fonte de corrente.

Figura P3.11



3.12 a) Determine uma expressão para a resistência equivalente de dois resistores de valor R em paralelo.

b) Determine uma expressão para a resistência equivalente de n resistores de valor R em paralelo.

c) Usando os resultados de (b), projete uma rede resistiva com uma resistência equivalente de 700 Ω com resistores de 1 kΩ.

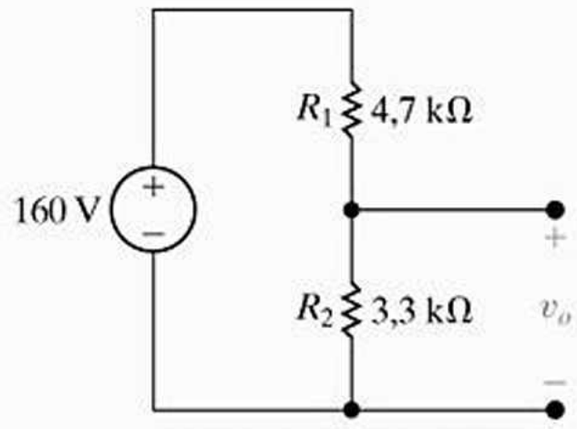
d) Usando os resultados de (b), projete uma rede resistiva com uma resistência equivalente de 5,5 kΩ usando resistores de 2 kΩ.

3.13* PROBLEMA DE PROJETO PSPICE a) Calcule a tensão a vazio v_o do circuito divisor de tensão mostrado na Figura P3.13.

b) Calcule a potência dissipada em R_1 e R_2.

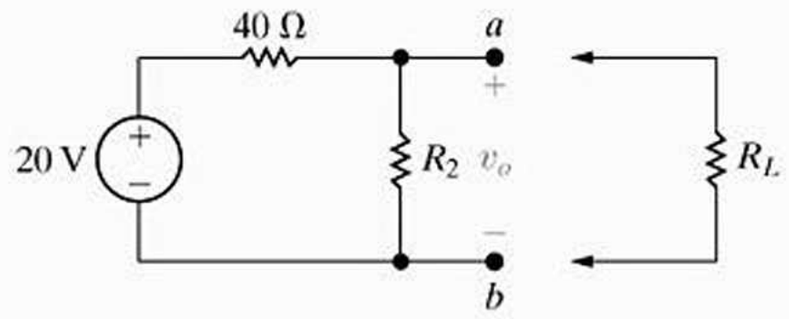
c) Suponha que haja apenas resistores de 0,5 W disponíveis. A tensão a vazio deve ser a mesma que em (a). Especifique os menores valores ôhmicos de R_1 e R_2.

Figura P3.13



3.14 PSPICE No circuito do divisor de tensão mostrado na Figura P3.14, o valor a vazio de v_o é 4 V. Quando a resistência de carga R_L é ligada aos terminais a e b, v_o cai para 3 V. Determine R_L.

Figura P3.14

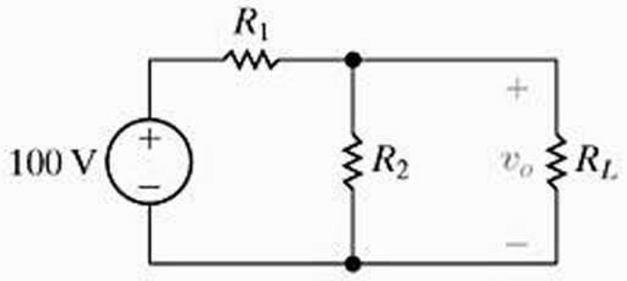


3.15* PROBLEMA DE PROJETO PSPICE A tensão a vazio no circuito divisor de tensão mostrado na Figura P3.15 é 20 V. O menor resistor de carga que está sempre ligado ao divisor é 48 kΩ. Quando o divisor estiver carregado, v_o não deverá cair abaixo de 16 V.

a) Projete o circuito do divisor que cumprirá as especificações que acabamos de mencionar. Especifique o valor numérico de R_1 e R_2.

b) Suponha que as potências nominais de resistores disponíveis no comércio sejam 1/16, 1/8, 1/4, 1 e 2 W. Qual potência nominal você especificaria?

Figura P3.15



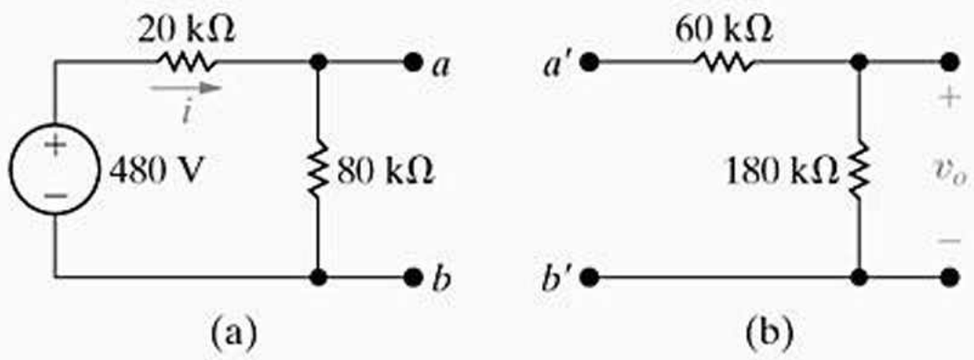
3.16 Suponha que o divisor de tensão da Figura P3.15 tenha sido construído para resistores de 0,15 W. Qual será o menor valor de R_L que fará com que um dos resistores do divisor esteja funcionando em seu limite de dissipação?

3.17 PSPICE a) O divisor de tensão da Figura P3.17(a) tem como carga o divisor de tensão mostrado na Figura P3.17(b); isto é, a está ligado a a' e b está ligado a b'. Determine v_o.

b) Suponha agora que o divisor de tensão da Figura P3.17(b) esteja ligado ao divisor de tensão da Figura P3.17(a) por meio de uma fonte de tensão controlada por corrente, como mostra a Figura P3.17(c).Determine v_o.

c) Qual é o efeito causado pela adição da fonte dependente de tensão sobre o funcionamento do divisor de tensão que está ligado à fonte de 480 V?

Figura P3.17

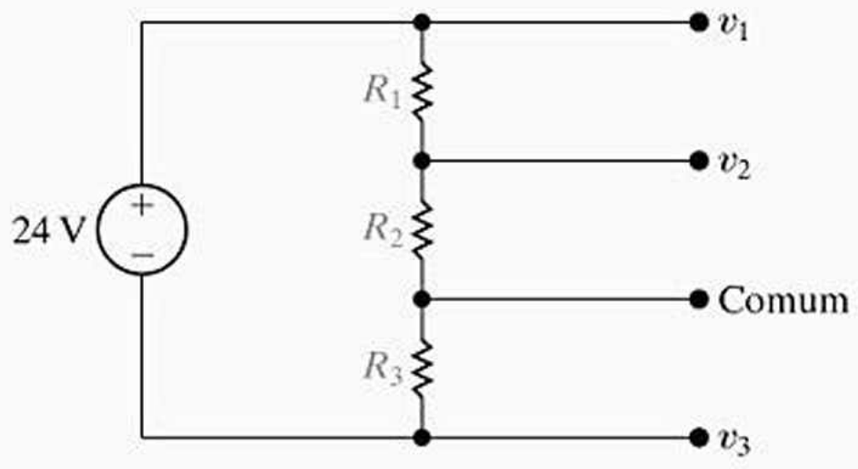


3.18 PROBLEMA DE PROJETO Muitas vezes é preciso fornecer mais do que um valor de tensão, usando um divisor de tensão. Por exemplo, os componentes de memória de muitos computadores pessoais requerem tensões de −12 V, 5 V e +12 V, todas em relação a um terminal de referência em comum. Selecione os valores de R_1, R_2 e R_3 no circuito da Figura P3.18 para atender aos seguintes requisitos de projeto:

a) A potência total fornecida ao divisor pela fonte de 24 V é 80 W quando o divisor não está carregado.

b) As três tensões, todas medidas em relação ao terminal de referência, são $v_1 = 12$ V, $v_2 = 5$ V e $v_3 = -12$ V.

Figura P3.18



3.19 PROBLEMA DE PROJETO Um divisor de tensão, como o da Figura 3.13, deve ser projetado de modo que $v_o = kv$ quando vazio ($R_L = \infty$), e $v_o = \alpha v_s$ sob carga nominal ($R_L = R_o$). Observe que, por definição, $\alpha < k < 1$.

a) Mostre que

$$R_1 = \frac{k - \alpha}{\alpha k} R_o$$

e

$$R_2 = \frac{k - \alpha}{\alpha(1 - k)} R_o.$$

b) Especifique os valores numéricos de R_1 e R_2 se $k = 0{,}85$, $\alpha = 0{,}80$ e $R_o = 34$ kΩ.

c) Se $v_s = 60$ V, especifique a potência máxima que será dissipada em R_1 e R_2.

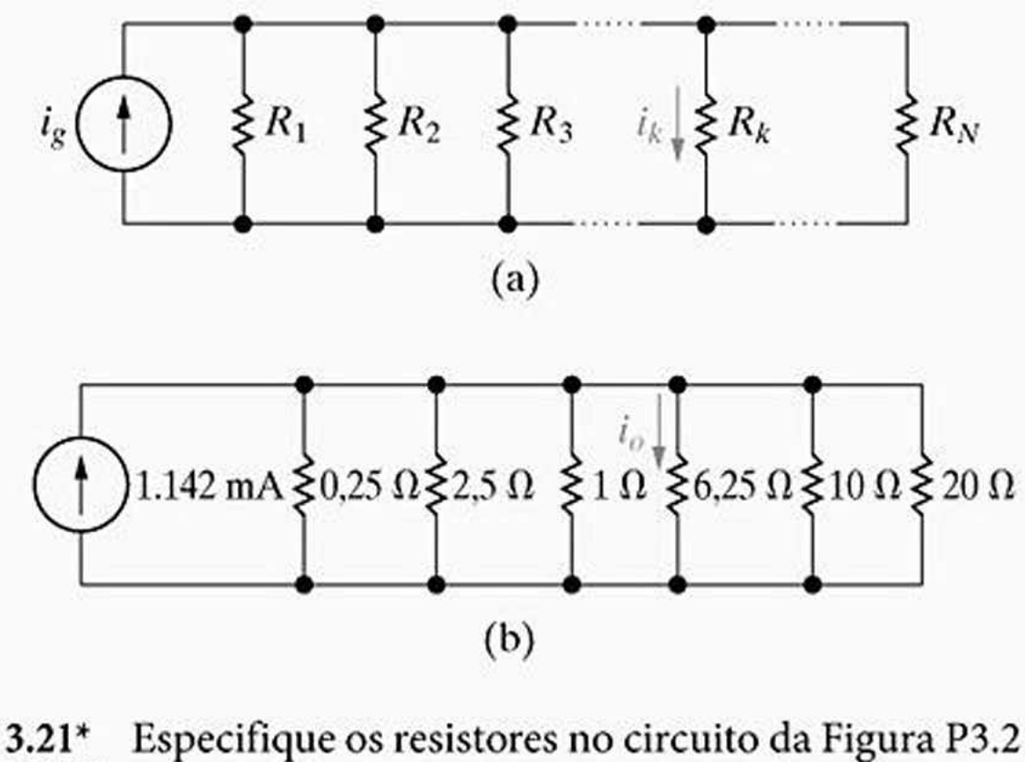
d) Suponha que a carga do resistor entre em curto-circuito por acidente. Qual é a potência dissipada em R_1 e R_2?

3.20 PSPICE a) Mostre que a corrente no k-ésimo ramo do circuito da Figura P3.20(a) é igual à corrente da fonte i_g, vezes a condutância do k-ésimo ramo, dividida pela soma das condutâncias, isto é,

$$i_k = \frac{i_g G_k}{G_1 + G_2 + G_3 + \cdots + G_k + \cdots + G_N}.$$

b) Use o resultado derivado em (a) para calcular a corrente no resistor de 6,25 Ω no circuito da Figura P3.20(b).

Figura P3.20

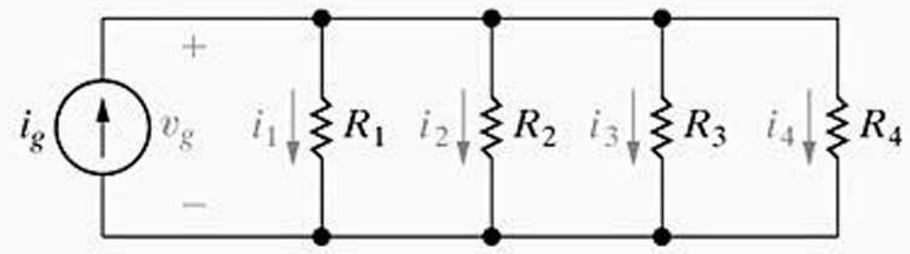


3.21* PROBLEMA DE PROJETO Especifique os resistores no circuito da Figura P3.21 para atender aos seguintes critérios de projeto:

$$i_g = 5 \text{ mA}; \; v_g = 1 \text{ V}; \; i_1 = 4i_2$$

$$i_2 = 8i_3 \; e \; i_3 = 5i_4$$

Figura P3.21



3.22* Examine o circuito da Figura P3.1(a).

a) Use a divisão de corrente para determinar a corrente que percorre o resistor de 10 kΩ de cima para baixo.

b) Usando o resultado de (a), determine a queda de tensão no resistor de 10 kΩ, positivo na parte superior.

c) Usando o resultado de (b), utilize a divisão de tensão para determinar a queda de tensão no resistor de 6 kΩ, positivo na parte superior.

d) Usando o resultado de (c), utilize a divisão de tensão para determinar a queda de tensão no resistor de 5 kΩ, positivo à esquerda.

3.23* Examine o circuito da Figura P3.1(b).

a) Use a divisão de tensão para determinar a queda de tensão no resistor de 240 Ω, positivo à esquerda.

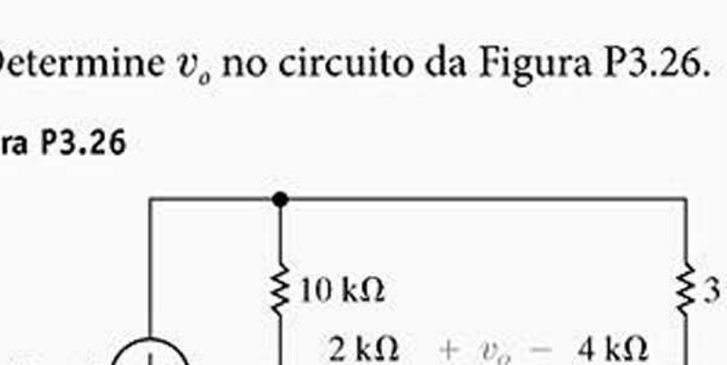
b) Usando o resultado de (a), determine a corrente que percorre o resistor de 240 Ω da esquerda para a direita.

c) Usando o resultado de (b), utilize a divisão de corrente para determinar a corrente no resistor de 140 Ω.

3.24 PSPICE a) Determine a tensão v_x no circuito da Figura P3.24.

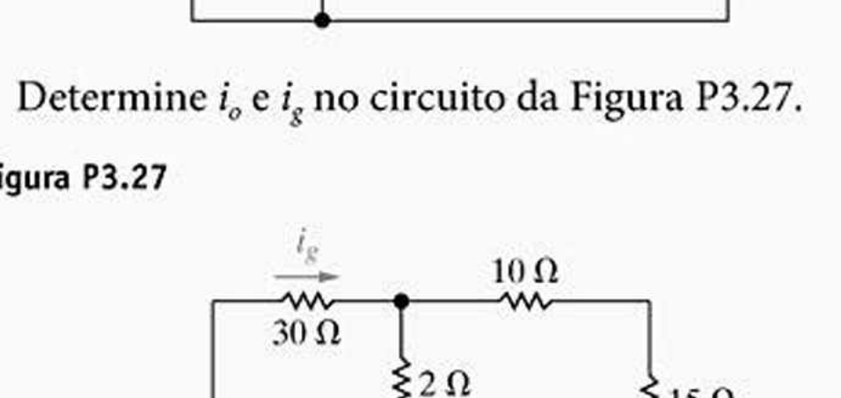
b) Substitua a fonte de 30 V por uma fonte de tensão genérica igual a V_s. Suponha que V_s seja positiva no terminal superior. Determine v_x como uma função de V_s.

Figura P3.24



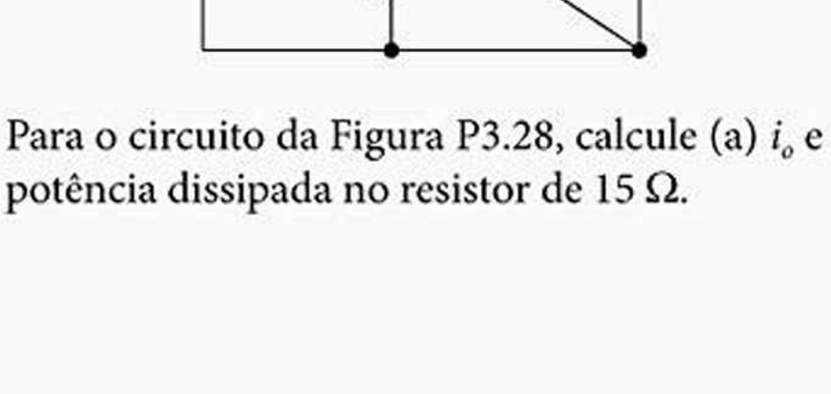
3.25 PSPICE Determine v_1 e v_2 no circuito da Figura P3.25.

Figura P3.25



3.26 PSPICE Determine v_o no circuito da Figura P3.26.

Figura P3.26

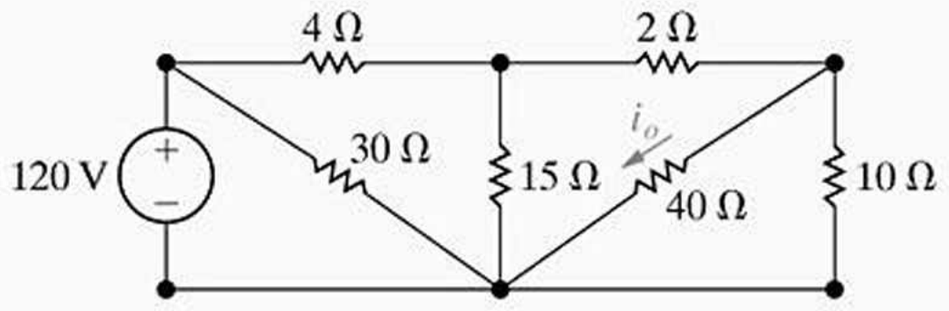


3.27 PSPICE Determine i_o e i_g no circuito da Figura P3.27.

Figura P3.27

3.28 PSPICE Para o circuito da Figura P3.28, calcule (a) i_o e (b) a potência dissipada no resistor de 15 Ω.

Figura P3.28

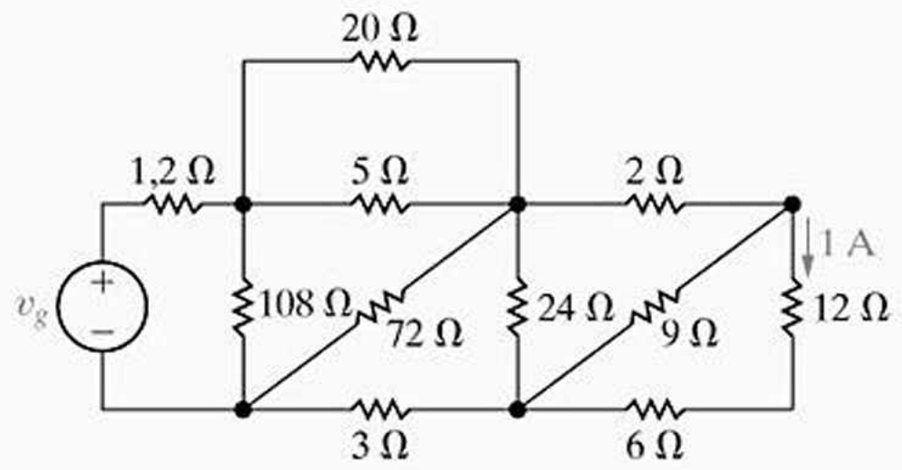


3.29 PSPICE A corrente no resistor de 12 Ω do circuito da Figura P3.29 é 1 A, como mostrado.

a) Determine v_g.

b) Determine a potência dissipada no resistor de 20 Ω.

Figura P3.29



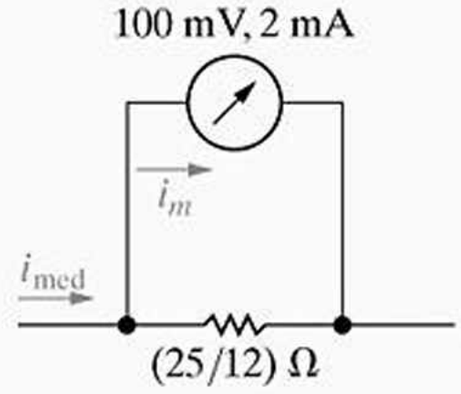
Seção 3.5

3.30* a) Mostre que, para o amperímetro do circuito da Figura P3.30, a corrente no medidor de d'Arsonval é sempre 1/25 da corrente que está sendo medida.

b) Qual seria a fração se o medidor de 100 mV, 2 mA fosse usado em um amperímetro de 5 A?

c) Você esperaria uma escala uniforme em um amperímetro de d'Arsonval de corrente contínua?

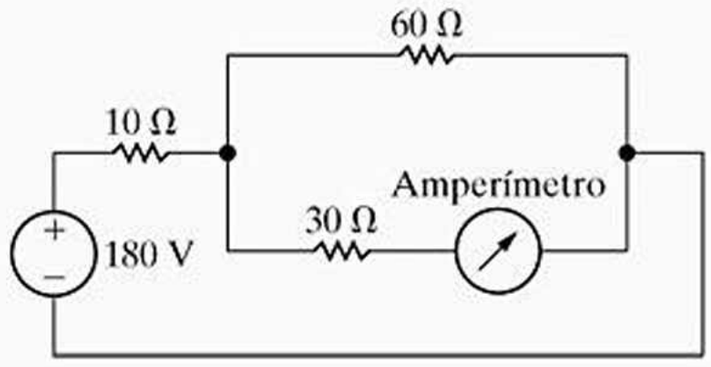
Figura P3.30



3.31 O amperímetro no circuito da Figura P3.31 tem uma resistência de 0,5 Ω. Qual é a porcentagem de erro na leitura desse amperímetro se

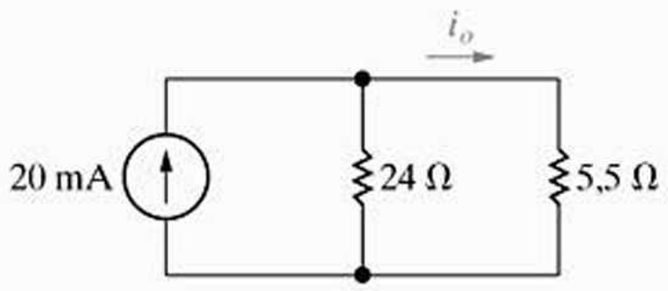
$$\%\ \text{erro} = \left(\frac{\text{valor medido}}{\text{valor verdadeiro}} - 1\right) \times 100?$$

Figura P3.31



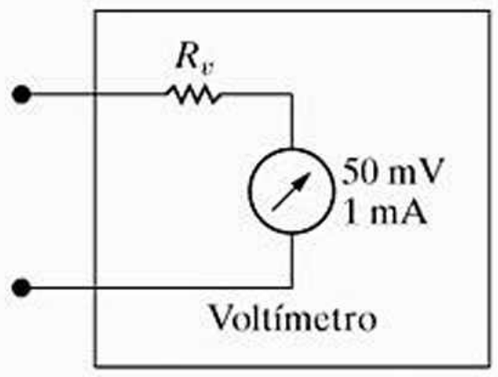
3.32 O amperímetro descrito no Problema 3.31 é usado para medir a corrente i_o no circuito da Figura P3.32. Qual é a porcentagem de erro no valor medido?

Figura P3.32



3.33* Um voltímetro de d'Arsonval é mostrado na Figura P3.33. Determine o valor de R_v para cada uma das seguintes leituras máximas: (a) 100 V, (b) 5 V e (c) 100 mV.

Figura P3.33



3.34 Suponha que o voltímetro de d'Arsonval descrito no Problema 3.33 é usado para medir a tensão no resistor de 24 Ω da Figura P3.32.

a) Qual será a leitura do voltímetro?

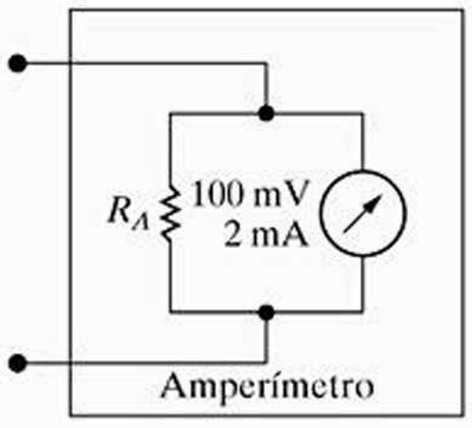
b) Usando a definição de porcentagem de erro de leitura de um medidor, encontrada no Problema 3.31, qual é a porcentagem de erro na leitura do voltímetro?

3.35 Um resistor de derivação e um medidor de d'Arsonval de 50 V, 1 mA são usados para construir um amperímetro de 10 A. Uma resistência de 0,015 Ω é inserida nos terminais de amperímetro. Qual é a nova faixa máxima da escala do amperímetro?

3.36 PROBLEMA DE PROJETO Um medidor de d'Arsonval é calibrado para 1 mA e 50 mV. Suponha que haja resistores de precisão de 0,5 W disponíveis para serem utilizados como derivações. Qual é o maior fundo de escala possível para o amperímetro a ser projetado? Explique.

3.37 PROBLEMA DE PROJETO Um amperímetro de d'Arsonval é mostrado na Figura P3.37. Projete um conjunto de amperímetros de d'Arsonval para ler as seguintes leituras máximas de corrente: (a) 5 A, (b) 2 A, c) 1 A e (d) 50 mA. Especifique o resistor de derivação R_A para cada amperímetro.

Figura P3.37



3.38 PSPICE Os elementos no circuito da Figura 2.24 têm os seguintes valores: $R_1 = 20$ kΩ, $R_2 = 80$ kΩ, $R_C = 0{,}82$ kΩ, $R_E = 0{,}2$ kΩ, $V_{CC} = 7{,}5$ V, $V_o = 0{,}6$ V e $\beta = 39$.

a) Calcule o valor de i_B em microampères.

b) Suponha que um multímetro digital, quando usado como um amperímetro cc, tenha uma resistência de 1 kΩ. Se o medidor for inserido entre os terminais b e 2 para medir a corrente i_B, qual será a leitura do medidor?

c) Usando o valor de i_B calculado em (a) como o valor correto, qual é a porcentagem de erro na medição?

3.39 O circuito divisor de tensão mostrado na Figura P3.39 é projetado de modo que a tensão a vazio de saída seja 7/9 da tensão de entrada. Um voltímetro de d'Arsonval, cuja sensibilidade é 100 Ω/V e cuja calibração para a leitura máxima é 200 V, é usado para verificar o funcionamento do circuito.

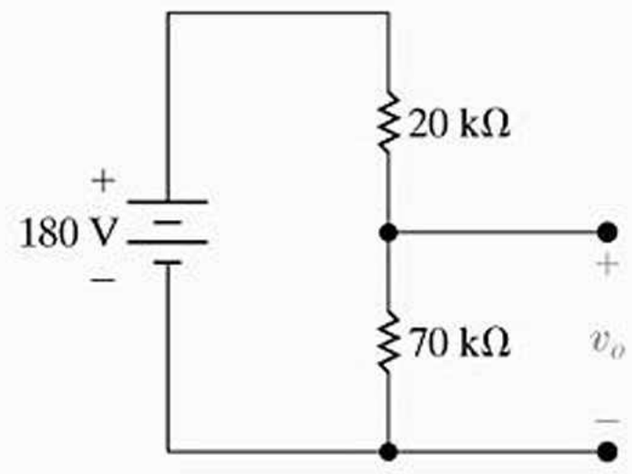
a) Qual será a leitura do voltímetro se ele for inserido no circuito da fonte de 180 V?

b) Qual será a leitura se o voltímetro for inserido no circuito do resistor de 70 kΩ?

c) Qual será a leitura se o voltímetro for inserido no circuito do resistor de 20 kΩ?

d) As leituras obtidas pelo voltímetro nas partes (b) e (c) serão adicionadas à leitura registrada na parte (a)? Explique sua resposta.

Figura P3.39



3.40 Você foi informado de que a tensão cc de uma fonte de alimentação é aproximadamente 500 V. Quando você procura um voltímetro cc na sala de instrumentos para medir a tensão da fonte alimentadora, constata que há somente dois voltímetros cc disponíveis. Ambos têm uma calibração de 400 V e uma sensibilidade de 1.000 Ω/V.

a) Como você pode usar os dois voltímetros para verificar a tensão da fonte alimentadora?

b) Qual é a tensão máxima que pode ser medida?

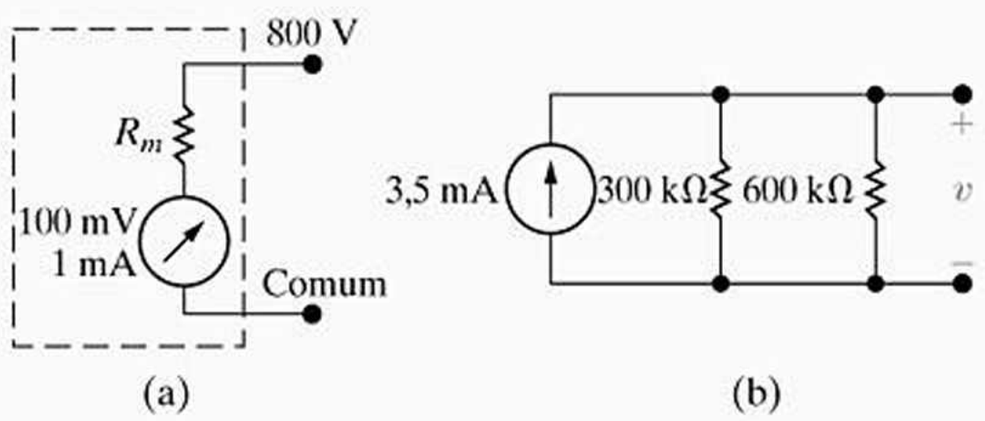
c) Se a tensão da fonte alimentadora for 504 V, qual será a leitura de cada voltímetro?

3.41 Suponha que, além dos dois voltímetros descritos no Problema 3.40, ainda esteja disponível um resistor de precisão de 50 kΩ. Esse resistor está ligado em série com a conexão série dos dois voltímetros. Esse circuito é, então, ligado aos terminais da fonte de ali-

mentação. A leitura nos voltímetros é 328 V. Qual é a tensão da fonte alimentadora?

3.42 A leitura máxima do voltímetro mostrado na Figura P3.42(a) é 800 V. O medidor está calibrado para 100 mV e 1 mA. Qual é a porcentagem de erro na leitura do medidor se ele for usado para medir a tensão v no circuito da Figura P3.42(b)?

Figura P3.42

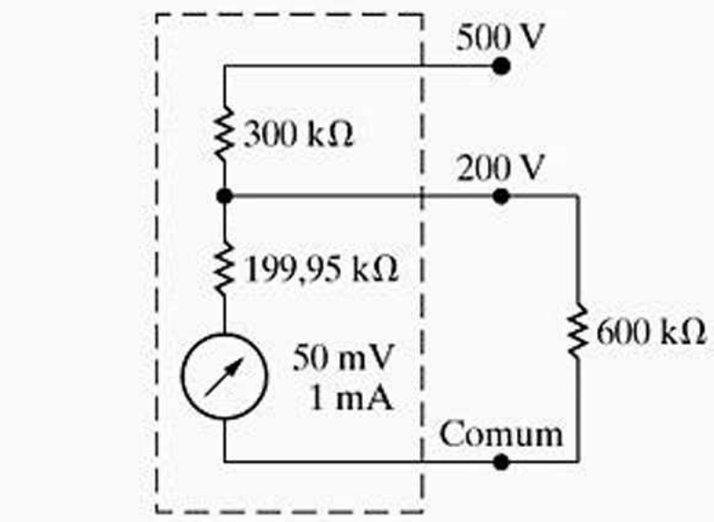


3.43 Um resistor de 600 kΩ está ligado do terminal de 200 V ao terminal comum de um voltímetro de dupla escala, como mostra a Figura P3.43(a). Esse voltímetro modificado é, então, usado para medir a tensão no resistor de 360 kΩ do circuito da Figura P3.43(b).

a) Qual é a leitura na escala de 500 V do medidor?

b) Qual é a porcentagem de erro na tensão medida?

Figura P3.43

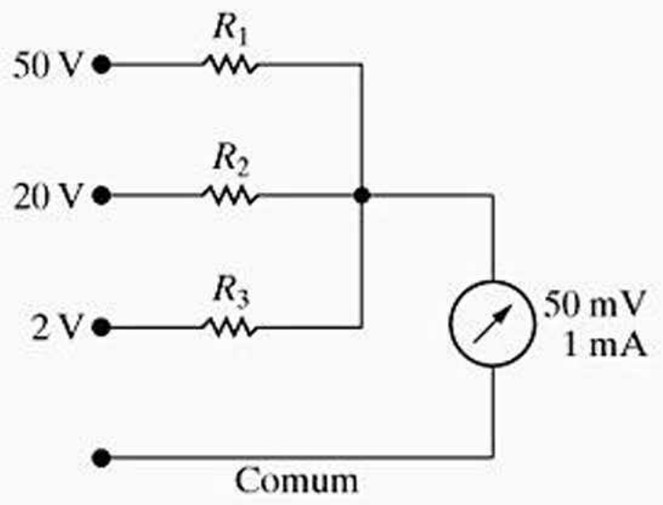


3.44 PROBLEMA DE PROJETO Suponha que, ao projetar o voltímetro de várias faixas, mostrado na Figura P3.44, você ignore a resistência do medidor.

a) Especifique os valores de R_1, R_2 e R_3.

b) Para cada uma das três faixas, calcule a porcentagem de erro que essa estratégia de projeto produz.

Figura P3.44



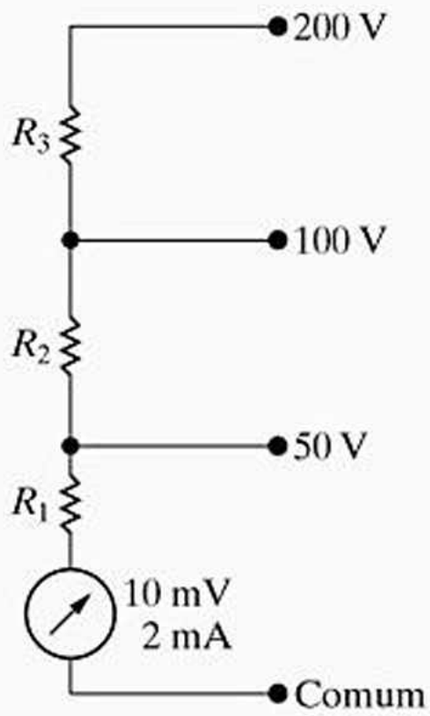
3.45 PROBLEMA DE PROJETO Projete um voltímetro de d'Arsonval que terá as três faixas de tensão mostradas na Figura P3.45.

a) Especifique os valores de R_1, R_2 e R_3.

b) Suponha que um resistor de 500 MΩ esteja ligado entre o terminal de 100 V e o terminal comum. O voltímetro é, então, ligado a uma tensão desconhecida usando o terminal comum de 200 V. O voltímetro lê 188 V. Qual é a tensão desconhecida?

c) Qual é a tensão máxima que o voltímetro em (b) pode medir?

Figura P3.45

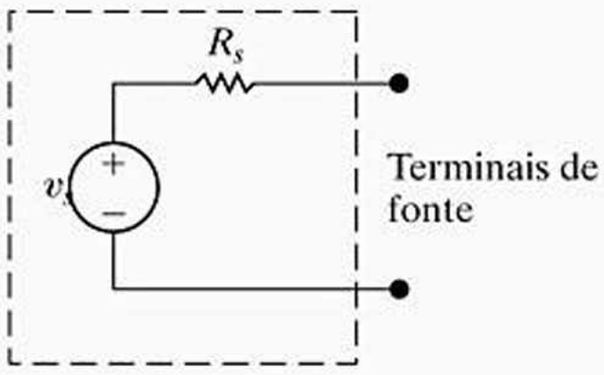


3.46 O modelo de circuito de uma fonte de tensão cc é mostrado na Figura P3.46. As seguintes medições de tensão são feitas nos terminais da fonte: (1) com os terminais da fonte abertos, a tensão medida é de 80 mV e (2) com um resistor de 10 MΩ ligado aos terminais, a tensão medida é 72 mV. Todas as medições são realizadas com um voltímetro digital cuja resistência é 10 MΩ.

a) Qual é a tensão interna da fonte (v_s) em milivolts?

b) Qual é a resistência interna da fonte (R_s) em quilo-ohms?

Figura P3.46



Seções 3.6–3.7

3.47 PSPICE Suponha que a fonte ideal de tensão da Figura 3.26 seja substituída por uma fonte ideal de corrente. Mostre que a Equação 3.33 ainda é válida.

3.48* PSPICE O circuito de ponte mostrado na Figura 3.26 é alimentado por uma fonte de 21 V cc. A ponte fica equilibrada quando $R_1 = 800\ \Omega$, $R_2 = 1.200\ \Omega$ e $R_3 = 600\ \Omega$.

a) Qual é o valor de R_x?

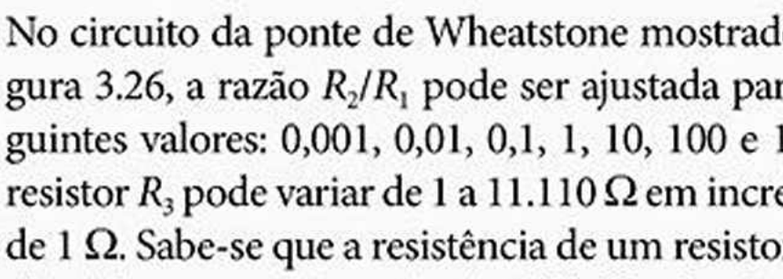
b) Qual é a corrente (em miliampères) fornecida pela fonte cc?

c) Qual resistor absorve a maior potência? De quanto é essa potência?

d) Qual resistor absorve a menor potência? De quanto é essa potência?

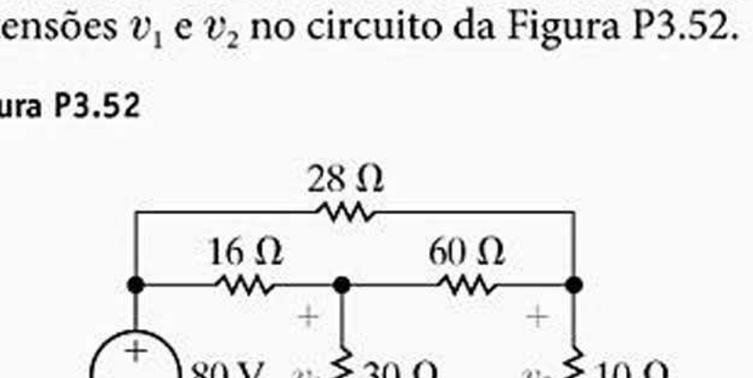
3.49 PSPICE Determine a corrente i_d do detector da ponte desequilibrada da Figura P3.49 se a queda de tensão no detector for desprezível.

Figura P3.49



3.50 PSPICE Determine a potência dissipada no resistor de 18 Ω do circuito da Figura P3.50.

Figura P3.50



3.51 PSPICE No circuito da ponte de Wheatstone mostrado na Figura 3.26, a razão R_2/R_1 pode ser ajustada para os seguintes valores: 0,001, 0,01, 0,1, 1, 10, 100 e 1.000. O resistor R_3 pode variar de 1 a 11.110 Ω em incrementos de 1 Ω. Sabe-se que a resistência de um resistor desconhecido se encontra entre 4 e 5 Ω. Qual seria o ajuste da razão R_2/R_1 para que o resistor desconhecido possa ser medido com até quatro algarismos significativos?

3.52* PSPICE Use uma transformação Δ-Y para determinar as tensões v_1 e v_2 no circuito da Figura P3.52.

Figura P3.52

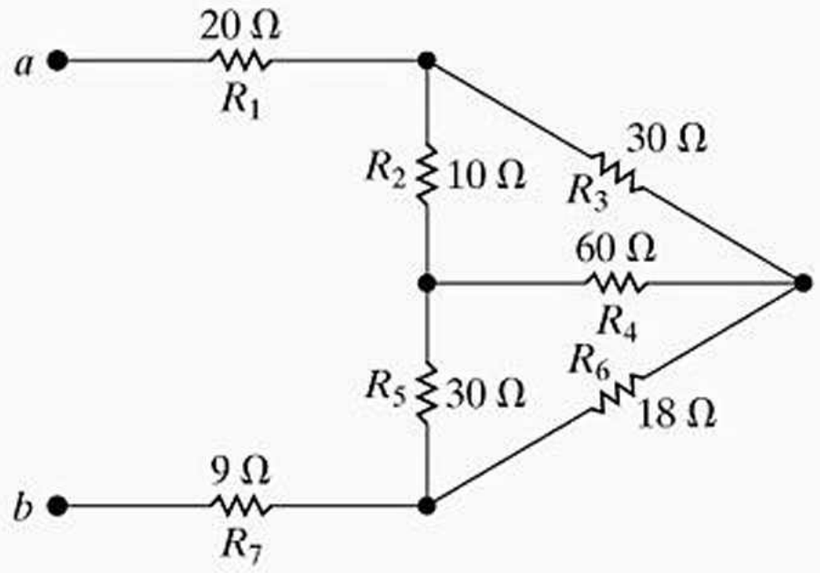
3.53* PSPICE

a) Determine a resistência equivalente R_{ab} no circuito da Figura P3.53 usando uma transformação Δ-Y envolvendo os resistores R_2, R_3 e R_4.

b) Repita (a) usando uma transformação Y-Δ envolvendo os resistores R_2, R_4 e R_5.

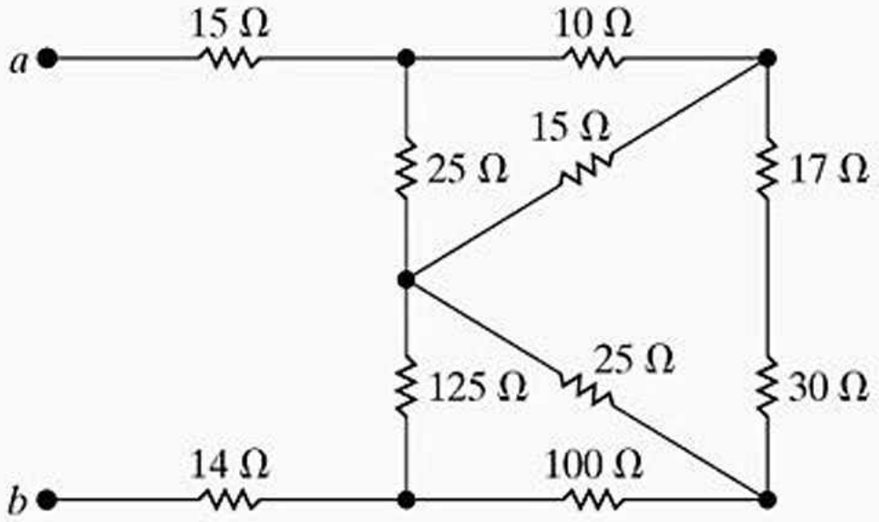
c) Indique duas transformações adicionais Δ-Y ou Y-Δ que poderiam ser usadas para determinar R_{ab}.

Figura P3.53



3.54* PSPICE Determine a resistência equivalente R_{ab} no circuito da Figura P3.54.

Figura P3.54

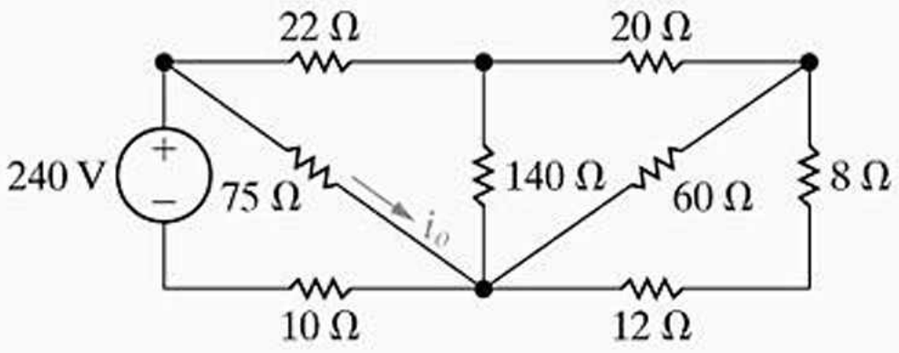


3.55 PSPICE No circuito da Figura P3.55(a), o dispositivo rotulado D representa um componente cujo circuito equivalente é mostrado na Figura P3.55(b). Os rótulos nos terminais de D mostram como o dispositivo está ligado ao circuito. Determine v_x e a potência absorvida pelo dispositivo.

Figura P3.55

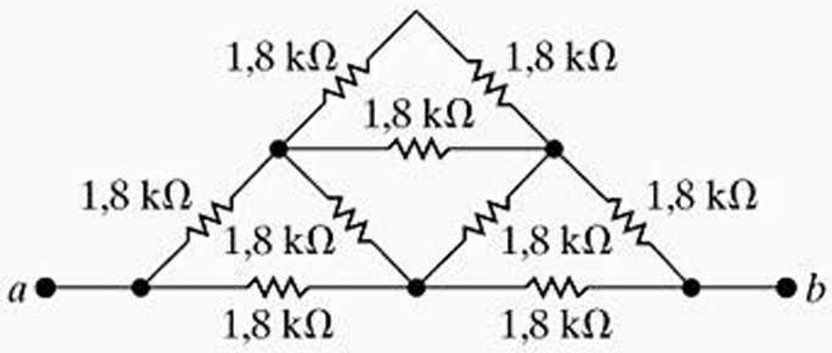
3.56 PSPICE Determine i_o e a potência dissipada no resistor de 140 Ω do circuito da Figura P3.56.

Figura P3.56



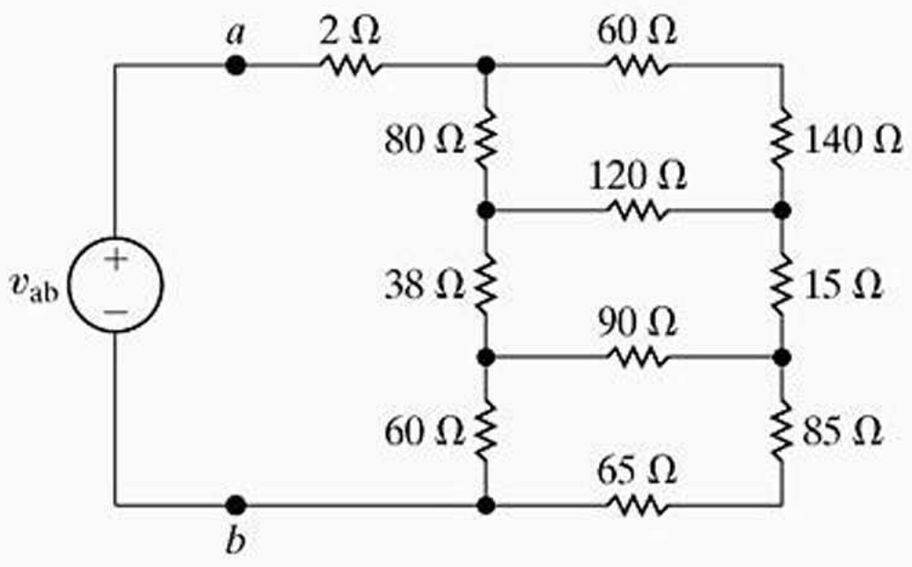
3.57 PSPICE Determine R_{ab} no circuito da Figura P3.57.

Figura P3.57



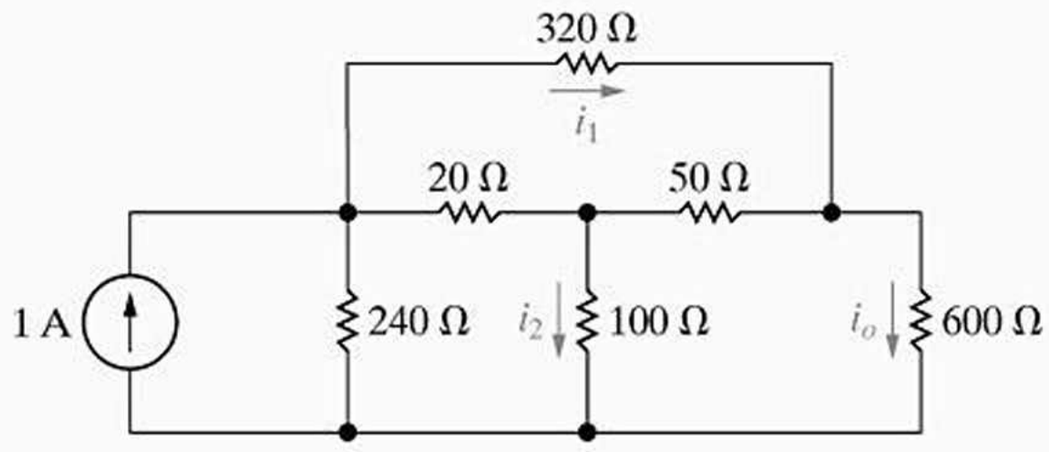
3.58 PSPICE
a) Determine a resistência vista pela fonte ideal de tensão no circuito da Figura P3.58.
b) Se v_{ab} for igual a 600 V, qual será a potência dissipada no resistor de 15 Ω?

Figura P3.58



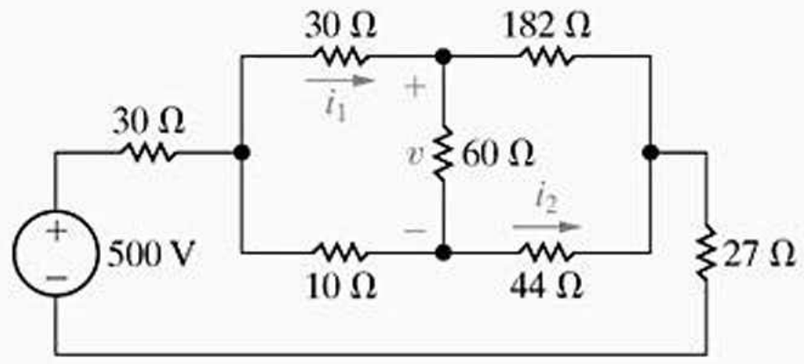
3.59 PSPICE Use uma transformação Y-Δ para determinar (a) i_o; (b) i_1; (c) i_2 e (d) a potência fornecida pela fonte ideal de corrente do circuito da Figura P3.59.

Figura P3.59



3.60 PSPICE Para o circuito mostrado na Figura P3.60, determine (a) i_1, (b) v, (c) i_2 e (d) a potência fornecida por uma fonte de tensão.

Figura P3.60



3.61 Deduza as equações 3.44–3.49 a partir das equações 3.41–3.43. As duas sugestões a seguir o ajudarão a tomar a direção correta:

a) Para determinar R_1 em função de R_a, R_b e R_c, em primeiro lugar, subtraia a Equação 3.42 da Equação 3.43 e então adicione o resultado à Equação 3.39. Use manipulações semelhantes para determinar R_2 e R_3 como funções de R_a, R_b e R_c.

b) Para determinar R_b em função de R_1, R_2 e R_3, aproveite as deduções do item (a), ou seja, equações 3.44–3.46. Observe que essas equações podem ser divididas para obter

$$\frac{R_2}{R_3} = \frac{R_c}{R_b}, \quad \text{ou} \quad R_c = \frac{R_2}{R_3}R_b,$$

e

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_b}{R_a}, \quad \text{ou} \quad R_a = \frac{R_2}{R_1}R_b.$$

Agora, use essas relações na Equação 3.43 para eliminar R_a e R_c. Utilize manipulações semelhantes para determinar R_a e R_c como funções de R_1, R_2 e R_3.

3.62 Mostre que as expressões para condutâncias em Δ em função das três condutâncias em Y são

$$G_a = \frac{G_2G_3}{G_1 + G_2 + G_3},$$

$$G_b = \frac{G_1G_3}{G_1 + G_2 + G_3},$$

$$G_c = \frac{G_1G_2}{G_1 + G_2 + G_3},$$

onde

$$G_a = \frac{1}{R_a}, \quad G_1 = \frac{1}{R_1} \quad \text{etc.}$$

Seções 3.1–3.7

3.63 PROBLEMA DE PROJETO Redes de resistores são, às vezes, utilizadas como circuitos de controle de volume. Nessa aplicação, elas são denominadas *atenuadores resistivos* ou *atenuadores fixos*. Um atenuador fixo típico é mostrado na Figura P3.63. Para projetar um atenuador fixo, o projetista do circuito selecionará os valores de R_1 e R_2, de modo que a razão v_o/v_i e a resistência vista pela fonte de alimentação R_{ab} tenham ambas um valor especificado.

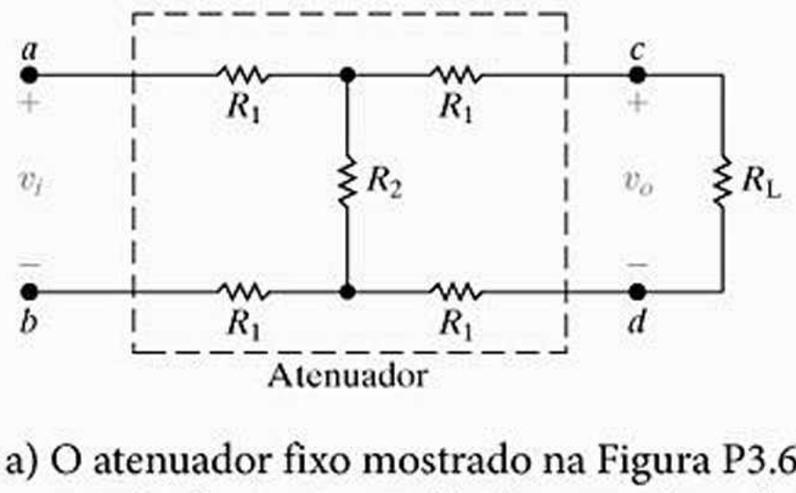
a) Mostre que, se $R_{ab} = R_L$, então

$$R_L^2 = 4R_1(R_1 + R_2),$$

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{R_2}{2R_1 + R_2 + R_L}.$$

b) Selecione os valores de R_1 e R_2, de modo que $R_{ab} = R_L = 600\ \Omega$ e $v_o/v_i = 0{,}6$.

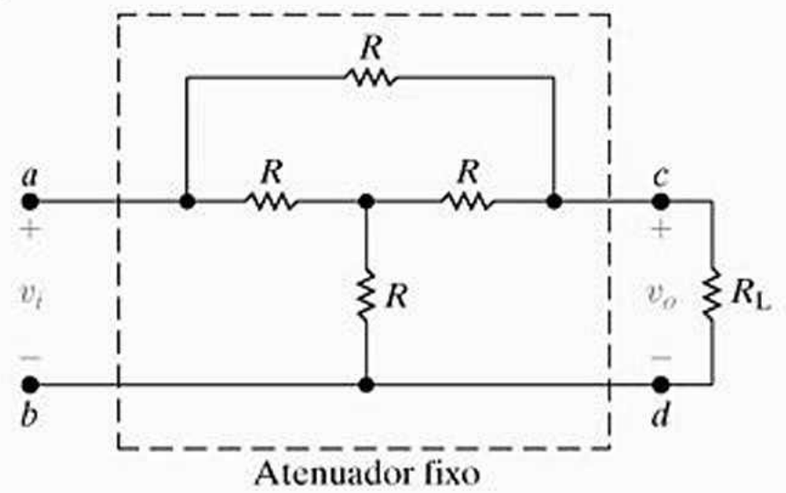
Figura P3.63



3.64 PROBLEMA DE PROJETO a) O atenuador fixo mostrado na Figura P3.64 é denominado *ponte em T.* Use uma transformação Y-Δ para mostrar que $R_{ab} = R_L$ se $R = R_L$.

b) Mostre que, quando $R = R_L$, a razão v_o/v_i é igual a 0,50.

Figura P3.64



3.65 PROBLEMA DE PROJETO As equações de projeto para o atenuador de ponte em T no circuito da Figura P3.65 são

$$R_2 = \frac{2RR_L^2}{3R^2 - R_L^2},$$

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{3R - R_L}{3R + R_L},$$

quando R_2 tem o valor dado.

a) Projete um atenuador fixo, de modo que $v_i = 3v_o$ quando $R_L = 600\ \Omega$.

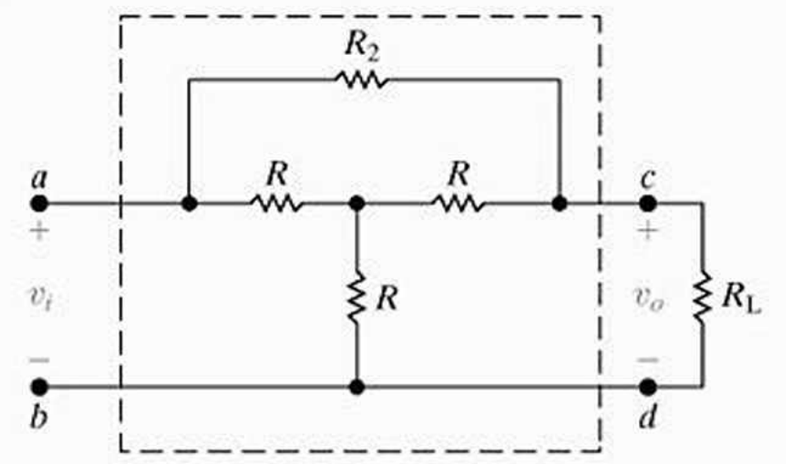
b) Suponha que a tensão aplicada à entrada do atenuador projetado em (a) seja 180 V. Qual resistor do atenuador dissipa maior potência?

c) Qual é a potência dissipada no resistor da parte (b)?

d) Qual resistor do atenuador dissipa a menor potência?

e) Qual é a potência dissipada no resistor da parte (d)?

Figura P3.65



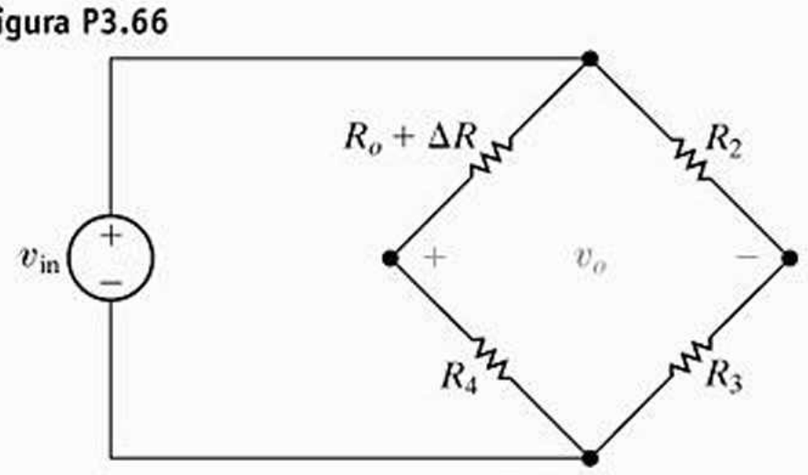
3.66 a) Para o circuito mostrado na Figura P3.66, a ponte está equilibrada quando $\Delta R = 0$. Mostre que, se $\Delta R << R_o$, a tensão de saída da ponte é aproximadamente

$$v_o \approx \frac{-\Delta R R_4}{(R_o + R_4)^2} v_{\text{in}}$$

b) Dados $R_2 = 1\ \text{k}\Omega$, $R_3 = 500\ \Omega$, $R_4 = 5\ \text{k}\Omega$ e $v_{\text{in}} = 6$ V, qual é a tensão aproximada de saída da ponte se ΔR é 3% de R_o?

c) Determine o valor real de v_o na parte (b).

Figura P3.66



3.67 a) Se o erro percentual for definido como

$$\%\ \text{erro} = \left[\frac{\text{valor aproximado}}{\text{valor real}} - 1\right] \times 100$$

mostre que o erro percentual na aproximação de v_o no Problema 3.66 é

$$\%\ \text{erro} = \frac{(\Delta R)R_3}{(R_2 + R_3)R_4} \times 100.$$

b) Calcule o erro percentual de v_o, usando os valores do Problema 3.66(b).

3.68 PROBLEMA DE PROJETO Suponha que o erro de v_o no circuito da ponte da Figura P3.66 não excede 0,5%. Qual é a maior alteração percentual em R_o que pode ser tolerada?

3.69 PERSPECTIVA PRÁTICA a) Deduza a Equação 3.65.

b) Deduza a Equação 3.68.

3.70 PERSPECTIVA PRÁTICA Deduza a Equação 3.70.

3.71* Suponha que a estrutura da rede da Figura 3.36 tenha 1 m de largura e que o espaço vertical entre as quatro linhas horizontais da rede seja de 0,025 m. Especifique os valores numéricos de $R_1 - R_5$ e $R_a - R_d$ para se conseguir uma dissipação uniforme de potência de 120 W/m, usando uma fonte de alimentação de 12 V. (*Sugestão:* primeiro, calcule σ e, então, R_3, R_1, R_a, R_b e R_2, nessa ordem.)

3.72 PERSPECTIVA PRÁTICA PSPICE Comprove a solução do Problema 3.71, mostrando que a potência total dissipada é igual à potência fornecida pela fonte de 12 V.

3.73* PERSPECTIVA PRÁTICA PROBLEMA DE PROJETO PSPICE a) Projete uma rede de desembaçador da Figura 3.36, com cinco condutores horizontais para atender às seguintes especificações: a rede deve ter 1,25 m de largura, o espaço vertical entre condutores deve ser de 0,05 m e a dissipação de potência deve ser de 150 W/m quando a fonte de tensão for de 12 V.

b) Verifique sua solução e certifique-se de que ela atende às especificações de projeto.

CAPÍTULO

4 Técnicas de análise de circuitos

SUMÁRIO DO CAPÍTULO

4.1 **Terminologia**
4.2 **Introdução ao método das tensões de nó**
4.3 **O método das tensões de nó e as fontes dependentes**
4.4 **O método das tensões de nó: alguns casos especiais**
4.5 **Introdução ao método das correntes de malha**
4.6 **O método das correntes de malha e as fontes dependentes**
4.7 **O método das correntes de malha: alguns casos especiais**
4.8 **Método das tensões de nó *versus* método das correntes de malha**
4.9 **Transformações de fonte**
4.10 **Equivalentes de Thévenin e Norton**
4.11 **Outros métodos para a obtenção de um equivalente de Thévenin**
4.12 **Máxima transferência de potência**
4.13 **Superposição**

✔ OBJETIVOS DO CAPÍTULO

1. Entender e saber utilizar o método das tensões de nó para resolver um circuito.
2. Entender e saber utilizar o método das correntes de malha para resolver um circuito.
3. Saber decidir se o método das tensões de nó ou o método das correntes de malha é a abordagem preferencial para resolver determinado circuito.
4. Entender a transformação de fonte e saber usá-la para resolver um circuito.
5. Entender os conceitos de circuito equivalente de Thévenin e de Norton e saber construir um equivalente de Thévenin ou de Norton para um circuito.
6. Conhecer a condição de máxima transferência de potência a uma carga resistiva e saber calcular o valor do resistor de carga que satisfaça essa condição.

Até aqui, analisamos circuitos resistivos relativamente simples, aplicando as leis de Kirchhoff combinadas com a lei de Ohm. Podemos usar essa abordagem para todos os circuitos, mas, à medida que suas estruturas se tornam mais complicadas e envolvem mais e mais elementos, esse método fica incômodo. Neste capítulo, apresentamos duas poderosas técnicas de análise de circuitos que auxiliam no exame de estruturas de circuito complexas: o método das tensões de nó e o método das correntes de malha. Essas técnicas nos dão dois métodos sistemáticos para descrever circuitos com o número mínimo de equações simultâneas.

Além desses dois métodos analíticos gerais, neste capítulo também discutimos outras técnicas para simplificar circuitos. Já demonstramos como usar reduções série-paralelo e transformações Δ-Y para simplificar a estrutura de um circuito. Agora, adicionamos transformações de fontes e circuitos equivalentes de Thévenin e Norton a essas técnicas.

Também consideramos dois outros tópicos importantes na análise de circuitos. Um, a máxima transferência de potência, considera as condições necessárias para assegurar que seja máxima a potência fornecida, por uma fonte, a uma carga resistiva. Circuitos equivalentes de Thévenin são usados para estabelecer as condições de máxima transferência de potência. O tópico final deste capítulo, superposição, examina a análise de circuitos com mais de uma fonte independente.

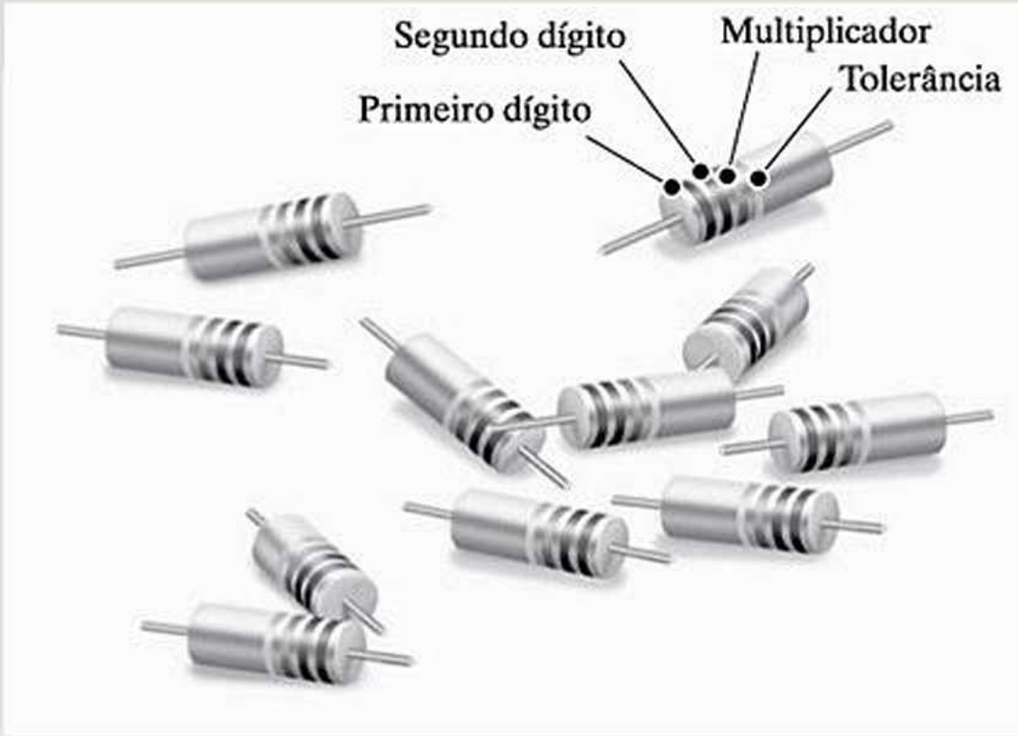
Perspectiva prática

Circuitos com resistores reais

No capítulo anterior começamos a explorar o efeito da imprecisão dos valores de resistores sobre o desempenho de um circuito; especificamente sobre o desempenho de um divisor de tensão. Resistores são fabricados somente para uma pequena quantidade de valores discretos, e qualquer resistor de um lote apresentará variação em relação a seu valor nominal, dentro de uma certa tolerância. Resistores com tolerâncias menores, digamos 1%, são mais caros do que os resistores com tolerâncias maiores, digamos 10%. Portanto, em um circuito que usa muitos resistores, seria importante entender qual é o valor de resistor que causa o maior impacto sobre o desempenho esperado do circuito. Em outras palavras, gostaríamos de prever o efeito da variação do valor de cada resistor sobre a saída do circuito. Se soubermos que um determinado resistor deve ter um valor muito próximo de seu valor nominal para o circuito

funcionar corretamente, então podemos decidir gastar uma quantia a mais necessária para obter uma maior precisão para o valor desse resistor.

O estudo do efeito do valor de um componente de circuito sobre a saída do circuito é conhecido como *análise de sensibilidade*. Assim que forem apresentadas as técnicas adicionais de análise de circuitos, o tópico da análise de sensibilidade será examinado.



4.1 Terminologia

Para discutir métodos mais complexos de análise de circuitos, temos de definir alguns termos básicos. Até aqui, todos os circuitos apresentados eram *circuitos planares* — isto é, circuitos que podem ser desenhados sobre um plano sem cruzamento de ramos. Um circuito desenhado com ramos que se cruzam ainda é considerado planar se puder ser redesenhado sem ramos entrecruzados. Por exemplo, o circuito mostrado na Figura 4.1(a) pode ser redesenhado como o da Figura 4.1(b); os circuitos são equivalentes porque todas as ligações de nós foram mantidas. Portanto, a Figura 4.1(a) é um circuito planar porque pode ser desenhada como tal. A Figura 4.2 mostra um circuito não planar — ele não pode ser redesenhado de modo que todas as ligações de nós sejam mantidas e nenhum ramo se sobreponha a outro. O método das tensões de nó é aplicável a circuitos planares e não planares, ao passo que o método das correntes de malha está limitado a circuitos planares.

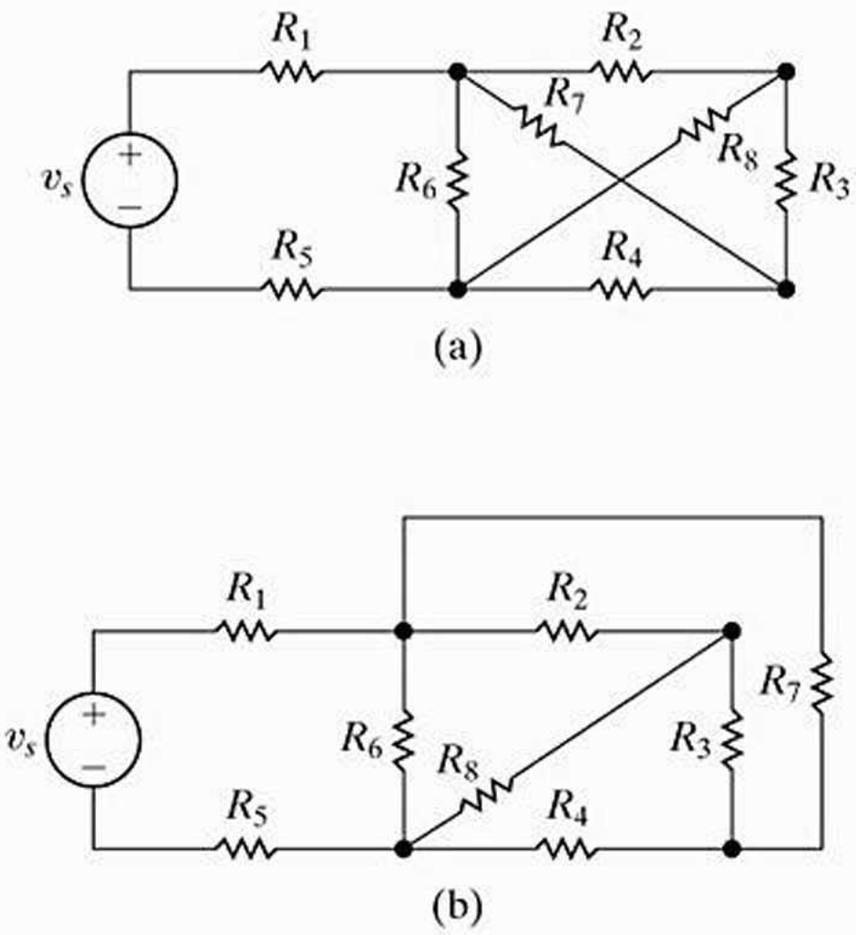


Figura 4.1 ▲ (a) Circuito planar. (b) O mesmo circuito redesenhado para verificar se é planar.

Descrição de um circuito — o vocabulário

Na Seção 1.5 definimos um elemento básico ideal de circuito. Quando elementos básicos de circuito são interligados para formar um circuito, a interligação resultante é descrita em termos de nós, caminhos, ramos, laços e malhas. Definimos nó e caminho fechado, ou laço, na Seção 2.4. Aqui, confirmamos essas definições e, então, definimos os termos *caminho*, *ramo* e *malha*. Para sua conveniência, todas essas definições são apresentadas na Tabela 4.1, que também inclui exemplos de cada definição, retirados do circuito da Figura 4.3 e que são desenvolvidos no Exemplo 4.1.

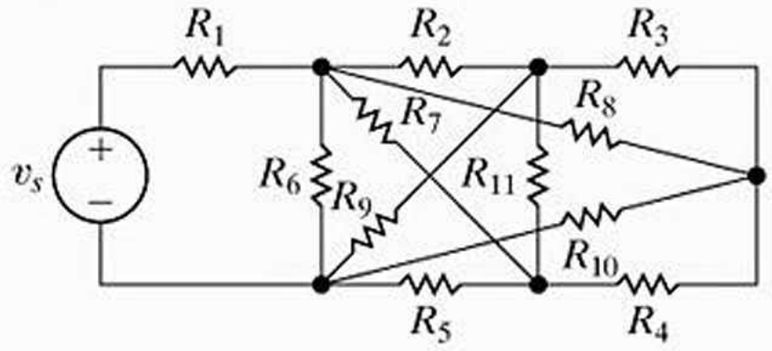


Figura 4.2 ◀ Circuito não planar.

TABELA 4.1 Termos para descrever circuitos

Nome	Definição	Exemplo da Figura 4.3
nó	Um ponto no qual dois ou mais elementos de circuito se juntam	*a*
nó essencial	Um nó no qual três ou mais elementos de circuito se juntam	*b*
caminho	Um traço que liga elementos básicos sem passar mais de uma vez pelos elementos incluídos	$v_1 - R_1 - R_5 - R_6$
ramo	Um caminho que liga dois nós	R_1
ramo essencial	Um caminho que liga dois nós essenciais sem passar por um nó essencial	$v_1 - R_1$
laço	Um caminho cujos nós inicial e final coincidem	$v_1 - R_1 - R_5 - R_6 - R_4 - v_2$
malha	Um laço que não engloba nenhum outro laço	$v_1 - R_1 - R_5 - R_3 - R_2$
circuito planar	Um circuito que pode ser desenhado sobre um plano sem nenhuma interseção de ramos	A Figura 4.3 mostra um circuito planar. A Figura 4.2 mostra um circuito não planar.

Exemplo 4.1 Identificação de nó, ramo, malha e laço

No circuito da Figura 4.3, identifique

a) todos os nós.
b) todos os nós essenciais.
c) todos os ramos.
d) todos os ramos essenciais.
e) todas as malhas.
f) dois caminhos que não são laços nem ramos essenciais.
g) dois laços que não são malhas.

Solução

a) Os nós são a, b, c, d, e, f e g.
b) Os nós essenciais são b, c, e e g.
c) Os ramos são v_1, v_2, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7 e I.
d) Os ramos essenciais são $v_1 - R_1$, $R_2 - R_3$, $v_2 - R_4$, R_5, R_6, R_7 e I.
e) As malhas são $v_1 - R_1 - R_5 - R_3 - R_2$, $v_2 - R_2 - R_3 - R_6 - R_4$, $R_5 - R_7 - R_6$ e $R_7 - I$.
f) $R_1 - R_5 - R_6$ é um caminho, mas não é um laço (porque o nó inicial e o nó final não são os mesmos) nem um ramo essencial (porque não liga dois nós essenciais). $v_2 - R_2$ também é um caminho, mas não é um laço nem um ramo essencial, pelas mesmas razões.
g) $v_1 - R_1 - R_5 - R_6 - R_4 - v_2$ é um laço, mas não é uma malha, porque há dois laços em seu interior. $I - R_5 - R_6$ também é um laço, mas não é uma malha.

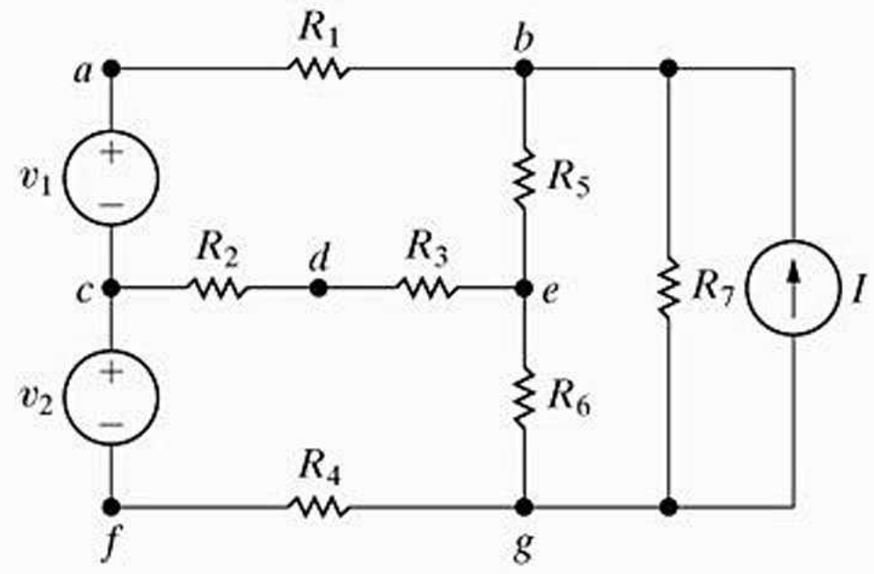


Figura 4.3 ▲ Circuito que ilustra nós, ramos, malhas, caminhos e laços.

NOTA: Avalie o que entendeu desse material tentando resolver os problemas 4.2 e 4.3, apresentados no final deste capítulo.

Equações simultâneas — quantas?

O número de correntes desconhecidas em um circuito é igual ao número de ramos, b, nos quais a corrente não é conhecida. Por exemplo, o circuito mostrado na Figura 4.3 tem nove ramos nos quais a corrente é desconhecida. Lembre-se de que devemos ter b equações independentes para resolver um circuito com b correntes desconhecidas. Se usarmos n para representar o número de nós no circuito, podemos derivar $n - 1$ equações independentes aplicando a lei das correntes de Kirchhoff a qualquer conjunto de $n - 1$ nós. (A aplicação da lei das correntes ao *n-ésimo* nó não gera uma equação independente porque essa equação pode ser derivada das $n - 1$ equações anteriores. Veja o Problema 4.5.) Como precisamos de b equações para descrever um determinado circuito e como podemos obter $n - 1$ dessas equações pela lei das correntes de Kirchhoff, devemos aplicar a lei das tensões de Kirchhoff aos laços ou malhas para obter as $b - (n - 1)$ equações restantes.

Assim, contando nós, malhas e ramos nos quais a corrente é desconhecida, estabelecemos um método sistemático para escrever o número necessário de equações para resolver um circuito. Especificamente, aplicamos a lei das correntes de Kirchhoff a $n - 1$ nós e a lei das tensões de Kirchhoff a $b - (n - 1)$ laços (ou malhas). Essas observações também são válidas para nós essenciais e ramos essenciais. Assim, se usarmos n_e para representar o número de nós essenciais e b_e para o número de ramos essenciais nos quais a corrente é desconhecida, podemos aplicar a lei das correntes de Kirchhoff a $n_e - 1$ nós e a lei das tensões de Kirchhoff ao longo de $b_e - (n_e - 1)$ laços ou malhas. Em circuitos, o número de nós essenciais é menor ou igual ao número de nós, e o número de ramos essenciais é menor ou igual ao número de ramos. Por isso, muitas vezes é conveniente usar nós essenciais e ramos essenciais ao analisar um circuito, porque eles produzem um número menor de equações independentes.

Um circuito pode consistir de partes desconectadas. Um exemplo de tal circuito é examinado no Problema 4.3. As afirmações referentes ao número de equações que podem ser derivadas da lei das correntes de Kirchhoff, $n - 1$, e da lei das tensões de Kirchhoff, $b - (n - 1)$, aplicam-se a circuitos conectados. Se um circuito tiver n nós e b ramos e for composto de s partes, a lei das correntes pode ser aplicada $n - s$ vezes, e a lei das tensões, $b - n + s$ vezes. Quaisquer duas partes separadas podem ser conectadas por um único condutor. Essa conexão sempre resulta na formação de um nó a partir de dois nós. Além do mais, não existe nenhuma corrente nesse condutor único. Assim, qualquer circuito composto de s partes desconectadas sempre pode ser reduzido a um circuito conectado.

A abordagem sistemática — uma ilustração

Agora, ilustramos essa abordagem sistemática usando o circuito mostrado na Figura 4.4. Escrevemos as equações com base nos nós e ramos essenciais. O circuito tem quatro nós essenciais e seis ramos essenciais, denotados $i_1 - i_6$, nos quais a corrente é desconhecida.

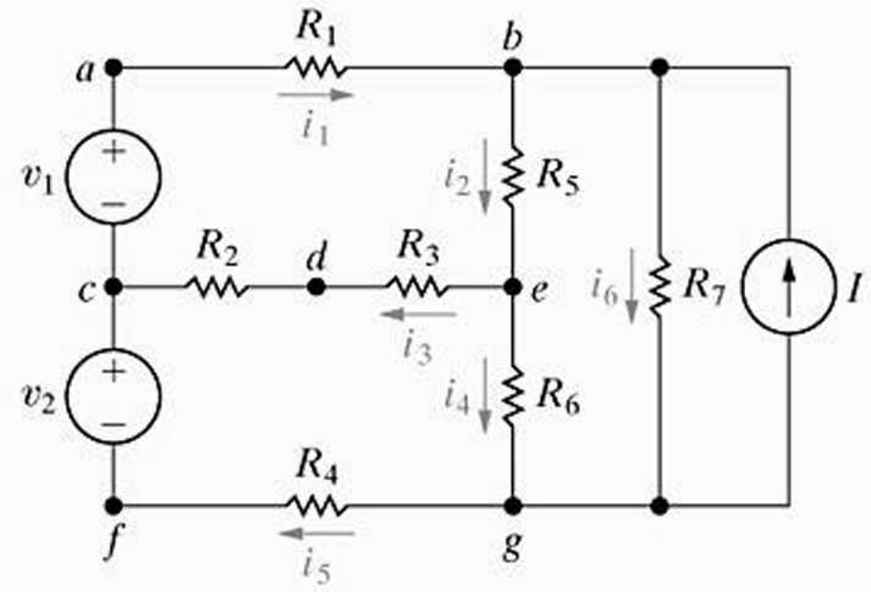


Figura 4.4 ▲ Circuito mostrado na Figura 4.3 com seis correntes de ramos desconhecidas.

Derivamos três das seis equações simultâneas necessárias aplicando a lei das correntes de Kirchhoff a quaisquer três dos quatro nós essenciais. Usamos os nós *b*, *c* e *e* para obter

$$-i_1 + i_2 + i_6 - I = 0,$$

$$i_1 - i_3 - i_5 = 0,$$

$$i_3 + i_4 - i_2 = 0. \tag{4.1}$$

Deduzimos as três equações restantes aplicando a lei das tensões de Kirchhoff ao longo de três malhas. Como o circuito tem quatro malhas, precisamos desprezar uma delas. Escolhemos $R_7 - I$, porque não conhecemos a tensão em I.[1]

Usando as outras três malhas, obtemos

$$R_1 i_1 + R_5 i_2 + i_3(R_2 + R_3) - v_1 = 0,$$

$$-i_3(R_2 + R_3) + i_4 R_6 + i_5 R_4 - v_2 = 0,$$

$$-i_2 R_5 + i_6 R_7 - i_4 R_6 = 0. \tag{4.2}$$

Rearranjando as equações 4.1 e 4.2 para facilitar suas soluções, obtemos o conjunto

$$-i_1 + i_2 + 0i_3 + 0i_4 + 0i_5 + i_6 = I,$$

$$i_1 + 0i_2 - i_3 + 0i_4 - i_5 + 0i_6 = 0,$$

$$0i_1 - i_2 + i_3 + i_4 + 0i_5 + 0i_6 = 0,$$

$$R_1 i_1 + R_5 i_2 + (R_2 + R_3) i_3 + 0i_4 + 0i_5 + 0i_6 = v_1,$$

$$0i_1 + 0i_2 - (R_2 + R_3) i_3 + R_6 i_4 + R_4 i_5 + 0i_6 = v_2,$$

$$0i_1 - R_5 i_2 + 0i_3 - R_6 i_4 + 0i_5 + R_7 i_6 = 0. \tag{4.3}$$

Observe que somando a corrente no *n-ésimo* nó (*g* neste exemplo) temos

$$i_5 - i_4 - i_6 + I = 0. \tag{4.4}$$

A Equação 4.4 não é independente porque podemos deduzi-la somando as Equações 4.1 e, então, multiplicando a soma por −1. Assim, a Equação 4.4 é uma combinação linear das Equações 4.1 e, portanto, não é independente delas. Agora, podemos avançar mais um passo no procedimento. Introduzindo novas variáveis, podemos descrever um circuito com apenas $n - 1$ equações ou apenas $b - (n - 1)$ equações. Portanto, essas novas variáveis nos permitem obter uma solução com a manipulação de um número menor de equações, uma meta desejável mesmo que um computador seja usado para obter uma solução numérica.

As novas variáveis são conhecidas como tensões de nó e correntes de malha. O método das tensões de nó nos habilita a descrever um circuito em termos de $n_e - 1$ equações; o método das correntes de malha nos habilita a descrever um circuito em termos de $b_e - (n_e - 1)$ equações. Começamos na Seção 4.2 com o método das tensões de nó.

NOTA: Avalie o que entendeu desse material tentando resolver os problemas 4.1 e 4.4, apresentados no final deste capítulo.

4.2 Introdução ao método das tensões de nó

Apresentamos o método das tensões de nó usando os nós essenciais do circuito. A primeira etapa é desenhar um diagrama do circuito, de modo a não haver interseção de ramos e a marcar claramente, nesse diagrama, os nós essenciais do circuito, como na Figura 4.5. Tal circuito tem três nós essenciais ($n_e = 3$); portanto, precisamos de duas ($n_e - 1$) equações de tensões de nó para descrever o circuito. A etapa seguinte é selecionar um dos três nós essenciais como nó de referência. Embora, em teoria, a escolha seja arbitrária, na prática a escolha do nó de referência freqüentemente é óbvia. Por exemplo, o nó com o maior número de ramos normalmente é uma boa escolha. A escolha ótima do nó de referência (se existir algum) ficará evidente depois que você adquirir alguma experiência na utilização desse método. No circuito mostrado na Figura 4.5, o nó inferior conecta a maioria dos ramos, portanto o selecionamos como nó de referência. Sinalizamos o nó de referência escolhido com o símbolo ▼, como na Figura 4.6.

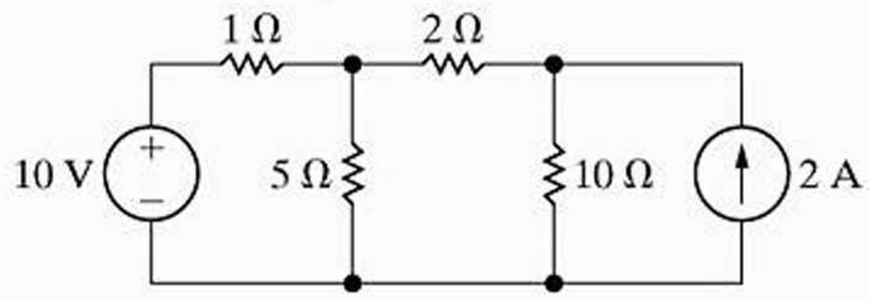


Figura 4.5 ▲ Circuito usado para ilustrar o método das tensões de nó para a análise de circuitos.

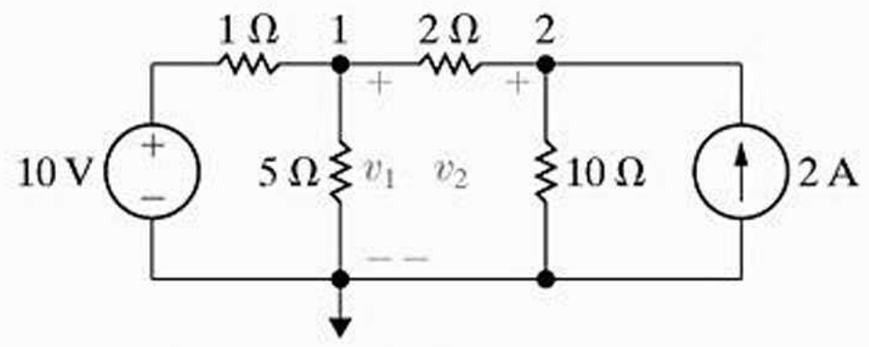


Figura 4.6 ▲ Circuito mostrado na Figura 4.5 com um nó de referência e as tensões de nó.

[1]Falaremos mais sobre essa decisão na Seção 4.7.

Após selecionarmos o nó de referência, definimos as tensões de nó no diagrama do circuito. A *tensão de nó* é definida como a elevação de tensão entre o nó de referência e outro nó, que não é de referência. Para esse circuito, devemos definir duas tensões de nó, que são denotadas v_1 e v_2 na Figura 4.6.

Agora estamos prontos para gerar as equações de tensão de nó. Fazemos isso expressando, em primeiro lugar, a corrente que sai de cada ramo conectado a um nó que não é o de referência como uma função das tensões de nó e, então, igualando a soma dessas correntes a zero, de acordo com a lei das correntes de Kirchhoff. Para o circuito da Figura 4.6, a corrente que sai do nó 1 e passa pelo resistor de 1 Ω é a queda de tensão no resistor dividida pela resistência (lei de Ohm). A queda de tensão no resistor, na direção da corrente que sai do nó, é $v_1 - 10$. Portanto, a corrente no resistor de 1 Ω é $(v_1 - 10)/1$. A Figura 4.7 esclarece essas observações. Ela mostra o ramo 10 V–1 Ω, com as tensões e correntes adequadas.

Esse mesmo raciocínio possibilita o cálculo da corrente em todo ramo em que ela é desconhecida. Assim, a corrente que sai do nó 1 e passa pelo resistor de 5 Ω é $v_1/5$, e a corrente que sai do nó 1 e passa pelo resistor de 2 Ω é $(v_1 - v_2)/2$. A soma das três correntes que saem do nó 1 deve ser igual a zero; portanto, a equação de tensão de nó deduzida para o nó 1 é

$$\frac{v_1 - 10}{1} + \frac{v_1}{5} + \frac{v_1 - v_2}{2} = 0. \tag{4.5}$$

A equação de tensão de nó deduzida para o nó 2 é

$$\frac{v_2 - v_1}{2} + \frac{v_2}{10} - 2 = 0. \tag{4.6}$$

Observe que o primeiro termo da Equação 4.6 é a corrente que sai do nó 2 passando pelo resistor de 2 Ω, o segundo termo é a corrente que sai do nó 2 passando pelo resistor de 10 Ω e o terceiro termo é a corrente que sai do nó 2 passando pela fonte de corrente.

As equações 4.5 e 4.6 são as duas equações simultâneas que descrevem o circuito mostrado na Figura 4.6 em termos das tensões de nó v_1 e v_2. Resolvendo para v_1 e v_2, temos

$$v_1 = \frac{100}{11} = 9{,}09 \text{ V}$$

$$v_2 = \frac{120}{11} = 10{,}91 \text{ V}.$$

Uma vez conhecidas as tensões de nó, todas as correntes de ramo podem ser calculadas. Tão logo essas correntes sejam conhecidas, as tensões e potências de ramo podem ser calculadas. O Exemplo 4.2 ilustra a utilização do método das tensões de nó.

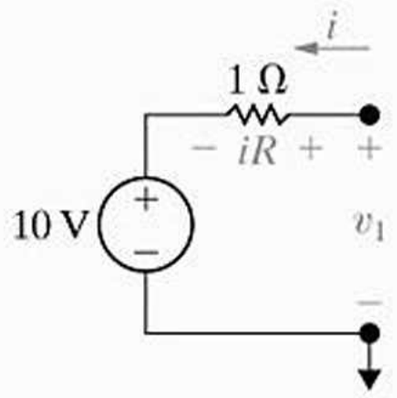


Figura 4.7 ▲ Cálculo da corrente de ramo i.

Exemplo 4.2 Utilização do método das tensões de nó

a) Use o método das tensões de nó para determinar as correntes de ramo i_a, i_b e i_c no circuito mostrado na Figura 4.8.
b) Determine a potência associada a cada fonte e diga se a fonte está fornecendo ou absorvendo potência.

Solução

a) Começamos observando que o circuito tem dois nós essenciais e, por isso, precisamos escrever uma única expressão de tensão de nó. Selecionamos o nó inferior como o nó de referência e definimos a tensão de nó desconhecida como v_1. A Figura 4.9 ilustra essas decisões. Somando as correntes que saem do nó 1, geramos a equação de tensão de nó

$$\frac{v_1 - 50}{5} + \frac{v_1}{10} + \frac{v_1}{40} - 3 = 0.$$

Resolvendo para v_1, obtemos

$$v_1 = 40 \text{ V}.$$

Conseqüentemente,

$$i_a = \frac{50 - 40}{5} = 2 \text{ A},$$

$$i_b = \frac{40}{10} = 4 \text{ A},$$

$$i_c = \frac{40}{40} = 1 \text{ A}.$$

b) A potência associada à fonte de 50 V é

$$p_{50V} = -50i_a = -100 \text{ W (alimentando)}$$

A potência associada à fonte de 3 A é

$$p_{3A} = -3v_1 = -3(40) = -120 \text{ W (alimentando)}$$

Verificamos esses cálculos observando que a potência total fornecida é 220 W. A potência total absorvida pelos três resistores é 4(5) + 16(10) + 1(40), ou 220 W, como calculamos e como deve ser.

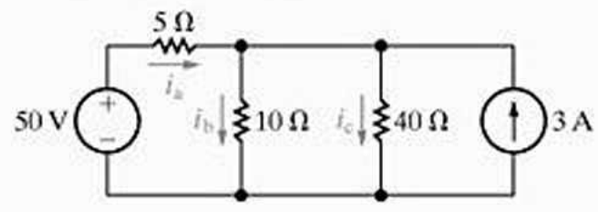


Figura 4.8 ▲ Circuito para o Exemplo 4.2.

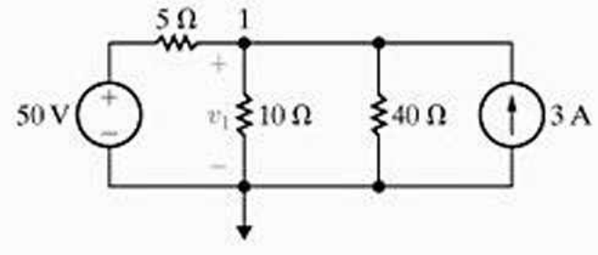


Figura 4.9 ▲ Circuito mostrado na Figura 4.8, com um nó de referência e a tensão de nó desconhecida v_1.

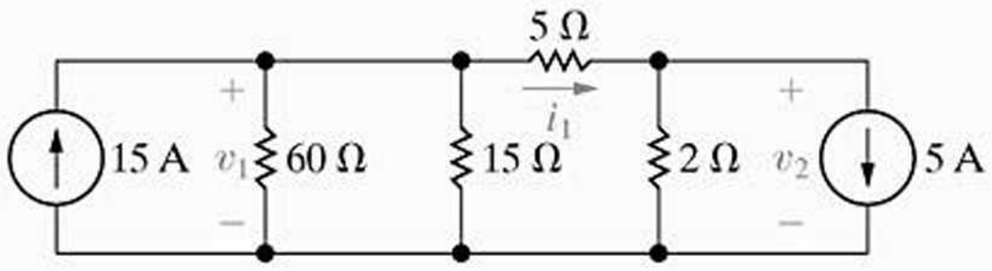
✔ PROBLEMAS PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 1 — Entender e saber utilizar o método das tensões de nó

4.1 a) Para o circuito mostrado, use o método das tensões de nó para determinar v_1, v_2 e i_1.

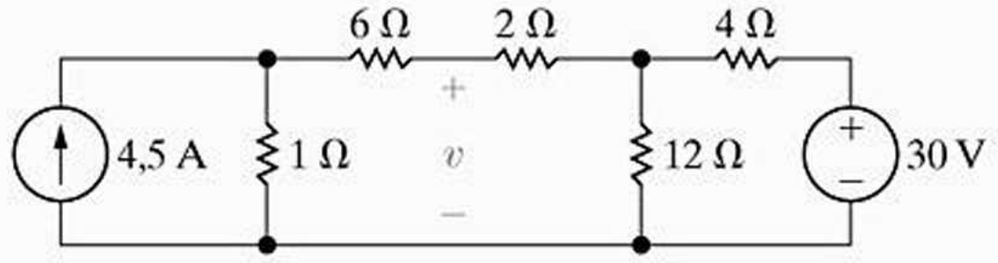
b) Qual é a potência fornecida ao circuito pela fonte de 15 A?

c) Repita (b) para a fonte de 5 A.



Resposta: (a) 60 V, 10 V, 10 A; (b) 900 W; (c) −50 W.

4.2 Use o método das tensões de nó para determinar v no circuito mostrado.



Resposta: 15 V.

NOTA: Tente resolver também os problemas 4.6, 4.9 e 4.10, apresentados no final deste capítulo.

4.3 O método das tensões de nó e as fontes dependentes

Se o circuito contiver fontes dependentes, as equações das tensões de nó devem ser suplementadas com as equações de restrição impostas pela presença das fontes dependentes. O Exemplo 4.3 ilustra a aplicação do método das tensões de nó a um circuito que contém uma fonte dependente.

Exemplo 4.3 Utilização do método das tensões de nó com fontes dependentes

Use o método das tensões de nó para determinar a potência dissipada no resistor de 5 Ω do circuito mostrado na Figura 4.10.

Solução

Começamos observando que o circuito tem três nós essenciais. Por conseqüência, precisamos de duas equações das tensões de nó para descrever o circuito. Quatro ramos terminam no nó inferior, portanto o selecionamos como nó de referência. As duas tensões de nó desconhecidas são definidas no circuito mostrado na Figura 4.11. A soma das correntes que saem do nó 1 gera a equação

$$\frac{v_1 - 20}{2} + \frac{v_1}{20} + \frac{v_1 - v_2}{5} = 0.$$

A soma das correntes que saem do nó 2 fornece

$$\frac{v_2 - v_1}{5} + \frac{v_2}{10} + \frac{v_2 - 8i_\phi}{2} = 0.$$

Como expressas, essas duas equações das tensões de nó contêm três incógnitas, ou seja, v_1, v_2 e i_ϕ. Para eliminar i_ϕ, devemos expressar essa corrente de controle em termos das tensões de nó, ou

$$i_\phi = \frac{v_1 - v_2}{5}.$$

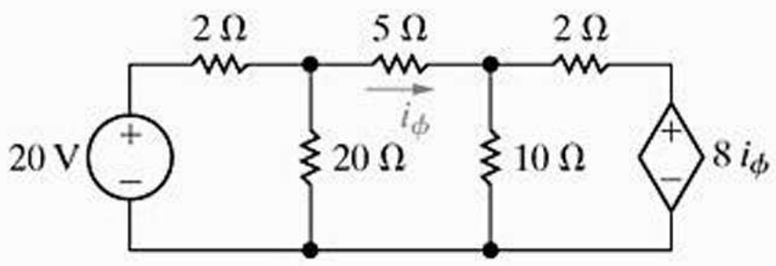


Figura 4.10 ▲ Circuito para o Exemplo 4.3.

A substituição dessa relação na equação do nó 2 simplifica as duas equações das tensões de nó para

$$0{,}75v_1 - 0{,}2v_2 = 10,$$

$$-v_1 + 1{,}6v_2 = 0.$$

Resolvendo para v_1 e v_2, obtemos

$$v_1 = 16 \text{ V}$$

e

$$v_2 = 10 \text{ V}.$$

Então,

$$i_\phi = \frac{16 - 10}{5} = 1{,}2 \text{ A},$$

$$p_{5\Omega} = (1{,}44)(5) = 7{,}2 \text{ W}.$$

Um bom exercício para desenvolver sua intuição para a resolução de problemas é reconsiderar esse exemplo usando o nó 2 como o nó de referência. Isso facilita ou dificulta a análise?

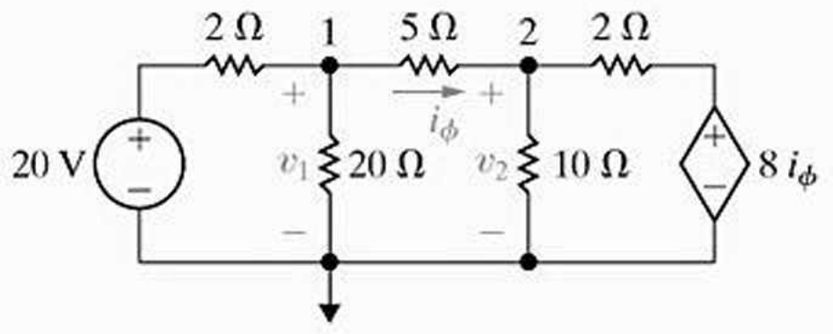
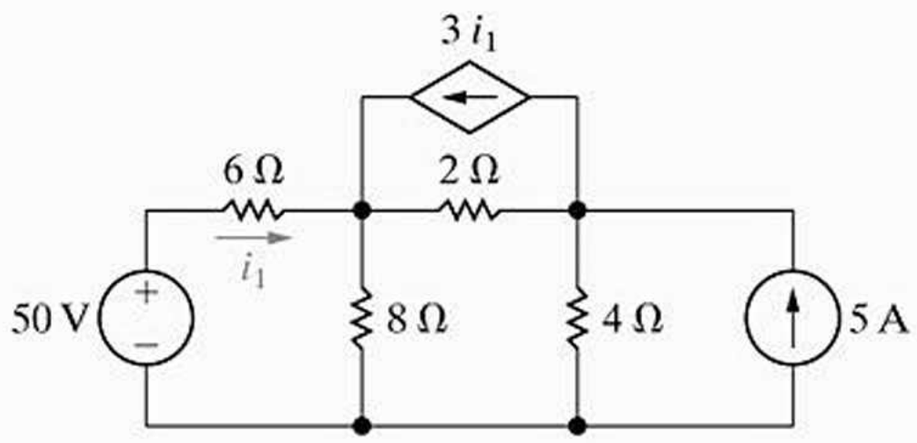


Figura 4.11 ▲ Circuito mostrado na Figura 4.10, com um nó de referência e as tensões de nó.

✔ PROBLEMA PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 1 — Entender e saber utilizar o método das tensões de nó

4.3 a) Use o método das tensões de nó para determinar a potência associada a cada fonte no circuito mostrado.
b) Diga se a fonte está fornecendo potência ao circuito ou absorvendo potência do circuito.



Resposta: (a) $p_{50V} = -150$ W, $p_{3i_1} = -144$ W, $p_{5A} = -80$ W; (b) todas as fontes estão fornecendo potência ao circuito.

NOTA: Tente resolver também os problemas 4.19 e 4.20, apresentados no final deste capítulo.

4.4 O método das tensões de nó: alguns casos especiais

Quando uma fonte de tensão é o único elemento entre dois nós essenciais, o método das tensões de nó é simplificado. Como exemplo, examine o circuito da Figura 4.12. Há três nós essenciais nesse circuito, o que significa que são necessárias duas equações simultâneas. Dentre esses três nós essenciais, foi escolhido um nó de referência e dois outros nós foram rotulados. Mas a fonte de 100 V restringe a tensão entre o nó 1 e o nó de referência a 100 V. Isso significa que há somente uma tensão de nó desconhecida (v_2). Portanto, a solução desse circuito envolve uma única equação de tensão para o nó 2:

$$\frac{v_2 - v_1}{10} + \frac{v_2}{50} - 5 = 0. \tag{4.7}$$

Como $v_1 = 100$ V, a Equação 4.7 pode ser resolvida para v_2:

$$v_2 = 125 \text{ V}. \tag{4.8}$$

Conhecendo v_2, podemos calcular a corrente em cada ramo. Você deve confirmar que a corrente que entra no nó 1, por meio do ramo que contém a fonte de tensão independente, é 1,5 A.

Em geral, quando você usa o método das tensões de nó para resolver circuitos com fontes de tensão ligadas diretamente entre nós essenciais, o número de tensões de nó desconhecidas é reduzido. A razão é que, sempre que a fonte de tensão ligar dois nós essenciais, ela obriga a diferença entre as tensões de nó nesses nós a ser igual à da fonte. Dedique algum tempo para testar se você é capaz de reduzir o número de incógnitas e, desse modo, simplificar a análise dos circuitos.

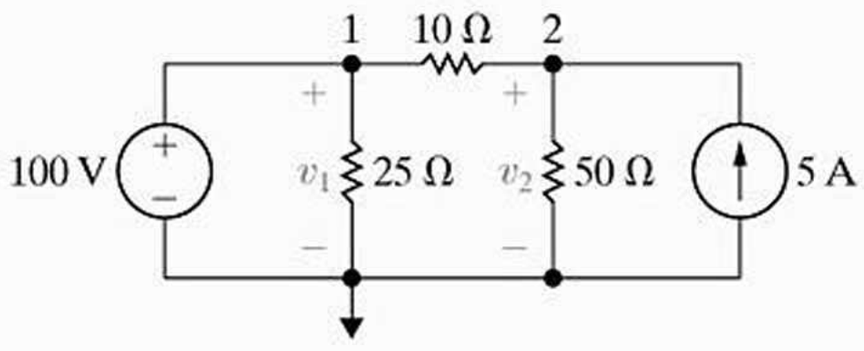


Figura 4.12 ▲ Circuito com uma tensão de nó conhecida.

Suponha que o circuito mostrado na Figura 4.13 deva ser analisado utilizando o método das tensões de nó. O circuito contém quatro nós essenciais, de forma que prevemos três equações de tensão de nó. Contudo, dois nós essenciais estão ligados por uma fonte de tensão independente e dois outros nós essenciais estão ligados por uma fonte de tensão dependente controlada por corrente. Conseqüentemente, na verdade, há apenas uma tensão de nó desconhecida.

Escolher qual nó usar como nó de referência envolve várias possibilidades. Qualquer dos nós de cada lado da fonte de tensão dependente parece atraente porque, se escolhido, saberíamos que uma das tensões de nó seria $+10i_\phi$ (se o nó da esquerda for o nó de referência) ou $-10i_\phi$ (se o nó da direita for o nó de referência). O nó inferior parece até melhor porque uma tensão de nó é conhecida imediatamente (50 V) e cinco ramos terminam ali. Portanto, optamos pelo nó inferior como nó de referência.

A Figura 4.14 mostra o circuito redesenhado, com o nó de referência assinalado e as tensões de nó definidas. Além disso, introduzimos a corrente i porque não podemos expressar a corrente no ramo da fonte de tensão dependente como uma função das tensões de nó v_2 e v_3. Assim, no nó 2

$$\frac{v_2 - v_1}{5} + \frac{v_2}{50} + i = 0, \tag{4.9}$$

e no nó 3

$$\frac{v_3}{100} - i - 4 = 0. \tag{4.10}$$

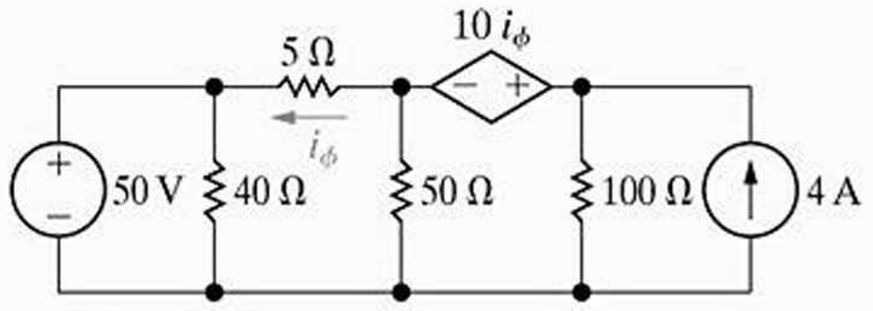


Figura 4.13 ▲ Circuito com uma fonte de tensão dependente ligada entre nós.

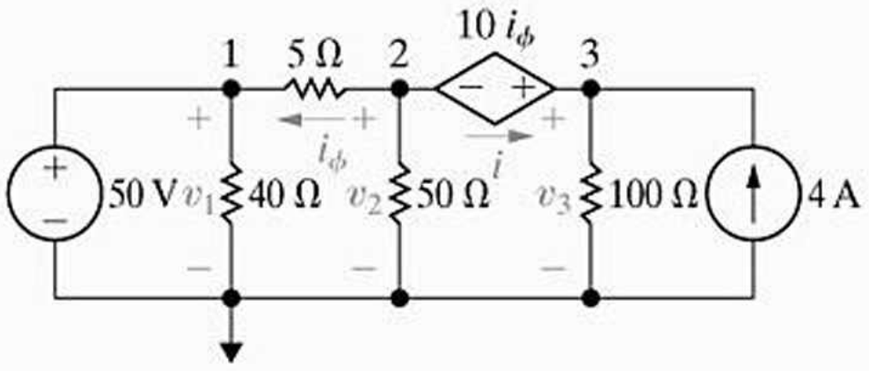


Figura 4.14 ▲ Circuito mostrado na Figura 4.13, com as tensões de nós selecionadas.

Eliminamos i simplesmente somando as equações 4.9 e 4.10 para obter

$$\frac{v_2 - v_1}{5} + \frac{v_2}{50} + \frac{v_3}{100} - 4 = 0. \qquad (4.11)$$

Conceito de supernó

A Equação 4.11 pode ser escrita diretamente, sem recorrer à etapa intermediária representada pelas equações 4.9 e 4.10. Para fazer isso, considere os nós 2 e 3 como um único nó e simplesmente some as correntes que saem do nó em termos das tensões de nó v_2 e v_3. A Figura 4.15 ilustra essa abordagem.

Quando uma fonte de tensão está entre dois nós essenciais, podemos combinar esses nós para formar um *supernó*. É óbvio que a lei das correntes de Kirchhoff deve ser válida para o supernó. Na Figura 4.15, começando com o ramo de 5 Ω e percorrendo o supernó no sentido anti-horário, geramos a equação

$$\frac{v_2 - v_1}{5} + \frac{v_2}{50} + \frac{v_3}{100} - 4 = 0, \qquad (4.12)$$

que é idêntica à Equação 4.11. A criação de um supernó nos nós 2 e 3 facilitou a análise desse circuito. Portanto, sempre vale a pena dedicar algum tempo à procura desse tipo de atalho antes de escrever quaisquer equações.

Depois de a Equação 4.12 ter sido deduzida, a etapa seguinte é reduzir a expressão a uma única tensão de nó desconhecida. Em primeiro lugar, eliminamos v_1 da equação porque sabemos que $v_1 = 50$ V. Em seguida, expressamos v_3 em função de v_2:

$$v_3 = v_2 + 10i_\phi. \qquad (4.13)$$

Agora, expressamos a corrente de controle da fonte de tensão dependente em função das tensões de nó:

$$i_\phi = \frac{v_2 - 50}{5}. \qquad (4.14)$$

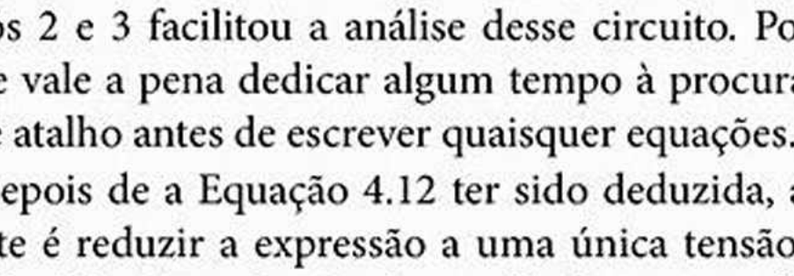


Figura 4.15 ▲ Nós 2 e 3 considerados um supernó.

Usar as equações 4.13 e 4.14 e $v_1 = 50$ V reduz a Equação 4.12 a

$$v_2\left(\frac{1}{50} + \frac{1}{5} + \frac{1}{100} + \frac{10}{500}\right) = 10 + 4 + 1,$$

$$v_2(0{,}25) = 15,$$

$$v_2 = 60 \text{ V}.$$

Pelas equações 4.13 e 4.14:

$$i_\phi = \frac{60 - 50}{5} = 2 \text{ A},$$

$$v_3 = 60 + 20 = 80 \text{ V}.$$

Análise do circuito amplificador pelo método das tensões de nó

Vamos usar o método das tensões de nó para analisar o circuito que apresentamos pela primeira vez na Seção 2.5, mostrado novamente na Figura 4.16.

Quando usamos o método da análise de correntes de ramo na Seção 2.5, enfrentamos a tarefa de escrever e resolver seis equações simultâneas. Aqui, mostraremos como a análise nodal pode simplificar nosso trabalho.

O circuito tem quatro nós essenciais: os nós *a* e *d* são ligados por uma fonte de tensão independente, assim como os nós *b* e *c*. Portanto, o problema se reduz a determinar uma única tensão de nó desconhecida, porque $(n_e - 1) - 2 = 1$. Usando *d* como nó de referência, combinamos os nós *b* e *c* em um supernó e identificamos a queda de tensão em R_2 como v_b e a queda de tensão em R_E como v_c, conforme mostra a Figura 4.17. Então,

$$\frac{v_b}{R_2} + \frac{v_b - V_{CC}}{R_1} + \frac{v_c}{R_E} - \beta i_B = 0. \qquad (4.15)$$

Agora, eliminamos v_c e i_B da Equação 4.15, observando que

$$v_c = (i_B + \beta i_B)R_E, \qquad (4.16)$$

$$v_c = v_b - V_0. \qquad (4.17)$$

a

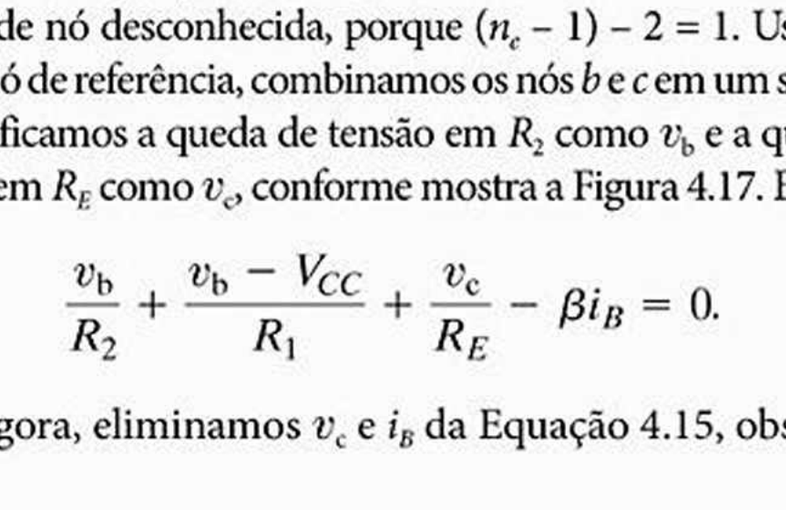


Figura 4.16 ▲ Modelo de um transistor funcionando como amplificador, também mostrado na Figura 2.24.

Substituindo as equações 4.16 e 4.17 na Equação 4.15, temos

$$v_b\left[\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{(1+\beta)R_E}\right]=\frac{V_{CC}}{R_1}+\frac{V_0}{(1+\beta)R_E}. \qquad (4.18)$$

Resolvendo a Equação 4.18 para v_b, obtemos

$$v_b=\frac{V_{CC}R_2(1+\beta)R_E+V_0R_1R_2}{R_1R_2+(1+\beta)R_E(R_1+R_2)}. \qquad (4.19)$$

Usando o método das tensões de nó para analisar esse circuito, reduzimos o problema de manipular seis equações simultâneas (veja o Problema 2.27) para o de manipular três equações simultâneas. Você deve verificar que, quando a Equação 4.19 é combinada com as equações 4.16 e 4.17, a solução para i_B é idêntica à da Equação 2.25. (Veja o Problema 4.30.)

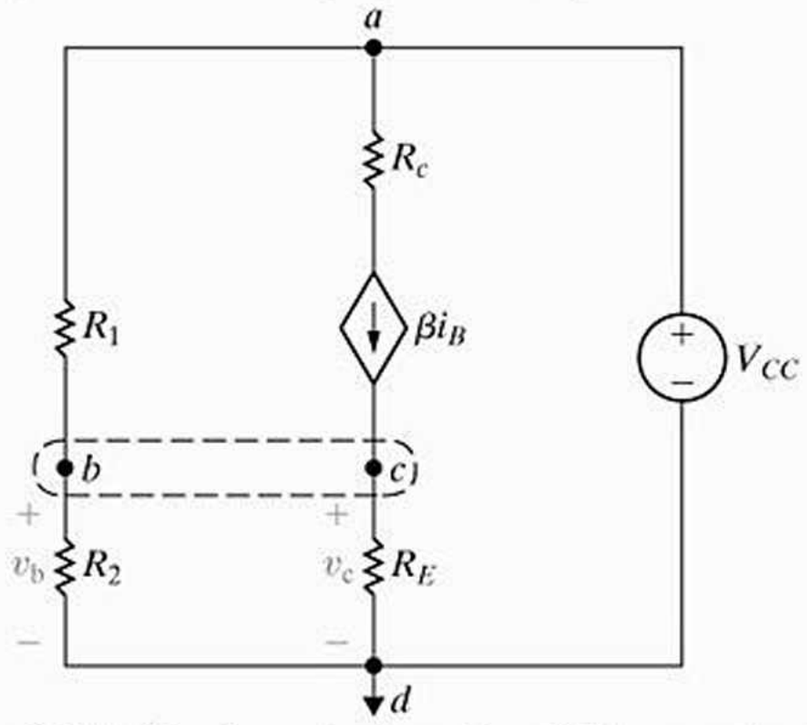


Figura 4.17 ▲ Circuito mostrado na Figura 4.16, com as tensões e o supernó identificados.

4.5 Introdução ao método das correntes de malha

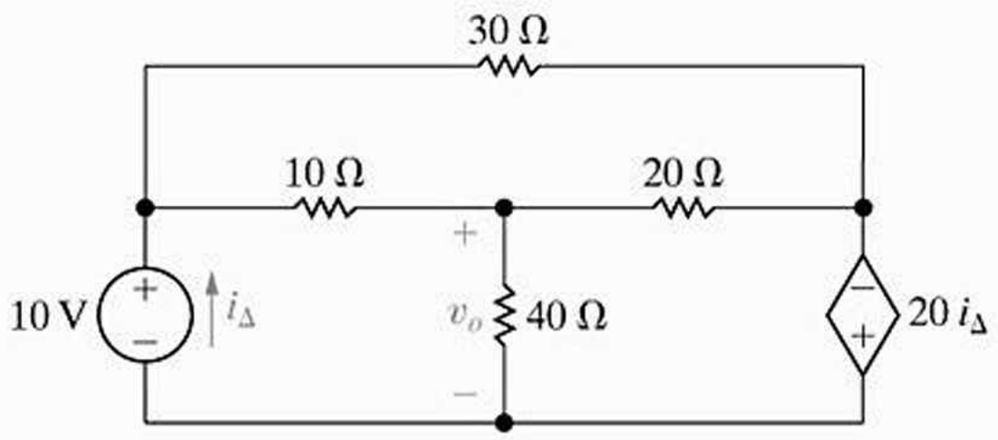
Como dissemos na Seção 4.1, o método das correntes de malha para análise de circuitos nos habilita a descrever um circuito em termos de $b_c - (n_c - 1)$ equações. Lembre-se de que uma malha é um laço em cujo interior não há nenhum outro laço. O circuito da Figura 4.1(b) é mostrado novamente na Figura 4.18 com setas que representam e distinguem as correntes no interior de cada laço. Lembre-se também de que o método das correntes de malha só é aplicável a circuitos planares. O circuito da Figura 4.18 contém sete ramos essenciais em que a corrente é desconhecida e quatro nós essenciais. Portanto, para resolvê-lo por meio do método das correntes de malha, devemos escrever quatro [7 – (4 – 1)] equações de correntes de malha.

Uma *corrente de malha* é a corrente que existe somente no perímetro de uma malha. Em um diagrama do circuito ela é representada por uma linha contínua ou por uma linha quase contínua que percorre o perímetro da malha. Uma ponta de seta na linha contínua indica a direção de referência para a corrente de malha. A Figura 4.18 mostra as quatro correntes de malha que descrevem o circuito da Figura 4.1(b). Observe que, por definição, correntes de malha satisfazem automaticamente a lei das correntes de Kirchhoff. Isto é, em qualquer nó do circuito, uma dada corrente de malha tanto entra quanto sai do nó.

✔ PROBLEMAS PARA AVALIAÇÃO

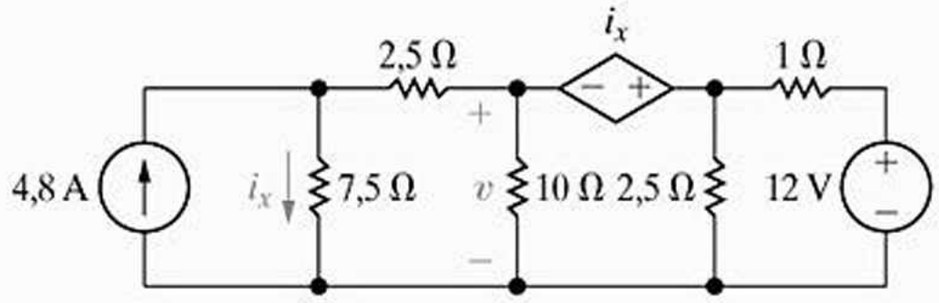
Objetivo 1 — Entender e saber utilizar o método das tensões de nó

4.4 Use o método das tensões de nó para determinar v_o no circuito mostrado.

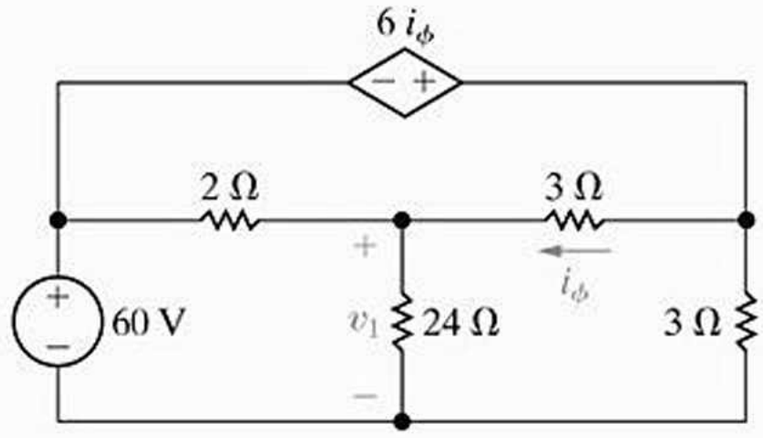


Resposta: 24 V.

4.5 Use o método das tensões de nó para determinar v no circuito mostrado.



4.6 Use o método das tensões de nó para determinar v_1 no circuito mostrado.



Resposta: 48 V.

Resposta: 8 V.

NOTA: Tente resolver também os problemas 4.21, 4.26 e 4.27, apresentados no final deste capítulo.

A Figura 4.18 também mostra que nem sempre é possível identificar uma corrente de malha em termos de uma corrente de ramo. Por exemplo, a corrente de malha i_2 não é igual a nenhuma corrente de ramo, ao passo que as correntes de malha i_1, i_3 e i_4 podem ser identificadas com correntes de ramo. Assim, medir uma corrente de malha nem sempre é possível; observe que não há nenhum lugar onde inserir um amperímetro para medir a corrente de malha i_2. O fato de uma corrente de malha poder ser uma quantidade fictícia não significa que ela seja um conceito inútil. Ao contrário, o método das correntes de malha para análise de circuitos evolui muito naturalmente a partir das equações de corrente de ramo.

Podemos usar o circuito da Figura 4.19 para mostrar a evolução da técnica das correntes de malha. Começamos usando as correntes de ramo (i_1, i_2 e i_3) para formular o conjunto de equações independentes. Para esse circuito, $b_e = 3$ e $n_e = 2$. Podemos escrever somente uma equação de corrente independente, portanto precisamos de duas equações independentes de tensões. Aplicar a lei das correntes de Kirchhoff ao nó superior e a lei das tensões de Kirchhoff ao longo das duas malhas gera o seguinte conjunto de equações:

$$i_1 = i_2 + i_3, \tag{4.20}$$

$$v_1 = i_1R_1 + i_3R_3, \tag{4.21}$$

$$-v_2 = i_2R_2 - i_3R_3. \tag{4.22}$$

Reduzimos esse conjunto de três equações a um conjunto de duas equações resolvendo a Equação 4.20 para i_3 e, então, substituindo essa expressão nas equações 4.21 e 4.22:

$$v_1 = i_1(R_1 + R_3) - i_2R_3, \tag{4.23}$$

$$-v_2 = -i_1R_3 + i_2(R_2 + R_3). \tag{4.24}$$

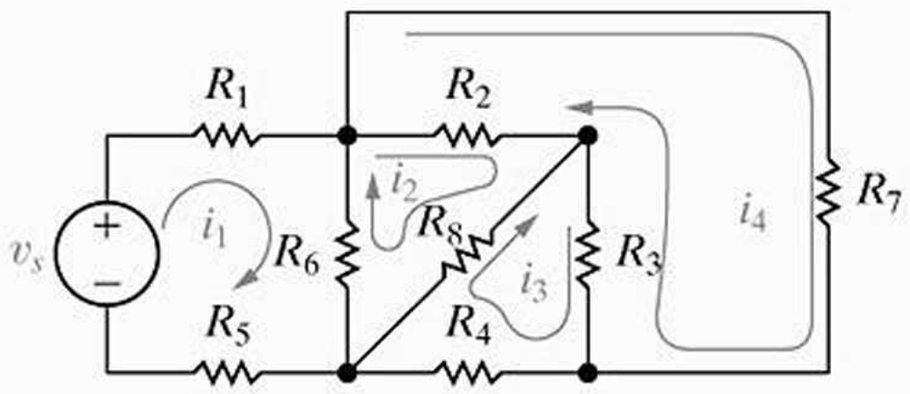


Figura 4.18 ▲ Circuito mostrado na Figura 4.1(b), com as correntes de malha definidas.

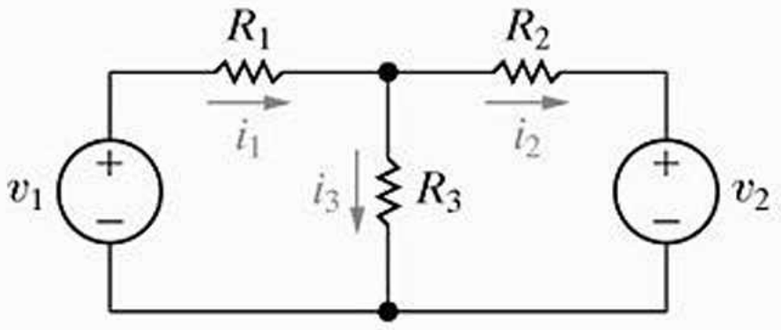


Figura 4.19 ▲ Circuito usado para ilustrar o desenvolvimento do método das correntes de malha para análise de circuitos.

Podemos resolver as equações 4.23 e 4.24 para i_1 e i_2 a fim de substituir a solução de três equações simultâneas pela solução de duas equações simultâneas. Deduzimos as equações 4.23 e 4.24 substituindo as $n_e - 1$ equações de corrente nas $b_e - (n_e - 1)$ equações de tensão. O valor do método das correntes de malha é que, definindo correntes de malha, eliminamos automaticamente $n_e - 1$ equações de corrente. Assim, o método das correntes de malha é equivalente a uma substituição sistemática das $n_e - 1$ equações de corrente nas $b_e - (n_e - 1)$ equações de tensão. As correntes de malha da Figura 4.19, que são equivalentes a eliminar a corrente de ramo i_3 das equações 4.21 e 4.22, são mostradas na Figura 4.20. Aplicamos, agora, a lei das tensões de Kirchhoff ao longo das duas malhas, expressando todas as tensões nos resistores em termos das correntes de malha, a fim de obter as equações

$$v_1 = i_aR_1 + (i_a - i_b)R_3, \tag{4.25}$$

$$-v_2 = (i_b - i_a)R_3 + i_bR_2. \tag{4.26}$$

Pondo em evidência os coeficientes de i_a e i_b nas equações 4.25 e 4.26, temos

$$v_1 = i_a(R_1 + R_3) - i_bR_3, \tag{4.27}$$

$$-v_2 = -i_aR_3 + i_b(R_2 + R_3). \tag{4.28}$$

Observe que as equações 4.27 e 4.28 e as equações 4.23 e 4.24 são idênticas na forma, com as correntes de malha i_a e i_b no lugar das correntes de ramo i_1 e i_2. Observe também que as correntes de ramo mostradas na Figura 4.19 podem ser expressas em termos das correntes de malha mostradas na Figura 4.20, ou

$$i_1 = i_a, \tag{4.29}$$

$$i_2 = i_b, \tag{4.30}$$

$$i_3 = i_a - i_b. \tag{4.31}$$

A capacidade de escrever as equações 4.29–4.31 por inspeção é crucial para o método das correntes de malha. Uma vez conhecidas as correntes de malha, também conhecemos as correntes de ramo. E, uma vez conhecidas as correntes de ramo, podemos calcular quaisquer tensões ou potências de interesse.

O Exemplo 4.4 ilustra como o método das correntes de malha é usado para determinar as potências das fontes e a tensão de ramo.

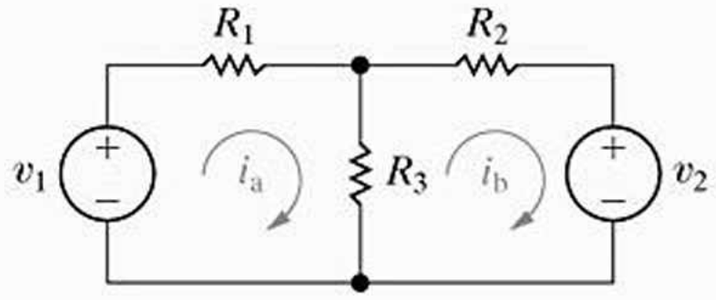


Figura 4.20 ▲ Correntes de malha i_a e i_b.

Exemplo 4.4 Utilização do método das correntes de malha

a) Use o método das correntes de malha para determinar a potência associada a cada fonte de tensão no circuito mostrado na Figura 4.21.

b) Calcule a tensão v_o no resistor de 8 Ω.

Solução

a) Para calcular a potência associada a cada fonte, precisamos saber qual é a corrente em cada fonte. O circuito indica que essas correntes de fonte serão idênticas às correntes de malha. Além disso, observe que o circuito tem sete ramos, em que a corrente é desconhecida, e cinco nós. Portanto, precisamos de três $[b - (n - 1) = 7 - (5 - 1)]$ equações de correntes de malha para descrever o circuito. A Figura 4.22 mostra as três correntes de malha usadas para descrever o circuito da Figura 4.21. Se admitirmos que as quedas de tensão serão positivas, as três equações de malha são

$$-40 + 2i_a + 8(i_a - i_b) = 0,$$

$$8(i_b - i_a) + 6i_b + 6(i_b - i_c) = 0,$$

$$6(i_c - i_b) + 4i_c + 20 = 0. \qquad (4.32)$$

Sua calculadora provavelmente pode resolver essas equações, ou você pode usar alguma ferramenta computacional. O método de Cramer é uma ferramenta útil para resolver três ou mais equações simultâneas à mão. Você pode revisar essa importante ferramenta no Apêndice A. Reorganizando as Equações 4.32 antes de utilizar uma calculadora, um programa de computador ou o método de Cramer, temos

$$10i_a - 8i_b + 0i_c = 40;$$

$$-8i_a + 20i_b - 6i_c = 0;$$

$$0i_a - 6i_b + 10i_c = -20. \qquad (4.33)$$

As três correntes de malha são

$$i_a = 5{,}6 \text{ A}$$

$$i_b = 2{,}0 \text{ A}$$

$$i_c = -0{,}80 \text{ A}$$

A corrente de malha i_a é idêntica à corrente de ramo na fonte de 40 V, de forma que a potência associada a essa fonte é

$$p_{40V} = -40i_a = -224 \text{ W}.$$

O sinal negativo indica que essa fonte está fornecendo potência à rede. A corrente na fonte de 20 V é idêntica à corrente de malha i_c; portanto,

$$p_{20V} = 20i_c = -16 \text{ W}.$$

A fonte de 20 V também está fornecendo potência à rede.

b) A corrente de ramo no resistor de 8 Ω, na direção da queda de tensão v_o, é $i_a - i_b$. Portanto,

$$v_o = 8(i_a - i_b) = 8(3{,}6) = 28{,}8 \text{ V}.$$

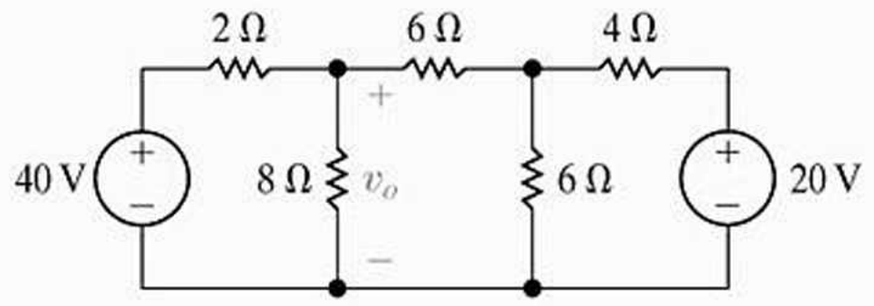


Figura 4.21 ▲ Circuito para o Exemplo 4.4.

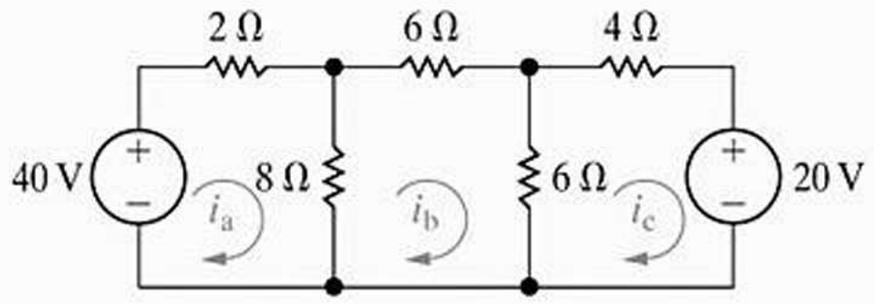
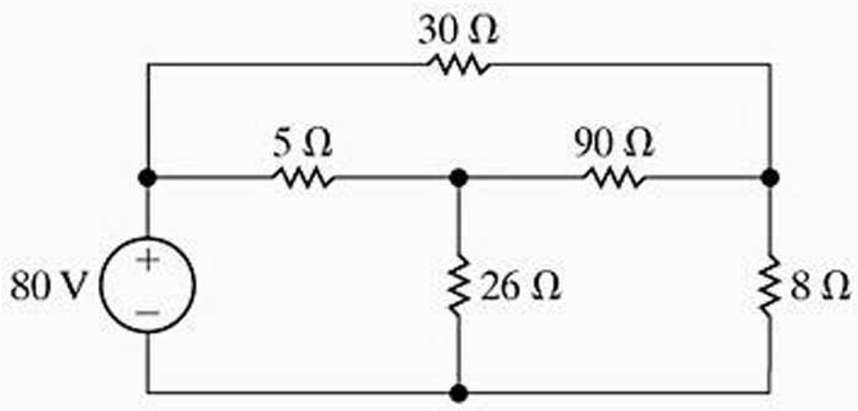


Figura 4.22 ▲ As três correntes de malha usadas para analisar o circuito mostrado na Figura 4.21.

✔ PROBLEMA PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 2 — Entender e saber utilizar o método das correntes de malha

4.7 Use o método das correntes de malha para determinar (a) a potência fornecida pela fonte de 80 V ao circuito mostrado e (b) a potência dissipada no resistor de 8 Ω.



Resposta: (a) 400 W;

(b) 50 W.

NOTA: Tente resolver também os problemas 4.31 e 4.32, apresentados no final deste capítulo.

4.6 O método das correntes de malha e as fontes dependentes

Se o circuito contiver fontes dependentes, as equações de correntes de malha devem ser suplementadas pelas equações de restrição adequadas. O Exemplo 4.5 ilustra a aplicação do método das correntes de malha quando o circuito inclui uma fonte dependente.

Exemplo 4.5 Utilização do método das correntes de malha com fontes dependentes

Use o método das correntes de malha para determinar a potência dissipada no resistor de 4 Ω no circuito mostrado na Figura 4.23.

Solução

Esse circuito tem seis ramos, em que a corrente é desconhecida, e quatro nós. Portanto, precisamos de três correntes de malha para descrever o circuito. Elas são definidas no circuito mostrado na Figura 4.24. As três equações de corrente de malha são

$$50 = 5(i_1 - i_2) + 20(i_1 - i_3),$$

$$0 = 5(i_2 - i_1) + 1i_2 + 4(i_2 - i_3),$$

$$0 = 20(i_3 - i_1) + 4(i_3 - i_2) + 15i_\phi. \qquad (4.34)$$

Agora, expressamos a corrente de ramo que controla a fonte de tensão dependente em termos das correntes de malha como

$$i_\phi = i_1 - i_3 \qquad (4.35)$$

que é a equação suplementar imposta pela presença da fonte dependente. Substituindo a Equação 4.35 nas Equações 4.34 e colocando em evidência os coeficientes de i_1, i_2 e i_3 em cada equação, geramos

$$50 = 25i_1 - 5i_2 - 20i_3,$$

$$0 = -5i_1 + 10i_2 - 4i_3,$$

$$0 = -5i_1 - 4i_2 + 9i_3.$$

Como estamos calculando a potência dissipada no resistor de 4 Ω, calculamos as correntes de malha i_2 e i_3:

$$i_2 = 26 \text{ A},$$

$$i_3 = 28 \text{ A}.$$

A corrente no resistor de 4 Ω, orientada da esquerda para a direita, é $i_3 - i_2$, ou 2 A. Portanto, a potência dissipada é

$$p_{4\Omega} = (i_3 - i_2)^2(4) = (2)^2(4) = 16 \text{ W}.$$

E se você não tivesse sido aconselhado a usar o método das correntes de malha? Teria escolhido o método das tensões de nó? Ele reduz o problema a determinar uma tensão de nó desconhecida por causa da presença de duas fontes de tensão entre nós essenciais. Mais adiante comentaremos esse tipo de escolha.

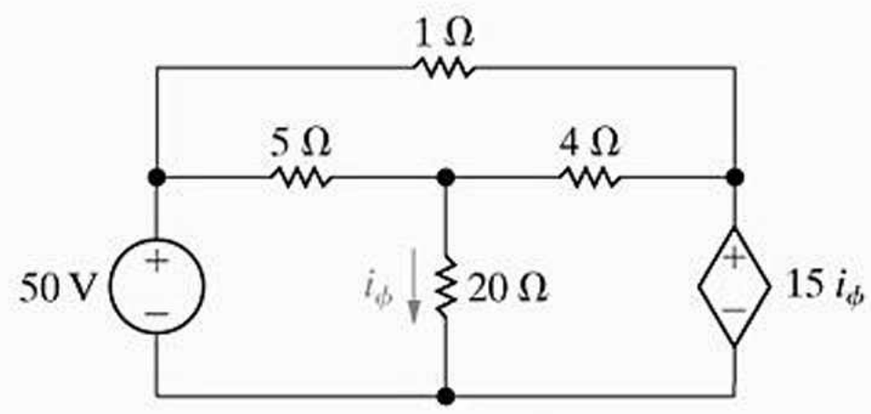


Figura 4.23 ▲ Circuito para o Exemplo 4.5.

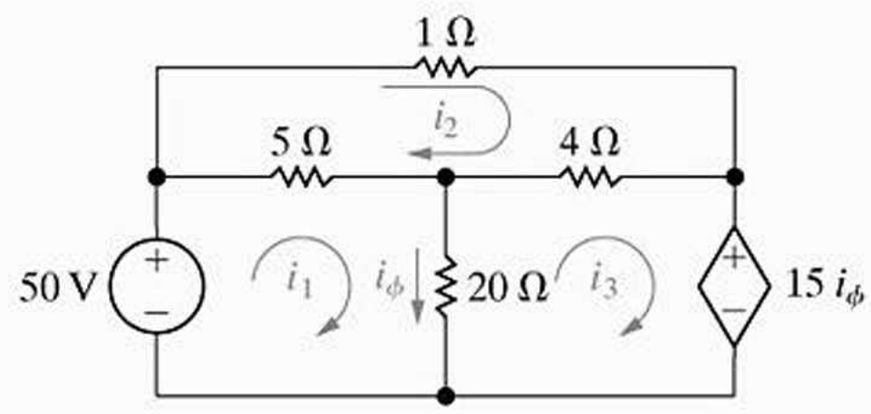


Figura 4.24 ▲ Circuito mostrado na Figura 4.23 com as três correntes de malha.

✔ PROBLEMAS PARA AVALIAÇÃO

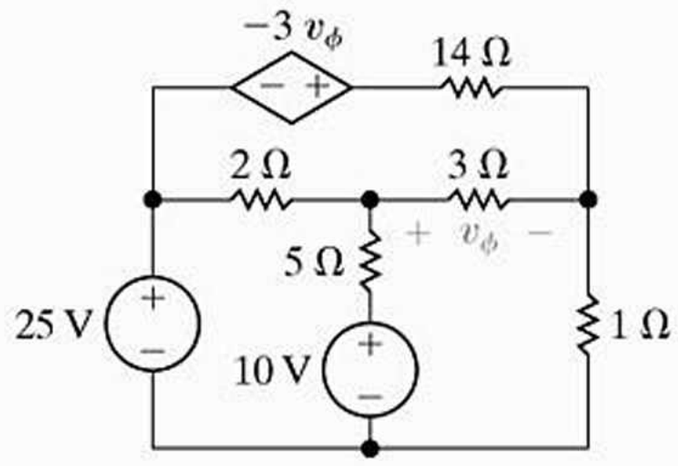
Objetivo 2 — Entender e saber utilizar o método das correntes de malha

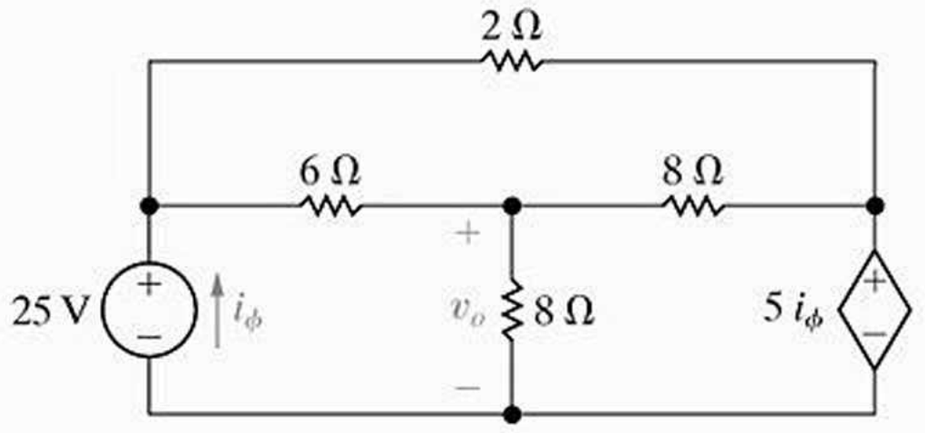
4.8 a) Determine o número de equações de correntes de malha necessárias para resolver o circuito mostrado na próxima página.
b) Use o método das correntes de malha para determinar a potência que está sendo fornecida à fonte de tensão dependente.

Resposta: (a) 3;
(b) –36 W.

4.9 Use o método das correntes de malha para determinar v_o no circuito mostrado.

Resposta: 16 V.





NOTA: Tente resolver também os problemas 4.37 e 4.38, apresentados no final deste capítulo.

4.7 O método das correntes de malha: alguns casos especiais

Quando um ramo inclui uma fonte de corrente, o método das correntes de malha requer algumas manipulações adicionais. O circuito mostrado na Figura 4.25 demonstra a natureza do problema.

Definimos as correntes de malha i_a, i_b e i_c, bem como a tensão na fonte de corrente de 5 A, para auxiliar a discussão. Observe que o circuito contém cinco ramos essenciais, nos quais a corrente é desconhecida, e quatro nós essenciais. Por conseqüência, precisamos escrever duas [5 – (4 – 1)] equações de correntes de malha para resolver o circuito. A presença da fonte de corrente reduz as três correntes de malha desconhecidas a duas dessas correntes, porque ela faz com que a diferença entre i_a e i_c seja igual a 5 A. Por conseqüência, se conhecemos i_a, conhecemos i_c, e vice-versa.

Contudo, quando tentamos somar as tensões ao longo da malha *a* ou da malha *c*, temos de introduzir nas equações a tensão desconhecida nos terminais da fonte de corrente de 5 A. Assim, para a malha *a*:

$$100 = 3(i_a - i_b) + v + 6i_a, \tag{4.36}$$

e para a malha *c*:

$$-50 = 4i_c - v + 2(i_c - i_b). \tag{4.37}$$

Agora, somamos as equações 4.36 e 4.37 para eliminar v e obter

$$50 = 9i_a - 5i_b + 6i_c. \tag{4.38}$$

Somando tensões ao longo da malha *b*, obtemos

$$0 = 3(i_b - i_a) + 10i_b + 2(i_b - i_c). \tag{4.39}$$

Reduzimos as equações 4.38 e 4.39 a duas equações e duas incógnitas usando a restrição

$$i_c - i_a = 5. \tag{4.40}$$

Deixamos para você verificar que, quando a Equação 4.40 é combinada com as equações 4.38 e 4.39, as soluções para as três correntes de malha são

$$i_a = 1{,}75 \text{ A}, \; i_b = 1{,}25 \text{ A} \text{ e } i_c = 6{,}75 \text{ A}.$$

O conceito de supermalha

Podemos deduzir a Equação 4.38 sem introduzir a tensão desconhecida v usando o conceito de supermalha. Para criar uma supermalha, removemos mentalmente a fonte de corrente do circuito ao simplesmente evitar esse ramo quando escrevemos as equações de corrente de malha. Expressamos as tensões ao longo da supermalha em termos das correntes de malha originais. A Figura 4.26 ilustra o conceito da supermalha. Quando somamos as tensões ao longo da supermalha (denotada pela linha tracejada), obtemos a equação

$$-100 + 3(i_a - i_b) + 2(i_c - i_b) + 50 + 4i_c + 6i_a = 0, \tag{4.41}$$

que se reduz a

$$50 = 9i_a - 5i_b + 6i_c. \tag{4.42}$$

Observe que as equações 4.42 e 4.38 são idênticas. Assim, a supermalha eliminou a necessidade de introduzir a tensão desconhecida nos terminais da fonte de corrente. Mais uma vez, dedicar algum tempo para examinar cuidadosamente um circuito e identificar um atalho como esse dá um grande retorno em termos de simplificação da análise.

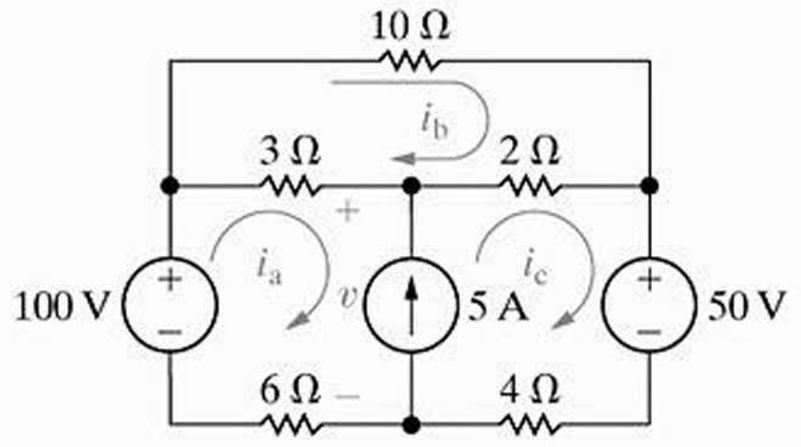


Figura 4.25 ▲ Circuito que ilustra o método das correntes de malha quando um ramo contém uma fonte de corrente independente.

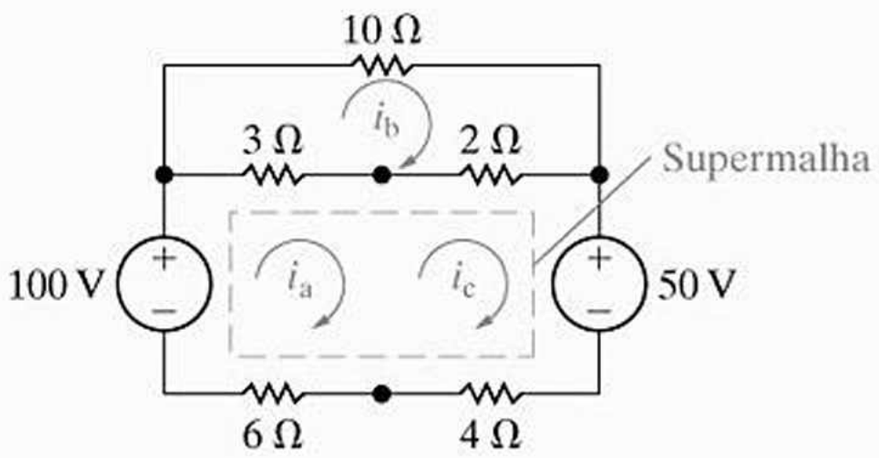


Figura 4.26 ▲ Circuito mostrado na Figura 4.25, que ilustra o conceito de uma supermalha.

Análise do circuito amplificador pelo método das correntes de malha

Podemos usar o circuito apresentado pela primeira vez na Seção 2.5 (Figura 2.24) para ilustrar como o método das correntes de malha funciona quando um ramo contém uma fonte de corrente dependente. A Figura 4.27 mostra aquele circuito, com as três correntes de malha identificadas por i_a, i_b e i_c. O circuito tem quatro nós essenciais e cinco ramos essenciais, nos quais a corrente é desconhecida. Portanto, sabemos que o circuito pode ser analisado em termos de duas [5 – (4 – 1)] equações de correntes de malha. Embora tenhamos definido três correntes de malha na Figura 4.27, a fonte de corrente dependente impõe uma restrição entre as correntes de malha i_a e i_c, portanto temos somente duas correntes de malha desconhecidas. Usando o conceito da supermalha, desenhamos novamente o circuito como mostrado na Figura 4.28.

Agora, somamos as tensões ao longo da supermalha em termos das correntes de malha i_a, i_b e i_c para obter

$$R_1 i_a + v_{CC} + R_E(i_c - i_b) - V_0 = 0. \tag{4.43}$$

A equação da malha b é

$$R_2 i_b + V_0 + R_E(i_b - i_c) = 0. \tag{4.44}$$

A restrição imposta pela fonte de corrente dependente é

$$\beta i_B = i_a - i_c. \tag{4.45}$$

A corrente de ramo que controla a fonte de corrente dependente, expressa como uma função das correntes de malha, é

$$i_B = i_b - i_a. \tag{4.46}$$

Pelas equações 4.45 e 4.46,

$$i_c = (1 + \beta)i_a - \beta i_b. \tag{4.47}$$

Agora, usamos a Equação 4.47 para eliminar i_c das equações 4.43 e 4.44:

$$[R_1 + (1 + \beta)R_E]i_a - (1 + \beta)R_E i_b = V_0 - V_{CC}, \tag{4.48}$$

$$-(1 + \beta)R_E i_a + [R_2 + (1 + \beta)R_E]i_b = -V_0. \tag{4.49}$$

Você deve verificar que a solução das equações 4.48 e 4.49 para i_a e i_b resulta em

$$i_a = \frac{V_0 R_2 - V_{CC} R_2 - V_{CC}(1 + \beta)R_E}{R_1 R_2 + (1 + \beta)R_E(R_1 + R_2)}, \tag{4.50}$$

$$i_b = \frac{-V_0 R_1 - (1 + \beta)R_E V_{CC}}{R_1 R_2 + (1 + \beta)R_E(R_1 + R_2)}. \tag{4.51}$$

Deixamos para você verificar que, quando as equações 4.50 e 4.51 são usadas para determinar i_B, o resultado é o mesmo dado pela Equação 2.25.

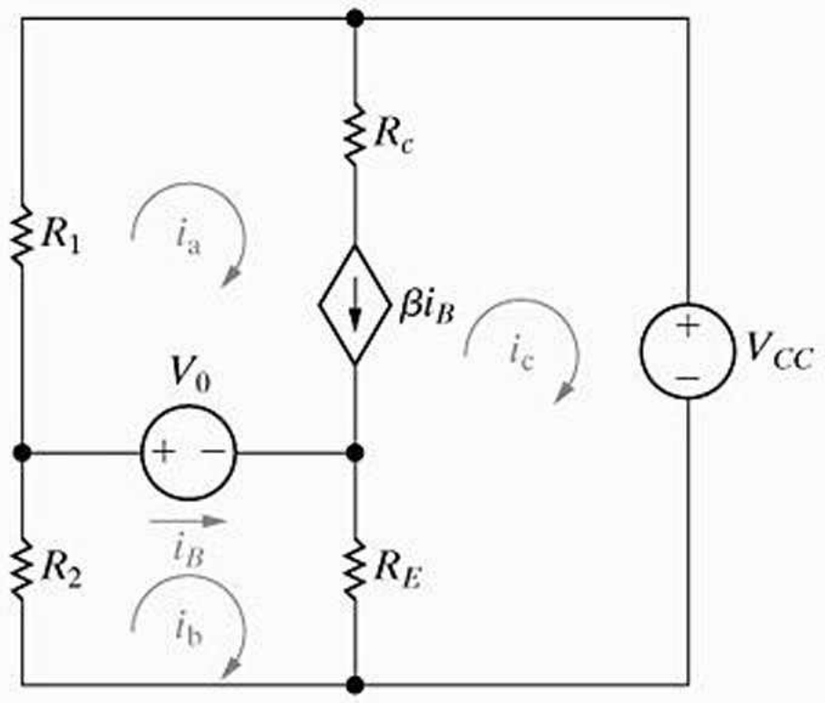


Figura 4.27 ▲ Circuito mostrado na Figura 2.24 com as correntes de malha i_a, i_b e i_c.

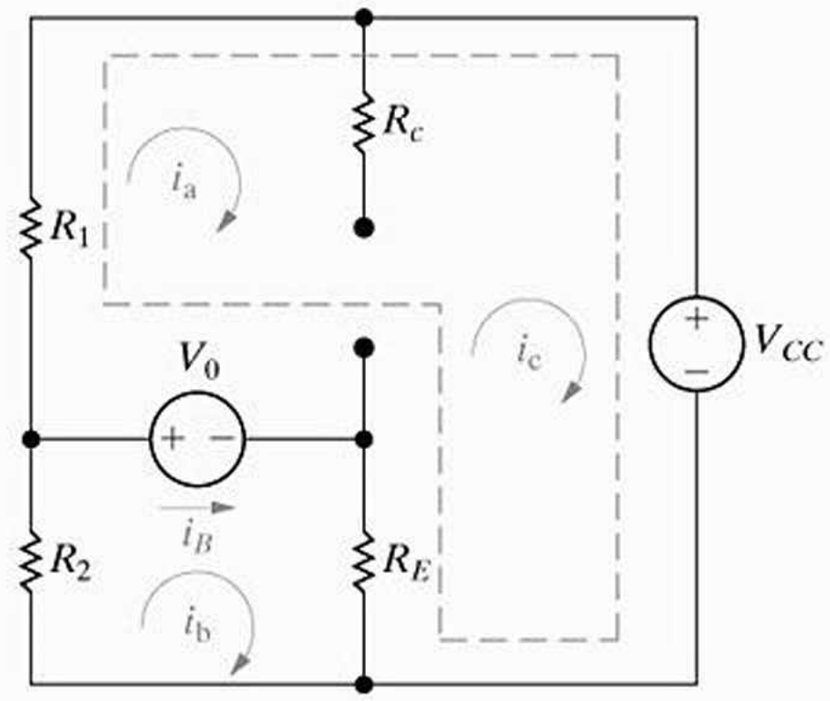


Figura 4.28 ▲ Circuito mostrado na Figura 4.27, representando a supermalha criada pela presença da fonte de corrente dependente.

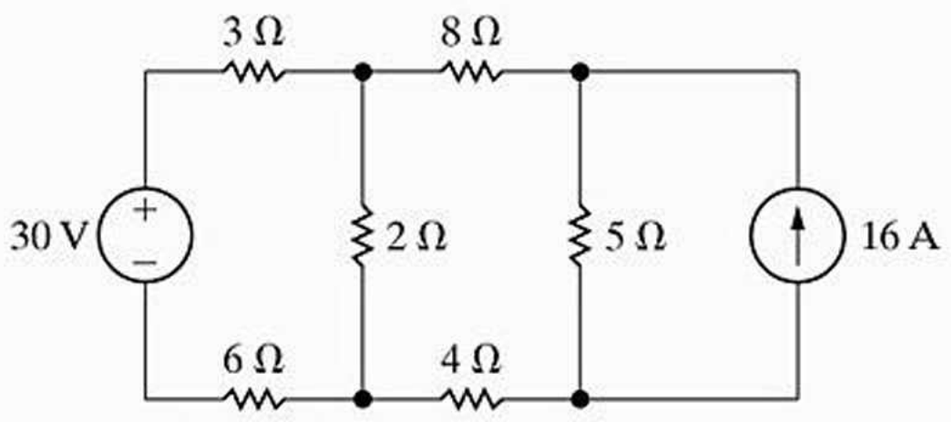
✔ PROBLEMAS PARA AVALIAÇÃO

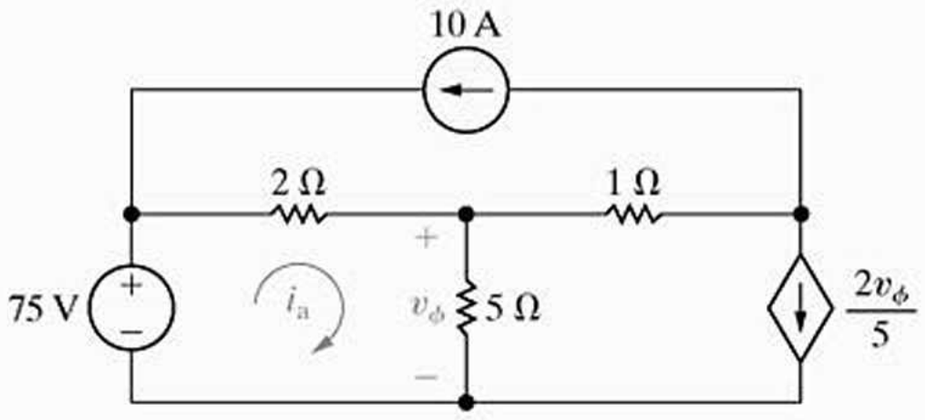
Objetivo 2 — Entender e saber utilizar o método das correntes de malha

4.10 Use o método das correntes de malha para determinar a potência dissipada no resistor de 2 Ω no circuito mostrado.

Resposta: 72 W.

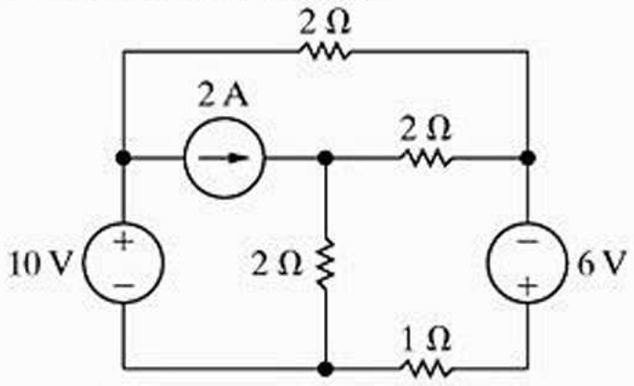
4.11 Use o método das correntes de malha para determinar a corrente de malha i_a no circuito mostrado.





Resposta: 15 A.

4.12 Use o método das correntes de malha para determinar a potência dissipada no resistor de 1 Ω no circuito mostrado.



Resposta: 36 W.

NOTA: Tente resolver também os problemas 4.41, 4.42, 4.47 e 4.50, apresentados no final deste capítulo.

4.8 Método das tensões de nó *versus* método das correntes de malha

A maior vantagem de ambos os métodos, das tensões de nó e das correntes de malha, é que eles reduzem o número de equações simultâneas que devem ser manipuladas. Eles também requerem que o analista seja bastante sistemático no que diz respeito a organizar e escrever essas equações. Então, é natural perguntar: "Quando o método das tensões de nó é preferível ao método das correntes de malha e vice-versa?" Como você pode suspeitar, não há uma resposta clara. No entanto, fazer várias perguntas pode ajudá-lo a identificar o método mais eficiente antes de mergulhar no processo de solução:

- Um dos métodos resulta em um número menor de equações simultâneas a resolver?
- O circuito contém supernós? Se contiver, usar o método das tensões de nó permitirá que você reduza o número de equações a resolver.
- O circuito contém supermalhas? Se contiver, usar o método das correntes de malha permitirá que você reduza o número de equações a resolver.
- Resolver uma parte do circuito dá a solução requerida? Se der, qual é o método mais eficiente para resolver apenas a porção pertinente do circuito?

Talvez a informação mais importante seja que, para qualquer situação, o tempo dedicado a pensar no problema em relação às várias abordagens analíticas disponíveis é um tempo bem gasto. Os exemplos 4.6 e 4.7 ilustram o processo de decisão entre o método das tensões de nó e o método das correntes de malha.

Exemplo 4.6 Entender o método das tensões de nó *versus* o método das correntes de malha

Determine a potência dissipada no resistor de 300 Ω no circuito mostrado na Figura 4.29.

Solução

Para determinar a potência dissipada no resistor de 300 Ω, precisamos determinar ou a corrente que passa pelo resistor ou a tensão em seus terminais. O método das correntes de malha fornece a corrente que passa pelo resistor; essa abordagem requer resolver cinco equações de malha simultâneas, como descrito na Figura 4.30. Quando escrevermos as cinco equações, devemos incluir a restrição $i_\Delta = -i_b$.

Antes de prosseguirmos, vamos também examinar o circuito no que se refere ao método das tensões de nó. Observe que, uma vez conhecidas as tensões de nó, podemos calcular a corrente que passa pelo resistor de 300 Ω ou a tensão em seus terminais. O circuito tem quatro nós essenciais e, por conseguinte, somente três equações de tensão de nó são necessárias para descrevê-lo. Por causa da fonte de tensão dependente entre dois nós essenciais, temos de somar as correntes somente em dois nós. Conseqüentemente, o problema é reduzido a escrever duas equações de tensão de nó e uma equação de restrição.

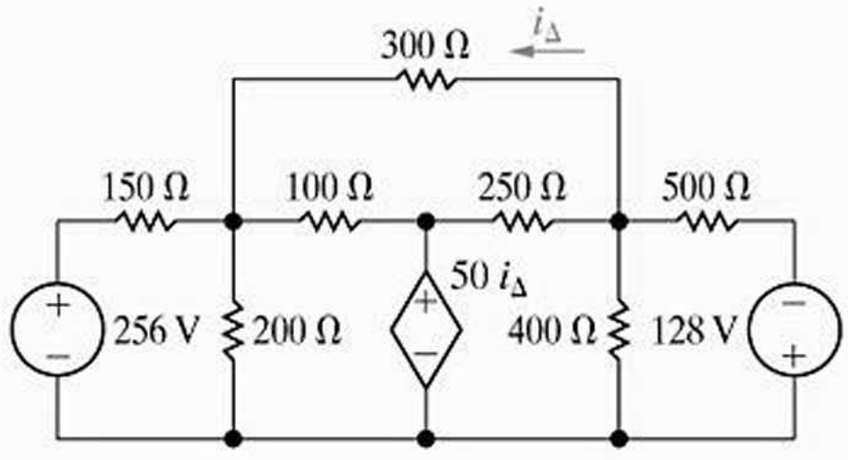


Figura 4.29 ▲ Circuito para o Exemplo 4.6.

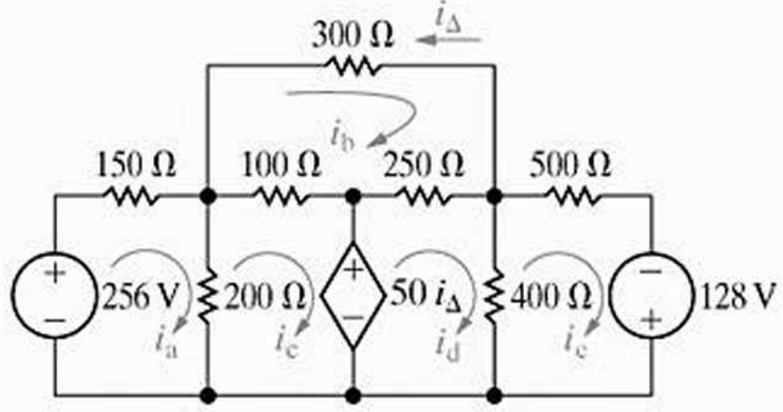


Figura 4.30 ▲ Circuito mostrado na Figura 4.29, com as cinco correntes de malha.

Como o método das tensões de nó requer apenas três equações simultâneas, é a abordagem mais atraente.

Uma vez tomada a decisão de usar o método das tensões de nó, a próxima etapa é selecionar um nó de referência. Dois nós essenciais no circuito da Figura 4.29 merecem consideração. O primeiro é o nó de referência na Figura 4.31. Se esse nó for selecionado, uma das tensões de nó desconhecidas é a tensão no resistor de 300 Ω, ou seja, v_2 na Figura 4.31. Uma vez conhecida essa tensão, calculamos a potência no resistor de 300 Ω usando a expressão

$$p_{300\Omega} = v_2^2/300.$$

Observe que, além de selecionar o nó de referência, definimos as três tensões de nó v_1, v_2 e v_3 e indicamos que os nós 1 e 3 formam um supernó porque estão conectados por uma fonte de tensão dependente. Fica entendido que uma tensão de nó é uma elevação em relação ao nó de referência; portanto, na Figura 4.31, não inserimos as referências de polaridade das tensões de nó.

O segundo nó que merece consideração como um possível nó de referência é o nó inferior do circuito, como mostrado na Figura 4.32. É um nó atraente, porque a maioria dos ramos está conectada a ele e, assim, as equações de tensão de nó ficam mais fáceis de escrever. Entretanto, determinar a corrente no resistor de 300 Ω ou a tensão que passa por ele requer um cálculo adicional tão logo conheçamos as tensões de nó v_a e v_c. Por exemplo, a corrente no resistor de 300 Ω é $(v_c - v_a)/300$, ao passo que a tensão em seus terminais é $v_c - v_a$.

Comparamos esses dois possíveis nós de referência por meio dos seguintes conjuntos de equações: o primeiro pertence ao circuito mostrado na Figura 4.31 e o segundo é baseado no circuito mostrado na Figura 4.32.

- Conjunto 1 (Figura 4.31)

  No supernó,

$$\frac{v_1}{100} + \frac{v_1 - v_2}{250} + \frac{v_3}{200} + \frac{v_3 - v_2}{400} + \frac{v_3 - (v_2 + 128)}{500} + \frac{v_3 + 256}{150} = 0$$

  Em v_2,

$$\frac{v_2}{300} + \frac{v_2 - v_1}{250} + \frac{v_2 - v_3}{400} + \frac{v_2 + 128 - v_3}{500} = 0.$$

  Pelo supernó, a equação de restrição é

$$v_3 = v_1 - 50i_\Delta = v_1 - \frac{v_2}{6}.$$

- Conjunto 2 (Figura 4.32)

  Em v_a,

$$\frac{v_a}{200} + \frac{v_a - 256}{150} + \frac{v_a - v_b}{100} + \frac{v_a - v_c}{300} = 0.$$

  Em v_c,

$$\frac{v_c}{400} + \frac{v_c + 128}{500} + \frac{v_c - v_b}{250} + \frac{v_c - v_a}{300} = 0.$$

  Pelo supernó, a equação de restrição é

$$v_b = 50i_\Delta = \frac{50(v_c - v_a)}{300} = \frac{v_c - v_a}{6}.$$

Você deve verificar que a solução de qualquer um dos conjuntos leva ao cálculo de uma potência de 16,57 W dissipada no resistor de 300 Ω.

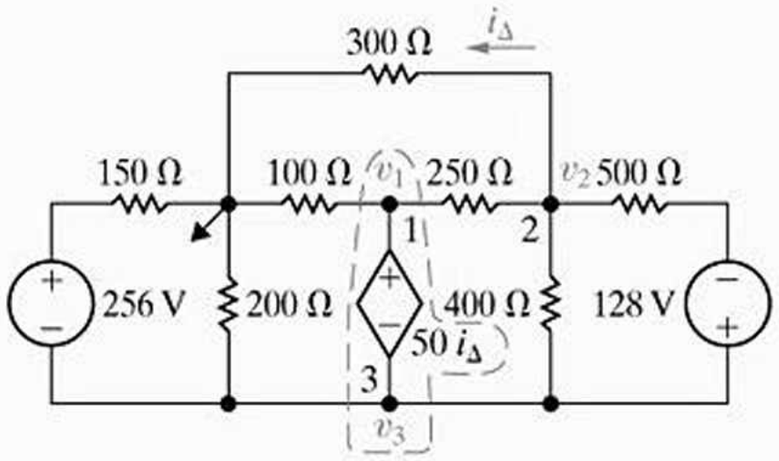


Figura 4.31 ▲ Circuito mostrado na Figura 4.29, com um nó de referência.

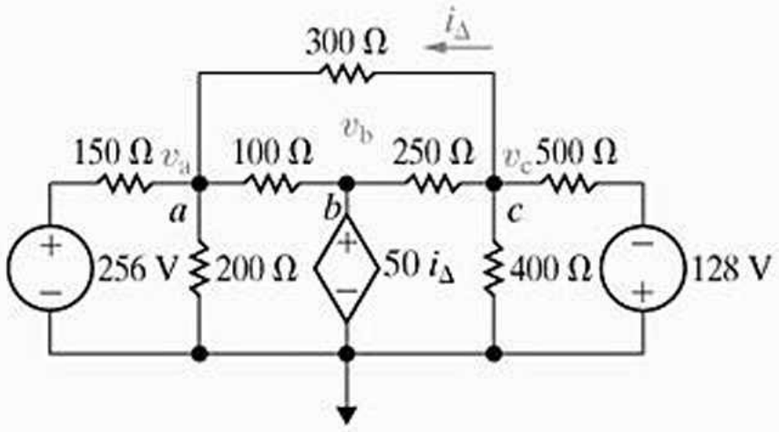


Figura 4.32 ▲ Circuito mostrado na Figura 4.29 com um nó de referência alternativo.

Exemplo 4.7 Comparação entre o método das tensões de nó e o método das correntes de malha

Determine a tensão v_o no circuito mostrado na Figura 4.33.

Solução

À primeira vista, o método das tensões de nó parece atraente porque podemos definir a tensão desconhecida como uma tensão de nó escolhendo o terminal inferior da fonte de corrente dependente como o nó de referência. O circuito tem quatro nós essenciais e duas fontes dependentes controladas por tensão, portanto o método das tensões de nó requer a manipulação de três equações de tensão de nó e duas equações de restrição.

Agora, vamos voltar ao método das correntes de malha para determinar v_o. O circuito contém três ma-

lhas, e podemos usar a da extremidade esquerda para calcular v_o. Se usarmos i_a para denotar a corrente mais à esquerda, então $v_o = 193 - 10i_a$. A presença das duas fontes de corrente reduz o problema à manipulação de uma única equação de supermalha e duas equações de restrição. Por conseqüência, nesse caso, o método das correntes de malha é a técnica mais atraente.

Para ajudá-lo a comparar as duas abordagens, resumimos ambos os métodos. As equações de corrente de malha são baseadas no circuito mostrado na Figura 4.34, e as equações de tensão de nó são baseadas no circuito mostrado na Figura 4.35. A equação de supermalha é

$$193 = 10i_a + 10i_b + 10i_c + 0{,}8v_\theta.$$

e as equações de restrição são

$$i_b - i_a = 0{,}4v_\Delta = 0{,}8i_c$$

$$v_\theta = -7{,}5i_b \text{ e}$$

$$i_c - i_b = 0{,}5.$$

Usamos as equações de restrição para escrever a equação de supermalha em termos de i_a:

$$160 = 80i_a \text{ ou } i_a = 2 \text{ A},$$

$$v_o = 193 - 20 = 173 \text{ V}.$$

As equações de tensão de nó são

$$\frac{v_o - 193}{10} - 0{,}4v_\Delta + \frac{v_o - v_a}{2{,}5} = 0,$$

$$\frac{v_a - v_o}{2{,}5} - 0{,}5 + \frac{v_a - (v_b + 0{,}8v_\theta)}{10} = 0,$$

$$\frac{v_b}{7{,}5} + 0{,}5 + \frac{v_b + 0{,}8v_\theta - v_a}{10} = 0.$$

As equações de restrição são

$$v_\theta = -v_b, \quad v_\Delta = \left[\frac{v_a - (v_b + 0{,}8v_\theta)}{10}\right]2.$$

Usamos as equações de restrição para reduzir as equações de tensão de nó a três equações simultâneas envolvendo v_o, v_a e v_b. Você deve verificar que a abordagem das tensões de nó também resulta em $v_o = 173$ V.

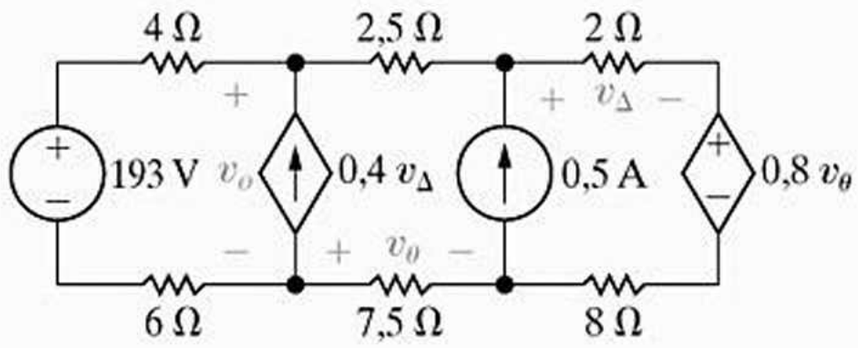


Figura 4.33 ▲ Circuito para o Exemplo 4.7.

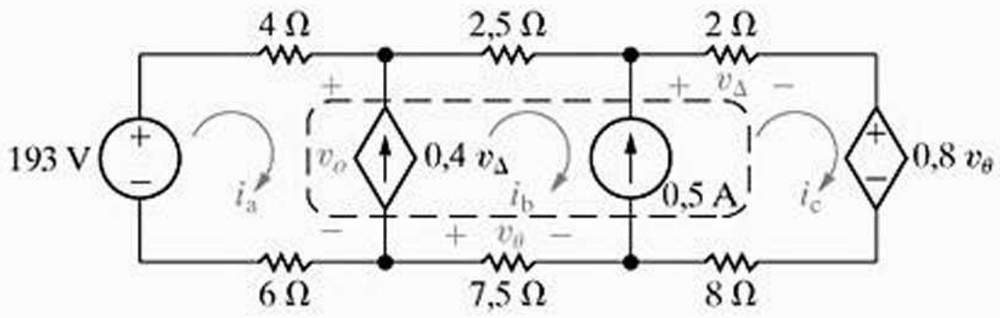


Figura 4.34 ▲ Circuito mostrado na Figura 4.33 com as três correntes de malha.

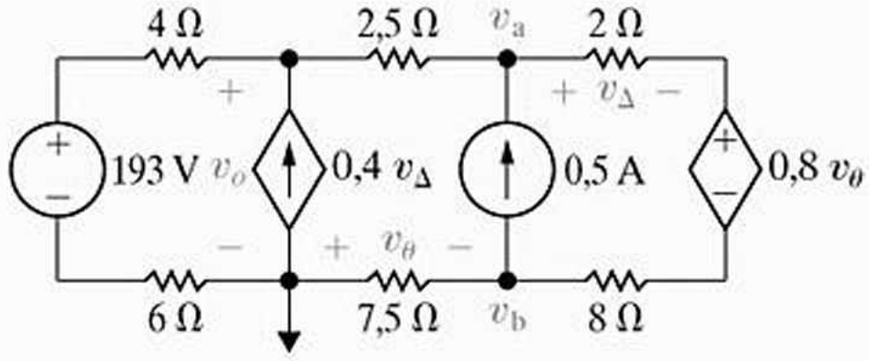
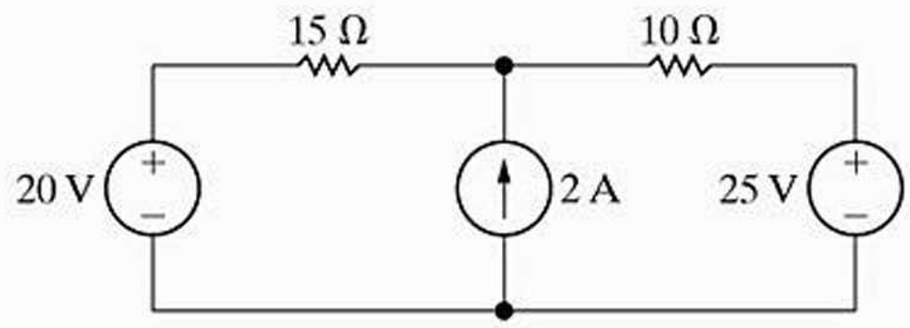


Figura 4.35 ▲ Circuito mostrado na Figura 4.33 com tensões de nó.

✔ PROBLEMA PARA AVALIAÇÃO

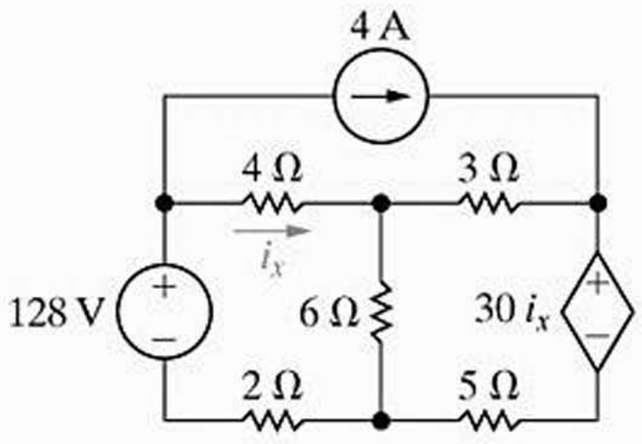
Objetivo 3 — Decidir entre o método das tensões de nó e o método das correntes de malha

4.13 Determine a potência fornecida pela fonte de corrente de 2 A no circuito mostrado.



Resposta: 70 W.

4.14 Determine a potência fornecida pela fonte de corrente de 4 A no circuito mostrado.



Resposta: 40 W.

NOTA: Tente resolver também os problemas 4.54 e 4.56, apresentados no final deste capítulo.

4.9 Transformações de fonte

Embora os métodos das tensões de nó e das correntes de malha sejam técnicas poderosas para resolver circuitos, ainda estamos interessados em métodos que possam ser usados para simplificar circuitos. Reduções série-paralelo e transformações Δ-Y já estão em nossa lista de técnicas de simplificação. Começamos a expandir essa lista com transformações de fonte. Uma *transformação de fonte*, mostrada na Figura 4.36, permite que uma fonte de tensão em série com um resistor seja substituída por uma fonte de corrente em paralelo com o mesmo resistor ou vice-versa. A seta de duas pontas enfatiza que uma transformação de fonte é bilateral; isto é, podemos começar com qualquer das configurações e deduzir a outra.

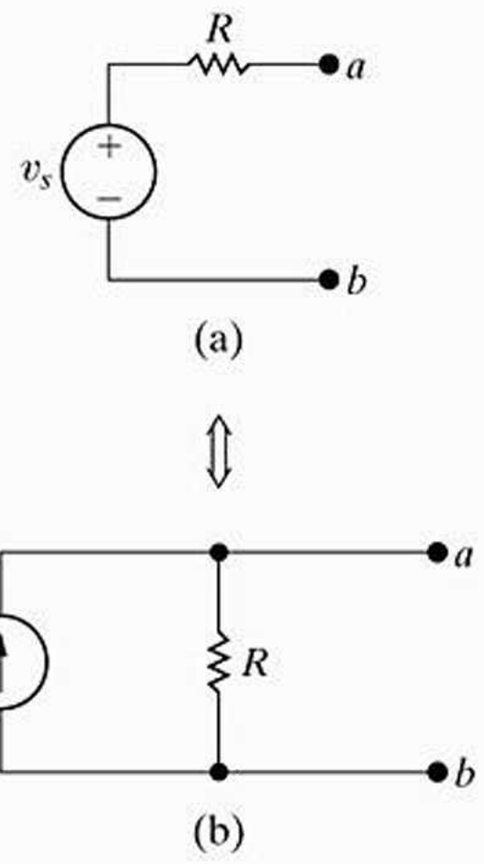


Figura 4.36 ▲ Transformações de fonte.

Precisamos determinar a relação entre v_s e i_s que garanta que as duas configurações da Figura 4.36 sejam equivalentes no que diz respeito aos nós *a*,*b*. A equivalência é conseguida se qualquer resistor R_L experimentar o mesmo fluxo de corrente e, por isso, a mesma queda de tensão, quer esteja conectado entre os nós *a*,*b* da Figura 4.36(a) ou da Figura 4.36(b).

Suponha que R_L esteja conectado entre os nós *a*,*b* na Figura 4.36(a). Usando a lei de Ohm, a corrente em R_L é

$$i_L = \frac{v_s}{R + R_L}. \tag{4.52}$$

Agora, suponha que o mesmo resistor R_L esteja conectado entre os nós *a*,*b* na Figura 4.36(b). Usando a divisão de corrente, a corrente em R_L é

$$i_L = \frac{R}{R + R_L} i_s. \tag{4.53}$$

Se os dois circuitos da Figura 4.36 forem equivalentes, a corrente nesses resistores deve ser a mesma. Igualando o lado direito das equações 4.52 e 4.53 e simplificando,

$$i_s = \frac{v_s}{R}. \tag{4.54}$$

Quando a Equação 4.54 é satisfeita para os circuitos na Figura 4.36, a corrente em R_L é a mesma para ambos os circuitos da figura e para todos os valores de R_L. Se a corrente que passa por R_L for a mesma em ambos os circuitos, então a queda de tensão em R_L também será a mesma em ambos os circuitos, e eles serão equivalentes em relação aos nós *a*,*b*.

Se a polaridade de v_s for invertida, a orientação de i_s deve ser invertida para manter a equivalência.

O Exemplo 4.8 ilustra a utilidade de fazer transformações de fonte para simplificar um problema de análise de circuitos.

Exemplo 4.8 Utilização de transformações de fonte para resolver um circuito

a) Para o circuito mostrado na Figura 4.37, determine a potência associada à fonte de 6 V.
b) Diga se a fonte de 6 V está absorvendo ou fornecendo a potência calculada em (a).

Solução

a) Se estudarmos o circuito mostrado na Figura 4.37, sabendo que a potência associada à fonte de 6 V é de interesse, várias abordagens nos vêm à mente. O circuito tem quatro nós essenciais e seis ramos essenciais, nos quais a corrente é desconhecida. Assim, podemos determinar a corrente no ramo que contém a fonte de 6 V resolvendo tanto as três [6 – (4 – 1)] equações de corrente de malha quanto as três [4 – 1] equações de tensão de nó. Escolher a abordagem das correntes de malha significa calcular a corrente de malha que corresponde à corrente de ramo na fonte de 6 V. Escolher a abordagem das tensões de nó significa calcular a tensão nos terminais do resistor de 30 Ω, a partir da qual a corrente de ramo na fonte de 6 V pode ser calculada. Entretanto, focalizando só uma corrente de ramo, podemos primeiro simplificar o circuito usando transformações de fonte.

Devemos reduzir o circuito de modo que seja preservada a identidade do ramo que contém a fonte de 6 V. Não há nenhuma razão para preservar a identidade do ramo que contém a fonte de 40 V. Começando com esse ramo, podemos transformar a fonte de 40 V em série com o resistor de 5 Ω em uma fonte de corrente de 8 A em paralelo com um resistor de 5 Ω, como mostra a Figura 4.38(a).

Em seguida, podemos substituir a combinação em paralelo dos resistores de 20 Ω e 5 Ω por um resistor de 4 Ω. Esse resistor de 4 Ω está em paralelo com a fonte de 8 A e, portanto, pode ser substituído por uma fonte de 32 V em série com um resistor de 4 Ω, como mostra a Figura 4.38(b). A fonte de 32 V está em série com o resistor de 20 Ω e, por conseguinte, pode ser substituída por uma fonte de corrente de 1,6 A em paralelo com 20 Ω, como mostra a Figura 4.38(c). Os resistores de 20 Ω e 30 Ω em paralelo podem ser

reduzidos a um único resistor de 12 Ω. A combinação em paralelo da fonte de corrente de 1,6 A com o resistor de 12 Ω se transforma em uma fonte de tensão de 19,2 V em série com 12 Ω. A Figura 4.38(d) mostra o resultado dessa última transformação. A corrente na direção da queda de tensão nos terminais da fonte de 6 V é (19,2 – 6)/16, ou 0,825 A. Portanto, a potência associada à fonte de 6 V é

$$p_{6V} = (0{,}825)(6) = 4{,}95 \text{ W}.$$

b) A fonte de tensão está absorvendo potência.

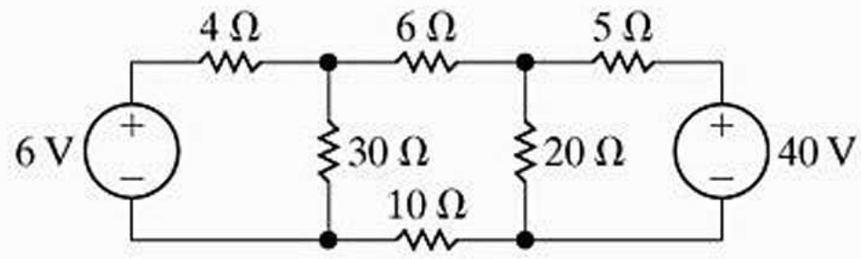
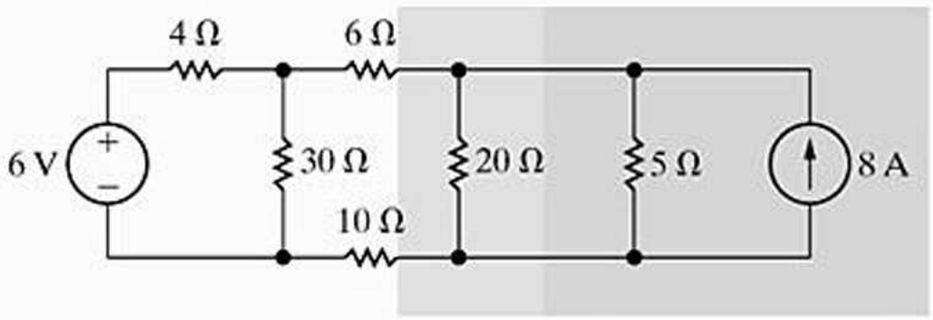
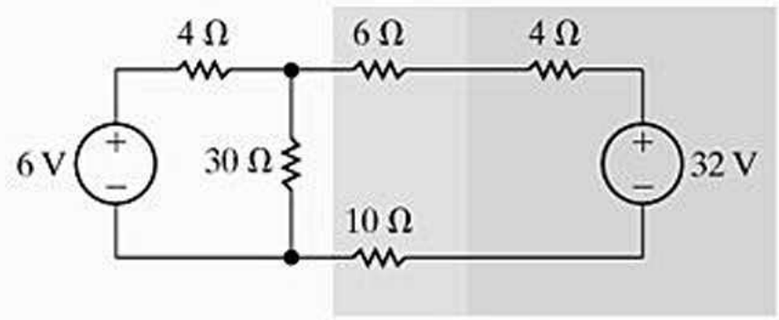


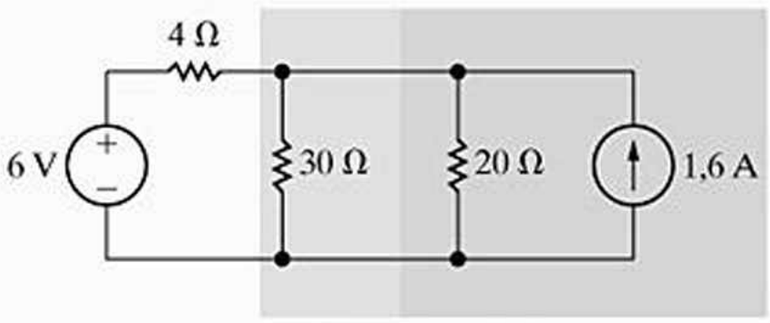
Figura 4.37 ▲ Circuito para o Exemplo 4.8.



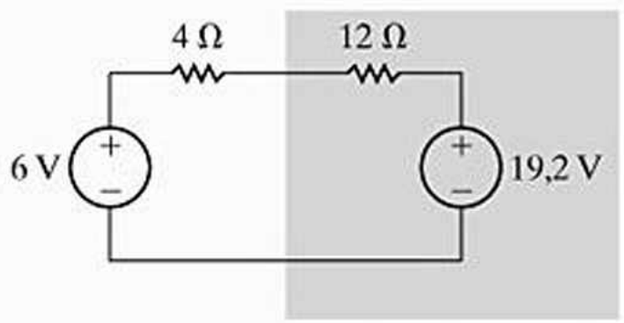
(a) Primeira etapa



(b) Segunda etapa



(c) Terceira etapa



(d) Quarta etapa

Figura 4.38 ▲ Simplificação, etapa por etapa, do circuito mostrado na Figura 4.37.

Uma pergunta que surge da utilização da transformação de fonte demonstrada na Figura 4.38 é: "O que acontece se houver uma resistência R_p em paralelo com a fonte de tensão ou uma resistência R_s em série com a fonte de corrente?" Em ambos os casos, a resistência não tem nenhum efeito sobre o circuito equivalente que prevê o comportamento em relação aos terminais *a*,*b*. A Figura 4.39 resume essa observação.

Os dois circuitos retratados na Figura 4.39(a) são equivalentes no que diz respeito aos terminais *a*,*b* porque produzem a mesma tensão e corrente em qualquer resistor R_L inserido entre os nós *a*,*b*. O mesmo pode ser dito para os circuitos na Figura 4.39(b). O Exemplo 4.9 ilustra a aplicação dos circuitos equivalentes descritos na Figura 4.39.

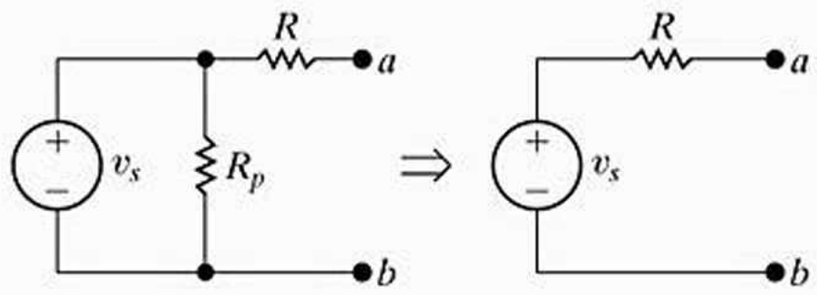


Figura 4.39 ▲ Circuitos equivalentes que contêm uma resistência em paralelo com uma fonte de tensão ou em série com uma fonte de corrente.

Exemplo 4.9 Utilização de técnicas especiais de transformação de fonte

a) Use a transformação de fonte para determinar a tensão v_o no circuito mostrado na Figura 4.40.

b) Determine a potência desenvolvida pela fonte de tensão de 250 V.

c) Determine a potência desenvolvida pela fonte de corrente de 8 A.

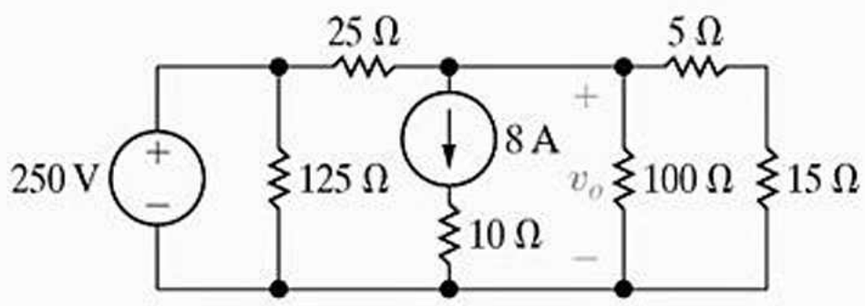


Figura 4.40 ▲ Circuito para o Exemplo 4.9.

Solução

a) Começamos retirando os resistores de 125 Ω e 10 Ω porque o resistor de 125 Ω está conectado à fonte de tensão de 250 V e o resistor de 10 Ω está conectado em série com a fonte de corrente de 8 A. Também combinamos os resistores ligados em série em uma única resistência de 20 Ω. A Figura 4.41 mostra o circuito simplificado.

Usamos uma transformação de fonte para substituir a fonte de 250 V e o resistor de 25 Ω por uma fonte de 10 A em paralelo com o resistor de 25 Ω, como mostra a Figura 4.42. Podemos, agora, simplificar o circuito mostrado na Figura 4.42 usando a lei das correntes de Kirchhoff para combinar as fontes de corrente em paralelo em uma única fonte. Os resistores em paralelo são combinados em um único resistor. A Figura 4.43 mostra o resultado. Por conseqüência, $v_o = 20$ V.

b) A corrente fornecida pela fonte de 250 V é igual à soma da corrente no resistor de 125 Ω e da corrente no resistor de 25 Ω. Assim,

$$i_s = \frac{250}{125} + \frac{250 - 20}{25} = 11{,}2 \text{ A}.$$

Portanto, a potência fornecida pela fonte de tensão é

$$p_{250\text{V}}(\text{desenvolvida}) = (250)(11{,}2) = 2.800 \text{ W}.$$

c) Para encontrar a potência fornecida pela fonte de corrente de 8 A, em primeiro lugar determinamos a tensão na fonte. Se representarmos a tensão na fonte por v_s, positiva no terminal superior da fonte, obteremos

$$v_s + 8(10) = v_o = 20 \text{ ou } v_s = -60 \text{ V}$$

e a potência fornecida pela fonte de 8 A é 480 W. Observe que os resistores de 125 Ω e 10 Ω não afetam o valor de v_o, mas sim os cálculos da potência.

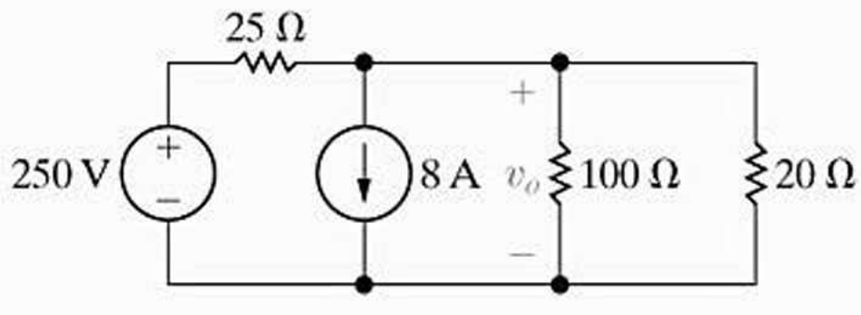


Figura 4.41 ▲ Versão simplificada do circuito mostrado na Figura 4.40.

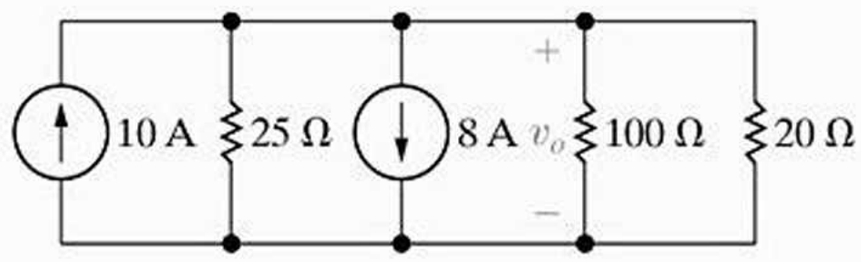


Figura 4.42 ▲ Circuito mostrado na Figura 4.41, após uma transformação de fonte.

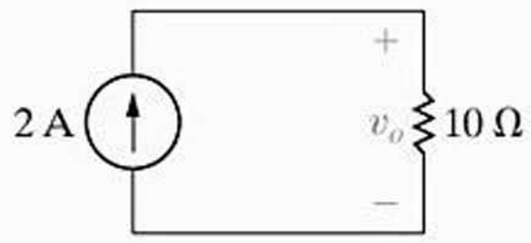
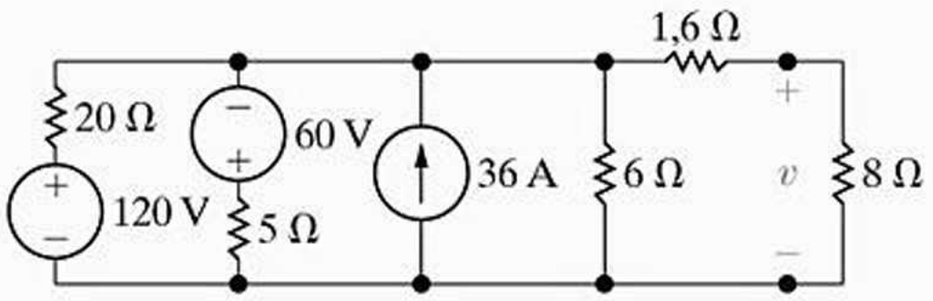


Figura 4.43 ▲ Circuito mostrado na Figura 4.42, após a combinação de fontes e resistores.

✔ PROBLEMA PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 4 — Entender a transformação de fonte

4.15 a) Use uma série de transformações de fonte para determinar a tensão v no circuito mostrado.
b) Qual é a potência fornecida pela fonte de 120 V ao circuito?



Resposta: (a) 48 V;
(b) 374,4 W.

NOTA: Tente resolver também os problemas 4.59 e 4.62, apresentados no final deste capítulo.

4.10 Equivalentes de Thévenin e Norton

Na análise de circuitos, às vezes nos interessa o que acontece em um par específico de terminais. Por exemplo, quando ligamos uma torradeira a uma tomada, estamos interessados principalmente na tensão e na corrente nos terminais da torradeira. Temos pouco ou nenhum interesse no efeito que ligar a torradeira causa às tensões ou correntes em outros lugares do circuito que alimenta a tomada. Podemos expandir esse interesse no comportamento do terminal a um conjunto de eletrodomésticos, cada qual com uma demanda de potência diferente. Então, estamos interessados em como a tensão e a corrente da tomada variam quando trocamos o eletrodoméstico. Em outras palavras, estamos interessados no comportamento do circuito alimentador da tomada, mas em relação aos terminais da tomada.

Equivalentes de Thévenin e Norton são técnicas de simplificação de circuitos que focalizam o comportamento de terminais e, por isso, são uma ajuda extremamente valiosa na análise. Embora aqui os abordemos em relação a circuitos resistivos, os circuitos equivalentes de Thévenin e Norton podem ser usados para representar qualquer circuito composto de elementos lineares.

Podemos descrever melhor um circuito equivalente de Thévenin utilizando a Figura 4.44, que representa um circuito qualquer composto por fontes (tanto independentes como dependentes) e resistores. As letras *a* e *b* denotam o par de terminais de interesse. A Figura 4.44(b) mostra o equivalente de Thévenin. Assim, um *circuito equivalente de Thévenin* é uma fonte de tensão independente V_{Th} em série com um resistor R_{Th}, que substitui uma interligação de fontes e resistores. Essa combinação em série de V_{Th} e R_{Th} é equivalente ao circuito original no sentido de que, se ligarmos a mesma carga aos terminais *a*,*b* de cada circuito, obteremos as mesmas tensão e corrente nos terminais da carga. Essa equivalência vale para todos os valores possíveis de resistência de carga.

Para representar o circuito original por seu equivalente de Thévenin, temos de saber determinar a tensão de Thévenin V_{Th} e a resistência de Thévenin R_{Th}. Em primeiro lugar, observamos que, se a resistência de carga for infinitamente grande, temos uma condição de circuito aberto. A tensão de circuito aberto nos terminais *a*,*b* do circuito mostrado na Figura 4.44(b) é V_{Th}. Por hipótese, ela deve ser a mesma que a tensão de circuito aberto nos terminais *a*,*b* do circuito original. Portanto, para calcular a tensão de Thévenin V_{Th}, simplesmente calculamos a tensão de circuito aberto no circuito original.

Reduzir a resistência de carga a zero nos dá uma condição de curto-circuito. Se estabelecermos um curto-circuito nos terminais *a*,*b* do circuito equivalente de Thévenin, a corrente de curto-circuito dirigida de *a* a *b* será

$$i_{sc} = \frac{V_{Th}}{R_{Th}}. \tag{4.55}$$

Por hipótese, essa corrente de curto-circuito deve ser idêntica à corrente que existe em um curto-circuito estabelecido nos terminais *a*,*b* da rede original. Pela Equação 4.55,

$$R_{Th} = \frac{V_{Th}}{i_{sc}}. \tag{4.56}$$

Assim, a resistência de Thévenin é a razão entre a tensão de circuito aberto e a corrente de curto-circuito.

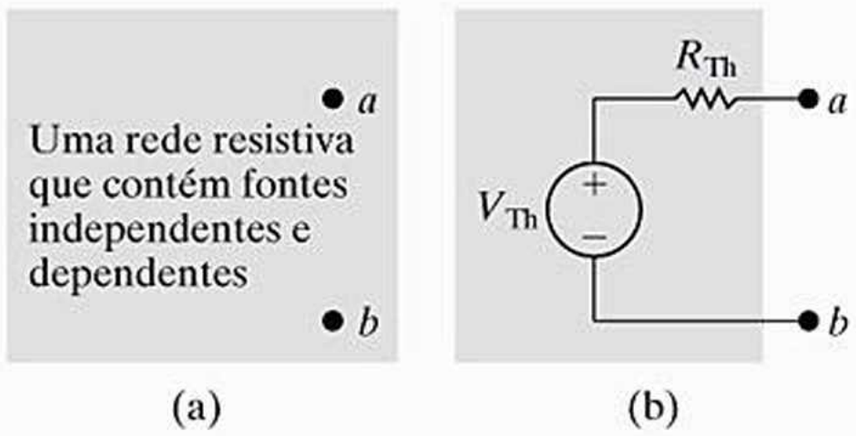


Figura 4.44 ▲ (a) Circuito geral. (b) Circuito equivalente de Thévenin.

Como determinar o equivalente de Thévenin

Para obter o equivalente de Thévenin do circuito mostrado na Figura 4.45, em primeiro lugar, calculamos a tensão de circuito aberto entre os terminais v_{ab}. Observe que, quando os terminais *a*,*b* estão abertos, não há nenhuma corrente no resistor de 4 Ω. Portanto, a tensão de circuito aberto v_{ab} é idêntica à tensão na fonte de corrente de 3 A, v_1. Determinamos a tensão resolvendo uma única equação de tensão de nó. Escolhendo o nó inferior como nó de referência, obtemos

$$\frac{v_1 - 25}{5} + \frac{v_1}{20} - 3 = 0. \tag{4.57}$$

Resolvendo para v_1, temos

$$v_1 = 32 \text{ V}. \tag{4.58}$$

Assim, a tensão de Thévenin para o circuito é 32 V.

A próxima etapa é estabelecer um curto-circuito entre os terminais e calcular a corrente resultante. A Figura 4.46 mostra a situação. Observe que a corrente de curto-circuito está na direção da queda de tensão de circuito aberto nos terminais *a*,*b*. Se a corrente de curto-circuito estiver na direção da elevação de tensão de circuito aberto nos terminais, um sinal de menos deve ser inserido na Equação 4.56.

A corrente de curto-circuito (i_{sc}) é determinada com facilidade, uma vez conhecida v_2. Portanto, o problema se reduz a determinar v_2 na situação de curto-circuito. Mais uma vez, se usarmos o nó inferior como nó de referência, a equação para v_2 se tornará

$$\frac{v_2 - 25}{5} + \frac{v_2}{20} - 3 + \frac{v_2}{4} = 0. \tag{4.59}$$

Resolvendo a Equação 4.59 para v_2, temos

$$v_2 = 16 \text{ V}. \tag{4.60}$$

Então, a corrente de curto-circuito é

$$i_{sc} = \frac{16}{4} = 4 \text{ A}. \tag{4.61}$$

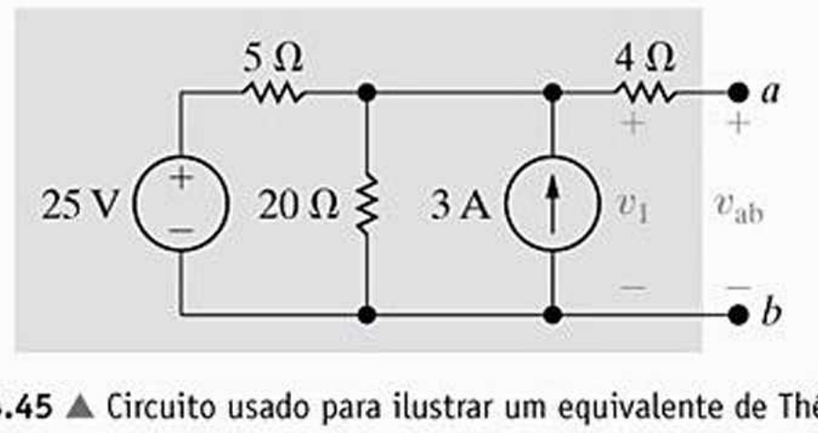


Figura 4.45 ▲ Circuito usado para ilustrar um equivalente de Thévenin.

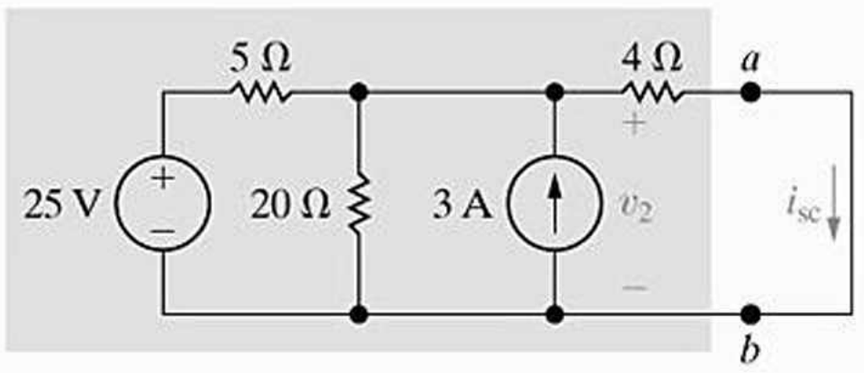


Figura 4.46 ▲ Circuito mostrado na Figura 4.45 com terminais *a* e *b* em curto-circuito.

Agora, determinamos a resistência de Thévenin substituindo os resultados numéricos das equações 4.58 e 4.61 na Equação 4.56:

$$R_{\text{Th}} = \frac{V_{\text{Th}}}{i_{\text{sc}}} = \frac{32}{4} = 8\ \Omega. \tag{4.62}$$

A Figura 4.47 mostra o equivalente de Thévenin para o circuito mostrado na Figura 4.45.

Você deve verificar que, se um resistor de 24 Ω estiver ligado aos terminais *a*,*b* na Figura 4.45, a tensão no resistor será de 24 V e a corrente será de 1 A, como seria o caso com o circuito de Thévenin da Figura 4.47. Essa mesma equivalência entre o circuito nas figuras 4.45 e 4.47 vale para qualquer valor de resistor conectado entre os nós *a*,*b*.

O equivalente de Norton

Um *circuito equivalente de Norton* consiste em uma fonte de corrente dependente em paralelo com a resistência equivalente de Norton. Podemos obtê-lo de um circuito equivalente de Thévenin por uma simples transformação de fonte. Assim, a corrente de Norton é igual à corrente de curto-circuito nos terminais de interesse, e a resistência de Norton é idêntica à resistência de Thévenin.

Como usar transformações de fonte

Às vezes, podemos fazer uso eficaz de transformações de fonte para obter o circuito equivalente de Thévenin ou de Norton. Por exemplo, podemos obter os equivalentes de Thévenin e de Norton do circuito apresentado na Figura 4.45 fazendo a série de transformações de fonte mostrada na Figura 4.48. Essa técnica é mais útil quando a rede contém somente fontes independentes. A presença de fontes dependentes requer preservar a identidade das tensões e/ou correntes de controle, e essa restrição normalmente proíbe a redução contínua do circuito por transformações de fonte. Discutimos o problema de obter o equivalente de Thévenin quando um circuito contém fontes dependentes no Exemplo 4.10.

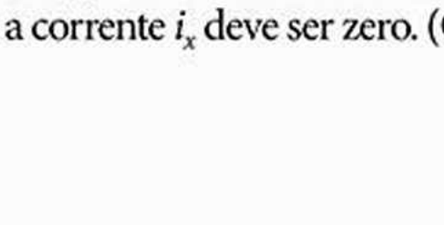
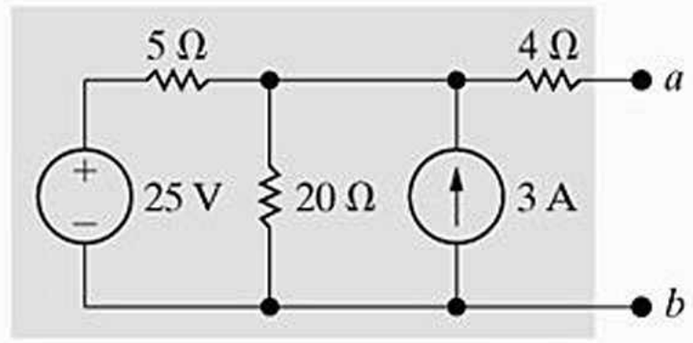
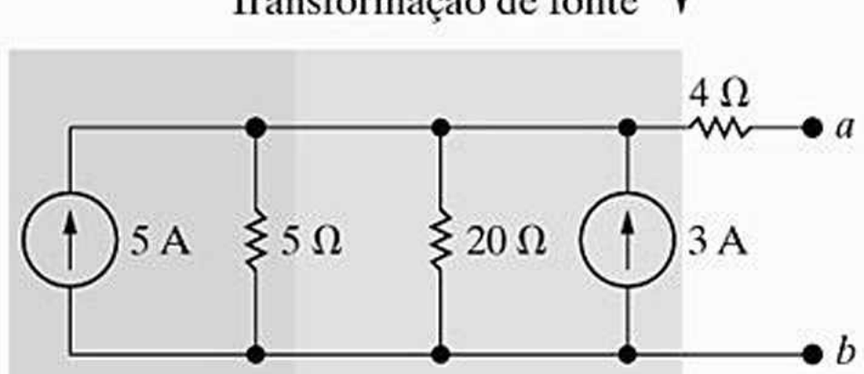


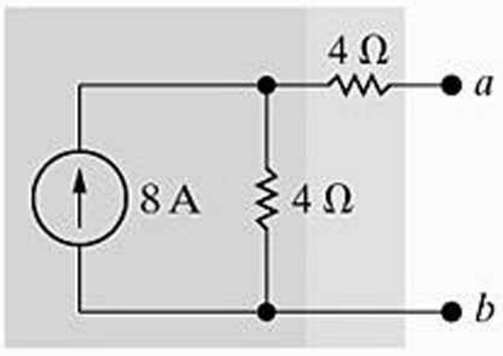
Figura 4.47 ▲ Equivalente de Thévenin do circuito mostrado na Figura 4.45.



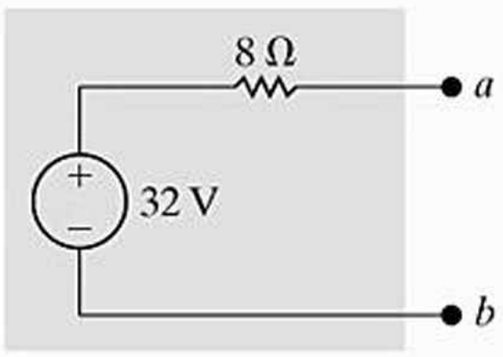
Etapa 1: Transformação de fonte



Etapa 2: Fontes paralelas e resistores paralelos combinados



Etapa 3: Transformação de fonte; resistores em série combinados, produzindo o circuito equivalente de Thévenin



Etapa 4: Transformação de fonte, produzindo o circuito equivalente de Norton

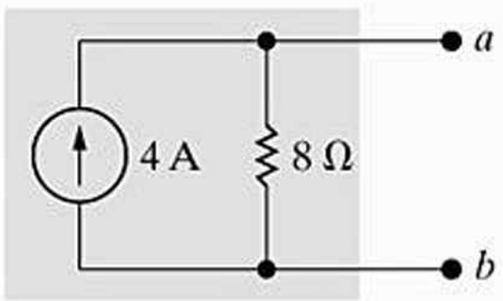


Figura 4.48 ▲ Dedução, etapa por etapa, dos equivalentes de Thévenin e Norton do circuito mostrado na Figura 4.45.

Exemplo 4.10 Obtenção do equivalente de Thévenin de um circuito com uma fonte dependente

Obtenha o equivalente de Thévenin para o circuito que contém fontes dependentes mostrado na Figura 4.49.

Solução

A primeira etapa na análise do circuito da Figura 4.49 é reconhecer que a corrente i_x deve ser zero. (Observe a ausência de um caminho de retorno para i_x caso ela entre na porção esquerda do circuito.) A tensão de circuito aberto, ou de Thévenin, será a tensão que passa pelo resistor de 25 Ω. Com $i_x = 0$,

$$V_{\text{Th}} = v_{\text{ab}} = (-20\text{i})(25) = -500i.$$

A corrente i é

$$i = \frac{5 - 3v}{2000} = \frac{5 - 3V_{Th}}{2000}.$$

Ao escrever a equação para i, reconhecemos que a tensão de Thévenin é idêntica à tensão de controle. Quando combinamos essas duas equações, obtemos

$$V_{Th} = -5 \text{ V}.$$

Para calcular a corrente de curto-circuito, estabelecemos um curto-circuito em a,b. Se os terminais a,b estão em curto-circuito, a tensão de controle v é nula. Portanto, o circuito apresentado na Figura 4.49 torna-se o mostrado na Figura 4.50. Com o curto-circuito em paralelo com o resistor de 25 Ω, toda a corrente da fonte de corrente dependente passa pelo curto-circuito, portanto

$$i_{sc} = -20i.$$

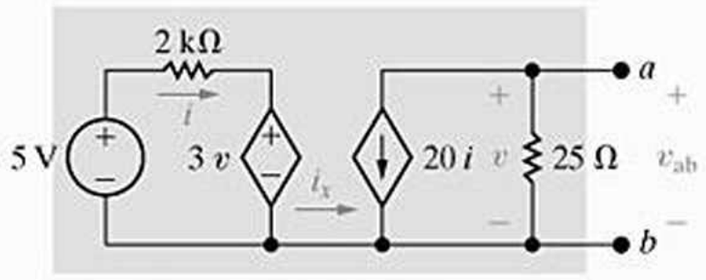


Figura 4.49 ▲ Circuito usado para ilustrar um equivalente de Thévenin quando o circuito contém fontes dependentes.

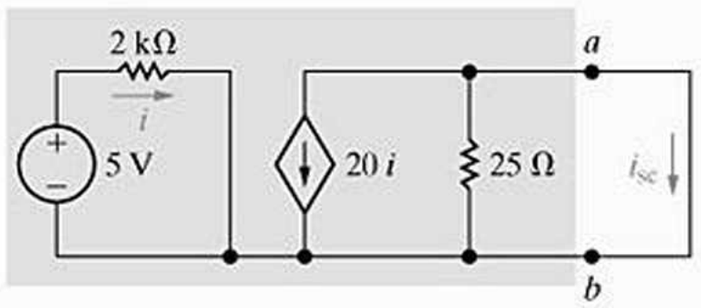


Figura 4.50 ▲ Circuito mostrado na Figura 4.49 com terminais a e b em curto-circuito.

Como a tensão de controle da fonte de tensão dependente foi reduzida a zero, a corrente de controle da fonte de corrente dependente é

$$i = \frac{5}{2.000} = 2{,}5 \text{ mA}.$$

Combinar essas duas equações resulta em uma corrente de curto-circuito de

$$i_{sc} = -20(2{,}5) = -50 \text{ mA}.$$

De i_{sc} e V_{Th} obtemos

$$R_{Th} = \frac{V_{Th}}{i_{sc}} = \frac{-5}{-50} \times 10^3 = 100 \ \Omega.$$

A Figura 4.51 ilustra o equivalente de Thévenin para o circuito mostrado na Figura 4.49. Observe que as marcas de polaridade de referência na fonte de tensão de Thévenin da Figura 4.51 estão de acordo com a equação precedente para V_{Th}.

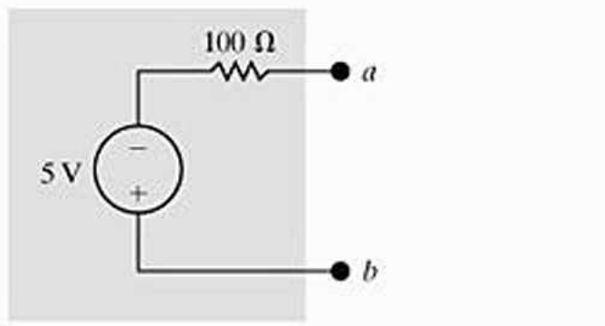
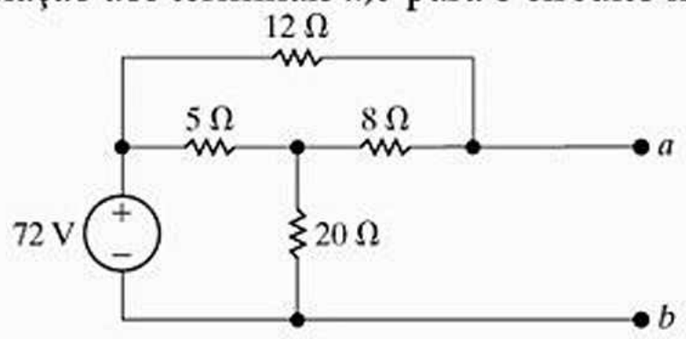


Figura 4.51 ▲ Equivalente de Thévenin para o circuito mostrado na Figura 4.49.

✔ PROBLEMAS PARA AVALIAÇÃO

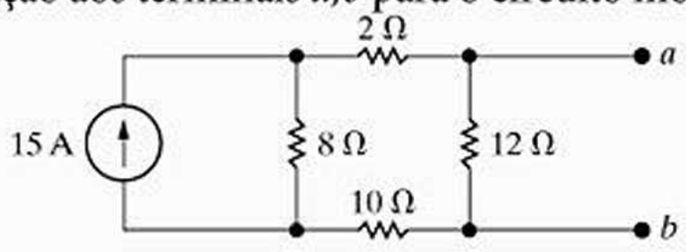
Objetivo 5 — Entender os equivalentes de Thévenin e de Norton

4.16 Obtenha o circuito equivalente de Thévenin com relação aos terminais a,b para o circuito mostrado.



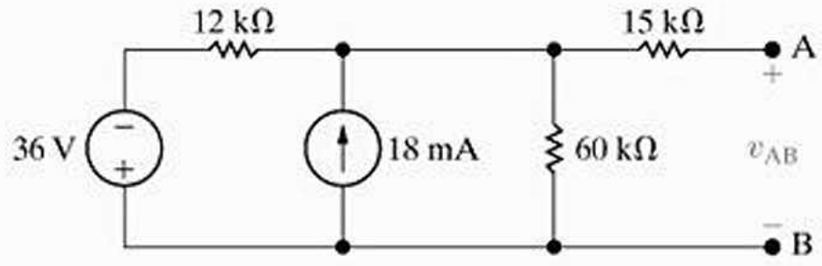
Resposta: $V_{ab} = V_{Th} = 64{,}8$ V, $R_{Th} = 6$ Ω.

4.17 Obtenha o circuito equivalente de Norton com relação aos terminais a,b para o circuito mostrado.



Resposta: $I_N = 6$ A (dirigido para a), $R_N = 7{,}5$ Ω.

4.18 Um voltímetro com uma resistência interna de 100 kΩ é usado para medir a tensão v_{ab} no circuito mostrado. Qual é a leitura do voltímetro?



Resposta: 120 V.

NOTA: Tente resolver também os problemas 4.63, 4.66 e 4.67, apresentados no final deste capítulo.

4.11 Outros métodos para a obtenção de um equivalente de Thévenin

A técnica para determinar R_{Th}, que discutimos e ilustramos na Seção 4.10, nem sempre é o método mais fácil disponível. Há dois outros métodos que, de modo geral, são mais simples de usar. O primeiro é útil se a rede contiver somente fontes independentes. Para calcular R_{Th} para tal rede, em primeiro lugar, eliminamos todas as fontes independentes e, então, calculamos a resistência vista no par de terminais de interesse. Uma fonte de tensão é eliminada substituindo-a por um curto-circuito. Uma fonte de corrente é eliminada substituindo-a por um circuito aberto. Por exemplo, considere o circuito mostrado na Figura 4.52. Eliminar as fontes independentes simplifica o circuito para o mostrado na Figura 4.53. A resistência vista nos terminais a,b é R_{ab}, que consiste no resistor de 4 Ω em série com as combinações em paralelo dos resistores de 5 e 20 Ω. Assim,

$$R_{ab} = R_{Th} = 4 + \frac{5 \times 20}{25} = 8\ \Omega. \tag{4.63}$$

Observe que o cálculo de R_{Th} com a Equação 4.63 é muito mais simples do que com as equações 4.57–4.62.

Se o circuito ou rede contiver fontes dependentes, um procedimento alternativo para determinar a resistência de Thévenin R_{Th} está descrito a seguir. Em primeiro lugar, elimine todas as fontes independentes e, então, aplique uma fonte auxiliar de tensão ou de corrente aos terminais a,b. A resistência de Thévenin é igual à razão entre a tensão nos terminais da fonte auxiliar e a corrente fornecida por ela. O Exemplo 4.11 ilustra esse procedimento alternativo para determinar R_{Th} usando o mesmo circuito do Exemplo 4.10.

Em geral, esses cálculos são mais fáceis do que os envolvidos na determinação da corrente de curto-circuito. Além do mais, em uma rede que contém somente resistores e fontes dependentes, você deve usar o método alternativo, porque a razão entre a tensão de Thévenin e a corrente de curto-circuito é indeterminada. Isto é, é uma razão do tipo 0/0.

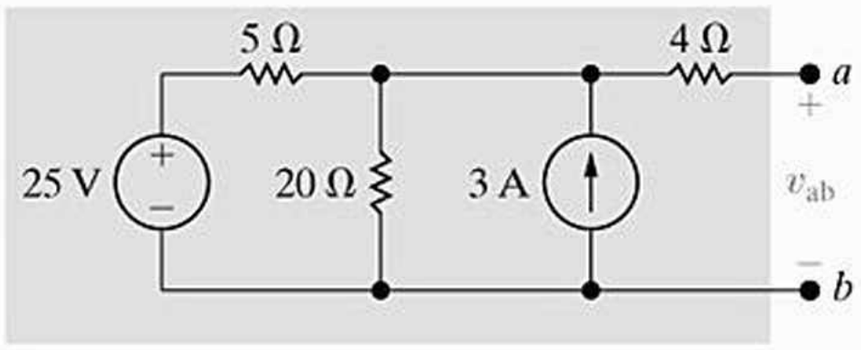


Figura 4.52 ▲ Circuito usado para ilustrar um equivalente de Thévenin.

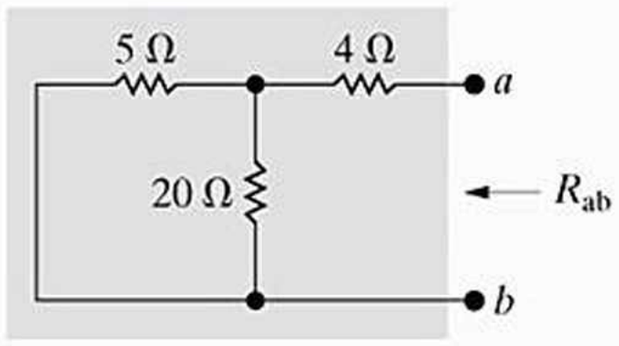


Figura 4.53 ▲ Circuito mostrado na Figura 4.52 após a eliminação das fontes independentes.

Exemplo 4.11 Obtenção do equivalente de Thévenin usando uma fonte auxiliar

Determine a resistência de Thévenin R_{Th} para o circuito da Figura 4.49 usando o método alternativo descrito.

Solução

Em primeiro lugar, eliminamos a fonte de tensão independente e, então, alimentamos o circuito a partir dos terminais a,b, com uma fonte auxiliar de tensão ou de corrente. Se aplicarmos uma fonte auxiliar de tensão, saberemos qual é a tensão da fonte de tensão dependente e, por conseguinte, qual é a corrente de controle i. Portanto, optamos pela fonte auxiliar de tensão. A Figura 4.54 mostra o circuito para o cálculo da resistência de Thévenin.

A fonte auxiliar de tensão aplicada externamente é chamada de v_T, e a corrente que ela fornece ao circuito, de i_T. Para determinar a resistência de Thévenin, simplesmente resolvemos o circuito mostrado na Figura 4.54 e calculamos a razão entre a tensão e a corrente na fonte auxiliar; isto é, $R_{Th} = v_T/i_T$. Pela Figura 4.54,

$$i_T = \frac{v_T}{25} + 20i, \tag{4.64}$$

$$i = \frac{-3v_T}{2}\ \text{mA}. \tag{4.65}$$

Então, substituímos a Equação 4.65 na Equação 4.64 e obtemos a razão v_T/i_T a partir da equação resultante:

$$i_T = \frac{v_T}{25} - \frac{60v_T}{2000} \tag{4.66}$$

$$\frac{i_T}{v_T} = \frac{1}{25} - \frac{6}{200} = \frac{50}{5.000} = \frac{1}{100}. \tag{4.67}$$

Pelas equações 4.66 e 4.67,

$$R_{Th} = \frac{v_T}{i_T} = 100\ \Omega. \tag{4.68}$$

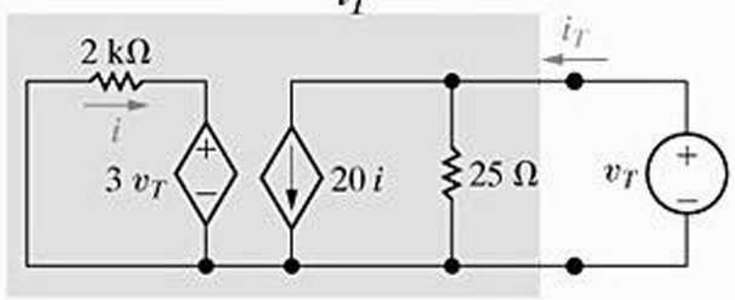
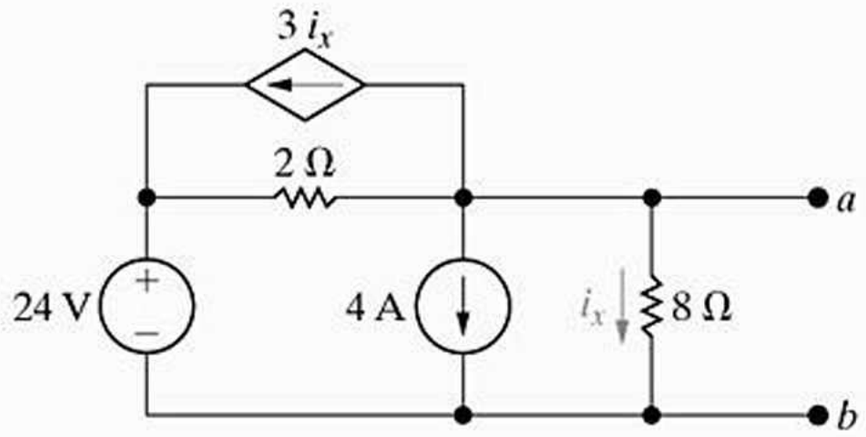


Figura 4.54 ▲ Método alternativo para calcular a resistência de Thévenin.

✔ PROBLEMAS PARA AVALIAÇÃO

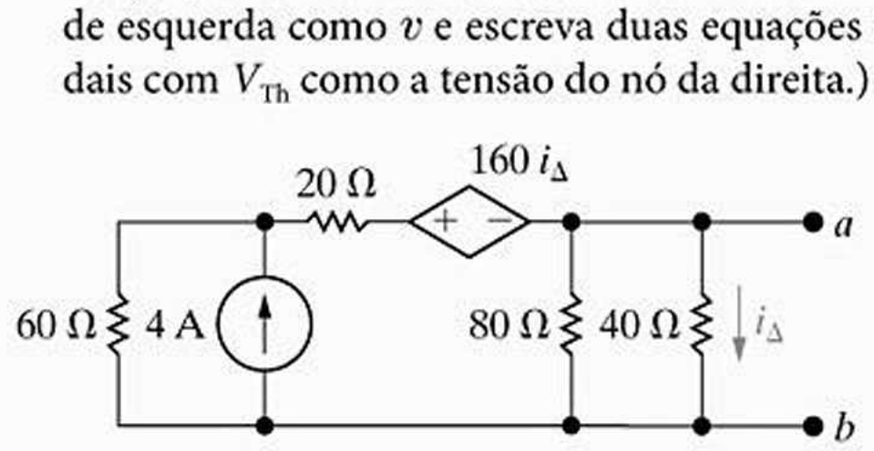
Objetivo 5 — Entender os equivalentes de Thévenin e de Norton

4.19 Obtenha o circuito equivalente de Thévenin com relação aos terminais *a,b* para o circuito mostrado.



Resposta: $V_{Th} = v_{ab} = 8$ V, $R_{Th} = 1\ \Omega$.

4.20 Obtenha o circuito equivalente de Thévenin com relação aos terminais *a,b* para o circuito mostrado. (*Sugestão:* defina a tensão no nó da extremidade esquerda como v e escreva duas equações nodais com V_{Th} como a tensão do nó da direita.)



Resposta: $V_{Th} = v_{ab} = 30$ V, $R_{Th} = 10\ \Omega$.

NOTA: Tente resolver também os problemas 4.71 e 4.77, apresentados no final deste capítulo.

Utilização do equivalente de Thévenin no circuito amplificador

Às vezes, podemos usar um equivalente de Thévenin para reduzir uma porção de um circuito, de modo a conseguir uma grande simplificação da análise da rede maior. Vamos retornar ao circuito apresentado pela primeira vez na Seção 2.5 e subseqüentemente analisado nas seções 4.4 e 4.7. Para auxiliar nossa discussão, desenhamos novamente o circuito e identificamos as correntes de ramo de interesse, como mostra a Figura 4.55.

Como nossa análise anterior mostrou, i_B é a chave para determinar as outras correntes de ramo. Desenhamos novamente o circuito, como mostra a Figura 4.56, para preparar a substituição do subcircuito à esquerda de V_0 por seu equivalente de Thévenin. Você já deve saber que essa modificação não causa nenhum efeito sobre as correntes de ramo i_1, i_2, i_B e i_E.

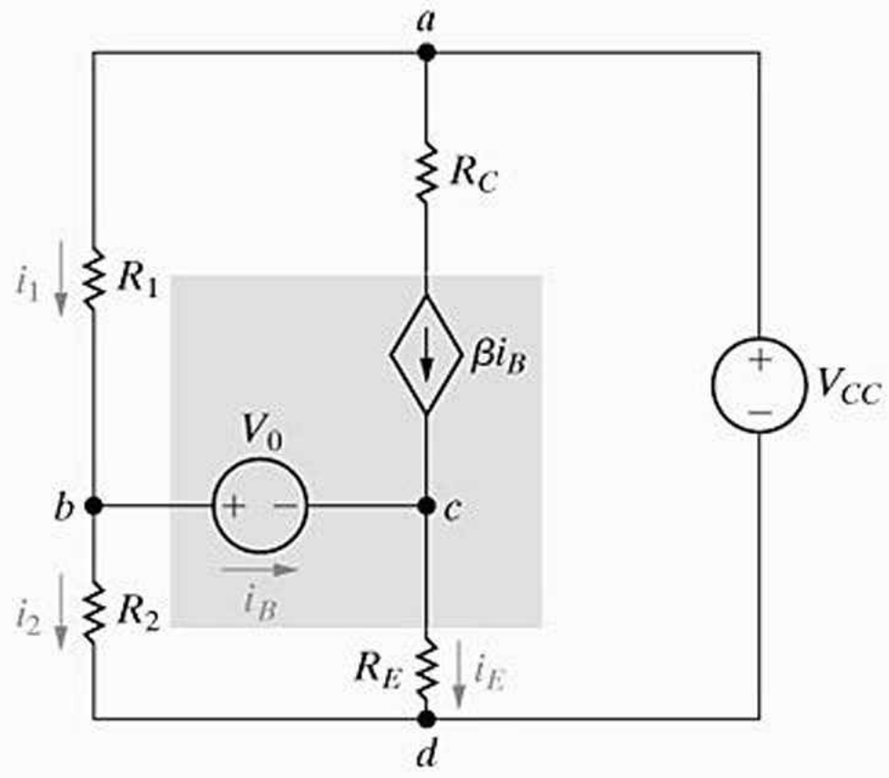


Figura 4.55 ▲ Utilização de um circuito equivalente de Thévenin em análise de circuitos.

Agora, substituímos o circuito composto por V_{CC}, R_1 e R_2 por um equivalente de Thévenin, com relação aos terminais *b,d*. A tensão e resistência de Thévenin são

$$V_{Th} = \frac{V_{CC}R_2}{R_1 + R_2}, \tag{4.69}$$

$$R_{Th} = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}. \tag{4.70}$$

Com o equivalente de Thévenin, o circuito da Figura 4.56 torna-se o mostrado na Figura 4.57.

Agora, deduzimos uma equação para i_B, simplesmente somando as tensões ao longo da malha da esquerda. Ao escrever essa equação de malha, reconhecemos que $i_E = (1 + \beta)i_B$. Assim,

$$V_{Th} = R_{Th}i_B + V_0 + R_E(1 + \beta)i_B, \tag{4.71}$$

da qual

$$i_B = \frac{V_{Th} - V_0}{R_{Th} + (1 + \beta)R_E}. \tag{4.72}$$

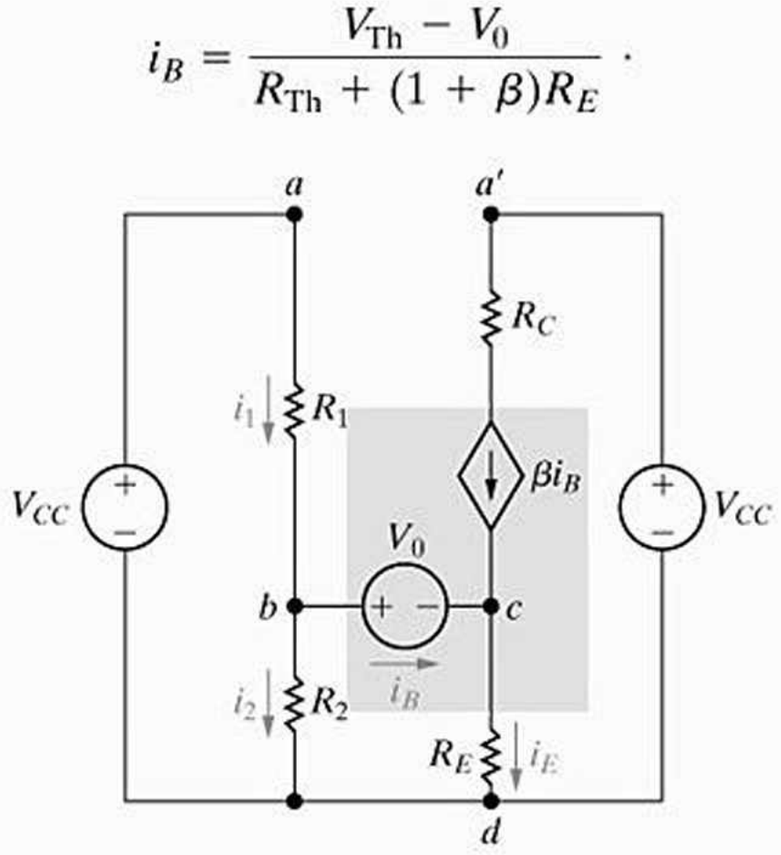


Figura 4.56 ▲ Versão modificada do circuito mostrado na Figura 4.55.

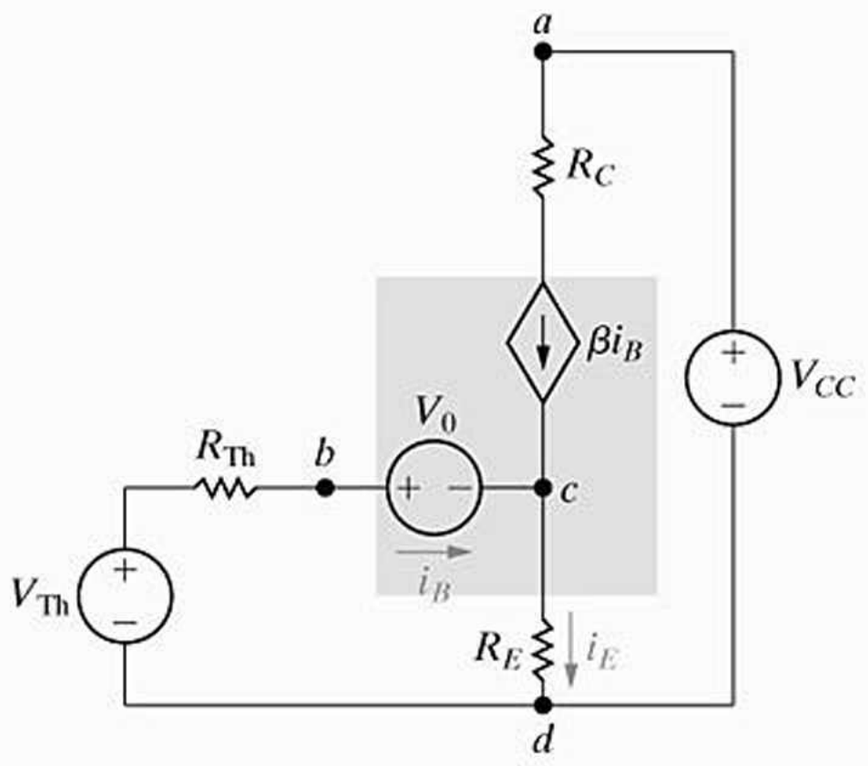


Figura 4.57 ▲ Circuito mostrado na Figura 4.56 modificado por um equivalente de Thévenin.

Quando substituímos as equações 4.69 e 4.70 na Equação 4.72, obtemos a mesma expressão da Equação 2.25. Observe que, quando incorporamos o equivalente de Thévenin ao circuito original, podemos obter a solução escrevendo uma única equação.

4.12 Máxima transferência de potência

A análise de circuitos desempenha um importante papel no estudo de sistemas projetados para transferir potência de uma fonte para uma carga. Discutimos transferência de potência em termos de dois tipos básicos de sistemas. O primeiro enfatiza a eficiência da transferência de potência. As concessionárias de energia elétrica são um bom exemplo porque se preocupam com a geração, a transmissão e a distribuição de grandes quantidades de energia elétrica. Se uma concessionária de energia elétrica for ineficiente, uma grande porcentagem da energia gerada é perdida nos processos de transmissão e distribuição e, portanto, desperdiçada.

O segundo tipo básico de sistema enfatiza a quantidade de potência transferida. Sistemas de comunicação e instrumentação são bons exemplos porque na transmissão de informação, ou dados, por meio de sinais elétricos, a potência disponível no transmissor ou detector é limitada. Portanto, é desejável transmitir a maior quantidade possível dessa potência ao receptor, ou carga. Em tais aplicações, a quantidade de potência que está sendo transferida é pequena, portanto a eficiência da transferência não é uma preocupação das mais importantes. Consideramos, a seguir, a máxima transferência de potência em sistemas que podem ser modelados por um circuito puramente resistivo.

A máxima transferência de potência pode ser mais bem descrita com o auxílio do circuito mostrado na Figura 4.58. Admitimos uma rede resistiva que contém fontes independentes e dependentes e um par de terminais, a,b, ao qual uma carga, R_L, deve ser ligada. O problema é determinar o valor de R_L que permita a máxima transferência de potência a R_L. A primeira etapa nesse processo é reconhecer que uma rede resistiva sempre pode ser substituída por seu equivalente de Thévenin. Portanto, desenhamos novamente, na Figura 4.59, o circuito mostrado na Figura 4.58. Substituir a rede original por seu equivalente de Thévenin simplifica muito a tarefa de determinar R_L. Para calcular R_L é necessário expressar a potência dissipada em R_L em função dos três parâmetros do circuito V_{Th}, R_{Th} e R_L. Assim,

$$p = i^2 R_L = \left(\frac{V_{\text{Th}}}{R_{\text{Th}} + R_{\text{L}}}\right)^2 R_L. \tag{4.73}$$

Em seguida, reconhecemos que, para um dado circuito, V_{Th} e R_{Th} serão fixos. Portanto, a potência dissipada é uma função da única variável R_L. Para determinar o valor de R_L que maximiza a potência, usamos o cálculo diferencial elementar. Começamos escrevendo uma equação para a derivada de p com relação a R_L:

$$\frac{dp}{dR_L} = V_{\text{Th}}^2\left[\frac{(R_{\text{Th}} + R_L)^2 - R_L \cdot 2(R_{\text{Th}} + R_L)}{(R_{\text{Th}} + R_L)^4}\right]. \tag{4.74}$$

A derivada é zero e p é maximizada quando

$$(R_{\text{Th}} + R_L)^2 = 2R_L(R_{\text{Th}} + R_L) \tag{4.75}$$

Resolvendo a Equação 4.75, temos

$$R_L = R_{\text{Th}}. \tag{4.76}$$

(Condição para a máxima transferência de potência)

Assim, a máxima transferência de potência ocorre quando a resistência de carga R_L é igual à resistência de Thévenin R_{Th}. Para determinar a potência máxima fornecida a R_L, simplesmente substituímos a Equação 4.76 na Equação 4.73:

$$p_{\max} = \frac{V_{\text{Th}}^2 R_L}{(2R_L)^2} = \frac{V_{\text{Th}}^2}{4R_L}. \tag{4.77}$$

A análise de um circuito, quando o resistor de carga está ajustado para máxima transferência de potência, é ilustrada no Exemplo 4.12.

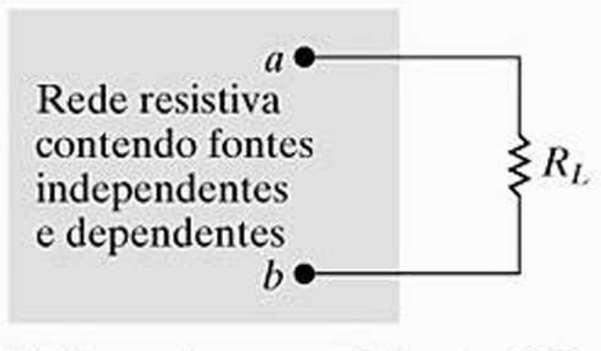


Figura 4.58 ▲ Circuito que descreve a máxima transferência de potência.

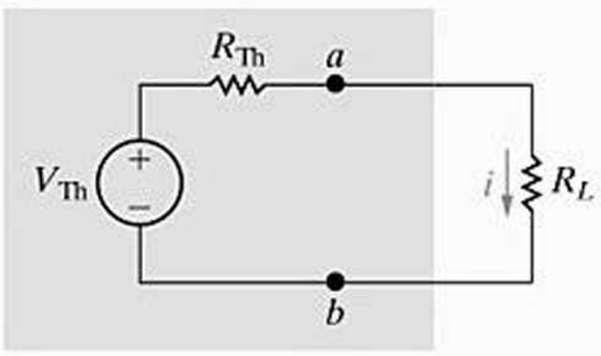


Figura 4.59 ▲ Circuito usado para determinar o valor de R_L para a máxima transferência de potência.

Exemplo 4.12 Cálculo da condição para a máxima transferência de potência

a) Para o circuito mostrado na Figura 4.60, determine o valor de R_L que resulta em potência máxima transferida para R_L.
b) Calcule a potência máxima que pode ser fornecida a R_L.
c) Quando R_L é ajustado para máxima transferência de potência, qual é a porcentagem de potência fornecida pela fonte de 360 V que chega a R_L?

Solução

a) A tensão de Thévenin para o circuito à esquerda dos terminais a,b é

$$V_{\text{Th}} = \frac{150}{180}(360) = 300 \text{ V}.$$

A resistência de Thévenin é

$$R_{\text{Th}} = \frac{(150)(30)}{180} = 25\ \Omega.$$

A substituição do circuito à esquerda dos terminais a,b por seu equivalente de Thévenin nos dá o circuito mostrado na Figura 4.61, que indica que R_L deve ser igual a 25 Ω para máxima transferência de potência.

b) A potência máxima que pode ser fornecida a R_L é

$$p_{\text{max}} = \left(\frac{300}{50}\right)^2(25) = 900 \text{ W}.$$

c) Quando R_L é igual a 25 Ω, a tensão v_{ab} é

$$v_{\text{ab}} = \left(\frac{300}{50}\right)(25) = 150 \text{ V}.$$

Pela Figura 4.60, quando v_{ab} é igual a 150 V, a corrente na fonte de tensão, na direção da elevação da tensão na fonte, é

$$i_s = \frac{360 - 150}{30} = \frac{210}{30} = 7 \text{ A}.$$

Portanto, a fonte está fornecendo 2.520 W ao circuito, ou

$$p_s = -i_s(360) = -2.520 \text{ W}$$

A porcentagem da potência da fonte fornecida à carga é

$$\frac{900}{2.520} \times 100 = 35{,}71\%\ .$$

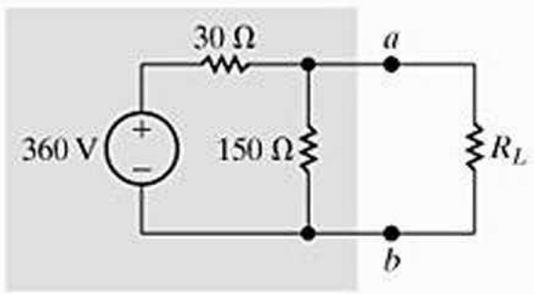


Figura 4.60 ▲ Circuito para o Exemplo 4.12.

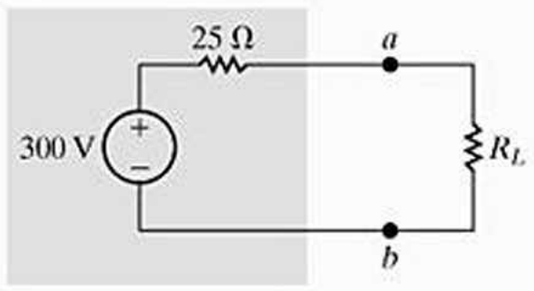
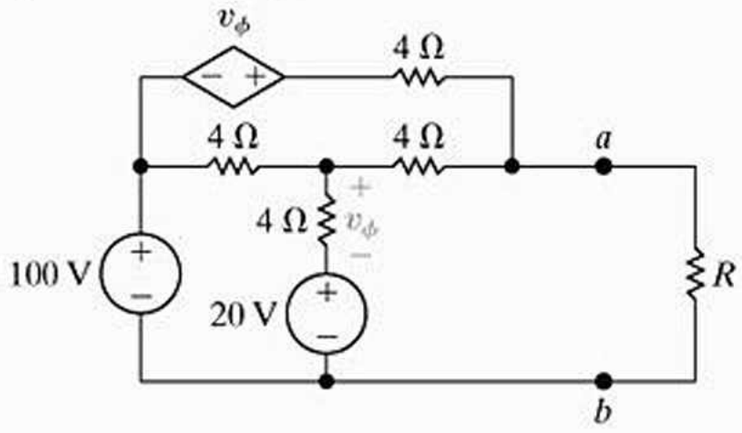


Figura 4.61 ▲ Redução do circuito mostrado na Figura 4.60 por meio de um equivalente de Thévenin.

✔ PROBLEMAS PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 6 — Conhecer a condição de máxima transferência de potência a uma carga resistiva e saber calculá-la

4.21 a) Determine o valor de R que permite ao circuito mostrado fornecer potência máxima aos terminais a,b.
b) Determine a potência máxima fornecida a R.



Resposta: (a) 3 Ω; (b) 1,2 kW.

4.22 Suponha que o circuito no Problema para Avaliação 4.21 esteja fornecendo potência máxima ao resistor de carga R.
a) Qual é a potência que a fonte de 100 V está fornecendo à rede?
b) Repita (a) para a fonte de tensão dependente.
c) Qual porcentagem da potência total gerada por essas duas fontes é entregue ao resistor de carga R?

Resposta: (a) 3.000 W; (b) 800 W; (c) 31,58%.

NOTA: Tente resolver também os problemas 4.79 e 4.80, apresentados no final deste capítulo.

4.13 Superposição

Um sistema linear obedece ao princípio de *superposição*, o qual afirma que, sempre que o sistema é excitado, ou alimentado, por mais de uma fonte independente de energia, a resposta total é a soma das respostas individuais. Uma resposta individual é o resultado de uma fonte independen-

te agindo separadamente. Como estamos lidando com circuitos compostos de elementos lineares interligados, podemos aplicar o princípio da superposição diretamente à análise desses circuitos quando eles são alimentados por mais de uma fonte independente de energia. No momento, restringimos a discussão a redes resistivas simples; contudo, o princípio é aplicável a qualquer sistema linear.

A superposição é aplicada tanto na análise quanto no projeto de circuitos. Ao analisar um circuito complexo com várias fontes independentes de tensão e corrente, muitas vezes as equações a serem resolvidas são mais simples e em menor número quando os efeitos das fontes independentes são considerados separadamente. Por isso, aplicar a superposição pode simplificar a análise de circuitos. Entretanto, fique ciente de que a superposição às vezes pode complicar a análise, originando um maior número de equações do que com algum método alternativo. A superposição é imprescindível apenas se as fontes independentes em um circuito forem fundamentalmente diferentes. Nesses capítulos iniciais, todas as fontes independentes são fontes cc, portanto a superposição não é imprescindível. Apresentamos o princípio da superposição aqui, mas só precisaremos dele em capítulos posteriores.

A superposição é utilizada para sintetizar uma determinada resposta de um circuito que não poderia ser conseguida em um circuito com uma única fonte. Se a resposta do circuito puder ser escrita como uma soma de dois ou mais termos, ela pode ser obtida com a inclusão de uma fonte independente para cada termo. Essa abordagem do projeto de circuitos com respostas complexas permite que um projetista considere vários projetos simples em vez de um projeto complexo.

Demonstramos o princípio da superposição usando-o para determinar as correntes de ramo no circuito mostrado na Figura 4.62. Começamos determinando as correntes de ramo resultantes da fonte de tensão de 120 V. Essas correntes são i_1', i_2' etc. A substituição da fonte de corrente ideal por um circuito aberto elimina a fonte; a Figura 4.63 ilustra essa situação. As correntes de ramo nesse circuito são o resultado somente da fonte de tensão.

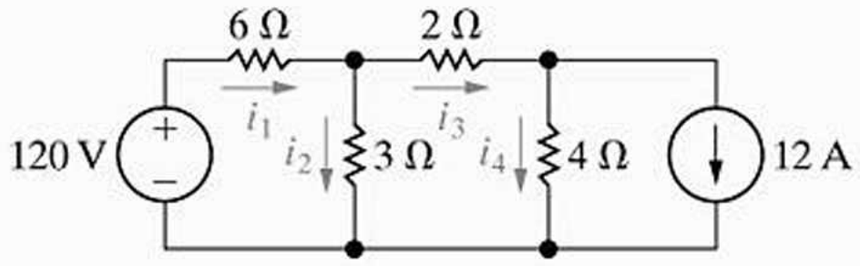


Figura 4.62 ▲ Circuito usado para ilustrar a superposição.

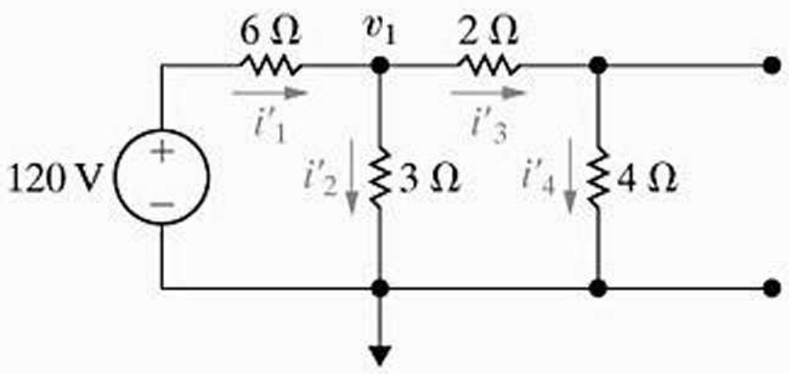


Figura 4.63 ▲ Circuito mostrado na Figura 4.62 com a fonte de corrente eliminada.

É fácil determinar as correntes de ramo no circuito da Figura 4.63 se soubermos qual é a tensão de nó no resistor de 3 Ω. Chamando essa tensão de v_1, escrevemos

$$\frac{v_1 - 120}{6} + \frac{v_1}{3} + \frac{v_1}{2 + 4} = 0 \tag{4.78}$$

da qual

$$v_1 = 30 \text{ V} \tag{4.79}$$

Agora, podemos escrever as expressões para as correntes de ramo i_1' – i_4' diretamente:

$$i_1' = \frac{120 - 30}{6} = 15 \text{ A}, \tag{4.80}$$

$$i_2' = \frac{30}{3} = 10 \text{ A}, \tag{4.81}$$

$$i_3' = i_4' = \frac{30}{6} = 5 \text{ A}. \tag{4.82}$$

Para determinar o componente das correntes de ramo resultantes da fonte de corrente, eliminamos a fonte ideal de tensão e resolvemos o circuito mostrado na Figura 4.64. A notação i_1'', i_2'' etc. indica que essas correntes são os componentes da corrente total resultante da fonte de corrente ideal.

Determinamos as correntes de ramo no circuito mostrado na Figura 4.64 calculando, primeiro, as tensões de nó nos resistores de 3 e 4 Ω, respectivamente. A Figura 4.65 mostra as duas tensões de nó. As duas equações de tensão de nós que descrevem o circuito são

$$\frac{v_3}{3} + \frac{v_3}{6} + \frac{v_3 - v_4}{2} = 0, \tag{4.83}$$

$$\frac{v_4 - v_3}{2} + \frac{v_4}{4} + 12 = 0. \tag{4.84}$$

Resolvendo as equações 4.83 e 4.84 para v_3 e v_4, obtemos

$$v_3 = -12 \text{ V}, \tag{4.85}$$

$$v_4 = -24 \text{ V}. \tag{4.86}$$

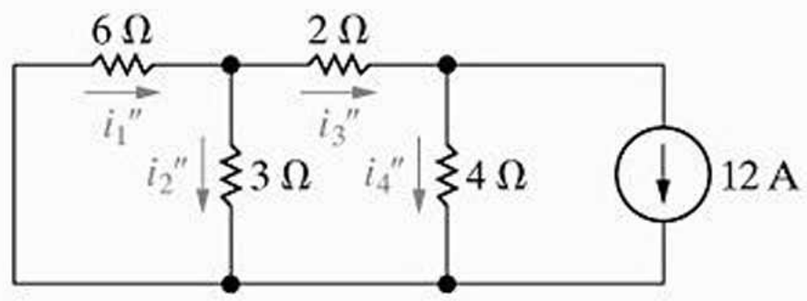


Figura 4.64 ▲ Circuito mostrado na Figura 4.62 com a fonte de tensão eliminada.

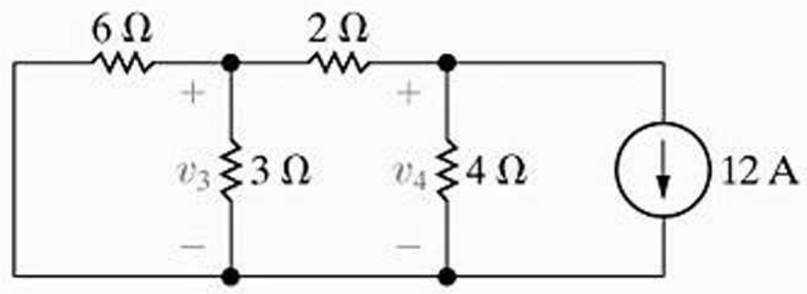


Figura 4.65 ▲ Circuito mostrado na Figura 4.64 com as tensões de nó v_3 e v_4.

Agora, podemos escrever as correntes de ramo i_1'' a i_4'' diretamente em termos das tensões de nó v_3 e v_4:

$$i_1'' = \frac{-v_3}{6} = \frac{12}{6} = 2 \text{ A}, \tag{4.87}$$

$$i_2'' = \frac{v_3}{3} = \frac{-12}{3} = -4 \text{ A}, \tag{4.88}$$

$$i_3'' = \frac{v_3 - v_4}{2} = \frac{-12 + 24}{2} = 6 \text{ A}, \tag{4.89}$$

$$i_4'' = \frac{v_4}{4} = \frac{-24}{4} = -6 \text{ A}. \tag{4.90}$$

Para determinar as correntes de ramo no circuito original, isto é, as correntes i_1, i_2, i_3 e i_4 da Figura 4.62, simplesmente somamos as correntes dadas pelas equações 4.87–4.90 às correntes dadas pelas equações 4.80–4.82:

$$i_1 = i_1' + i_1'' = 15 + 2 = 17 \text{ A}, \tag{4.91}$$

$$i_2 = i_2' + i_2'' = 10 - 4 = 6 \text{ A}, \tag{4.92}$$

$$i_3 = i_3' + i_3'' = 5 + 6 = 11 \text{ A}, \tag{4.93}$$

$$i_4 = i_4' + i_4'' = 5 - 6 = -1 \text{ A}. \tag{4.94}$$

Você deve verificar se as correntes dadas pelas equações 4.91–4.94 são os valores corretos para as correntes de ramo no circuito mostrado na Figura 4.62.

Ao aplicar a superposição a circuitos lineares que contêm fontes independentes, bem como dependentes, você deve perceber que as fontes dependentes nunca são eliminadas. O Exemplo 4.13 ilustra a aplicação de superposição quando um circuito contém tanto fontes dependentes como independentes.

Exemplo 4.13 Utilização de superposição para resolver um circuito

Use o princípio da superposição para determinar v_o no circuito mostrado na Figura 4.66.

Solução

Começamos determinando o componente de v_o resultante da fonte de 10 V. A Figura 4.67 mostra o circuito. Com a fonte de 5 A eliminada, v_Δ' deve ser igual a $(-0{,}4\ v_\Delta')(10)$. Por conseqüência, v_Δ' deve ser zero, o ramo que contém as duas fontes é aberto e

$$v_o' = \frac{20}{25}(10) = 8 \text{ V}.$$

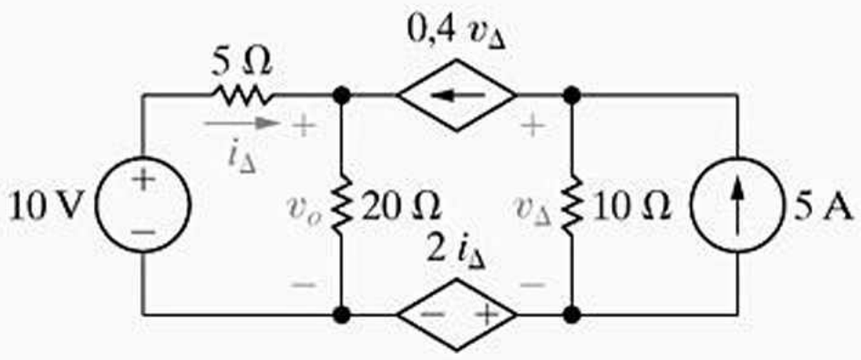


Figura 4.66 ▲ Circuito para o Exemplo 4.13.

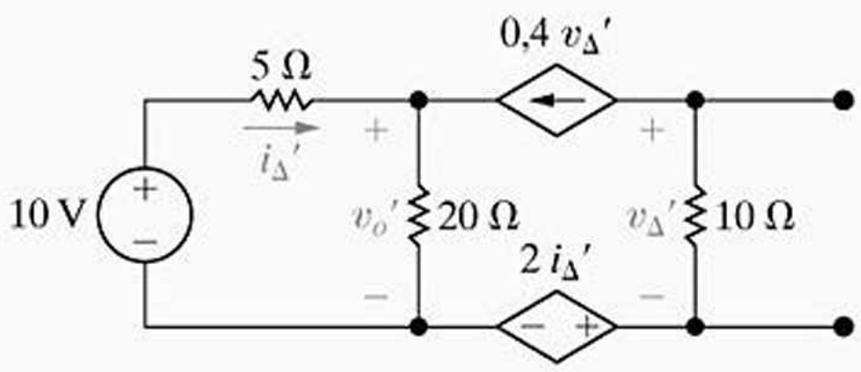


Figura 4.67 ▲ Circuito mostrado na Figura 4.66 com a fonte de 5 A eliminada.

Quando a fonte de 10 V é eliminada, o circuito se reduz ao da Figura 4.68. Acrescentamos um nó de referência e as identificações de nó *a*, *b* e *c* para auxiliar a discussão. Somando as correntes que saem do nó *a*, temos

$$\frac{v_o''}{20} + \frac{v_o''}{5} - 0{,}4v_\Delta'' = 0 \quad \text{ou} \quad 5v_o'' - 8v_\Delta'' = 0.$$

Somando as correntes que saem do nó *b*, obtemos

$$0{,}4v_\Delta'' + \frac{v_\text{b} - 2i_\Delta''}{10} - 5 = 0 \text{ ou}$$

$$4v_\Delta'' + v_b - 2i_\Delta'' = 50.$$

Agora usamos

$$v_b = 2i_\Delta'' + v_\Delta''$$

para determinar o valor de v_Δ''. Assim,

$$5v_\Delta'' = 50 \text{ ou } v_\Delta'' = 10 \text{ V}.$$

Pela equação do nó *a*,

$$5v_o'' = 80 \text{ ou } v_o'' = 16 \text{ V}.$$

O valor de v_o é a soma de v_o' e v_o'', ou 24 V.

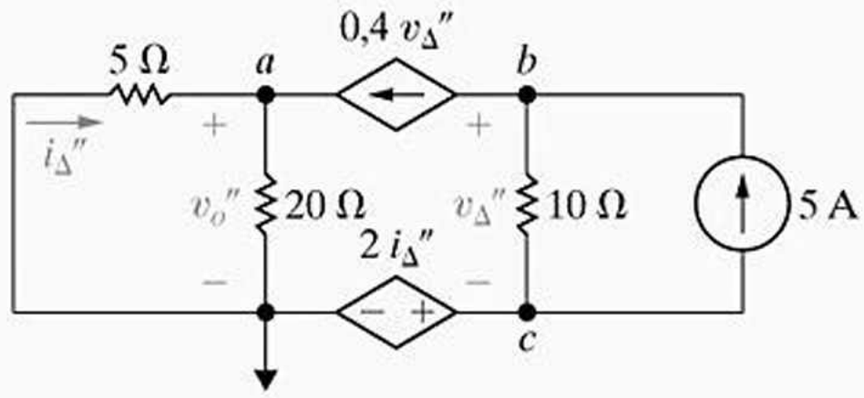


Figura 4.68 ▲ Circuito mostrado na Figura 4.66 com a fonte de 10 V eliminada.

NOTA: Avalie o que entendeu desse material tentando resolver os problemas 4.91 e 4.92, apresentados no final deste capítulo.

Perspectiva prática

Circuitos com resistores reais

Não é possível fabricar componentes elétricos idênticos. Por exemplo, os valores dos resistores produzidos pelo mesmo processo de fabricação podem variar em até 20%. Portanto, ao criar um sistema elétrico, o projetista deve considerar o impacto que a variação do componente causará no desempenho do sistema. Um modo de avaliar esse impacto é realizando uma análise de sensibilidade. A análise de sensibilidade permite que o projetista calcule o impacto de variações nos valores dos componentes sobre a saída do sistema. Veremos como essa informação o habilita a especificar uma tolerância aceitável para o valor de cada um dos componentes do sistema.

Considere o circuito mostrado na Figura 4.69. Para ilustrar a análise de sensibilidade, investigaremos a sensibilidade das tensões de nó v_1 e v_2 às variações do resistor R_1. Usando a análise nodal, podemos derivar as expressões para v_1 e v_2 em função dos resistores e das correntes de fonte do circuito. Os resultados são dados nas equações 4.95 e 4.96:

$$v_1 = \frac{R_1\{R_3R_4I_{g2} - [R_2(R_3 + R_4) + R_3R_4]I_{g1}\}}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_3R_4}, \tag{4.95}$$

$$v_2 = \frac{R_3R_4[(R_1 + R_2)I_{g2} - R_1I_{g1}]}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_3R_4}. \tag{4.96}$$

A sensibilidade de v_1 em relação a R_1 é determinada diferenciando a Equação 4.95 em relação a R_1 e, de forma semelhante, a sensibilidade de v_2 em relação a R_1 é determinada diferenciando a Equação 4.96 em relação a R_1. Obtemos

$$\frac{dv_1}{dR_1} = \frac{[R_3R_4 + R_2(R_3 + R_4)]\{R_3R_4I_{g2} - [R_3R_4 + R_2(R_3 + R_4)]I_{g1}\}}{[(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_3R_4]^2}, \tag{4.97}$$

$$\frac{dv_2}{dR_1} = \frac{R_3R_4\{R_3R_4I_{g2} - [R_2(R_3 + R_4) + R_3R_4]I_{g1}\}}{[(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_3R_4]^2}. \tag{4.98}$$

Agora, consideramos um exemplo com valores reais para ilustrar a utilização das equações 4.97 e 4.98.

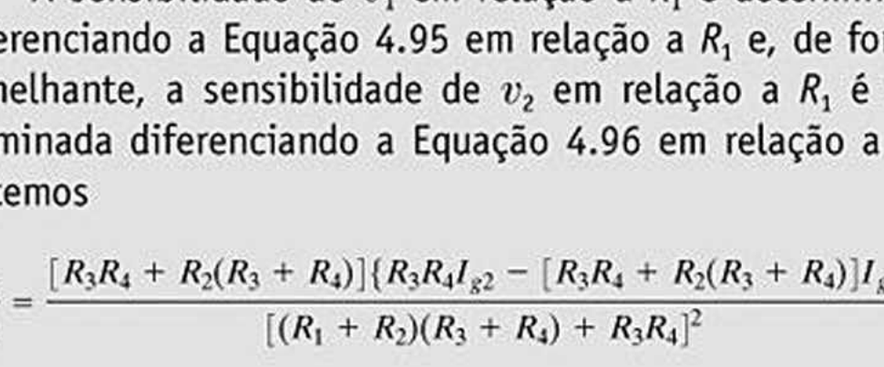


Figura 4.69 ▲ Circuito usado para apresentar a análise de sensibilidade.

EXEMPLO

Suponha que os valores nominais dos componentes do circuito da Figura 4.69 sejam: $R_1 = 25\ \Omega$; $R_2 = 5\ \Omega$; $R_3 = 50\ \Omega$; $R_4 = 75\ \Omega$; $I_{g1} = 12$ A e $I_{g2} = 16$ A. Use a análise de sensibilidade para prever os valores de v_1 e v_2 se o valor de R_1 for 10% diferente de seu valor nominal.

Solução

Pelas equações 4.95 e 4.96, determinamos os valores nominais de v_1 e v_2. Assim,

$$v_1 = \frac{25\{2.750(16) - [5(125) + 3.750]12\}}{30(125) + 3.750} = 25\ \text{V} \tag{4.99}$$

e

$$v_2 = \frac{3.750[30(16) - 25(12)]}{30(125) + 3.750} = 90\ \text{V}. \tag{4.100}$$

Agora, pelas equações 4.97 e 4.98 podemos determinar a sensibilidade de v_1 e v_2 a variações em R_1. Por conseqüência,

$$\frac{dv_1}{dR_1} = \frac{[3.750 + 5(125)] - \{3.750(16) - [3.750 + 5(125)]12\}}{[(30)(125) + 3.750]^2} = \frac{7}{12}\ \text{V}/\Omega\cdot \tag{4.101}$$

e

$$\frac{dv_2}{dR_1} = \frac{3.750\{3.750(16) - [5(125) + 3.750]12\}]}{(7.500)^2} = 0{,}5\ \text{V}/\Omega\cdot \tag{4.102}$$

Como usamos os resultados dados pelas equações 4.101 e 4.102? Admita que R_1 seja 10% menor do que seu valor nominal, isto é, $R_1 = 22{,}5\ \Omega$. Então, $\Delta R_1 = -2{,}5\ \Omega$ e a Equação 4.101 prevê que Δv_1 será

$$\Delta v_1 = \left(\frac{7}{12}\right)(-2{,}5) = -1{,}4583\ \text{V}.$$

Portanto, se R_1 for 10% menor do que seu valor nominal, nossa análise prevê que v_1 será

$$v_1 = 25 - 1{,}4583 = 23{,}5417\ \text{V}. \tag{4.103}$$

De forma semelhante, para a Equação 4.102 temos

$$\Delta v_2 = 0{,}5(-2{,}5) = -1{,}25\ \text{V},$$

$$v_2 = 90 - 1{,}25 = 88{,}75\ \text{V}. \tag{4.104}$$

Tentamos confirmar os resultados das equações 4.103 e 4.104 substituindo o valor de $R_1 = 22{,}5\ \Omega$ nas equações 4.95 e 4.96. Os resultados são

$$v_1 = 23{,}4780\ \text{V}, \tag{4.105}$$

$$v_2 = 88{,}6960\ \text{V}. \tag{4.106}$$

Por que há uma diferença entre os valores previstos pela análise de sensibilidade e os valores exatos calculados pela substituição de R_1 nas equações para v_1 e v_2? Podemos ver pelas equações 4.97 e 4.98 que a sensibilidade de v_1 e v_2 em relação a R_1 é função de R_1, porque R_1 aparece no denominador de ambas as equações. Isso significa que, à medida que R_1 varia, as sensibilidades também variam, e, por conseqüência, não podemos esperar que as equações 4.97 e 4.98 dêem resultados exatos para grandes variações em R_1. Observe que, para uma variação de 10% em R_1, o erro percentual entre os valores previstos e exatos de v_1 e v_2 é pequeno. Especificamente, o erro percentual em v_1 = 0,2713% e o erro percentual em v_2 = 0,0676%.

Por esse exemplo, podemos ver que uma tremenda quantidade de trabalho nos espera se tivermos de determinar a sensibilidade de v_1 e v_2 às variações nos valores dos componentes restantes, ou seja, R_2, R_3, R_4, I_{g1} e I_{g2}. Felizmente, o PSpice tem uma função de sensibilidade que realizará a análise para nós. A função de sensibilidade no PSpice calcula os dois tipos de sensibilidade. A primeira é conhecida como a sensibilidade unitária e a segunda, como a sensibilidade 1%. No exemplo, a variação de uma unidade em um resistor alteraria seu valor em 1 Ω e uma variação de uma unidade em uma fonte de corrente alteraria seu valor em 1 A. Por outro lado, a análise de sensibilidade 1% determina o efeito de 1% de variação nos valores nominais de resistores ou fontes.

O resultado da análise de sensibilidade do PSpice do circuito da Figura 4.69 é mostrado na Tabela 4.2. Como estamos analisando um circuito linear, podemos usar superposição para prever valores de v_1 e v_2, se houver variação nos valores de mais de um componente. Por exemplo, vamos admitir que R_1 diminua para 24 Ω e R_2 diminua para 4 Ω. Pela Tabela 4.2, podemos combinar a sensibilidade unitária de v_1 com variações de R_1 e R_2 para obter

$$\frac{\Delta v_1}{\Delta R_1} + \frac{\Delta v_1}{\Delta R_2} = 0{,}5833 - 5{,}417 = -4{,}8337 \text{ V}/\Omega.$$

De forma semelhante,

$$\frac{\Delta v_2}{\Delta R_1} + \frac{\Delta v_2}{\Delta R_2} = 0{,}5 + 6{,}5 = 7{,}0 \text{ V}/\Omega.$$

Assim, se tanto R_1 quanto R_2 diminuíssem em 1 Ω, preveríamos

$$v_1 = 25 + 4{,}8227 = 29{,}8337 \text{ V},$$

$$v_2 = 90 - 7 = 83 \text{ V}.$$

Se substituirmos R_1 = 24 Ω e R_2 = 4 Ω nas equações 4.95 e 4.96, obteremos

$$v_1 = 29{,}793 \text{ V},$$

$$v_2 = 82{,}759 \text{ V}.$$

Em ambos os casos, nossas previsões estão dentro de uma fração de volt dos valores reais das tensões de nó.

Projetistas de circuitos usam os resultados da análise de sensibilidade para determinar qual variação do valor do componente causa o maior impacto sobre a saída do circuito. Como podemos ver pela análise de sensibilidade do PSpice na Tabela 4.2, as tensões de nó v_1 e v_2 são muito mais sensíveis às variações de R_2 do que às variações de R_1. Especificamente, v_1 é (5,417/0,5833) ou, aproximadamente, 9 vezes mais sensível às variações de R_2 do que às variações de R_1, e v_2 é (6,5/0,5) ou 13 vezes mais sensível às variações de R_2 do que às variações de R_1. Assim, no circuito do exemplo, a tolerância para R_2 deve ser mais rigorosa do que a tolerância para R_1, se for importante manter os valores de v_1 e v_2 próximos de seus valores nominais.

TABELA 4.2 Resultados da análise de sensibilidade PSpice

Nome do elemento	Valor do elemento	Sensibilidade do elemento (Volts/Unidade)	Sensibilidade normalizada (Volts/Por cento)
(a) Sensibilidades CC das tensões de nó V_1			
R1	25	0,5833	0,1458
R2	5	–5,417	–0,2708
R3	50	0,45	0,225
R4	75	0,2	0,15
IG1	12	–14,58	–1,75
IG2	16	12,5	2
(b) Sensibilidades de V_2 de saída			
R1	25	0,5	0,125
R2	5	6,5	0,325
R3	50	0,54	0,27
R4	75	0,24	0,18
IG1	12	–12,5	–1,5
IG2	16	15	2,4

NOTA: Avalie o que entendeu dessa "Perspectiva prática" tentando resolver os problemas 4.105–4.107, apresentados no final deste capítulo.

Resumo

Para os tópicos deste capítulo, é necessário o domínio de alguns termos básicos e dos conceitos que eles representam. Esses termos são *nó*, *nó essencial*, *caminho*, *ramo*, *ramo essencial*, *malha* e *circuito planar*. A Tabela 4.1 apresenta definições e exemplos desses termos.

- Duas novas técnicas de análise de circuitos foram apresentadas neste capítulo:
  - O *método das tensões de nó* funciona para circuitos planares e não-planares. Um nó de referência é escolhido entre os nós essenciais. Variáveis representando tensões

são atribuídas aos nós essenciais restantes, e a lei das correntes de Kirchhoff é usada para escrever uma equação por variável. O número de equações é $n_e - 1$, onde n_e é o número de nós essenciais.

- O *método das correntes de malha* funciona somente para circuitos planares. Correntes de malha são atribuídas a cada malha, e a lei das tensões de Kirchhoff é usada para escrever uma equação por malha. O número de equações é $b - (n - 1)$, onde b é o número de ramos nos quais a corrente é desconhecida e n é o número de nós. As correntes de malha são usadas para determinar as correntes de ramo.
- Várias técnicas novas de simplificação de circuito foram apresentadas neste capítulo:
  - *Transformações de fonte* nos permitem substituir uma fonte de tensão (v_s) e um resistor em série (R) por uma fonte de corrente (i_s) e um resistor em paralelo (R) e vice-versa. As combinações devem ser equivalentes em termos da tensão e da corrente em seus terminais. A equivalência terminal é válida contanto que

$$i_s = \frac{v_s}{R}.$$

  - *Equivalentes de Thévenin* e *equivalentes de Norton* nos permitem simplificar um circuito constituído de fontes e resistores e substituí-lo por um circuito equivalente que consiste de uma fonte de tensão e um resistor em série (Thévenin) ou de uma fonte de corrente e um resistor em paralelo (Norton). O circuito simplificado e o circuito original devem ser equivalentes em termos da tensão e corrente em seus terminais. Por isso, não esqueça que (1) a tensão de Thévenin (V_{Th}) é a tensão de circuito aberto nos terminais do circuito original; (2) a resistência de Thévenin (R_{Th}) é a razão entre a tensão de Thévenin e a corrente de curto-circuito que passa pelos terminais do circuito original e (3) o equivalente de Norton é obtido por meio de uma transformação de fonte em um equivalente de Thévenin.
  - *Máxima transferência de potência* é a técnica para calcular o máximo valor de p que pode ser fornecido a uma carga, R_L. A máxima transferência de potência ocorre quando $R_L = R_{Th}$, a resistência de Thévenin vista dos terminais do resistor R_L. A equação para a máxima transferência de potência é

$$p = \frac{V_{Th}^2}{4R_L}.$$

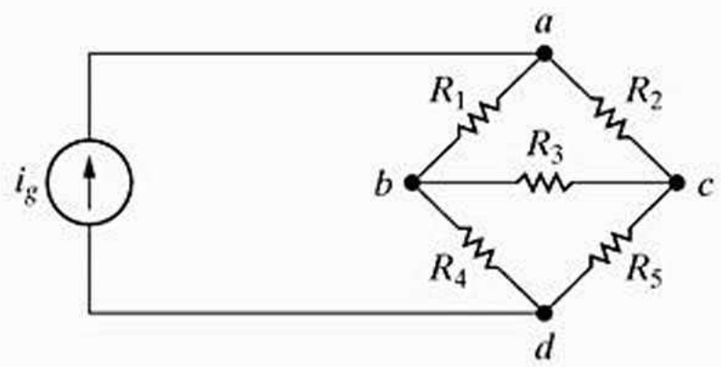
  - Em um circuito com várias fontes independentes, a *superposição* nos permite ativar uma fonte por vez e somar as tensões e correntes resultantes para determinar as tensões e correntes que existem quando todas as fontes independentes estão ativas. Fontes dependentes nunca são eliminadas quando se aplica a superposição.

Problemas

Seção 4.1

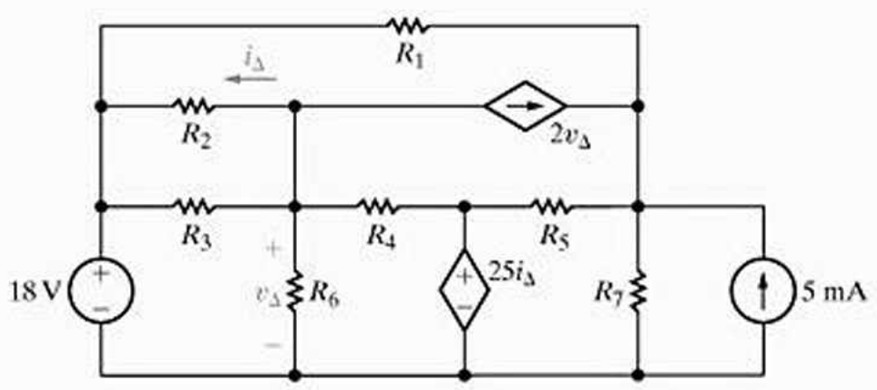
4.1* Suponha que a corrente i_g no circuito da Figura P4.1 seja conhecida. Os resistores $R_1 - R_5$ também são conhecidos.
a) Quantas correntes desconhecidas há?
b) Quantas equações independentes podem ser escritas usando a lei das correntes de Kirchhoff (LCK)?
c) Escreva um conjunto de equações independentes LCK.
d) Quantas equações independentes podem ser deduzidas da lei das tensões de Kirchhoff (LTK)?
e) Escreva um conjunto de equações independentes LTK.

Figura P4.1



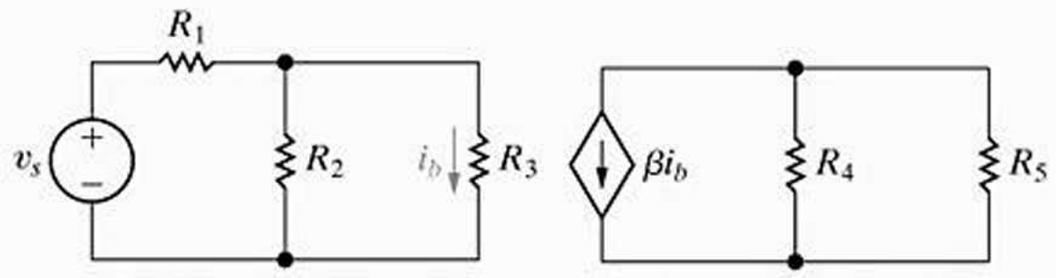
4.2* Para o circuito mostrado na Figura P4.2, calcule o número de: (a) ramos, (b) ramos em que a corrente é desconhecida, (c) ramos essenciais, (d) ramos essenciais em que a corrente é desconhecida, (e) nós, (f) nós essenciais e (g) malhas.

Figura P4.2



4.3* a) Quantas partes separadas tem o circuito da Figura P4.3?
b) Quantos nós?
c) Quantos ramos existem?
d) Suponha que o nó inferior em cada parte do circuito seja unido por um único condutor. Repita os cálculos feitos em (a)–(c).

Figura P4.3

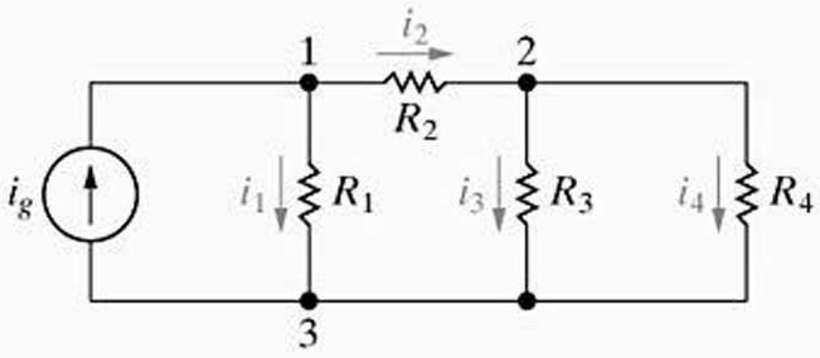


4.4* a) Se somente os nós e os ramos essenciais forem identificados no circuito da Figura P4.2, quantas equações simultâneas são necessárias para descrevê-lo?

b) Quantas dessas equações podem ser derivadas usando a lei das correntes de Kirchhoff?
c) Quantas devem ser derivadas usando a lei das tensões de Kirchhoff?
d) Quais são as duas malhas que devem ser evitadas ao aplicar a lei das tensões?

4.5 Uma corrente que sai de um nó é definida como positiva.
a) Some as correntes em cada nó no circuito mostrado na Figura P4.5.
b) Mostre que qualquer uma das equações em (a) pode ser derivada das duas equações restantes.

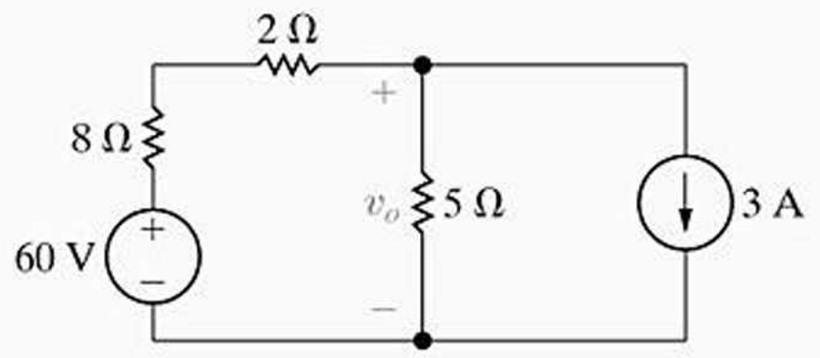
Figura P4.5



Seção 4.2

4.6* PSPICE Use o método das tensões de nó para determinar v_o no circuito da Figura P4.6.

Figura P4.6

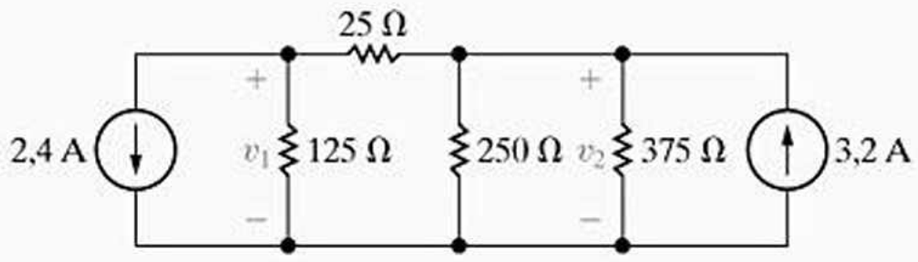


4.7 PSPICE
a) Determine a potência fornecida pela fonte de corrente de 3 A no circuito da Figura P4.6.
b) Determine a potência fornecida pela fonte de tensão de 60 V no circuito da Figura P4.6.
c) Verifique se a potência total fornecida é igual à potência total dissipada.

4.8 PSPICE Um resistor de 10 Ω é ligado em série com a fonte de corrente de 3 A no circuito da Figura P4.6.
a) Determine v_o.
b) Determine a potência fornecida pela fonte de corrente de 3 A.
c) Determine a potência fornecida pela fonte de tensão de 60 V.
d) Verifique se a potência total fornecida é igual à potência total dissipada.
e) Qual será o efeito de qualquer resistência finita ligada em série com a fonte de corrente de 3 A sobre o valor de v_o?

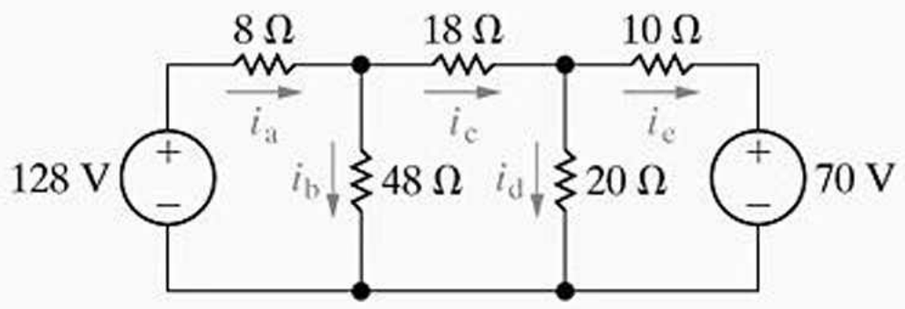
4.9* PSPICE Use o método das tensões de nó para determinar v_1 e v_2 no circuito mostrado na Figura P4.9.

Figura P4.9



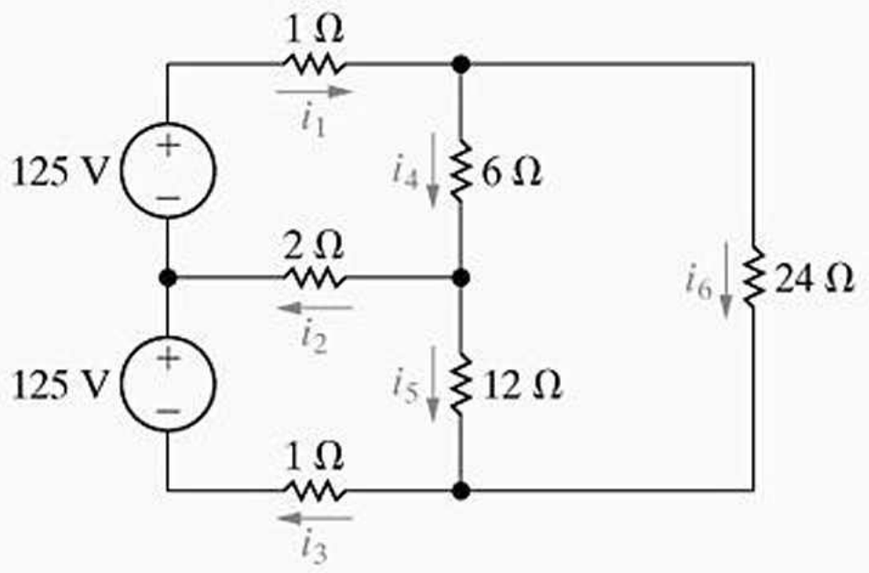
4.10* PSPICE
a) Use o método das tensões de nó para determinar as correntes de ramo $i_a - i_e$ no circuito mostrado na Figura P4.10.
b) Determine a potência total dissipada no circuito.

Figura P4.10



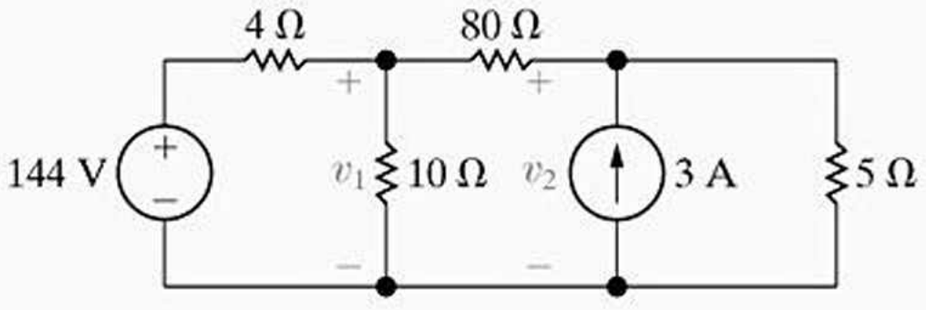
4.11 PSPICE O circuito mostrado na Figura P4.11 é um modelo cc de um circuito de distribuição residencial.
a) Use o método das tensões de nó para determinar as correntes de ramo $i_1 - i_6$.
b) Teste sua solução para as correntes de ramo, mostrando que a potência total dissipada é igual à potência total gerada.

Figura P4.11



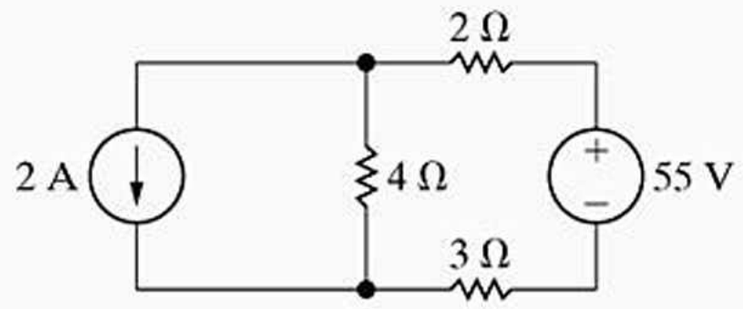
4.12 PSPICE Use o método das tensões de nó para determinar v_1 e v_2 no circuito da Figura P4.12.

Figura P4.12



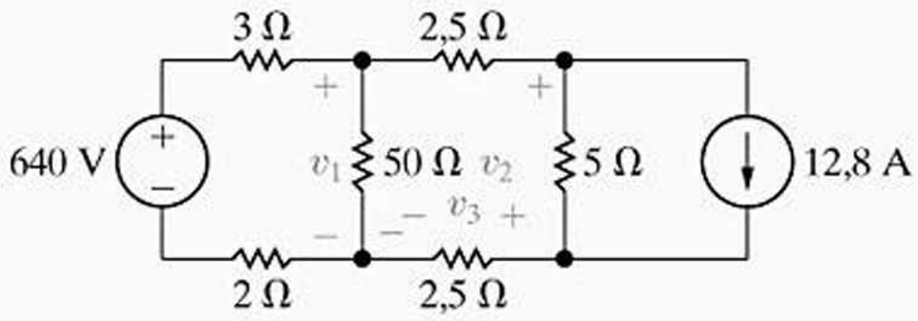
4.13 PSPICE Use o método das tensões de nó para determinar a potência que a fonte de 2 A absorve do circuito da Figura P4.13.

Figura P4.13



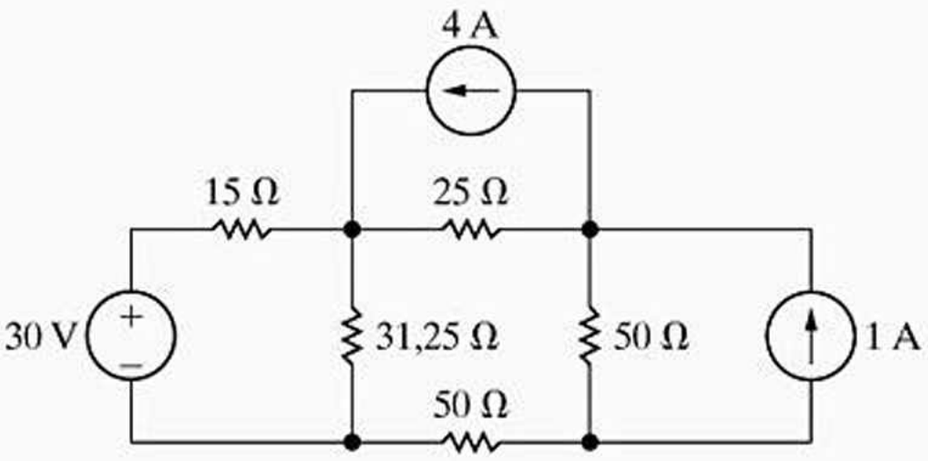
4.14 PSPICE
a) Use o método das tensões de nó para determinar v_1, v_2 e v_3 no circuito da Figura P4.14.
b) Qual é a potência que a fonte de tensão de 640 V fornece ao circuito?

Figura P4.14



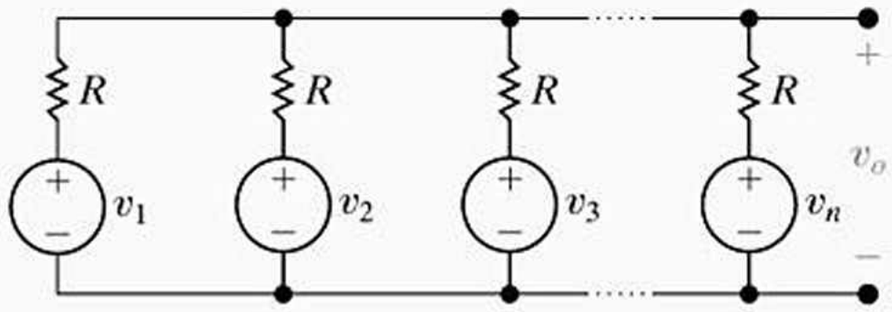
4.15 PSPICE
Use o método das tensões de nó para determinar a potência total dissipada no circuito da Figura P4.15.

Figura P4.15



4.16 PSPICE
a) Use o método das tensões de nó para mostrar que a tensão de saída v_o no circuito da Figura P4.16 é igual ao valor médio das tensões das fontes.
b) Determine v_o se $v_1 = 150$ V, $v_2 = 200$ V e $v_3 = -50$ V.

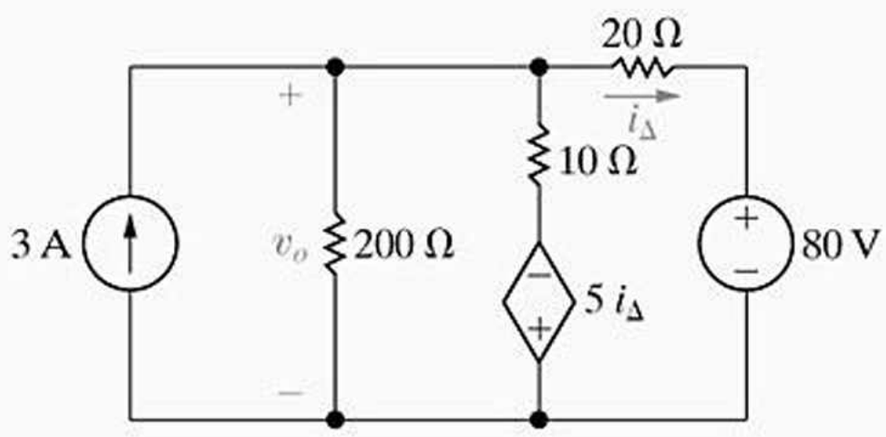
Figura P4.16



Seção 4.3

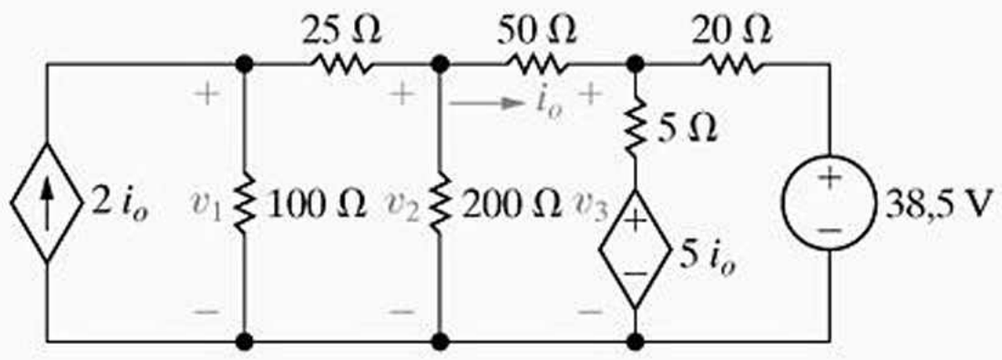
4.17 PSPICE
a) Use o método das tensões de nó para determinar v_o no circuito da Figura P4.17.
b) Determine a potência absorvida pela fonte dependente.
c) Determine a potência total gerada pelas fontes independentes.

Figura P4.17



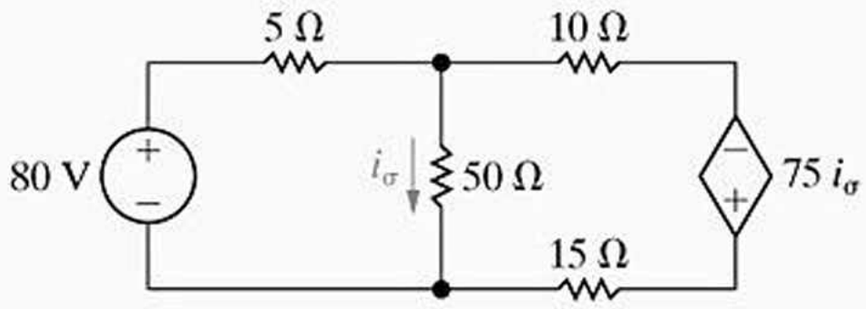
4.18 PSPICE
a) Determine as tensões de nó v_1, v_2 e v_3 no circuito da Figura P4.18.
b) Determine a potência total dissipada no circuito.

Figura P4.18



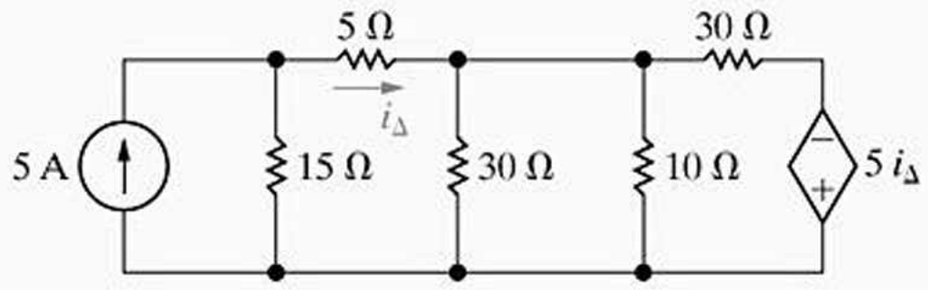
4.19* PSPICE
Use o método das tensões de nó para calcular a potência gerada pela fonte de tensão dependente no circuito da Figura P4.19.

Figura P4.19



4.20* PSPICE
a) Use o método das tensões de nó para determinar a potência total gerada no circuito da Figura P4.20.
b) Verifique sua resposta determinando a potência total dissipada no circuito.

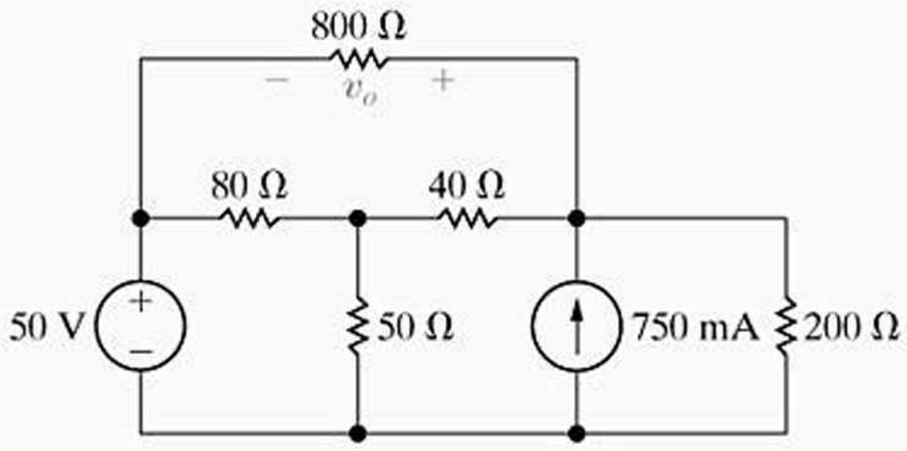
Figura P4.20



Seção 4.4

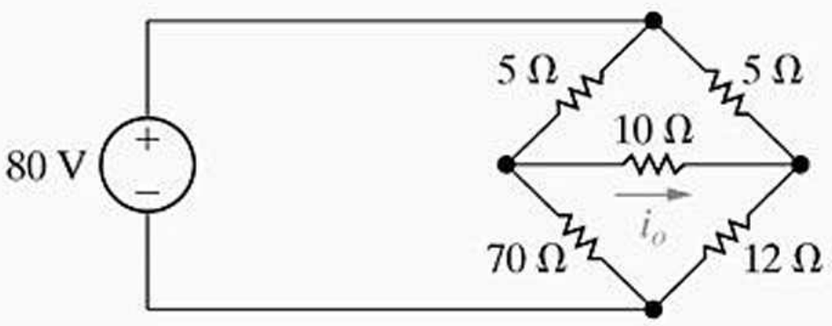
4.21* PSPICE
Use o método das tensões de nó para determinar o valor de v_o no circuito da Figura P4.21.

Figura P4.21



4.22 PSPICE Use o método das tensões de nó para determinar i_o no circuito da Figura P4.22.

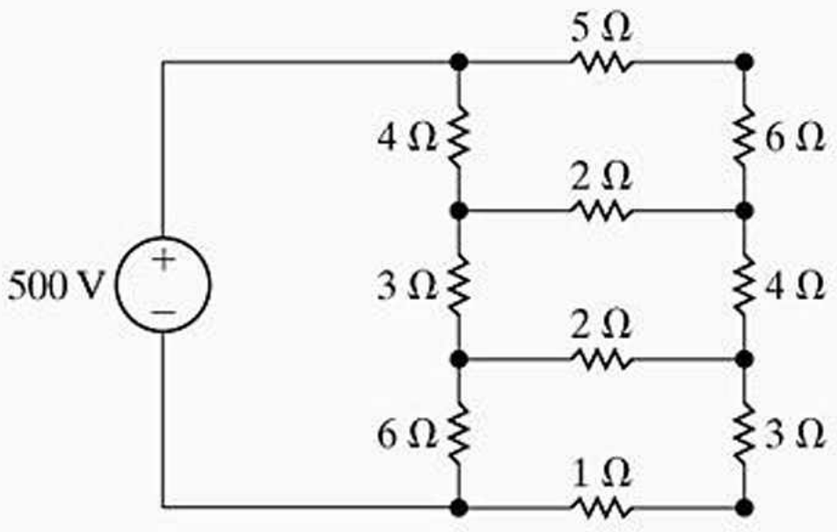
Figura P4.22



4.23 a) Use o método das tensões de nó para determinar a potência dissipada no resistor de 5 Ω no circuito da Figura P4.23.

b) Determine a potência fornecida pela fonte de 500 V.

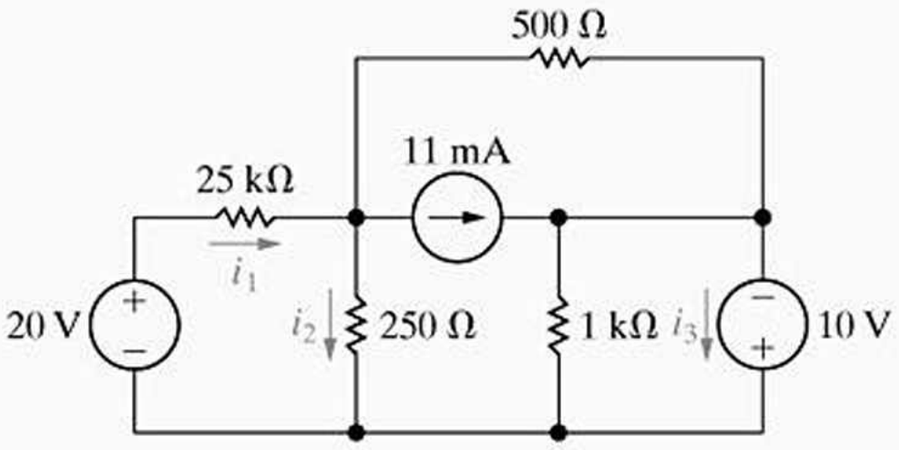
Figura P4.23



4.24 PSPICE a) Use o método das tensões de nó para determinar as correntes de ramo i_1, i_2 e i_3 no circuito da Figura P4.24.

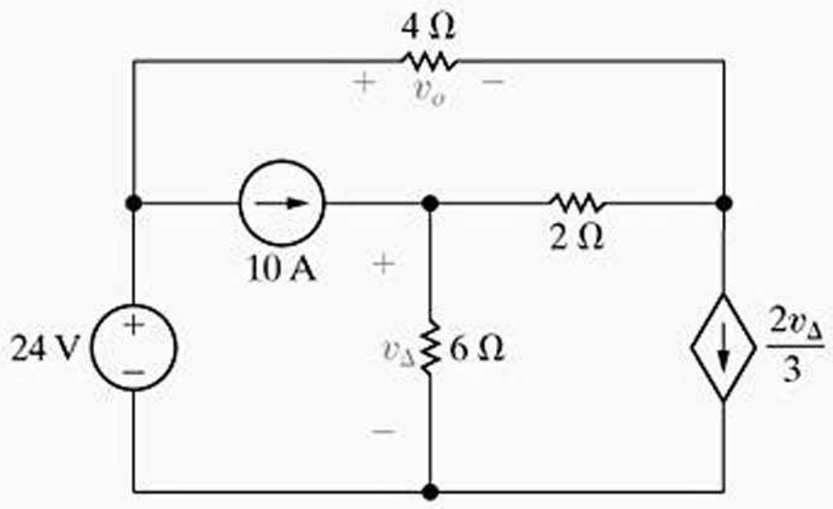
b) Verifique sua solução para i_1, i_2 e i_3 mostrando que a potência dissipada no circuito é igual à potência gerada.

Figura P4.24



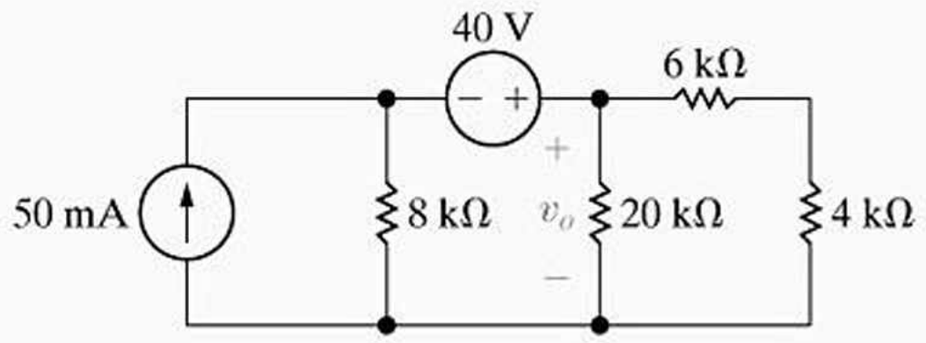
4.25 PSPICE Use o método das tensões de nó para determinar o valor de v_o no circuito da Figura P4.25.

Figura P4.25



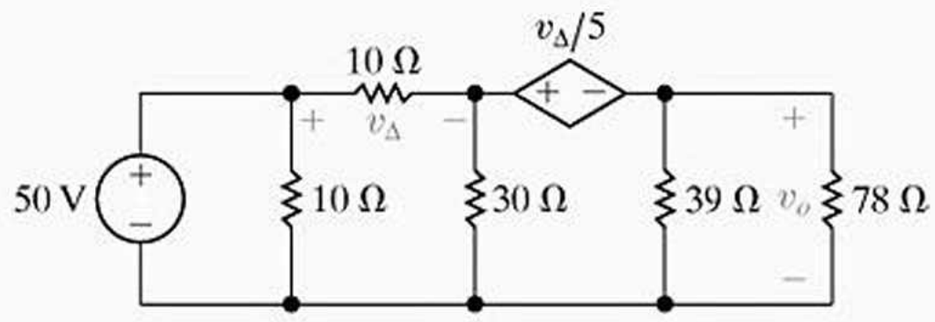
4.26* PSPICE Use o método das tensões de nó para determinar v_o e a potência fornecida pela fonte de tensão de 40 V no circuito da Figura P4.26.

Figura P4.26



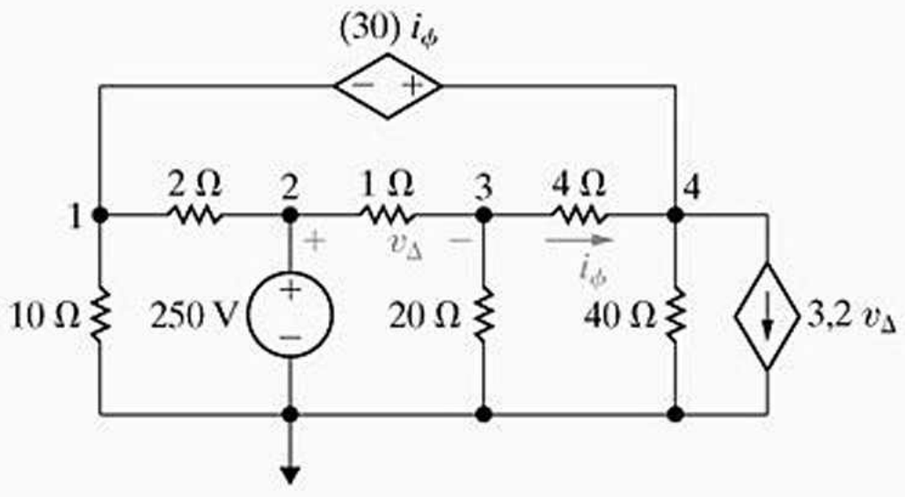
4.27* PSPICE Use o método das tensões de nó para determinar v_o no circuito da Figura P4.27.

Figura P4.27



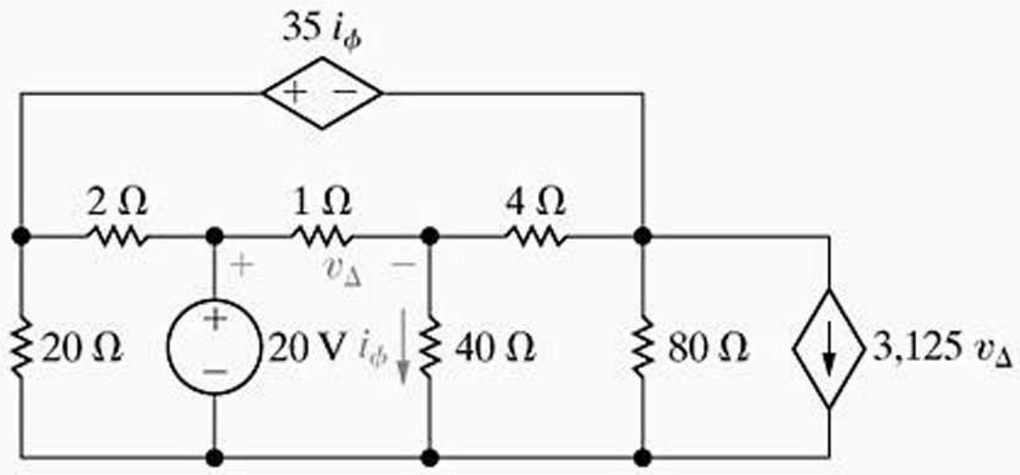
4.28 PSPICE Suponha que você seja um engenheiro projetista e alguém de sua equipe seja designado para analisar o circuito mostrado na Figura P4.28. O nó de referência e a numeração dos nós mostrados na figura foram escolhidos pela analista. Sua solução associa os valores de 235 V e 222 V a v_3 e v_4, respectivamente. Teste esses valores verificando a potência total gerada no circuito em relação à potência total dissipada. Você concorda com a solução apresentada pela analista?

Figura P4.28



4.29 PSPICE Use o método das tensões de nó para determinar a potência desenvolvida pela fonte de 20 V no circuito da Figura P4.29.

Figura P4.29

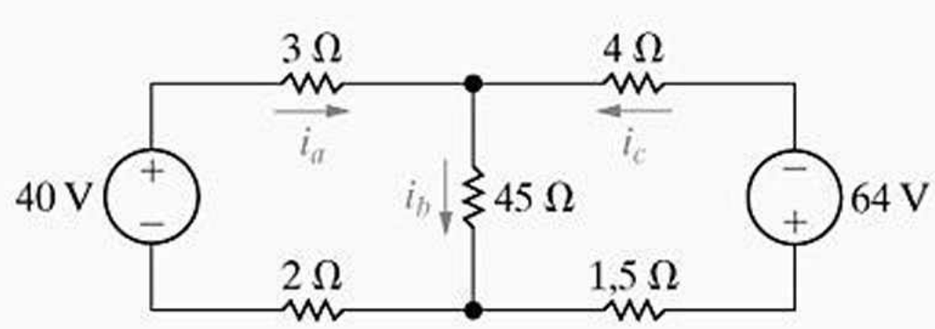


4.30 Mostre que, quando as equações 4.16, 4.17 e 4.19 são resolvidas para i_B, o resultado é idêntico à Equação 2.25.

Seção 4.5

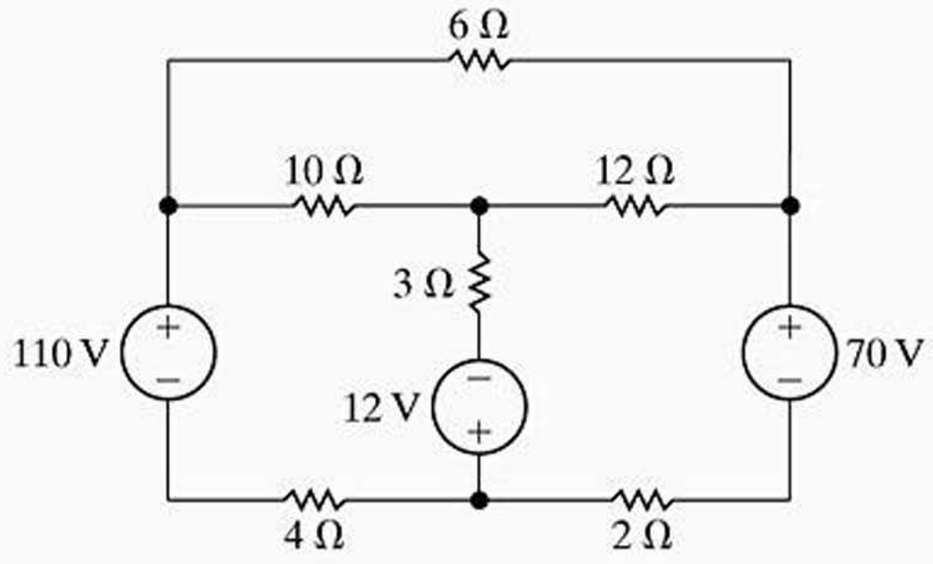
4.31* PSPICE
a) Use o método das correntes de malha para determinar as correntes de ramo i_a, i_b e i_c no circuito da Figura P4.31.
b) Repita o cálculo do item (a) com a polaridade da fonte de 64 V invertida.

Figura P4.31



4.32* PSPICE
a) Use o método das correntes de malha para determinar a potência total gerada no circuito da Figura P4.32.
b) Verifique sua resposta mostrando que a potência total gerada é igual à potência total dissipada.

Figura P4.32



4.33 Resolva o Problema 4.10 usando o método das correntes de malha.

4.34 Resolva o Problema 4.11 usando o método das correntes de malha.

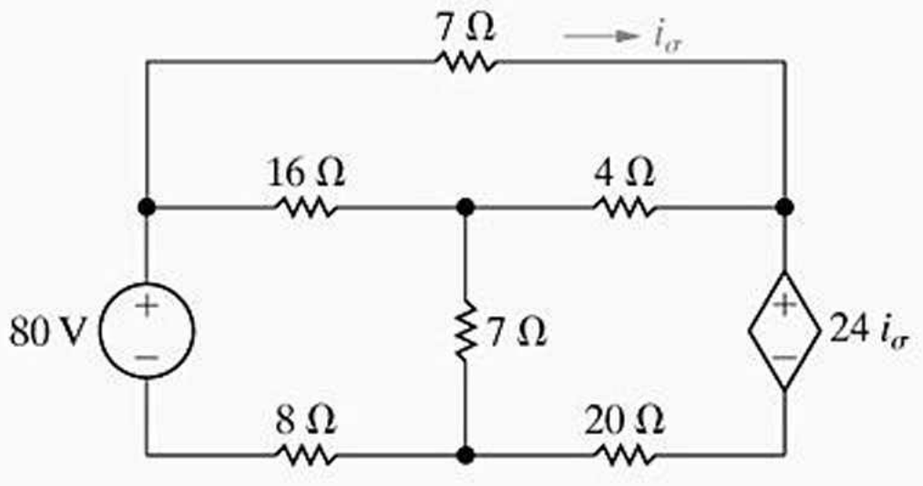
4.35 Resolva o Problema 4.22 usando o método das correntes de malha.

4.36 Resolva o Problema 4.23 usando o método das correntes de malha.

Seção 4.6

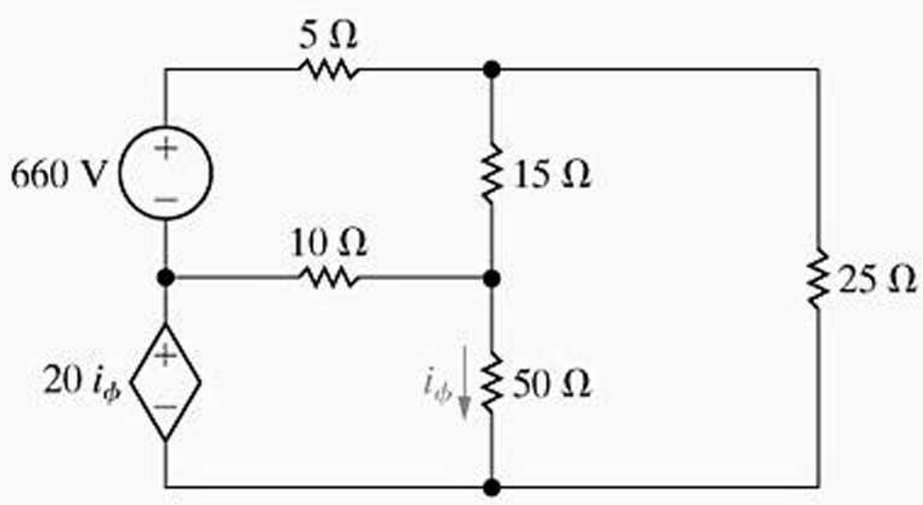
4.37* PSPICE Use o método das correntes de malha para determinar a potência dissipada no resistor de 8 Ω no circuito da Figura P4.37.

Figura P4.37



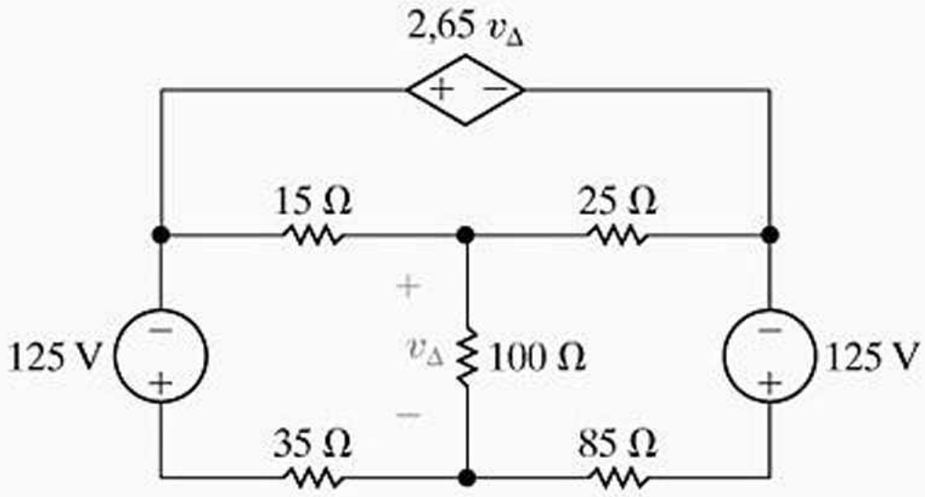
4.38* PSPICE Use o método das correntes de malha para determinar a potência fornecida pela fonte de tensão dependente no circuito visto na Figura P4.38.

Figura P4.38



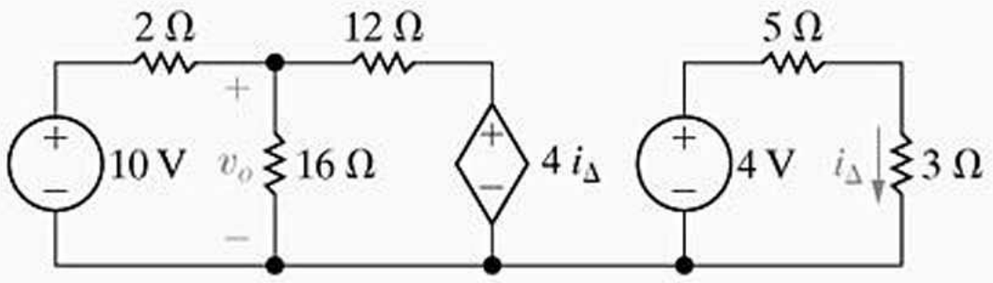
4.39 PSPICE Use o método das correntes de malha para determinar a potência gerada pela fonte de tensão dependente no circuito da Figura P4.39.

Figura P4.39



4.40 PSPICE
a) Use o método das correntes de malha para determinar v_o no circuito da Figura P4.40.
b) Determine a potência gerada pela fonte dependente.

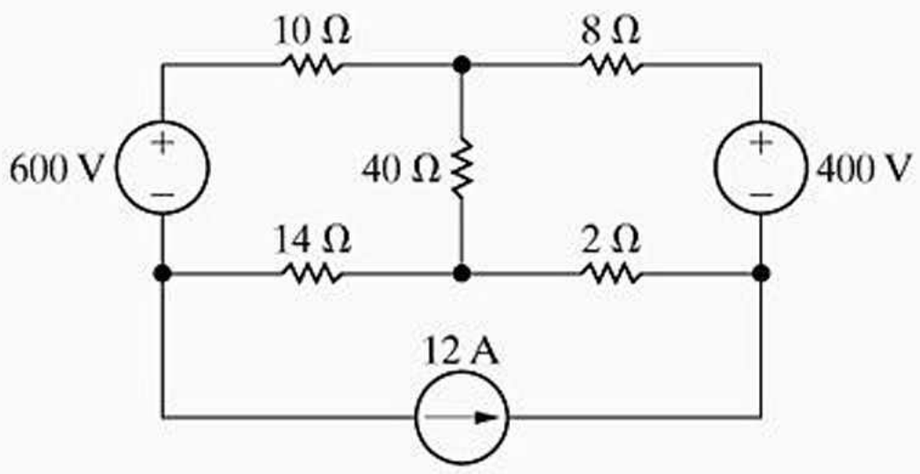
Figura P4.40



Seção 4.7

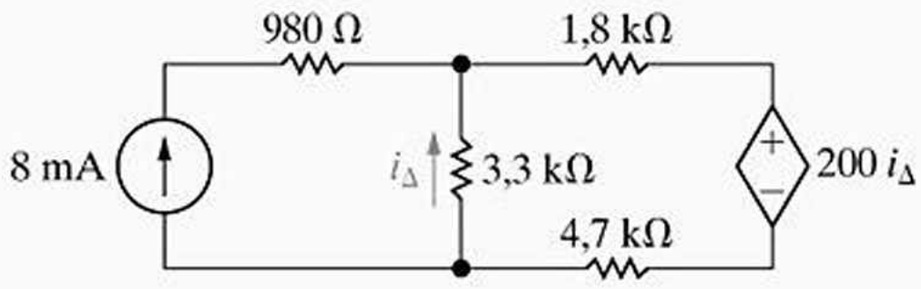
4.41* PSPICE a) Use o método das correntes de malha para determinar a potência que a fonte de corrente de 12 A fornece ao circuito da Figura P4.41.
b) Determine a potência total fornecida ao circuito.
c) Verifique seus cálculos mostrando que a potência total gerada no circuito é igual à potência total dissipada.

Figura P4.41



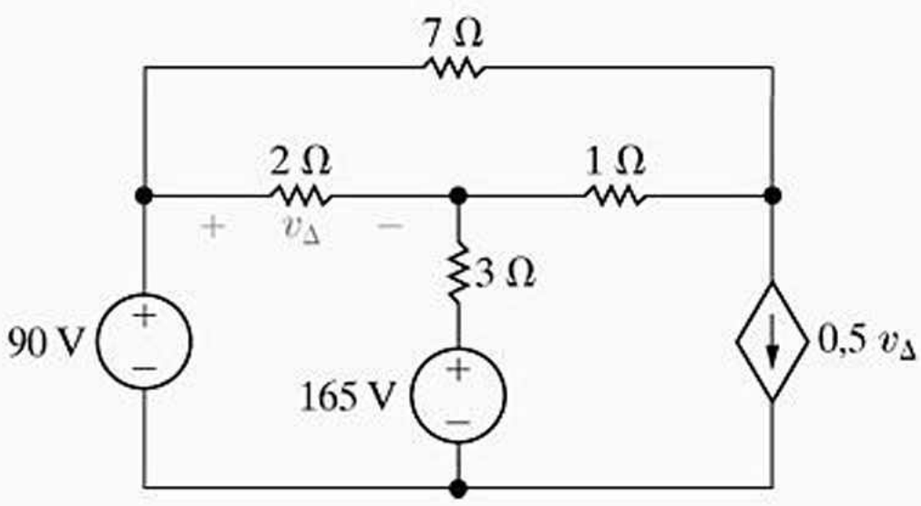
4.42* PSPICE a) Use o método das correntes de malha para calcular para i_Δ no circuito da Figura P4.42.
b) Determine a potência fornecida pela fonte de corrente independente.
c) Determine a potência fornecida pela fonte de tensão dependente.

Figura P4.42



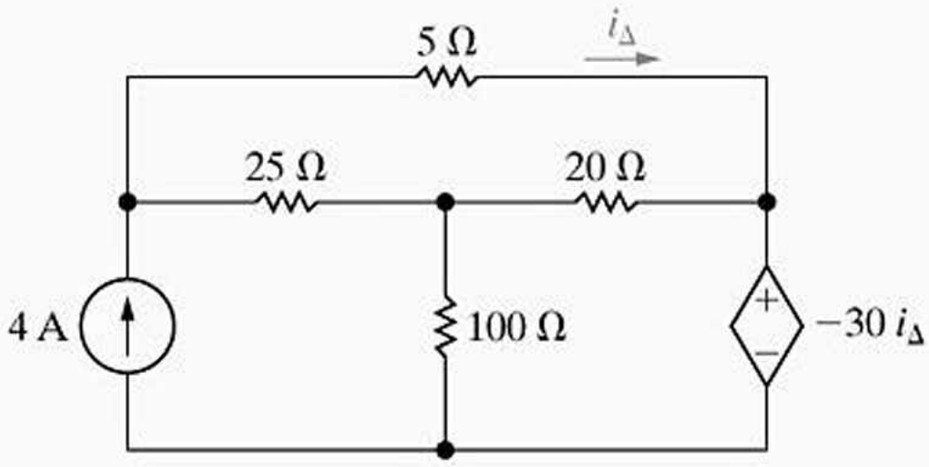
4.43 PSPICE Use o método das correntes de malha para determinar a potência total gerada no circuito da Figura P4.43.

Figura P4.43



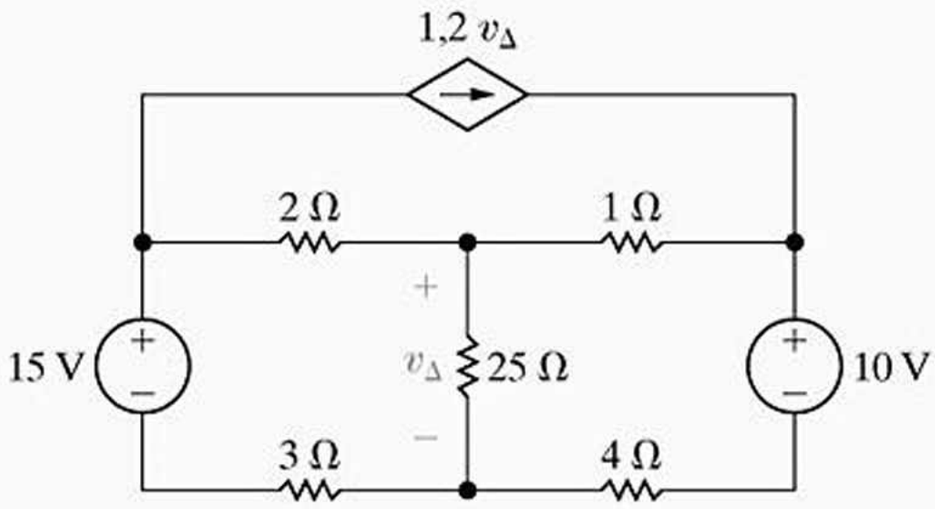
4.44 PSPICE Use o método das correntes de malha para determinar a potência total gerada no circuito da Figura P4.44.

Figura P4.44



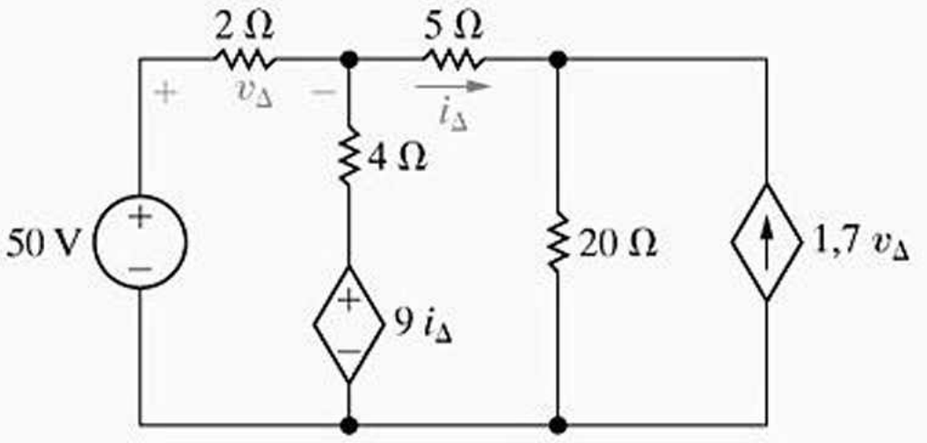
4.45 PSPICE a) Use o método das correntes de malha para determinar a potência fornecida ao resistor de 2 Ω no circuito da Figura P4.45.
b) Qual é a porcentagem da potência total gerada no circuito que é fornecida ao resistor?

Figura P4.45



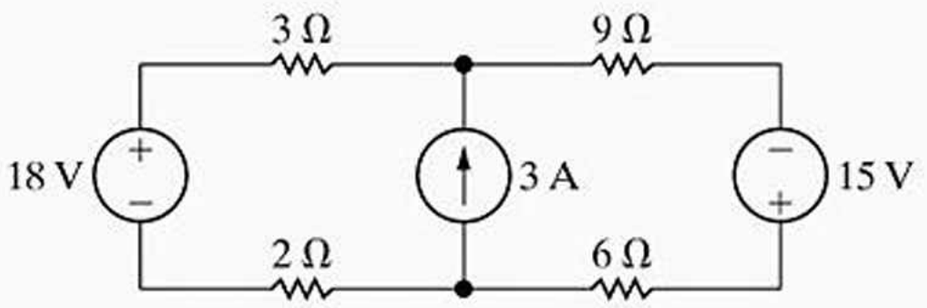
4.46 PSPICE a) Use o método das correntes de malha para determinar quais fontes no circuito da Figura P4.46 estão fornecendo potência.
b) Determine a potência total dissipada no circuito.

Figura P4.46



4.47* PSPICE Use o método das correntes de malha para determinar a potência total dissipada no circuito da Figura P4.47.

Figura P4.47

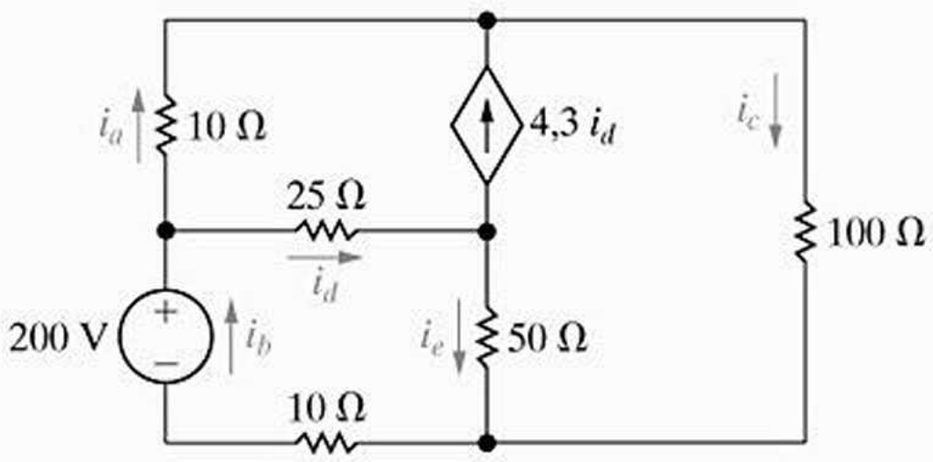


4.48 PSPICE Suponha que a tensão da fonte de 18 V no circuito da Figura P4.47 seja aumentada para 100 V. Determine a potência total dissipada no circuito.

4.49 a) Suponha que a tensão da fonte de 18 V no circuito da Figura P4.47 seja alterada para −10 V. Determine a potência total dissipada no circuito.
b) Repita os cálculos do item (a) quando a fonte de corrente de 3 A for substituída por um curto-circuito.
c) Explique por que as respostas para (a) e (b) são iguais.

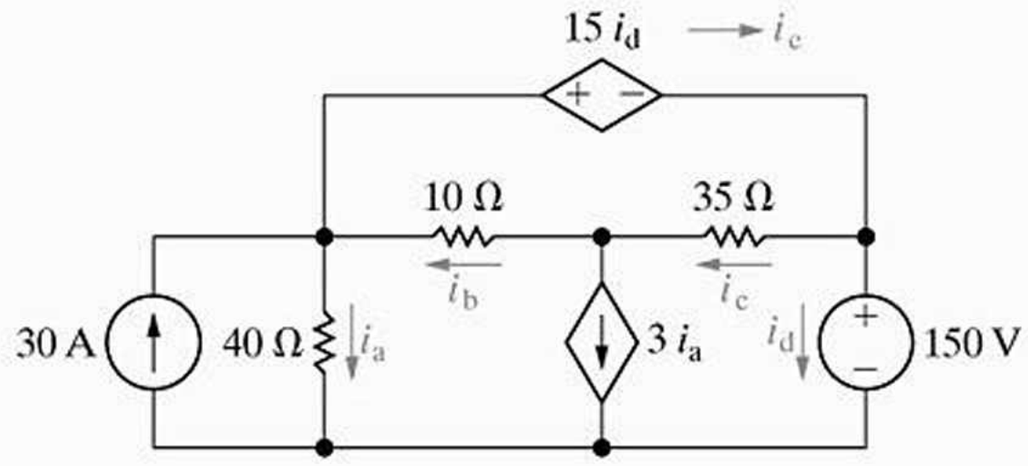
4.50* PSPICE a) Use o método das correntes de malha para determinar as correntes de ramo $i_a - i_e$ no circuito da Figura P4.50.
b) Verifique sua solução mostrando que a potência total gerada no circuito é igual à potência total dissipada.

Figura P4.50



4.51 PSPICE a) Determine as correntes de ramo $i_a - i_e$ para o circuito mostrado na Figura P4.51.
b) Verifique suas respostas mostrando que a potência total gerada é igual à potência total dissipada.

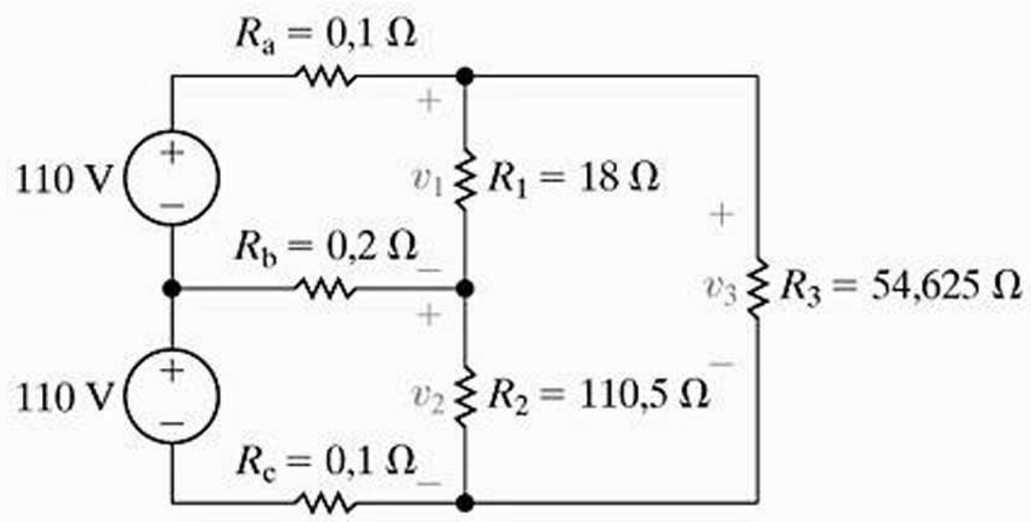
Figura P4.51



Seção 4.8

4.52 PSPICE O circuito da Figura P4.52 é uma versão cc de um típico sistema de distribuição a três fios. Os resistores R_a, R_b e R_c representam as resistências dos três condutores que ligam as três cargas R_1, R_2 e R_3 à fonte de alimentação de 110/220 V. Os resistores R_1 e R_2 representam cargas ligadas aos circuitos de 110 V, e R_3 representa uma carga ligada ao circuito de 220 V.
a) Qual método de análise de circuitos você usará e por quê?
b) Calcule v_1, v_2 e v_3.
c) Calcule a potência fornecida a R_1, R_2 e R_3.
d) Qual porcentagem da potência total gerada pelas fontes é fornecida às cargas?
e) O ramo R_b representa o condutor neutro no circuito de distribuição. Qual efeito adverso ocorre se o condutor neutro for aberto? (*Sugestão:* calcule v_1 e v_2 e observe que eletrodomésticos ou cargas projetados para serem utilizados nesse circuito teriam uma tensão nominal de 110 V.)

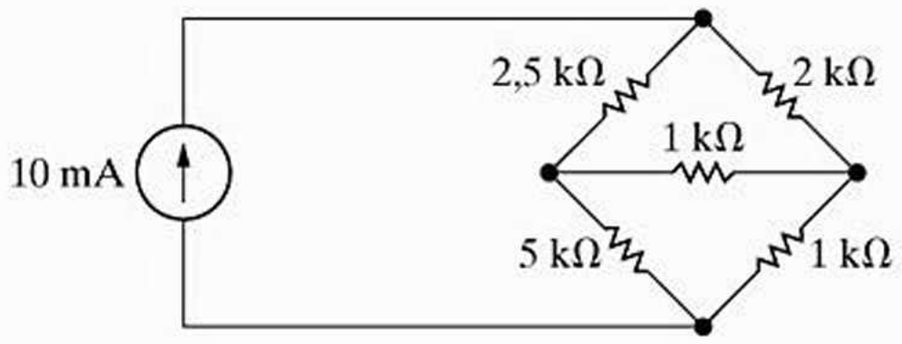
Figura P4.52



4.53 Mostre que, sempre que $R_1 = R_2$ no circuito da Figura P4.52, a corrente no condutor neutro será zero. (*Sugestão:* calcule a corrente no condutor neutro em função de R_1 e R_2.)

4.54* PSPICE Suponha que lhe pediram para determinar a potência dissipada no resistor de 1 kΩ no circuito da Figura P4.54.
a) Qual método de análise de circuitos você recomendaria? Explique por quê.
b) Use o método de análise recomendado para determinar a potência dissipada no resistor de 1 kΩ.
c) Você mudaria sua recomendação se o problema fosse determinar a potência gerada pela fonte de corrente de 10 mA? Explique.
d) Determine a potência fornecida pela fonte de corrente de 10 mA.

Figura P4.54

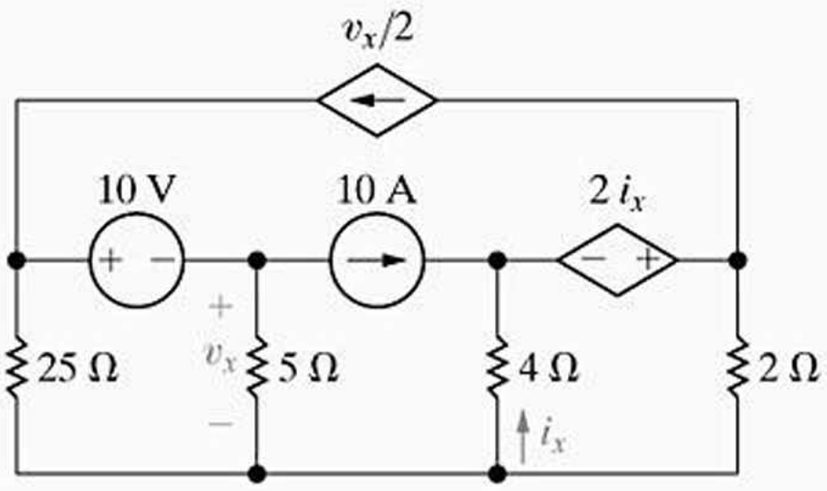


4.55 PSPICE Um resistor de 4 kΩ é colocado em paralelo com a fonte de corrente de 10 mA no circuito da Figura P4.54. Suponha que lhe pediram para calcular a potência gerada pela fonte de corrente.
a) Qual método de análise de circuitos você recomendaria? Explique por quê.
b) Determine a potência gerada pela fonte de corrente.

4.56* PSPICE a) Você usaria o método das tensões de nó ou das correntes de malha para determinar a potência absorvida pela fonte de 10 V no circuito da Figura P4.56? Explique sua escolha.

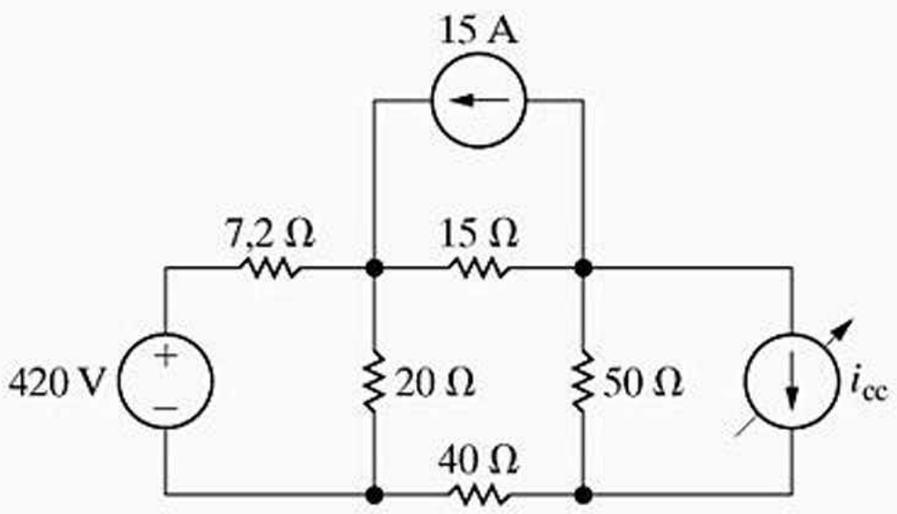
b) Use o método que você selecionou no item (a) para determinar a potência.

Figura P4.56



4.57 PSPICE A fonte variável de corrente cc no circuito da Figura P4.57 é ajustada de modo que a potência gerada pela fonte de corrente de 15 A seja 3.750 W. Determine o valor de i_{cc}.

Figura P4.57

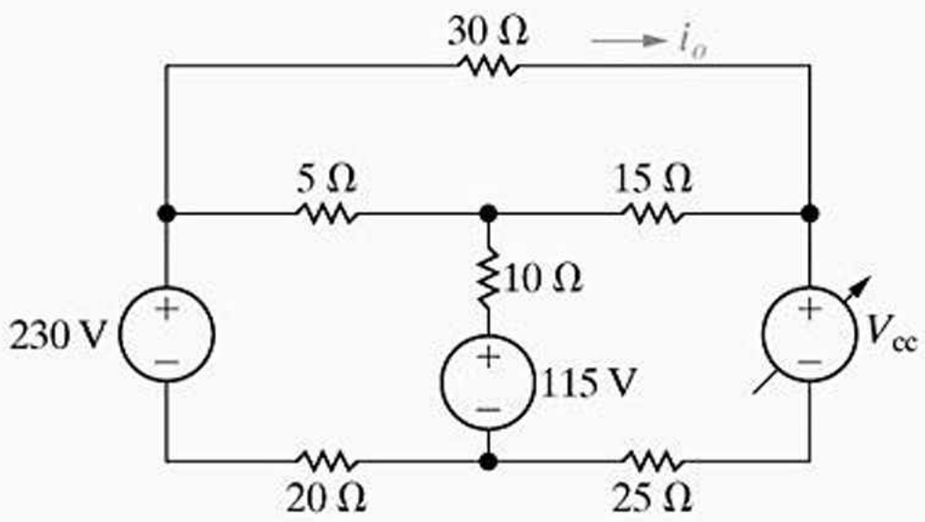


4.58 PSPICE A fonte variável de tensão cc no circuito da Figura P4.58 é ajustada de modo que i_o seja zero.

a) Determine o valor de V_{cc}.

b) Verifique sua solução mostrando que a potência gerada é igual à potência dissipada.

Figura P4.58

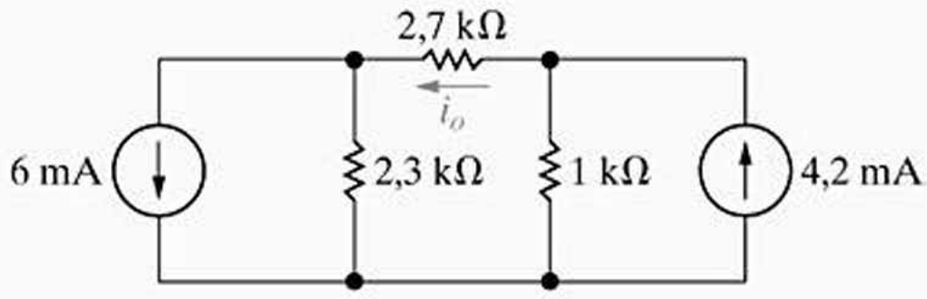


Seção 4.9

4.59* PSPICE a) Use uma série de transformações de fonte para determinar a corrente i_o no circuito da Figura P4.59.

b) Verifique sua solução usando o método das tensões de nó para determinar i_o.

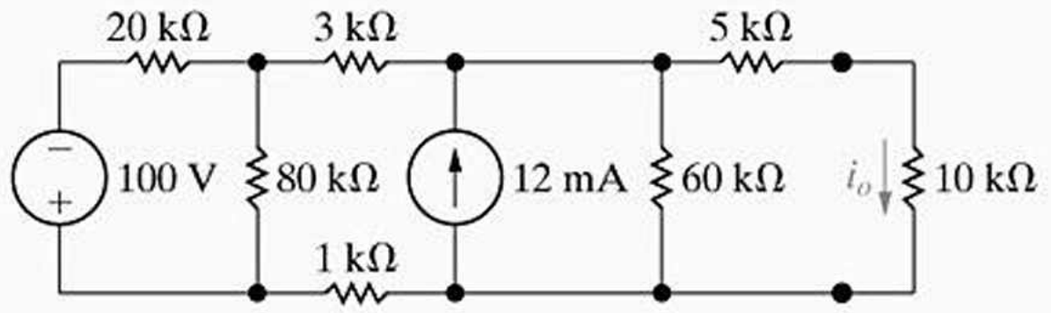
Figura P4.59



4.60 PSPICE a) Determine a corrente no resistor de 10 kΩ no circuito da Figura P4.60 fazendo uma sucessão de transformações de fonte adequadas.

b) Usando o resultado obtido no item (a), faça os cálculos no sentido inverso para determinar a potência desenvolvida pela fonte de 100 V.

Figura P4.60



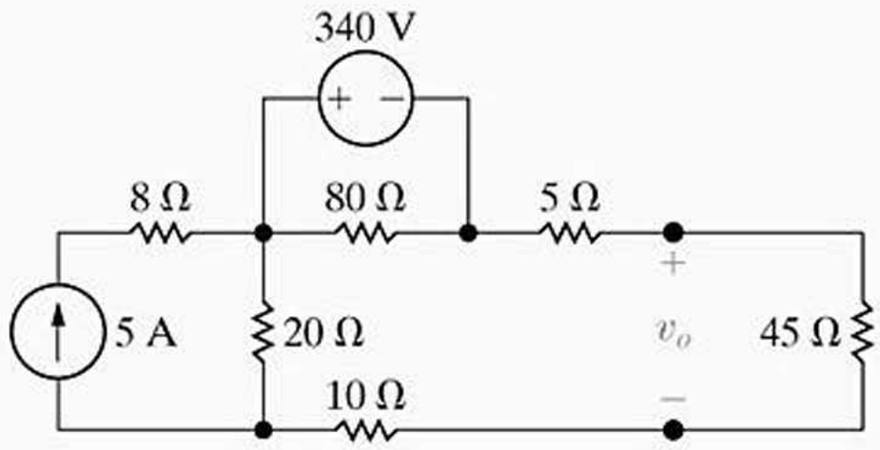
4.61 PSPICE a) Use transformações de fonte para determinar v_o no circuito da Figura P4.61.

b) Determine a potência gerada pela fonte de 340 V.

c) Determine a potência gerada pela fonte de corrente de 5 A.

d) Verifique se a potência total gerada é igual à potência total dissipada.

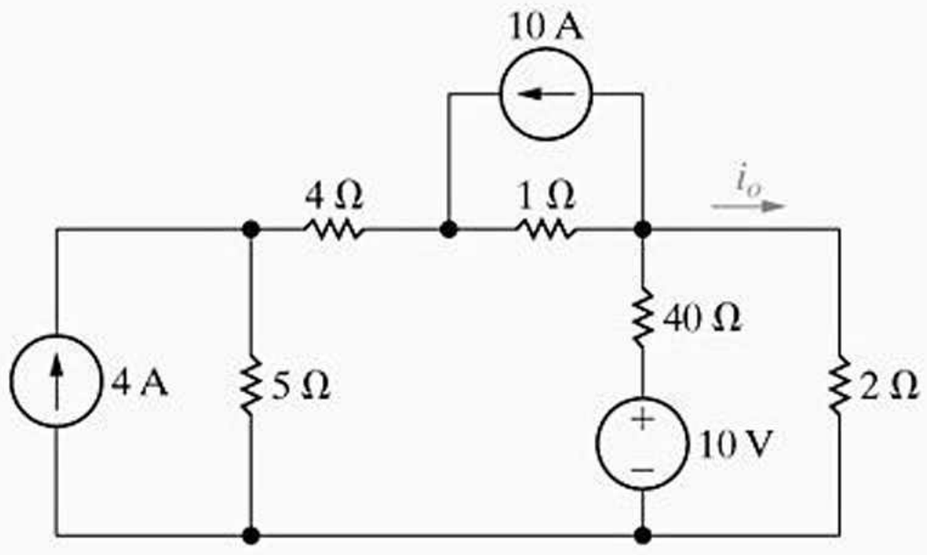
Figura P4.61



4.62* PSPICE a) Use uma série de transformações de fonte para determinar i_o no circuito da Figura P4.62.

b) Verifique sua solução usando o método das correntes de malha para determinar i_o.

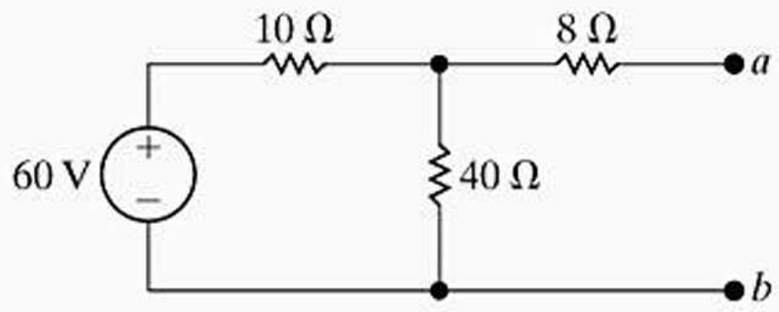
Figura P4.62



Seção 4.10

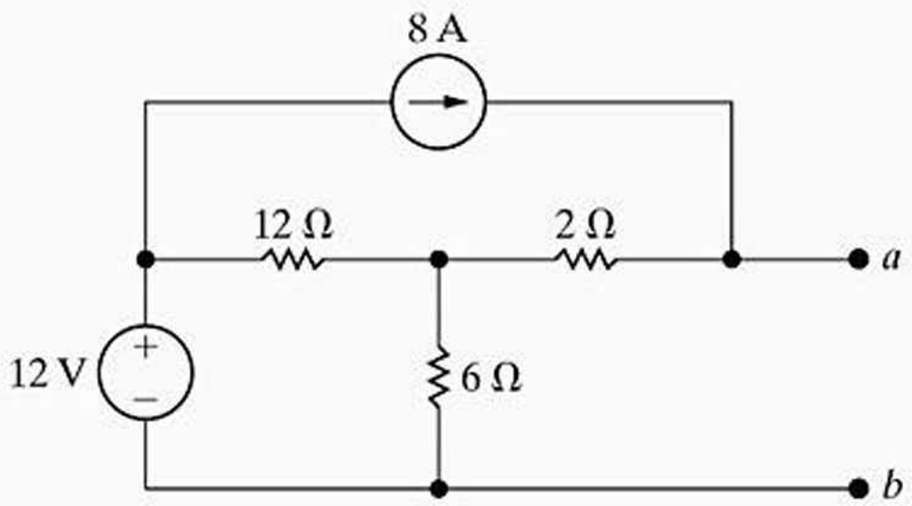
4.63* PSPICE Obtenha o equivalente de Thévenin com relação aos terminais *a,b* para o circuito da Figura P4.63.

Figura P4.63



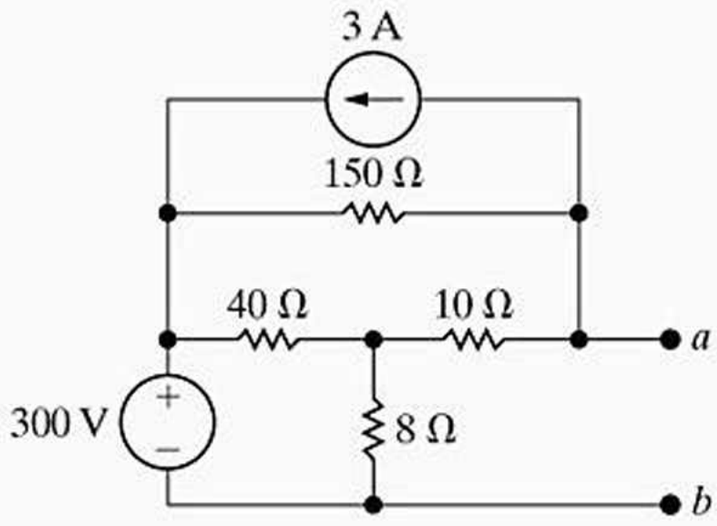
4.64 PSPICE Obtenha o equivalente de Thévenin com relação aos terminais *a,b* do circuito da Figura P4.64.

Figura P4.64



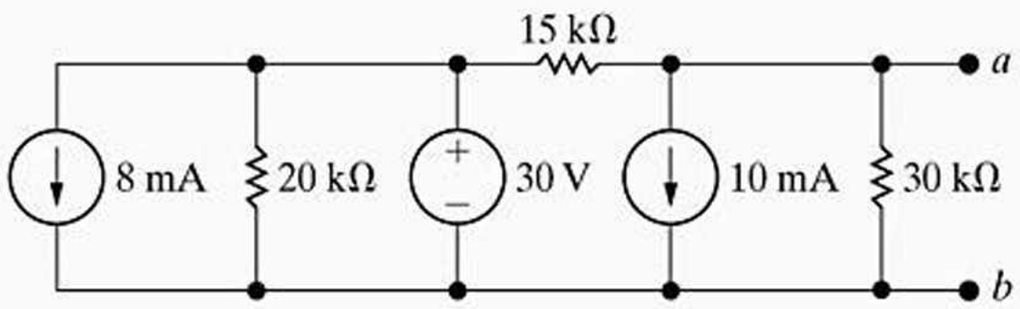
4.65 PSPICE Obtenha o equivalente de Thévenin com relação aos terminais *a,b* do circuito da Figura P4.65.

Figura P4.65



4.66* PSPICE Obtenha o equivalente de Norton com relação aos terminais *a,b* do circuito da Figura P4.66.

Figura P4.66

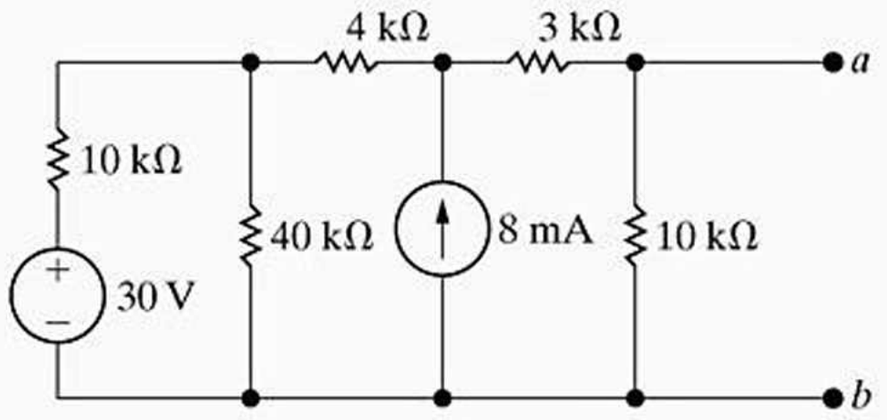


4.67* PSPICE Um voltímetro com uma resistência de 100 kΩ é usado para medir a tensão v_{ab} no circuito da Figura P4.67.

a) Qual é a leitura do voltímetro?

b) Qual é a porcentagem de erro na leitura do voltímetro se a porcentagem de erro for definida como [(medida – real)/real] × 100?

Figura P4.67

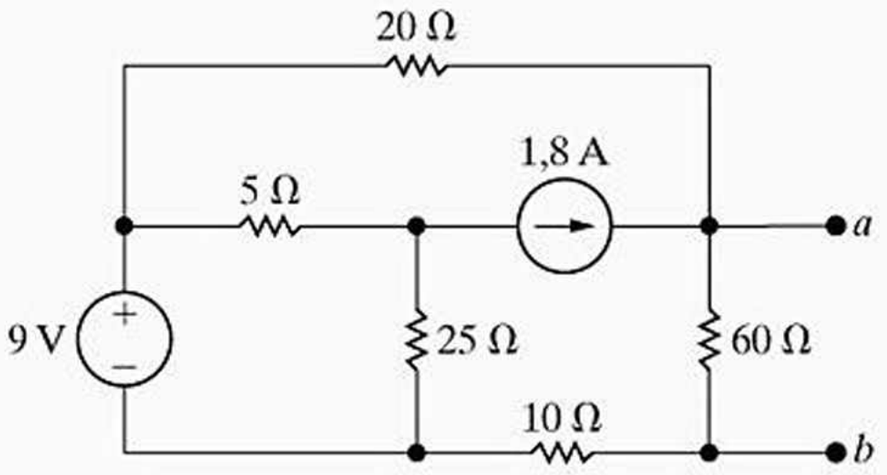


4.68 PSPICE

a) Obtenha o equivalente de Thévenin com relação aos terminais *a,b* do circuito da Figura P4.68, determinando a tensão de circuito aberto e a corrente de curto-circuito.

b) Calcule a resistência de Thévenin eliminando as fontes independentes. Compare seu resultado com a resistência de Thévenin encontrada no item (a).

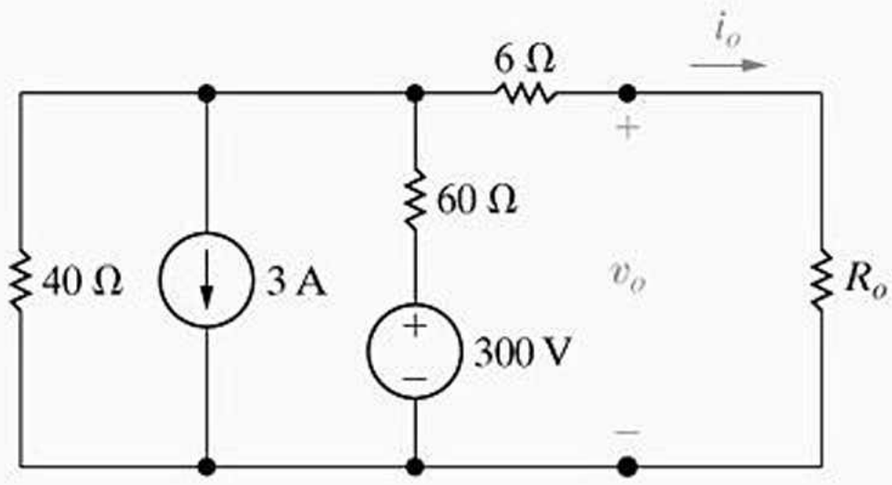
Figura P4.68



4.69 Uma bateria de automóvel, quando ligada ao rádio de um carro, fornece 12,5 V. Quando ligada a um conjunto de faróis, fornece 11,7 V. Suponha que o rádio possa ser modelado como um resistor de 6,25 Ω e os faróis possam ser modelados como um resistor de 0,65 Ω. Quais são os equivalentes de Thévenin e de Norton para a bateria?

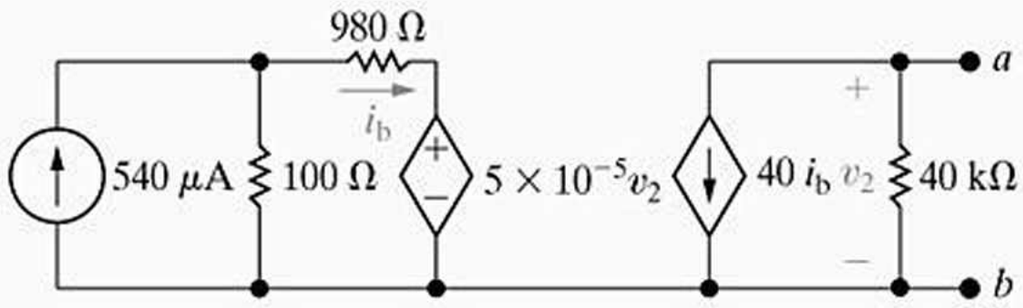
4.70 PSPICE Determine i_o e v_o no circuito mostrado na Figura P4.70 quando R_o for 0, 2, 4, 10, 15, 20, 30, 50, 60 e 70 Ω.

Figura P4.70



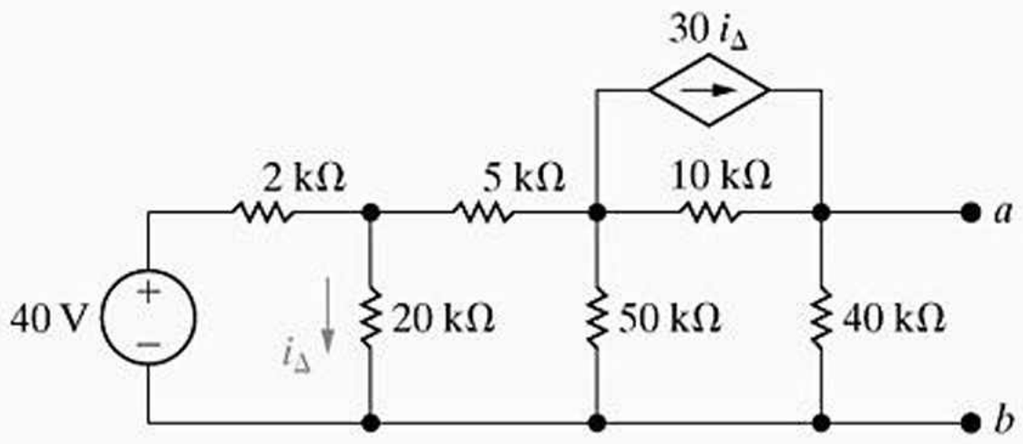
4.71* PSPICE Obtenha o equivalente de Thévenin com relação aos terminais *a,b* do circuito mostrado na Figura P4.71.

Figura P4.71



4.72 PSPICE Obtenha o equivalente de Thévenin com relação aos terminais *a,b* do circuito da Figura P4.72.

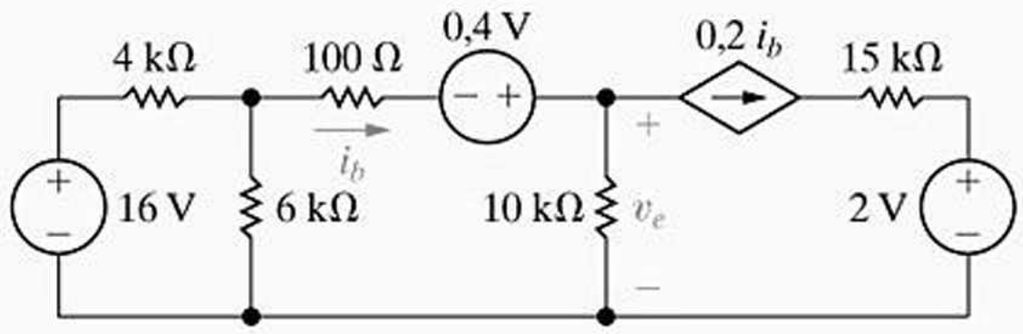
Figura P4.72



4.73 PSPICE A leitura de um voltímetro usado para medir a tensão v_e na Figura P4.73 é 7,5 V.

a) Qual é a resistência do voltímetro?
b) Qual é a porcentagem de erro na medição da tensão?

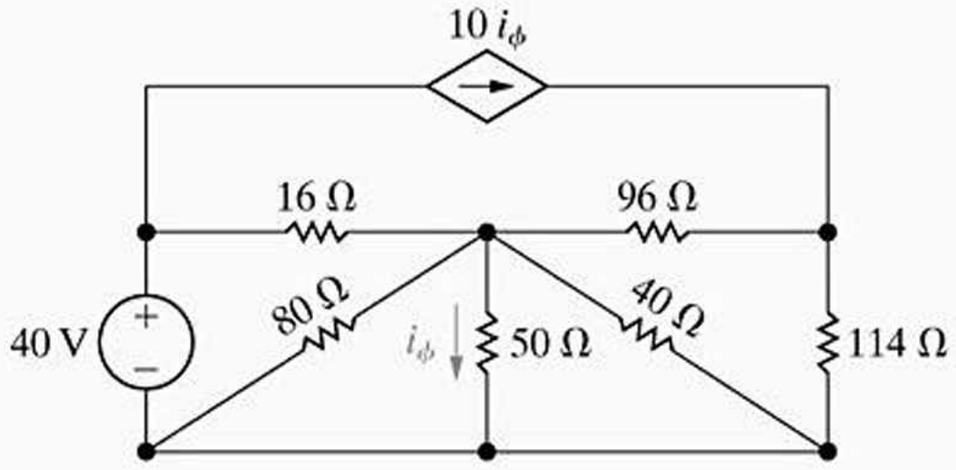
Figura P4.73



4.74 PSPICE A leitura de um amperímetro usado para medir a corrente i_ϕ no circuito mostrado na Figura P4.74 é 10 A.

a) Qual é a resistência do amperímetro?
b) Qual é a porcentagem de erro em uma medição de corrente?

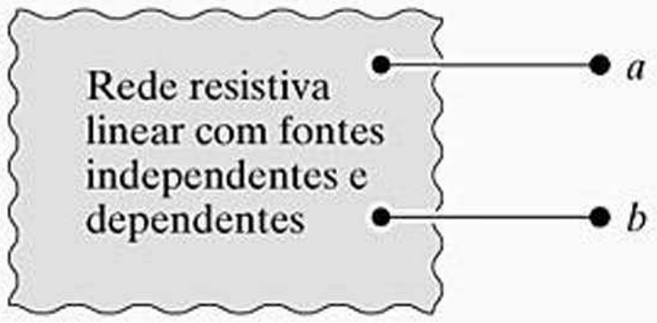
Figura P4.74



4.75 Um equivalente de Thévenin também pode ser obtido a partir de medições realizadas no par de terminais de interesse. Suponha que as seguintes medições tenham sido feitas nos terminais *a,b* do circuito na Figura P4.75.

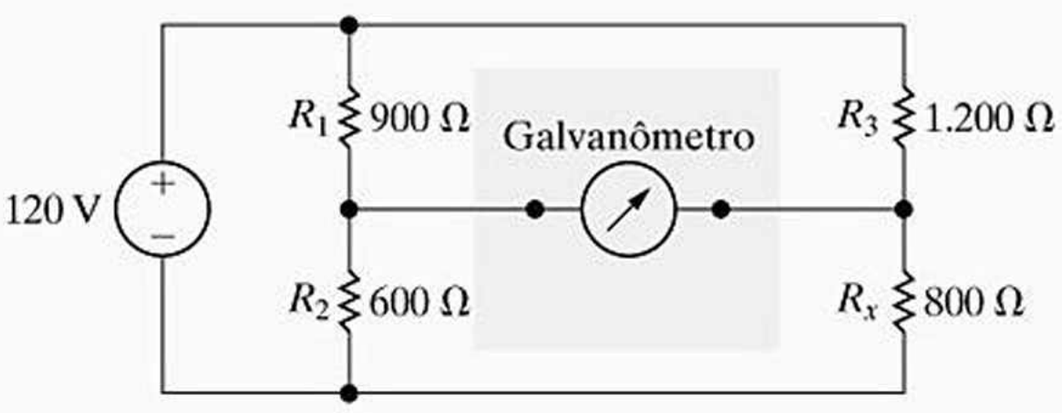
Quando um resistor de 15 kΩ é ligado aos terminais *a,b*, a tensão v_{ab} é 45 V.
Quando um resistor de 5 kΩ é ligado aos terminais *a,b*, a tensão é 25 V.
Obtenha o equivalente de Thévenin da rede para os terminais *a,b*.

Figura P4.75



4.76 PSPICE A ponte de Wheatstone no circuito da Figura P4.76 está equilibrada quando R_3 é igual a 1.200 Ω. Se o galvanômetro tiver uma resistência de 30 Ω, qual será a corrente no galvanômetro quando a ponte estiver desequilibrada e R_3 for 1.204 Ω? (*Sugestão:* obtenha o equivalente de Thévenin com relação aos terminais do galvanômetro quando R_3 = 1.204 Ω. Observe que, uma vez obtido esse equivalente de Thévenin, é fácil determinar a corrente de desequilíbrio no ramo do galvanômetro para diferentes indicações do galvanômetro.)

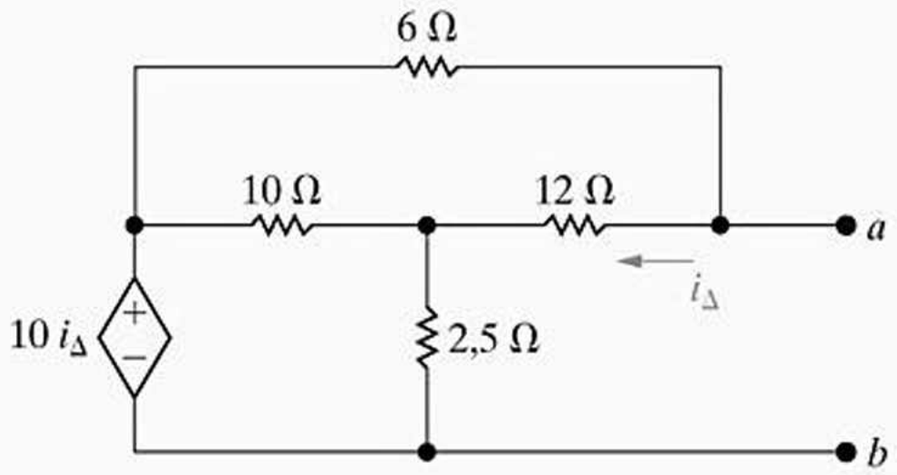
Figura P4.76



Seção 4.11

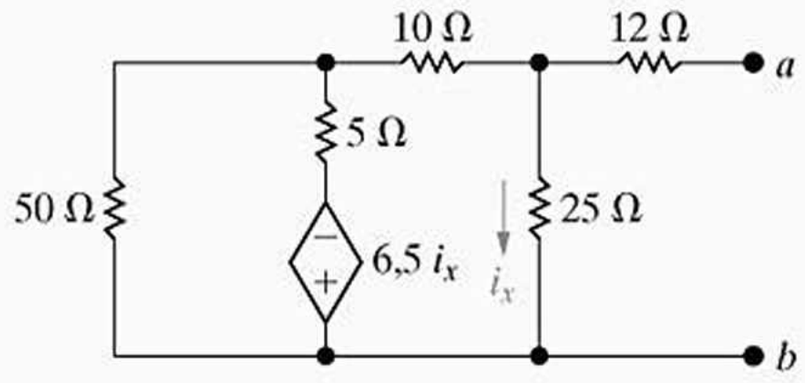
4.77* PSPICE Obtenha o equivalente de Thévenin referente aos terminais *a,b* do circuito da Figura P4.77.

Figura P4.77



4.78 PSPICE Obtenha o equivalente de Thévenin com relação aos terminais *a,b* do circuito da Figura P4.78.

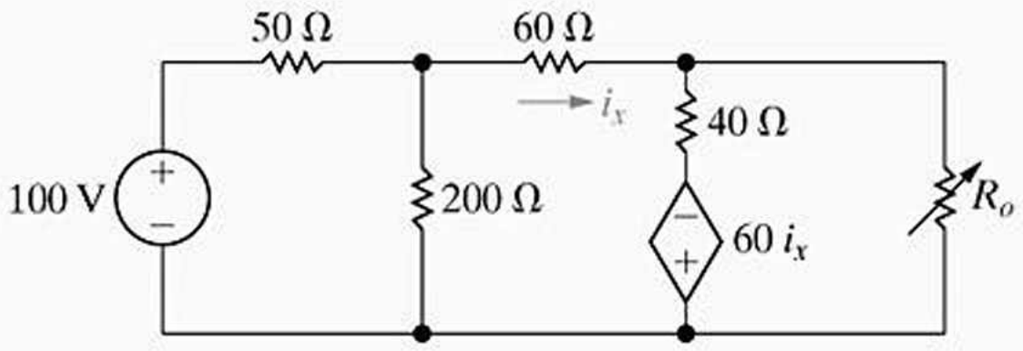
Figura P4.78



Seção 4.12

4.79* PSPICE O resistor variável (R_o) no circuito da Figura P4.79 é ajustado até que a potência nele dissipada seja 1,5 W. Determine os valores de R_o que satisfaçam essa condição.

Figura P4.79

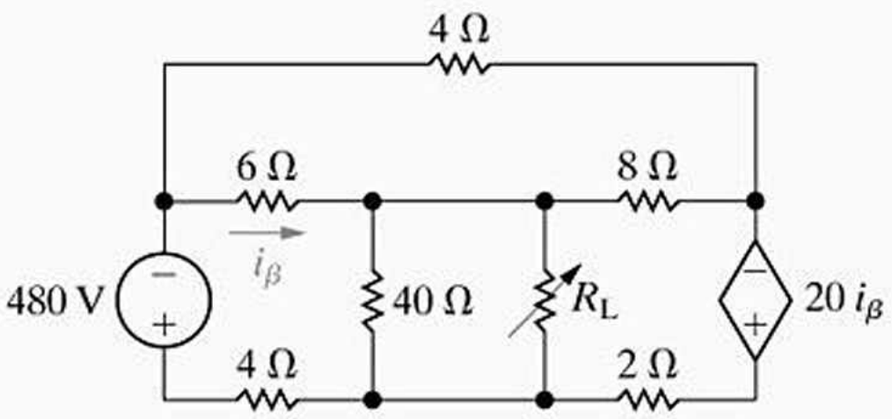


4.80* PSPICE O resistor variável (R_L) no circuito da Figura P4.80 é ajustado para a máxima transferência de potência a R_L.

a) Determine o valor de R_L.

b) Determine a potência máxima transferida para R_L.

Figura P4.80

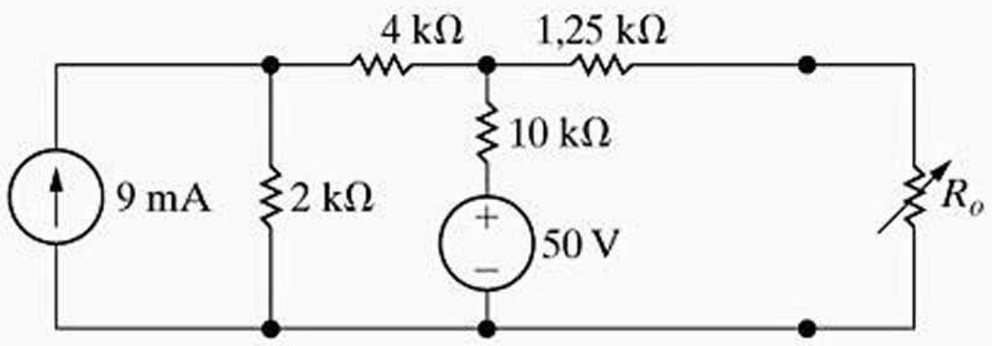


4.81 PSPICE O resistor variável no circuito da Figura P4.81 é ajustado para a máxima transferência de potência para R_o.

a) Determine o valor de R_o.

b) Determine a potência máxima que pode ser fornecida a R_o.

Figura P4.81



4.82 PSPICE Qual porcentagem da potência total desenvolvida no circuito da Figura P4.81 é fornecida a R_o quando ele é ajustado para a máxima transferência de potência?

4.83 PSPICE Um resistor variável R_o é ligado aos terminais a,b do circuito da Figura P4.72. O resistor variável é ajustado até que a potência máxima seja transferida a R_o.

a) Determine o valor de R_o.

b) Determine a potência máxima fornecida a R_o.

c) Determine a porcentagem da potência total gerada no circuito que é fornecida a R_o.

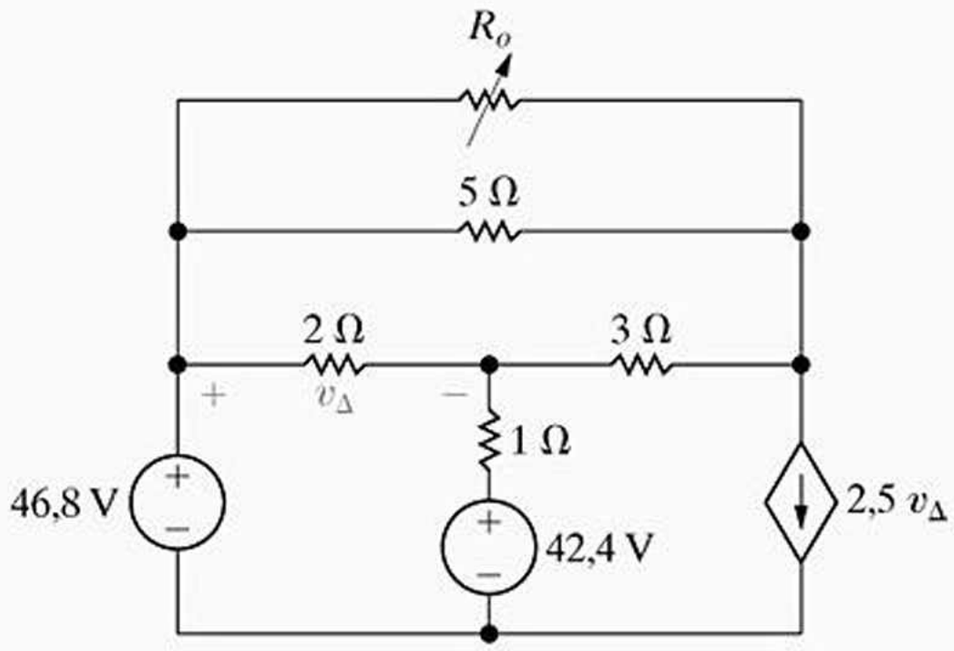
4.84 a) Calcule a potência fornecida a R_o para cada valor usado no Problema 4.70.

b) Monte um gráfico da potência fornecida a R_o em função da resistência R_o.

c) Para qual valor de R_o a potência fornecida a R_o é máxima?

4.85 PSPICE O resistor variável (R_o) no circuito da Figura P4.85 é ajustado para transferir potência máxima para R_o. Qual porcentagem da potência total desenvolvida no circuito é entregue a R_o?

Figura P4.85

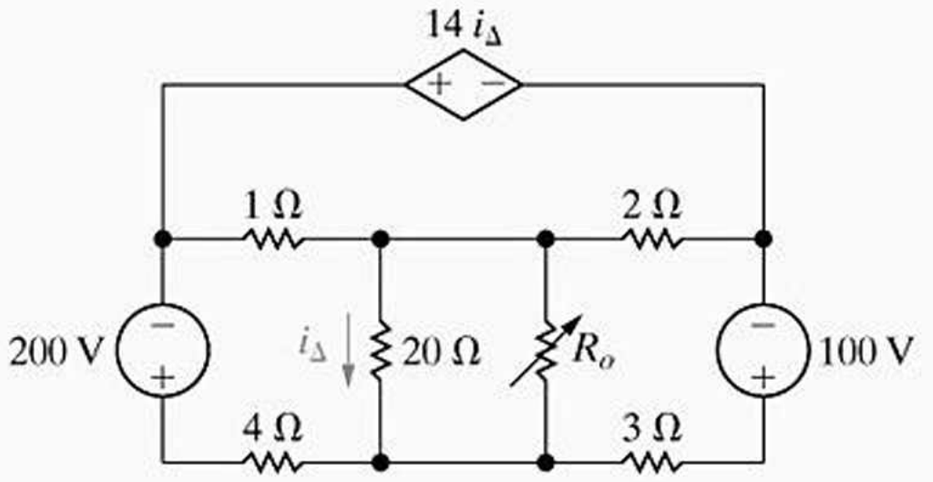


4.86 PSPICE O resistor variável (R_o) no circuito da Figura P4.86 é ajustado para a máxima transferência de potência a R_o.

a) Determine o valor de R_o.

b) Determine a potência máxima que pode ser fornecida a R_o.

Figura P4.86



4.87 PSPICE Qual porcentagem da potência total gerada no circuito da Figura P4.86 é fornecida a R_o?

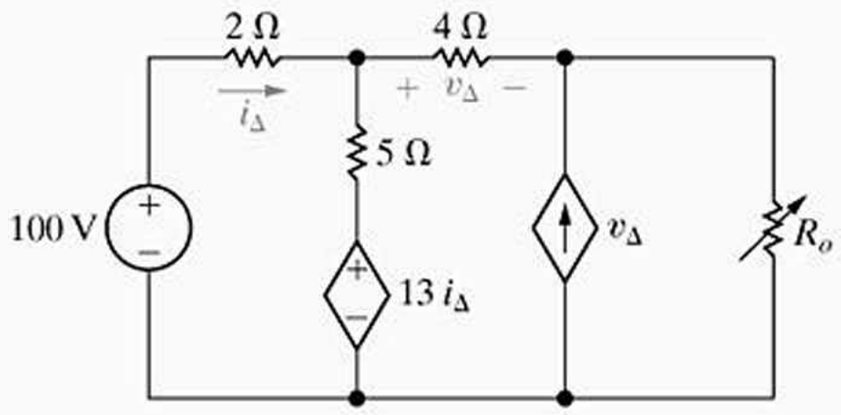
4.88 PSPICE O resistor variável (R_o) no circuito da Figura P4.88 é ajustado para absorver potência máxima do circuito.

a) Determine o valor de R_o.

b) Determine a potência máxima.

c) Determine a porcentagem da potência total gerada no circuito que é fornecida a R_o.

Figura P4.88



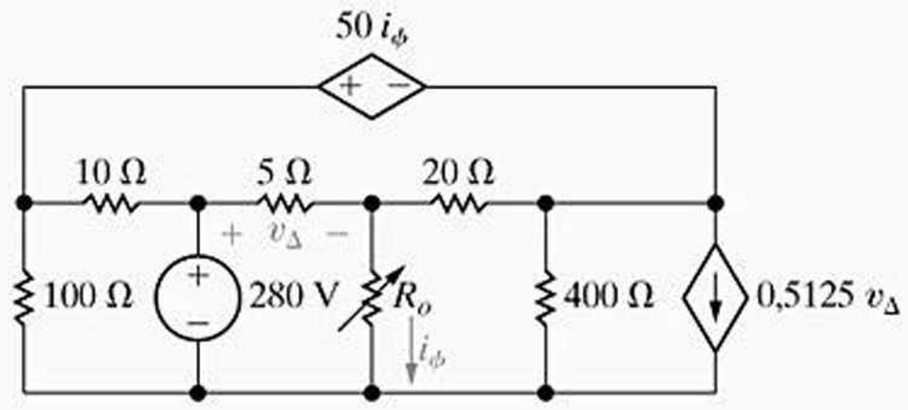
4.89 PSPICE O resistor variável no circuito da Figura P4.89 é ajustado para a máxima transferência de potência para R_o.

a) Determine o valor de R_o.

b) Determine a potência máxima fornecida a R_o.

c) Qual é a potência que a fonte de 280 V fornece ao circuito quando R_o é ajustado para o valor calculado no item (a)?

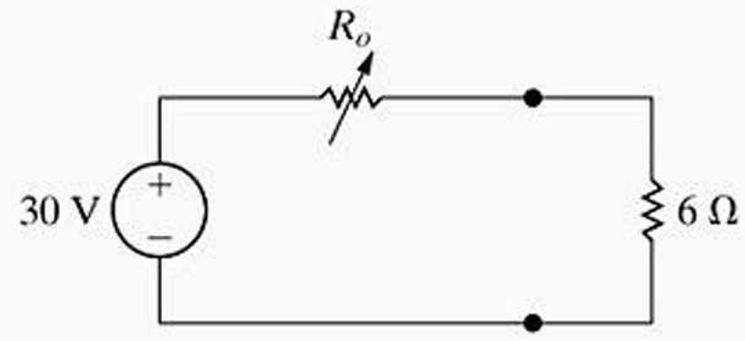
Figura P4.89



4.90 PSPICE a) Determine o valor do resistor variável R_o no circuito da Figura P4.90 o qual resultará na dissipação de potência máxima no resistor de 6 Ω. (*Sugestão:* conclusões apressadas podem ser prejudiciais para sua carreira.)

b) Qual é a potência máxima que pode ser fornecida ao resistor de 6 Ω?

Figura P4.90

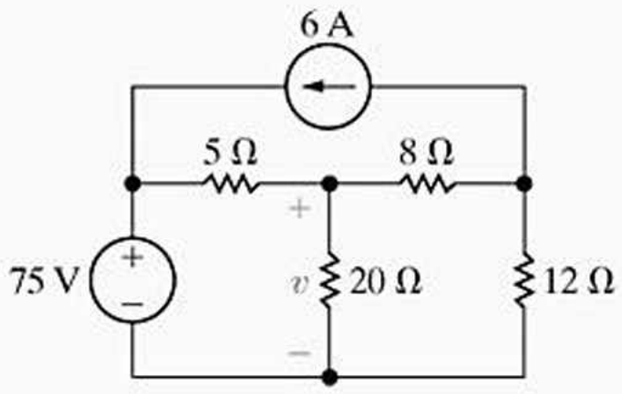


Seção 4.13

4.91* a) Use o princípio da superposição para determinar a tensão v no circuito da Figura P4.91.

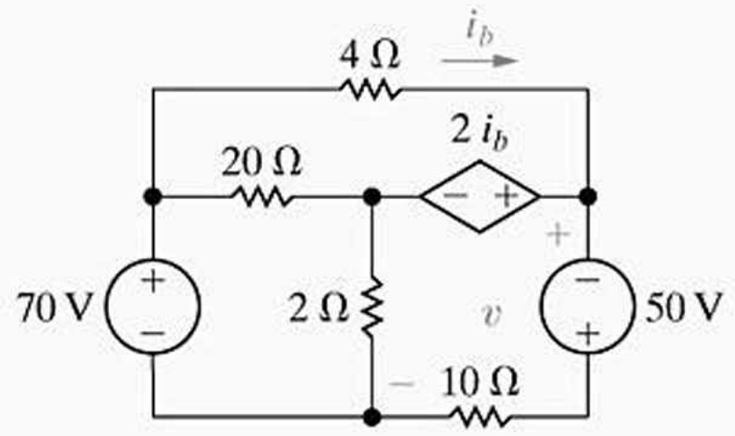
b) Determine a potência dissipada no resistor de 20 Ω.

Figura P4.91



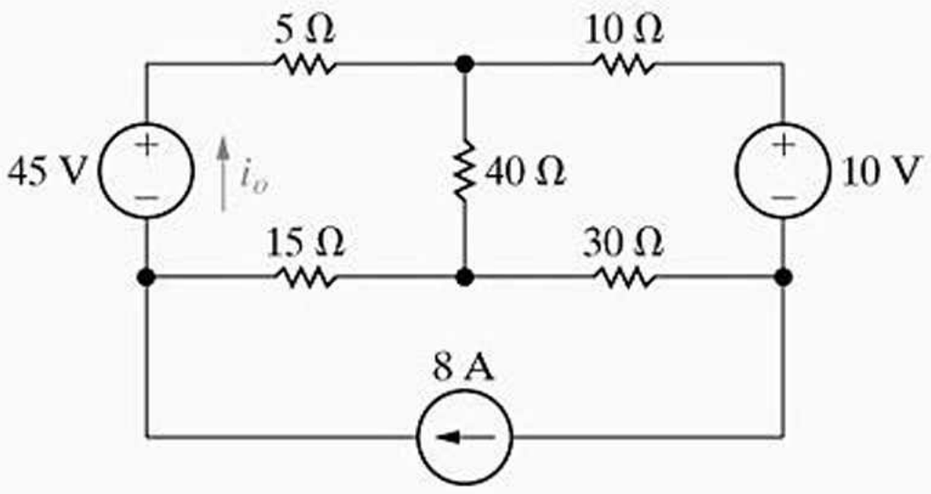
4.92* Use o princípio da superposição para determinar a tensão v no circuito da Figura P4.92.

Figura P4.92



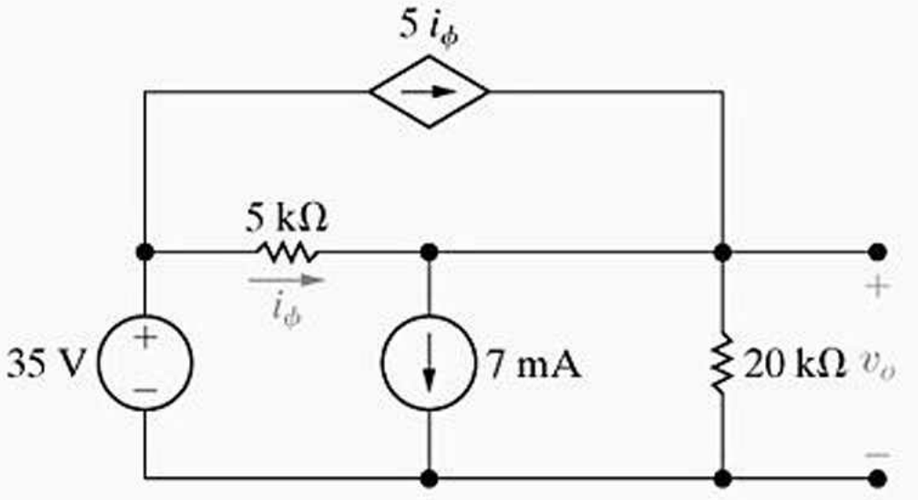
4.93 PSPICE Use o princípio da superposição para determinar a corrente i_o no circuito da Figura P4.93.

Figura P4.93



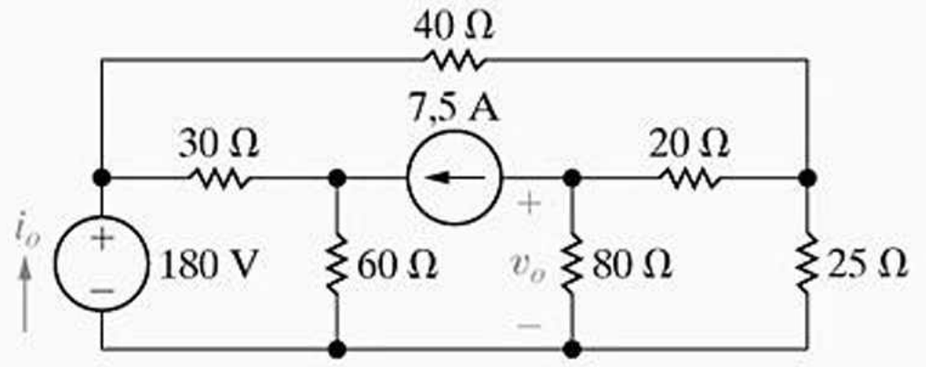
4.94 PSPICE Use o princípio da superposição para determinar v_o no circuito da Figura P4.94.

Figura P4.94



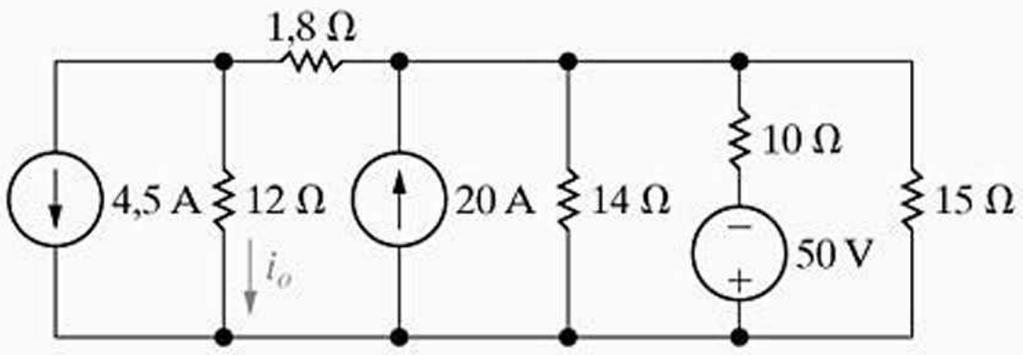
4.95 PSPICE Use o princípio da superposição para calcular i_o e v_o no circuito da Figura P4.95.

Figura P4.95



4.96 PSPICE Use o princípio da superposição para determinar a corrente i_o no circuito mostrado na Figura P4.96.

Figura P4.96

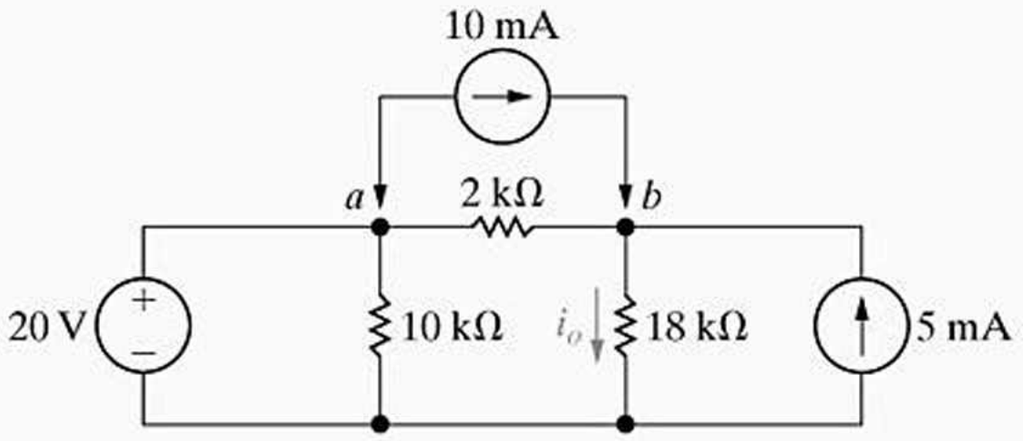


4.97 PSPICE

a) No circuito da Figura P4.97, antes de a fonte de corrente de 10 mA ser inserida nos terminais *a,b*, a corrente i_o é calculada e o resultado é 1,5 mA. Use o princípio da superposição para determinar o valor de i_o após a inserção da fonte de corrente.

b) Verifique sua solução determinando i_o quando todas as três fontes estão agindo simultaneamente.

Figura P4.97



Seções 4.1–4.13

4.98 Medições de laboratório em uma fonte de tensão cc indicam uma tensão terminal a vazio de 75 V e 60 V quando a fonte alimenta um resistor de 20 Ω.

a) Qual é o equivalente de Thévenin da fonte?

b) Mostre que a resistência de Thévenin da fonte é dada pela expressão

$$R_{\text{Th}} = \left(\frac{v_{\text{Th}}}{v_o} - 1\right)R_{\text{L}}$$

onde

v_{Th} = é a tensão de Thévenin,

v_o = a tensão terminal, correspondente à resistência de carga R_{L}.

4.99 Duas fontes ideais de tensão cc são ligadas por condutores elétricos cuja resistência é r Ω/m, como mostra a Figura P4.99. Uma carga cuja resistência é R Ω se move entre as duas fontes de tensão. Sendo x a distância entre a carga e a fonte v_1 e L, a distância entre as fontes:

a) Mostre que

$$v = \frac{v_1RL + R(v_2 - v_1)x}{RL + 2rLx - 2rx^2}.$$

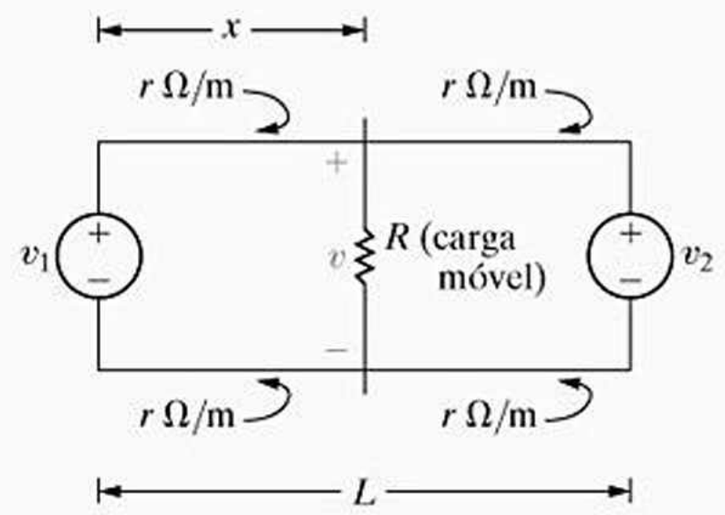
b) Mostre que a tensão v será mínima quando

$$x = \frac{L}{v_2 - v_1}\left[-v_1 \pm \sqrt{v_1v_2 - \frac{R}{2rL}(v_1 - v_2)^2}\right].$$

c) Determine x para $L = 16$ km, $v_1 = 1.000$ V, $v_2 = 1.200$ V, $R = 3{,}9$ Ω e $r = 5 \times 10^{-5}$ Ω/m.

d) Qual é o valor mínimo de v para o circuito do item (c)?

Figura P4.99

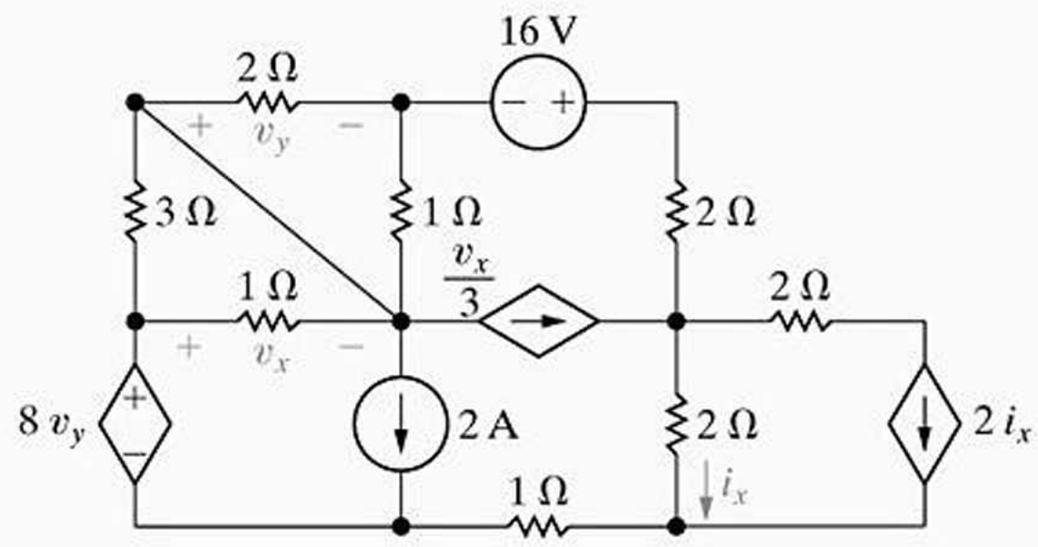


4.100 Suponha que seu supervisor tenha lhe pedido para determinar a potência gerada pela fonte de 16 V no circuito da Figura P4.100. Antes de realizar os cálculos, o supervisor lhe pede para apresentar uma proposta descrevendo como você planeja resolver o problema. Além disso, ele pede que você explique por que escolheu o método de solução proposto.

a) Descreva o plano de ataque, explicando seu raciocínio.

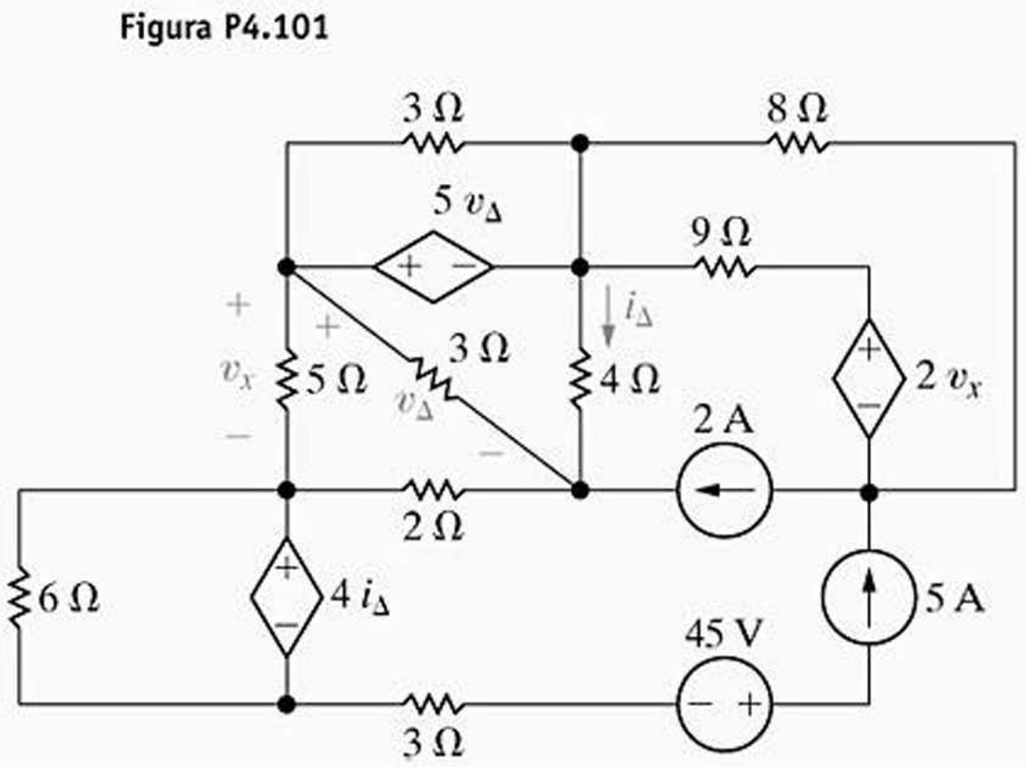
b) Use o método descrito no item (a) para determinar a potência gerada pela fonte de 16 V.

Figura P4.100



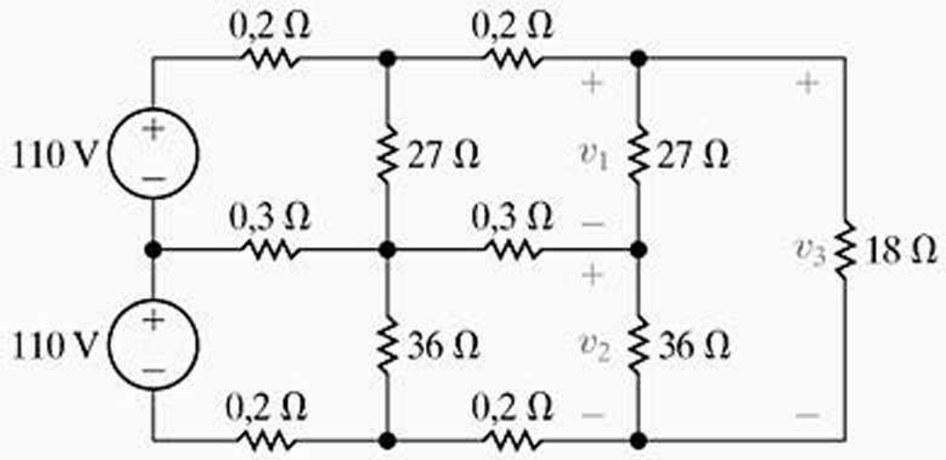
4.101 PSPICE Determine a potência absorvida pela fonte de corrente de 2 A no circuito da Figura P4.101.

Figura P4.101



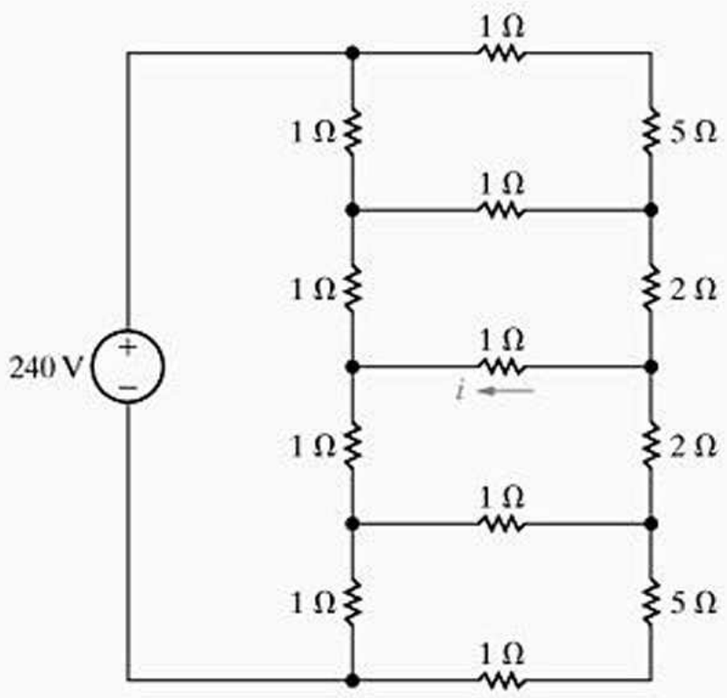
4.102 PSPICE Determine v_1, v_2 e v_3 no circuito da Figura P4.102.

Figura P4.102



4.103 PSPICE Determine i no circuito da Figura P4.103.

Figura P4.103



4.104 PROBLEMA DE PROJETO Para o circuito da Figura 4.69, deduza as expressões para a sensibilidade de v_1 e v_2 às variações nas correntes de fonte I_{g1} e I_{g2}.

4.105* PERSPECTIVA PRÁTICA PSPICE Suponha que os valores nominais para os componentes do circuito da Figura 4.69 sejam: $R_1 = 25\ \Omega$; $R_2 = 5\ \Omega$; $R_3 = 50\ \Omega$; $R_4 = 75\ \Omega$; $I_{g1} = 12$ A e $I_{g2} = 16$ A. Faça uma previsão para os valores de v_1 e v_2 se I_{g1} diminuir para 11 A e todos os outros componentes continuarem com seus valores nominais. Verifique suas previsões usando uma ferramenta como PSpice ou MATLAB.

4.106* PERSPECTIVA PRÁTICA PSPICE Repita o Problema 4.105 se o valor de I_{g2} subir para 17 A e todos os outros componentes continuarem com seus valores nominais. Verifique suas previsões usando uma ferramenta como PSpice ou MATLAB.

4.107* PERSPECTIVA PRÁTICA PSPICE Repita o Problema 4.105 se o valor de I_{g1} diminuir para 11 A e o valor de I_{g2} aumentar para 17 A. Verifique suas previsões usando uma ferramenta como PSpice ou MATLAB.

4.108 PERSPECTIVA PRÁTICA Use os resultados da Tabela 4.2 para prever os valores de v_1 e v_2 se R_1 e R_3 aumentarem para 10% acima de seus valores nominais e R_2 e R_4 diminuírem para 10% abaixo de seus valores nominais. I_{g1} e I_{g2} continuam com seus valores nominais. Compare os valores de v_1 e v_2 que você previu com seus valores reais.

CAPÍTULO

5

O amplificador operacional

SUMÁRIO DO CAPÍTULO

5.1 **Terminais do amplificador operacional**
5.2 **Tensões e correntes terminais**
5.3 **Circuito amplificador inversor**
5.4 **Circuito amplificador somador**
5.5 **Circuito amplificador não-inversor**
5.6 **Circuito amplificador diferencial**
5.7 **Modelo mais realista para o amplificador operacional**

✔ OBJETIVOS DO CAPÍTULO

1. Saber identificar os cinco terminais de amp ops e descrever e utilizar as restrições de tensão e corrente e as simplificações resultantes em um amp op ideal.
2. Saber analisar circuitos simples que contêm amp ops ideais e reconhecer os seguintes circuitos amplificadores operacionais: amplificador inversor, amplificador somador, amplificador não-inversor e amplificador diferencial.
3. Entender o modelo mais realista para um amp op e saber utilizá-lo para analisar circuitos simples que contêm amp ops.

O circuito eletrônico conhecido como amplificador operacional tem se tornado cada vez mais importante. Contudo, uma análise detalhada desse circuito exige o conhecimento de dispositivos eletrônicos, tais como diodos e transistores. Então, você talvez esteja perguntando a si mesmo por que estamos apresentando esse circuito antes de discutir seus componentes eletrônicos. Há várias razões. A primeira é que é possível avaliar como o amplificador operacional é utilizado como um bloco construtivo de circuitos focalizando apenas o comportamento em seus terminais. Em um nível introdutório, você não precisa entender completamente o funcionamento dos componentes eletrônicos que comandam o comportamento terminal. A segunda razão é que o modelo de circuito do amplificador operacional requer a utilização de uma fonte dependente. Assim, você tem a oportunidade de utilizar esse tipo de fonte em um circuito prático, em vez de usá-la como um componente abstrato de um circuito. A terceira é que você pode combinar o amplificador operacional com resistores para executar algumas funções muito úteis, como multiplicar por um fator constante, somar, mudar de sinal e subtrair. Por fim, após a apresentação de indutores e capacitores no Capítulo 6, poderemos mostrar como usar o amplificador operacional para projetar circuitos integradores e diferenciadores.

Nossa abordagem do comportamento terminal do amplificador operacional implica considerá-lo uma caixa-preta; isto é, não estamos interessados na estrutura interna do amplificador nem nas correntes e tensões que existem nessa estrutura. O importante é lembrar que o comportamento interno do amplificador é responsável pelas restrições de tensão e corrente impostas aos terminais. (Por enquanto, pedimos que você aceite essas restrições de boa-fé.)

Perspectiva prática

Extensômetros

Como você poderia medir o grau de curvatura de uma barra de metal, como a mostrada na figura, sem contato físico com a barra? Um método seria usar um extensômetro. Um extensômetro é um tipo de *transdutor*, ou seja, um dispositivo que mede uma quantidade convertendo-a para uma forma mais conveniente. A quantidade que queremos medir na barra de metal é o ângulo de curvatura, mas medir esse ângulo diretamente é bastante difícil e poderia até ser perigoso. Em vez disso, conectamos um extensômetro à barra (mostrado no desenho). Um extensômetro é uma grade de fios finos cuja resistência muda quando os fios são alongados ou encurtados:

$$\Delta R = 2R\frac{\Delta L}{L}$$

onde R é a resistência do medidor em repouso, $\Delta L/L$ é o alongamento fracionário do medidor (que é a definição de 'deformação'), a constante 2 é um fator típico do medidor e ΔR é a variação da resistência causada pelo encurvamento da barra. Tipicamente, pares de extensômetros são conectados a lados opostos de uma barra. Quando a barra é curvada, os fios de um par de medidores ficam mais longos e mais finos, o que aumenta a resistência, enquanto os fios do outro par de medidores ficam mais curtos e grossos, o que reduz a resistência.

Mas como a variação da resistência pode ser medida? Um modo seria usar um ohmímetro. Entretanto, a variação na resistência do extensômetro costuma ser muito menor do que

a que poderia ser medida com precisão por um ohmímetro. Normalmente, os pares de extensômetros são conectados de modo a formar uma ponte de Wheatstone, e a diferença de tensão entre as duas pernas da ponte é medida. Para fazer uma medição precisa da diferença de tensão, usamos um circuito com um amplificador operacional que amplifica, ou aumenta, a diferença de tensão. Após apresentarmos o amplificador operacional e alguns dos circuitos importantes que utilizam esses dispositivos, apresentaremos o circuito usado nos extensômetros para medir o grau de curvatura de uma barra de metal.

O circuito amplificador operacional surgiu pela primeira vez como um bloco construtivo básico em computadores analógicos. Era denominado *operacional* porque era usado para estabelecer as operações matemáticas de integração, diferenciação, adição, mudança de sinal e multiplicação. Nos últimos anos, a faixa de aplicação foi ampliada para além do estabelecimento de operações matemáticas; contudo, o nome original do circuito sobreviveu. Engenheiros e técnicos têm uma tendência a criar jargões técnicos; por conseguinte, o amplificador operacional é amplamente conhecido como *amp op*.

5.1 Terminais do amplificador operacional

Como estamos enfatizando o comportamento terminal do amplificador operacional (amp op), começamos discutindo os terminais de um dispositivo disponível no comércio. Em 1968, a Fairchild Semiconductor lançou um amp op que conquistou ampla aceitação: o μA741. (O prefixo μA foi usado pela Fairchild para indicar que se tratava de um microcircuito.) Esse amplificador está disponível em diferentes encapsulamentos. Para nossa discussão, escolhemos o encapsulamento DIP[1] de oito fios. A Figura 5.1 mostra uma vista de cima desse dispositivo com os terminais identificados. Os terminais mais importantes são

- entrada inversora
- entrada não-inversora
- saída
- fonte de alimentação positiva (V^+)
- fonte de alimentação negativa (V^-)

Os três terminais restantes são de pouca ou nenhuma importância. Os terminais de compensação podem ser usados em um circuito auxiliar para compensar uma degradação de desempenho por envelhecimento e imperfeições. Todavia, na maioria dos casos a degradação é desprezível e, assim, muitas vezes os terminais indicadores de desvio não são utilizados e desempenham um papel secundário na análise do circuito. O terminal 8 não é de interesse simplesmente porque não é utilizado; NC quer dizer não conectado, o que significa que o terminal não está ligado ao circuito amplificador.

A Figura 5.2 mostra um símbolo de circuito muito utilizado para um amp op que contém os cinco terminais de maior interesse. Como não é conveniente usar palavras para identificar terminais em diagramas de circuito, simplificamos a designação de terminais da seguinte forma: o terminal de entrada não-inversora é identificado por um sinal positivo (+) e o terminal de entrada inversora é identificado por um sinal negativo (−). Os terminais da fonte de alimentação, que são sempre desenhados do lado de fora do triângulo, são marcados como V^+ e V^-. Entende-se que o terminal situado no vértice do triângulo é sempre o terminal de saída. A Figura 5.3 resume essas convenções.

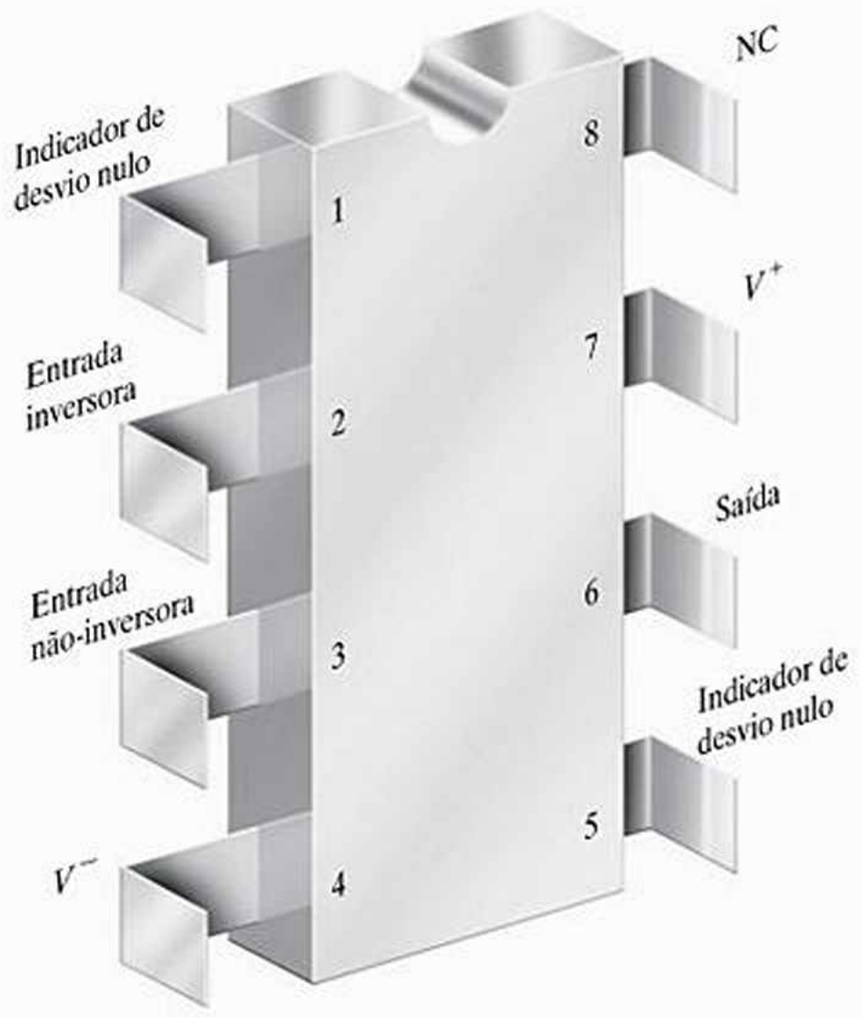


Figura 5.1 ▲ Versão de oito fios do DIP (visto de cima).

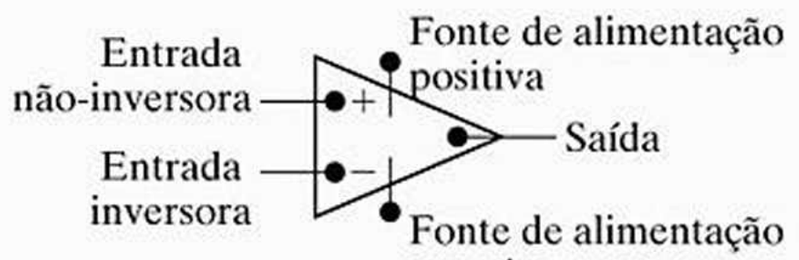


Figura 5.2 ▲ Símbolo de circuito para um amp op.

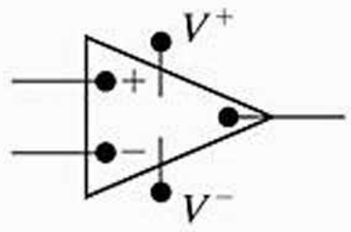


Figura 5.3 ▲ Símbolo de circuito simplificado para um amp op.

[1]DIP é uma abreviatura para *encapsulamento dual em linha (dual in-line package)*. Isso significa que os terminais de cada lado do dispositivo estão alinhados, o mesmo ocorrendo com os terminais de lados opostos do dispositivo.

5.2 Tensões e correntes terminais

Agora estamos prontos para apresentar as tensões e correntes terminais usadas para descrever o comportamento do amp op. As tensões são medidas em relação a um nó de referência.[2] A Figura 5.4 mostra as tensões com suas polaridades de referência.

Todas as tensões são consideradas elevações de tensão em relação ao nó de referência. Essa convenção é a mesma usada no método das tensões de nó. Uma fonte de tensão positiva (V_{CC}) é conectada entre V^+ e o nó de referência. Uma fonte de tensão negativa ($-V_{CC}$) é conectada entre V^- e o nó de referência. A tensão entre o terminal de entrada inversora e o nó de referência é v_n. A tensão entre o terminal de entrada não-inversora e o nó de referência é v_p. A tensão entre o terminal de saída e o nó de referência é v_o.

A Figura 5.5 mostra as correntes com seus sentidos de referência. Observe que todas as correntes apontam para dentro dos terminais do amplificador operacional: i_n é a corrente que entra no terminal da entrada inversora; i_p é a corrente que entra no terminal da entrada não-inversora; i_o é a corrente que entra no terminal de saída; i_{c^+} é a corrente que entra no terminal da fonte de alimentação positiva e i_{c^-} é a corrente que entra no terminal da fonte de alimentação negativa.

O comportamento terminal do amp op como um elemento de circuito linear é caracterizado por restrições a tensões e correntes de entrada. A restrição à tensão surge da característica de transferência de tensão do circuito integrado do amp op e é representada na Figura 5.6.

A característica de transferência de tensão mostra como a tensão de saída varia em função das tensões de entrada; isto é, como a tensão é transferida da entrada para a saída. Observe que, para o amp op, a tensão de saída é uma

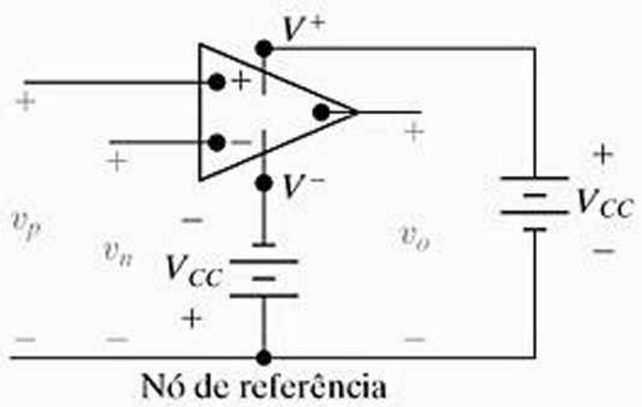


Figura 5.4 ▲ Tensões terminais.

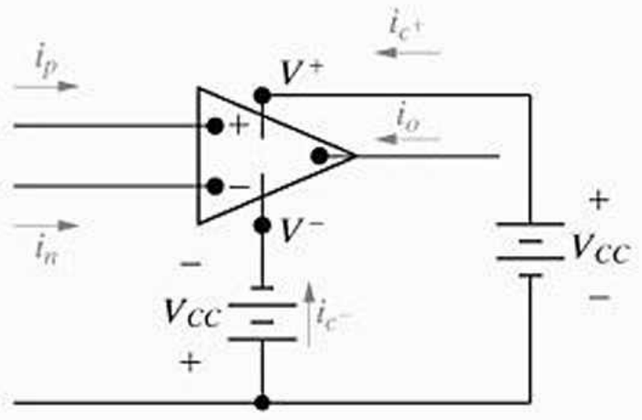


Figura 5.5 ▲ Correntes terminais.

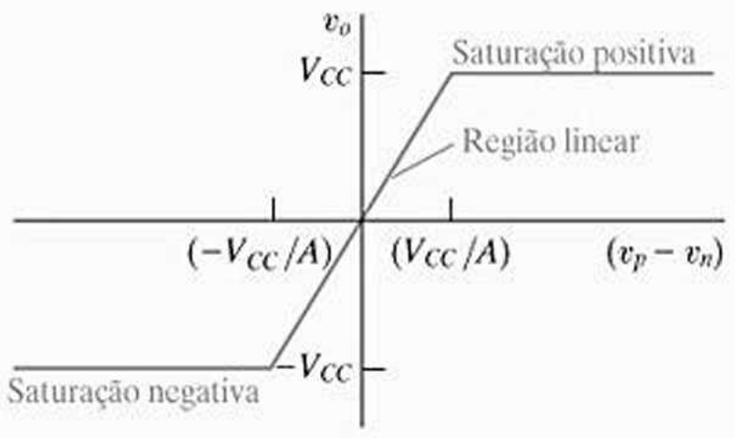


Figura 5.6 ▲ Característica de transferência de tensão de um amp op.

função da diferença das tensões de entrada, $v_p - v_n$. A equação da curva de transferência de tensão é

$$v_o = \begin{cases} -V_{CC} & A(v_p - v_n) < -V_{CC} \\ A(v_p - v_n) & -V_{CC} \leq A(v_p - v_n) \leq +V_{CC}, \\ +V_{CC} & A(v_p - v_n) > +V_{CC} \end{cases} \tag{5.1}$$

Vemos, pela Figura 5.6 e pela Equação 5.1, que o amp op tem três regiões distintas de operação. Quando o módulo diferença entre as tensões de entrada ($|v_p - v_n|$) é pequeno, o amp op comporta-se como um dispositivo linear, porque a tensão de saída é uma função linear das tensões de entrada. Fora dessa região linear, a saída do amp op fica saturada e ele se comporta como um dispositivo não-linear, pois a tensão de saída não é mais uma função linear das tensões de entrada. Quando o amp op está funcionando linearmente, sua tensão de saída é igual à diferença entre suas tensões de entrada vezes a constante de multiplicação, ou *ganho*, A.

Para confinar o amp op à sua região de funcionamento linear, uma restrição é imposta às tensões de entrada, v_p e v_n. A restrição é baseada em valores numéricos típicos para V_{CC} e A na Equação 5.1. Para a maioria dos amp ops, as tensões recomendadas para a fonte de alimentação cc raramente passam de 20 V, e o ganho, A, raramente é menor do que 10.000, ou 10^4. Vemos pela Figura 5.6 e pela Equação 5.1 que, na região linear, a magnitude da diferença entre as tensões de entrada ($|v_p - v_n|$) deve ser menor do que $20/10^4$, ou 2 mV.

Normalmente, as tensões de nó nos circuitos que estudamos são muito maiores do que 2 mV, de forma que uma diferença de tensão menor do que 2 mV significa que, em essência, as duas tensões são iguais. Assim, quando um amp op opera em sua região linear de funcionamento e as tensões de nó são muito maiores do que 2 mV, a condição imposta às tensões de entrada do amp op é

$$\boxed{v_p = v_n.} \tag{5.2}$$

(Restrição de tensão de entrada para um amp op ideal)

Observe que a Equação 5.2 caracteriza a relação entre as tensões de entrada para um amp op ideal; isto é, um amp op cujo valor de A é infinito.

A restrição à tensão de entrada na Equação 5.2 é denominada condição *curto-circuito virtual* na entrada do amp op.

[2] Esse nó de referência é externo ao amp op. É o terminal de referência do circuito no qual o amp op está inserido.

É natural perguntar como um curto-circuito virtual é mantido na entrada do amp op quando ele está inserido em um circuito. A resposta é que um sinal é realimentado do terminal de saída para o terminal da entrada inversora. Essa configuração é conhecida como *realimentação negativa* porque o sinal realimentado da saída é subtraído do sinal de entrada. A realimentação negativa faz com que a diferença das tensões da entrada diminua. Como a tensão de saída é proporcional à diferença das tensões de entrada, a tensão de saída também diminui e o amp op opera em sua região linear.

Se um circuito que contém um amp op não fornecer um caminho de realimentação negativa da saída do amp op até a entrada inversora, então o amp op estará normalmente saturado. A diferença entre os sinais de entrada deve ser extremamente pequena para impedir a saturação, sem nenhuma realimentação negativa. Entretanto, ainda que o circuito forneça um caminho de realimentação negativa para o amp op, a operação linear não está garantida. Portanto, como sabemos se o amp op está operando em sua região linear?

A resposta é: não sabemos! Tratamos desse dilema admitindo a operação na região linear, realizando a análise do circuito e, então, verificando nossos resultados à procura de contradições. Por exemplo, suponha que admitimos que um amp op inserido em um circuito está funcionando em sua região linear e calculamos que a tensão de saída do amp op é de 10 V. Quando examinamos o circuito, constatamos que V_{CC} é 6 V, o que configura uma contradição, porque a tensão de saída de um amp op não pode ser maior do que V_{CC}. Assim, nossa suposição de operação linear era inválida e a saída do amp op deve estar saturada em 6 V.

Identificamos uma restrição às tensões de entrada que é baseada na característica da transferência de tensão do circuito integrado do amp op, a suposição de que o amp op está restrito à sua região linear de operação e a valores típicos para V_{CC} e A. A Equação 5.2 representa a restrição imposta às tensões para um amp op ideal, isto é, com um valor de A infinito.

Agora, voltamos nossa atenção à restrição imposta às correntes de entrada. A análise do circuito integrado do amp op revela que a resistência equivalente vista dos terminais de entrada do amp op é muito grande, normalmente 1 MΩ ou mais. O ideal é a resistência equivalente de entrada ser infinita, o que resulta na restrição de corrente

$$\boxed{i_p = i_n = 0.} \tag{5.3}$$

(Restrição de corrente de entrada para um amp op ideal)

Observe que a restrição de corrente não é baseada na suposição de que o amp op esteja operando em sua região linear, como acontecia com a restrição de tensão. Juntas, as equações 5.2 e 5.3 constituem as condições terminais que definem nosso modelo de amp op ideal.

Pela lei das correntes de Kirchhoff, sabemos que a soma das correntes que entram no amplificador operacional é zero, ou

$$i_p + i_n + i_o + i_{c+} + i_{c-} = 0. \tag{5.4}$$

Substituindo a restrição dada pela Equação 5.3 na Equação 5.4, temos

$$i_o = -(i_{c+} + i_{c-}). \tag{5.5}$$

O significado importante da Equação 5.5 é que, mesmo que a corrente nos terminais de entrada seja desprezível, ainda pode haver corrente apreciável no terminal de saída.

Antes de começarmos a analisar circuitos que contêm amp ops, vamos simplificar ainda mais o símbolo de circuito. Quando sabemos que o amplificador está funcionando dentro de sua região linear, as tensões cc $\pm V_{CC}$ não entram nas equações de circuito. Nesse caso, podemos remover os terminais da fonte de alimentação do símbolo e as fontes de alimentação cc do circuito, como mostra a Figura 5.7. Uma advertência: como os terminais da fonte de alimentação foram omitidos, há o perigo de se inferir, pelo símbolo, que $i_p + i_n + i_o = 0$. Já observamos que esse não é o caso; isto é, $i_p + i_n + i_o + i_{c+} + i_{c-} = 0$. Em outras palavras, a restrição ao modelo do amp op ideal, isto é, $i_p = i_n = 0$, não implica que $i_o = 0$.

Observe que os valores das tensões positiva e negativa da fonte de alimentação não têm de ser iguais. Na região linear, v_o deve estar entre as duas tensões de alimentação. Por exemplo, se $V^+ = 15$ V e $V^- = -10$ V, então $-10\text{ V} \leq v_o \leq 15$ V. Não esqueça também que o valor de A não é constante sob todas as condições de operação. Todavia, por enquanto, suporemos que é. Devemos adiar a discussão de como e por que o valor de A pode mudar até termos estudado os dispositivos e componentes eletrônicos utilizados para fabricar um amplificador.

O Exemplo 5.1 ilustra a aplicação sensata das equações 5.2 e 5.3. Quando usamos essas equações para prever o comportamento de um circuito que contém um amp op, na verdade estamos usando um modelo ideal do dispositivo.

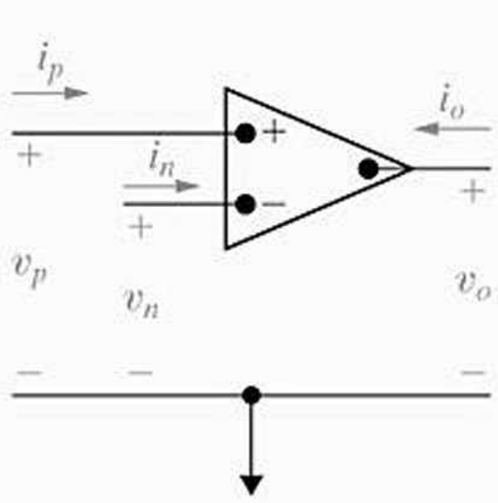


Figura 5.7 ▲ Símbolo do amp op após a remoção dos terminais da fonte de alimentação.

Exemplo 5.1 Análise do circuito de um amp op

O amp op no circuito mostrado na Figura 5.8 é ideal.

a) Calcule v_o se $v_a = 1$ V e $v_b = 0$ V.
b) Repita (a) para $v_a = 1$ V e $v_b = 2$ V.
c) Se $v_a = 1{,}5$ V, especifique a faixa de v_b que impeça a saturação do amplificador.

Solução

a) Como existe uma realimentação negativa da saída do amp op à sua entrada inversora, passando pelo resistor de 100 kΩ, vamos admitir que o amp op esteja operando na região linear. Podemos escrever uma equação de tensão de nó para a entrada inversora. A tensão da entrada inversora é 0, já que $v_p = v_b = 0$ pelo enunciado e $v_n = v_p$, de acordo com a Equação 5.2. Portanto, a equação de tensão de nó para v_n é

$$i_{25} = i_{100} = i_n$$

Pela lei de Ohm

$$i_{25} = (v_a - v_n)/25 = \frac{1}{25}\ \text{mA},$$

$$i_{100} = (v_o - v_n)/100 = v_o/100\ \text{mA}.$$

A restrição em relação à corrente exige que $i_n = 0$. Substituindo os valores para as três correntes na equação de tensão de nó, obtemos

$$\frac{1}{25} + \frac{v_o}{100} = 0.$$

Assim, v_o é −4 V. Observe que, como v_o se encontra entre ± 10 V, o amp op está dentro de sua região linear de operação.

b) Usando o mesmo processo utilizado em (a), obtemos

$$v_p = v_b = v_n = 2\ \text{V},$$

$$i_{25} = \frac{v_a - v_n}{25} = \frac{1-2}{25} = -\frac{1}{25}\ \text{mA},$$

$$i_{100} = \frac{v_o - v_n}{100} = \frac{v_o - 2}{100}\ \text{mA},$$

$$i_{25} = -i_{100}.$$

Portanto, $v_o = 6$ V. Novamente, v_o se encontra entre ±10 V.

c) Como antes, $v_n = v_p = v_b$ e $i_{25} = -i_{100}$. Como $v_a = 1{,}5$ V,

$$\frac{1{,}5 - v_b}{25} = -\frac{v_o - v_b}{100}.$$

Resolvendo para v_b como uma função de v_o, temos

$$v_b = \frac{1}{5}(6 + v_o).$$

Agora, se o amplificador estiver operando na região linear, $-10\ \text{V} \le v_o \le 10\ \text{V}$. Substituindo esses limites para v_o na expressão para v_b, vemos que v_b está limitada a

$$-0{,}8\ \text{V} \le v_b \le 3{,}2\ \text{V}.$$

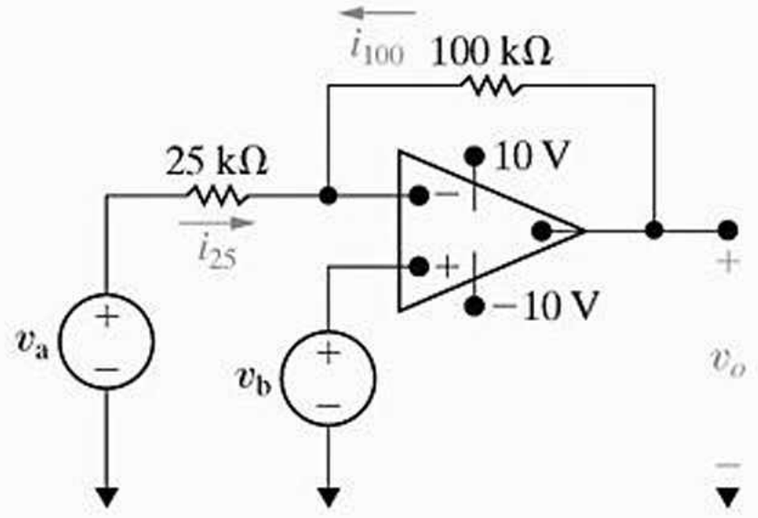


Figura 5.8 ▲ Circuito para o Exemplo 5.1.

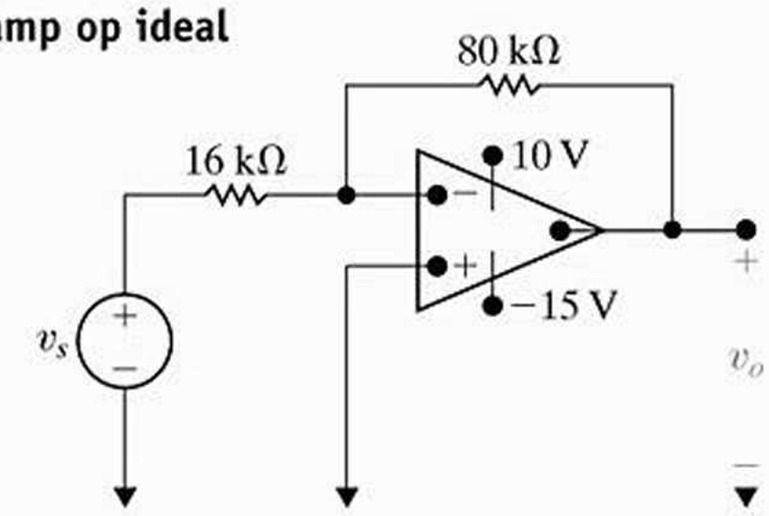
✔ PROBLEMA PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 1 — Usar as restrições de tensão e corrente em um amp op ideal

5.1 Admita que, no circuito mostrado, o amp op seja ideal.

a) Calcule v_o para os seguintes valores de v_s: 0,4, 2,0, 3,5, −0,6, −1,6 e –2,4 V.
b) Especifique a faixa de v_s que evite a saturação do amplificador.

Resposta: (a) −2, −10, −15, 3, 8 e 10 V;
(b) $-2\ \text{V} \le v_s \le 3\ \text{V}$.



NOTA: Tente resolver também os problemas 5.1–5.3, apresentados no final deste capítulo.

5.3 Circuito amplificador inversor

Agora estamos prontos para discutir o funcionamento de alguns circuitos importantes que utilizam o amplificador operacional, usando as equações 5.2 e 5.3 para modelar o comportamento do dispositivo. A Figura 5.9 mostra um circuito amplificador inversor. Admitimos que o amp op esteja funcionando em sua região linear. Observe que, além do amp op, o circuito consiste em dois resistores (R_f e R_s), uma fonte de tensão (v_s) e um curto-circuito entre o terminal da entrada não-inversora e o nó de referência.

Analisamos esse circuito admitindo um amp op ideal. A meta é obter uma expressão para a tensão de saída, v_o, em função da tensão da fonte, v_s. Empregamos uma única equação de tensão de nó no terminal inversor do amp op, dada como

$$i_s + i_f = i_n. \tag{5.6}$$

A Equação 5.2 estabelece que $v_n = 0$, porque v_p é nula. Portanto,

$$i_s = \frac{v_s}{R_s}, \tag{5.7}$$

$$i_f = \frac{v_o}{R_f}. \tag{5.8}$$

Agora, utilizamos a Equação 5.3, ou seja,

$$i_n = 0. \tag{5.9}$$

Substituindo as equações 5.7–5.9 na Equação 5.6, obtemos o resultado procurado:

$$\boxed{v_o = \frac{-R_f}{R_s} v_s.} \tag{5.10}$$

(Equação do amplificador inversor)

Observe que a tensão de saída é uma réplica invertida, multiplicada por um fator, da tensão de entrada. É claro que a inversão do sinal da entrada é a razão de nos referirmos ao circuito como um *amplificador inversor*. O fator de multiplicação, ou ganho, é a razão R_f / R_s.

O resultado dado pela Equação 5.10 é válido somente se o amp op mostrado no circuito da Figura 5.9 for ideal; isto é, se A for infinito e a resistência de entrada for infinita. Para um amp op real, a Equação 5.10 é uma aproximação, de modo geral, boa. (Falaremos mais sobre isso adiante.) A Equação 5.10 é importante porque nos diz que, se o ganho A do amp op for grande, podemos especificar o ganho do amplificador inversor com os resistores externos R_f e R_s. O limite superior para o ganho, R_f / R_s, é determinado pelas tensões da fonte de alimentação e pelo valor da tensão v_s. Se admitirmos tensões iguais das fontes de alimentação, isto é, $V^+ = -V^- = V_{CC}$, obtemos

$$|v_o| \le V_{CC}, \quad \left|\frac{R_f}{R_s} v_s\right| \le V_{CC}, \quad \frac{R_f}{R_s} \le \left|\frac{V_{CC}}{v_s}\right|. \tag{5.11}$$

Por exemplo, se $V_{CC} = 15$ V e $v_s = 10$ mV, a razão R_f / R_s deve ser menor do que 1.500.

No circuito amplificador inversor mostrado na Figura 5.9, o resistor R_f fornece a conexão de realimentação negativa. Isto é, ele liga o terminal de saída ao terminal da entrada inversora. Se R_f for retirado, o caminho de realimentação é aberto e diz-se que o amplificador está funcionando em *malha aberta*. A Figura 5.10 mostra a operação em malha aberta.

Eliminar a realimentação muda drasticamente o comportamento do circuito. Em primeiro lugar, agora a tensão de saída é

$$v_o = -Av_n, \tag{5.12}$$

admitindo-se, como antes, que $V^+ = -V^- = V_{CC}$; então, $|v_n| < V_{CC}/A$ para a operação na região linear. Como a corrente da entrada inversora é quase zero, a queda de tensão em R_s é quase nula e a tensão da entrada inversora é aproximadamente igual à tensão v_s, isto é, $v_n \approx v_s$. Então, o amp op só pode funcionar na região linear de operação em malha aberta se $|v_s| < V_{CC}/A$. Se $|v_s| > V_{CC}/A$, o amp op simplesmente satura. Em particular, se $v_s < -V_{CC}/A$, o amp op fica saturado em $+V_{CC}$, e se $v_s > V_{CC}/A$, o amp op satura em $-V_{CC}$. Como a relação mostrada na Equação 5.12 é válida quando não há realimentação, o valor de A costuma ser denominado *ganho de malha aberta* do amp op.

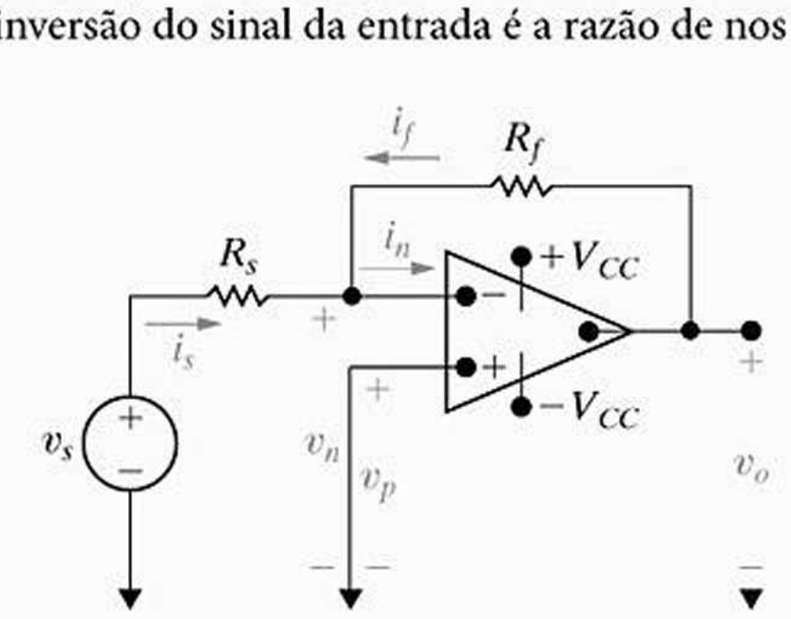


Figura 5.9 ▲ Circuito amplificador inversor.

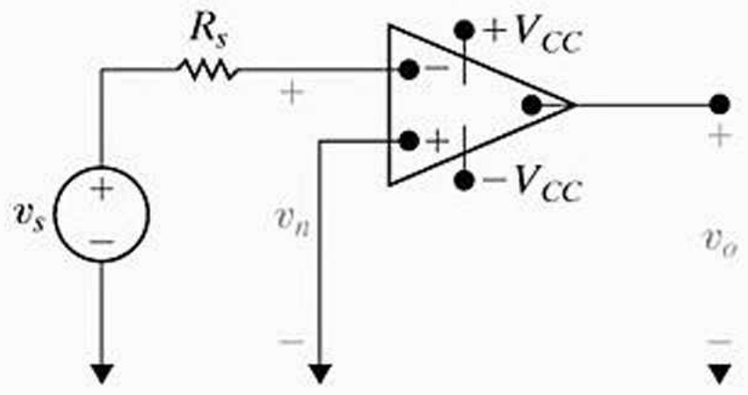


Figura 5.10 ▲ Amplificador inversor funcionando em malha aberta.

✔ PROBLEMA PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 2 — Saber analisar circuitos simples que contêm amp ops ideais

5.2 A tensão da fonte, v_s, no circuito do Problema para Avaliação 5.1 é −640 mV. O resistor de realimentação de 80 kΩ é substituído por um resistor variável R_x. Qual é a faixa de R_x que permite que o amplificador inversor opere em sua região linear?

Resposta: $0 \leq R_x \leq 250$ kΩ.

NOTA: Tente resolver também os problemas 5.8 e 5.9, apresentados no final deste capítulo.

5.4 Circuito amplificador somador

A tensão de saída de um amplificador somador é uma soma, multiplicada por um fator de escala negativo, invertida, das tensões aplicadas à entrada do amplificador. A Figura 5.11 mostra um amplificador somador com três tensões de entrada.

Obtemos a relação entre a tensão de saída v_o e as três tensões de entrada, v_a, v_b e v_c, somando as correntes que saem do terminal da entrada inversora:

$$\frac{v_n - v_a}{R_a} + \frac{v_n - v_b}{R_b} + \frac{v_n - v_c}{R_c} + \frac{v_n - v_o}{R_f} + i_n = 0. \tag{5.13}$$

Admitindo um amp op ideal, podemos usar as restrições de tensão e corrente com o valor mínimo de v_p e verificar que $v_n = v_p = 0$ e $i_n = 0$. Isso reduz a Equação 5.13 a

$$v_o = -\left(\frac{R_f}{R_a}v_a + \frac{R_f}{R_b}v_b + \frac{R_f}{R_c}v_c\right). \tag{5.14}$$

(Equação do amplificador somador inversor)

A Equação 5.14 estabelece que a tensão de saída seja uma soma das três tensões de entrada, multiplicada por um fator de escala negativo.

Se $R_a = R_b = R_c = R_s$, então a Equação 5.14 é reduzida a

$$v_o = -\frac{R_f}{R_s}(v_a + v_b + v_c). \tag{5.15}$$

Por fim, se fizermos $R_f = R_s$, a tensão de saída será exatamente a soma invertida das tensões de entrada. Isto é,

$$v_o = -(v_a + v_b + v_c). \tag{5.16}$$

Embora tenhamos ilustrado o amplificador somador com apenas três sinais de entrada, o número de tensões de entrada pode ser aumentado conforme necessário. Por exemplo, pode ser que você queira somar 16 sinais de áudio gravados individualmente para formar um único sinal de áudio. A configuração do amplificador somador da Figura 5.11 poderia incluir 16 valores diferentes de resistores de entrada, de modo que cada uma das trilhas de entrada de áudio apareça no sinal de saída com um fator de amplificação diferente. Assim, o amplificador somador desempenha o papel de um misturador de áudio. Como acontece com circuitos amplificadores inversores, os fatores de escala em circuitos amplificadores somadores são determinados pelos resistores externos R_f, R_a, R_b, R_c, ..., R_n.

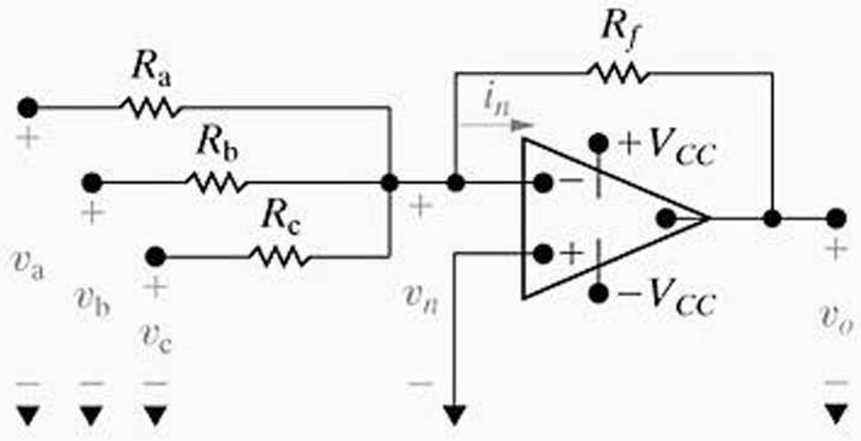


Figura 5.11 ▲ Amplificador somador.

✔ PROBLEMA PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 2 — Saber analisar circuitos simples que contêm amp ops ideais

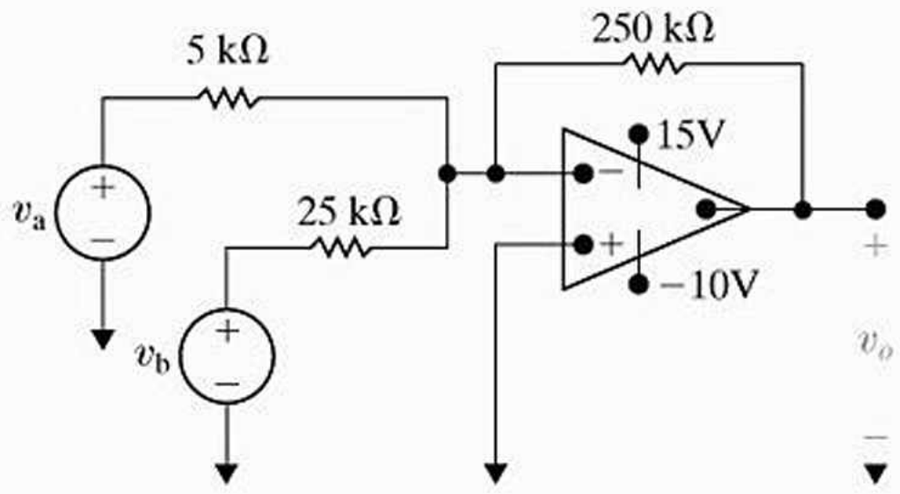
5.3 a) Determine v_o no circuito mostrado se $v_a = 0{,}1$ V e $v_b = 0{,}25$ V.

b) Se $v_b = 0{,}25$ V, qual o menor valor de v_a antes que o amp op se sature?

c) Se $v_a = 0{,}10$ V, qual o maior valor de v_b antes que o amp op se sature?

d) Repita (a), (b) e (c) invertendo a polaridade de v_b.

Resposta: (a) −7,5 V; (c) 0,5 V;
(b) 0,15 V; (d) −2,5, 0,25 e 2 V.



NOTA: Tente resolver também os problemas 5.12, 5.13 e 5.15, apresentados no final deste capítulo.

5.5 Circuito amplificador não-inversor

A Figura 5.12 mostra um circuito amplificador não-inversor. O sinal de entrada é representado por v_g em série com o resistor R_g. Ao deduzir a expressão para a tensão de saída em função da tensão de entrada, admitimos um amp op ideal funcionando dentro de sua região linear. Assim, como antes, usamos as equações 5.2 e 5.3 como base para a dedução. Como a corrente de entrada do amp op é nula, podemos escrever $v_p = v_g$ e, pela Equação 5.2, também podemos escrever $v_n = v_g$. Agora, como a corrente de entrada é nula ($i_n = i_p = 0$), os resistores R_f e R_s formam um divisor de tensão a vazio alimentado por v_o. Portanto,

$$v_n = v_g = \frac{v_o R_s}{R_s + R_f}. \tag{5.17}$$

Resolvendo a Equação 5.17 para v_o, obtemos a expressão procurada:

$$\boxed{v_o = \frac{R_s + R_f}{R_s} v_g.} \tag{5.18}$$

(Equação do amplificador não-inversor)

A operação na região linear requer que

$$\frac{R_s + R_f}{R_s} < \left| \frac{V_{CC}}{v_g} \right|.$$

Observe mais uma vez que, devido à suposição de um amp op ideal, podemos expressar a tensão de saída como uma função da tensão de entrada e dos resistores externos — nesse caso, R_s e R_f.

5.6 Circuito amplificador diferencial

A tensão de saída de um amplificador diferencial é proporcional à diferença entre as duas tensões de entrada.

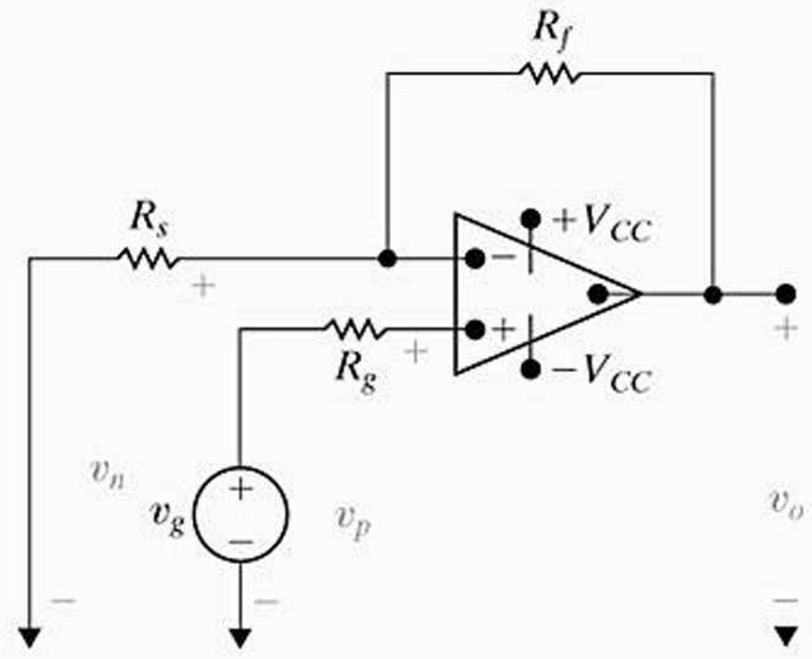


Figura 5.12 ▲ Amplificador não-inversor.

Para demonstrar, analisamos o circuito amplificador diferencial mostrado na Figura 5.13, admitindo um amp op ideal funcionando em sua região linear. Deduzimos a relação entre v_o e as duas tensões de entrada v_a e v_b somando as correntes que saem do nó da entrada inversora:

$$\frac{v_n - v_a}{R_a} + \frac{v_n - v_o}{R_b} + i_n = 0. \tag{5.19}$$

Como o amp op é ideal, usamos as restrições de tensão e corrente para verificar que

$$i_n = i_p = 0, \tag{5.20}$$

$$v_n = v_p = \frac{R_d}{R_c + R_d} v_b. \tag{5.21}$$

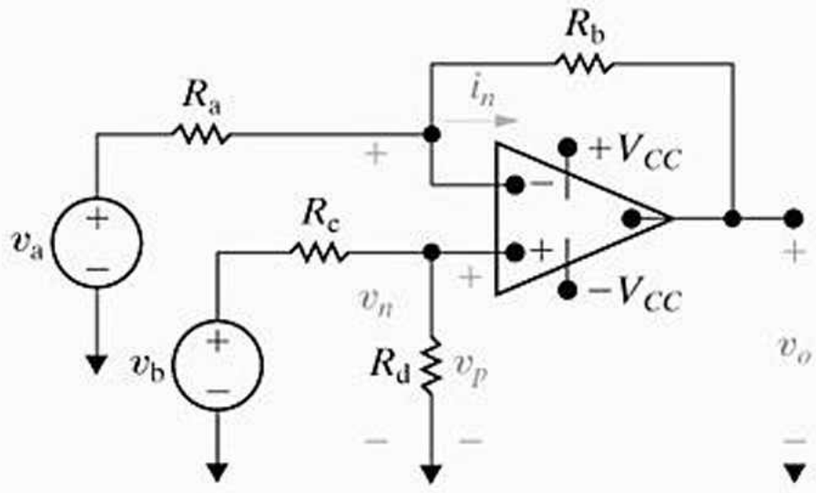


Figura 5.13 ▲ Amplificador diferencial.

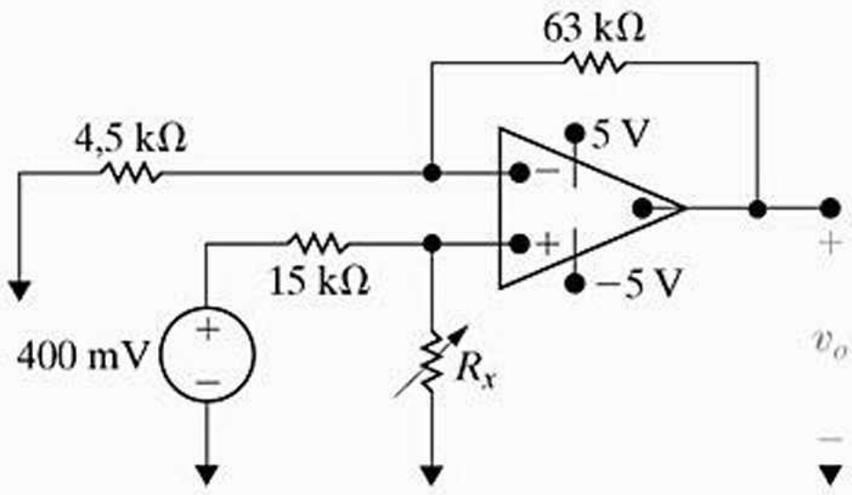
✔ PROBLEMA PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 2 — Saber analisar circuitos simples que contêm amp ops ideais

5.4 Suponha que o amp op do circuito mostrado seja ideal.

a) Determine a tensão de saída quando o resistor variável é ajustado para 60 kΩ.

b) Qual o valor máximo de R_x antes que o amplificador se sature?



Resposta: (a) 4,8 V;

(b) 75 kΩ.

NOTA: Tente resolver também os problemas 5.17 e 5.18, apresentados no final deste capítulo.

Combinando as equações 5.19, 5.20 e 5.21, temos a relação desejada:

$$v_o = \frac{R_d(R_a + R_b)}{R_a(R_c + R_d)} v_b - \frac{R_b}{R_a} v_a. \tag{5.22}$$

A Equação 5.22 mostra que a tensão de saída é proporcional à diferença entre v_b e v_a multiplicadas por fatores de escala. Em geral, o fator de escala aplicado a v_b não é igual ao aplicado a v_a. Contudo, os fatores de escala aplicados a cada tensão de entrada podem ser igualados por

$$\frac{R_a}{R_b} = \frac{R_c}{R_d}. \tag{5.23}$$

Quando a Equação 5.23 é satisfeita, a expressão para a tensão de saída é reduzida a

$$\boxed{v_o = \frac{R_b}{R_a}(v_b - v_a).} \tag{5.24}$$

(Equação simplificada do amplificador diferencial)

A Equação 5.24 indica que a tensão de saída pode ser obtida como a diferença entre as tensões de entrada v_b e v_a multiplicada por um fator de escala. Como nos circuitos amplificadores ideais anteriores, o fator de escala é uma função dos resistores externos. Além disso, a relação entre a tensão de saída e as tensões de entrada não é afetada pela conexão de uma resistência não-nula na saída do amplificador.

Amplificador diferencial: outra perspectiva

Podemos examinar o comportamento de um amplificador diferencial mais minuciosamente se redefinirmos suas entradas em função de duas outras tensões. A primeira é a tensão de *modo diferencial*, que é a diferença entre as duas tensões de entrada na Figura 5.13:

$$v_{md} = v_b - v_a. \tag{5.25}$$

A segunda é a tensão de *modo comum*, que é a média das duas tensões de entrada na Figura 5.13:

$$v_{mc} = (v_a + v_b) / 2. \tag{5.26}$$

Usando as equações 5.25 e 5.26, podemos representar as tensões de entrada originais, v_a e v_b, em termos de tensões de modo diferencial e de modo comum, v_{md} e v_{mc}.

$$v_a = v_{mc} - \frac{1}{2}v_{md}. \tag{5.27}$$

$$v_b = v_{mc} + \frac{1}{2}v_{md}. \tag{5.28}$$

Substituindo as equações 5.27 e 5.28 na Equação 5.22 temos a saída do amplificador diferencial em termos de tensões de modo diferencial e tensões de modo comum:

$$v_o = \left[\frac{R_aR_d - R_bR_c}{R_a(R_c + R_d)}\right]v_{mc} + \left[\frac{R_d(R_a + R_b) + R_b(R_c + R_d)}{2R_a(R_c + R_d)}\right]v_{md}. \tag{5.29}$$

$$= A_{mc}v_{mc} + A_{md}v_{md}. \tag{5.30}$$

onde A_{mc} é o ganho de modo comum e A_{md} é o ganho de modo diferencial. Agora, substitua $R_c = R_a$ e $R_d = R_b$, que são valores possíveis para R_c e R_d e que satisfazem a Equação 5.23, na Equação 5.29:

$$v_o = (0)v_{mc} + \left(\frac{R_b}{R_a}\right)v_{md}. \tag{5.31}$$

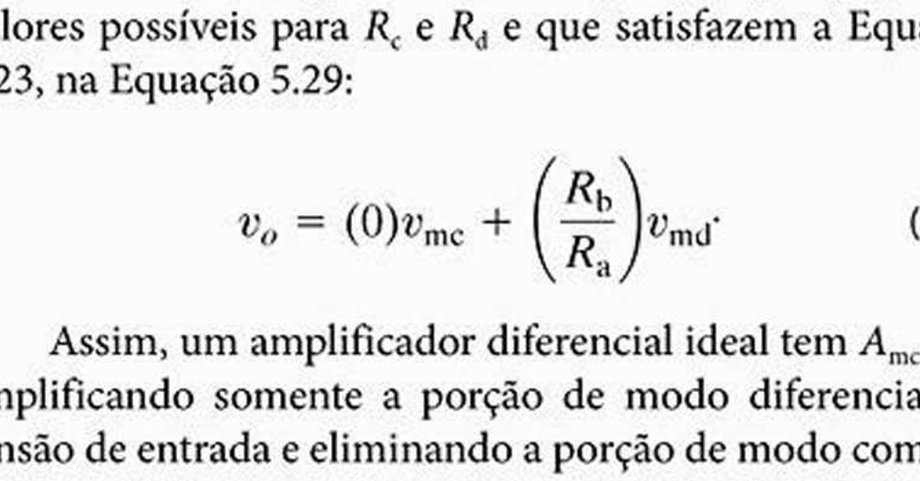
Assim, um amplificador diferencial ideal tem $A_{mc} = 0$, amplificando somente a porção de modo diferencial da tensão de entrada e eliminando a porção de modo comum. A Figura 5.14 mostra um circuito amplificador diferencial com tensões de entrada de modo diferencial e de modo comum no lugar de v_a e v_b.

✔ PROBLEMA PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 2 — Saber analisar circuitos simples que contêm amp ops ideais

5.5 a) No amplificador diferencial mostrado, v_b = 4,0 V. Qual é a faixa de valores de v_a que resultará em uma operação linear do amp op?

b) Repita (a) com a redução do resistor de 20 kΩ para 8 kΩ.



Resposta: (a) 2 V ≤ v_a ≤ 6 V;
(b) 1,2 V ≤ v_a ≤ 5,2 V.

NOTA: Tente resolver também os problemas 5.24–5.26, apresentados no final deste capítulo.

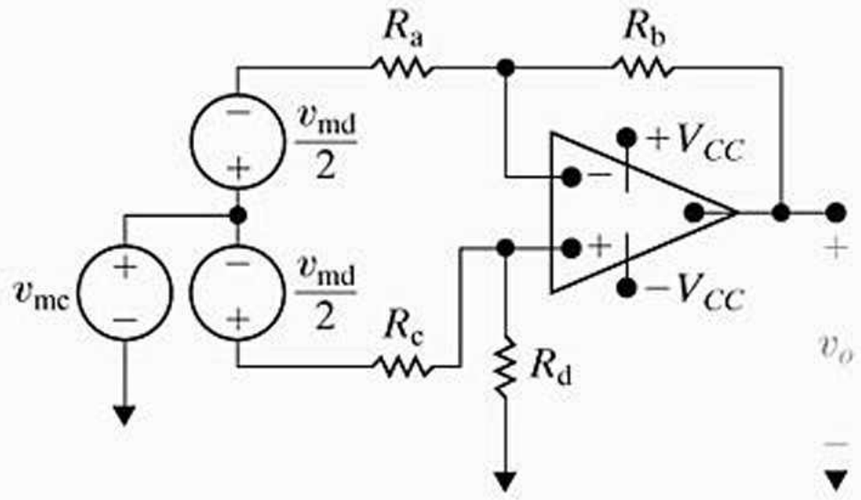


Figura 5.14 ▲ Amplificador diferencial com tensões de entrada de modo comum e de modo diferencial.

A Equação 5.30 nos dá uma importante perspectiva sobre a função do amplificador diferencial, visto que, em muitas aplicações, é o sinal de modo diferencial que contém a informação de interesse, ao passo que o sinal de modo comum é o ruído encontrado em todos os sinais elétricos. Por exemplo, o eletrodo de um equipamento de eletrocardiograma mede as tensões produzidas pelo corpo para regular as batidas do coração. Essas tensões são muito pequenas em comparação com o ruído elétrico que o eletrodo capta de fontes como lâmpadas e equipamentos elétricos. O ruído aparece como a porção de modo comum da tensão medida, ao passo que as tensões da pulsação cardíaca constituem a porção do modo diferencial. Assim, um amplificador diferencial ideal amplificaria somente a tensão de interesse e suprimiria o ruído.

Medição de desempenho do amplificador diferencial: fator de rejeição do modo comum

Um amplificador diferencial ideal tem ganho nulo de modo comum e ganho não-nulo de modo diferencial (normalmente grande). Dois fatores influenciam o ganho ideal de modo comum — uma incompatibilidade de resistências (isto é, a Equação 5.23 não é satisfeita) ou um amp op não-ideal (isto é, a Equação 5.20 não é satisfeita). Aqui, focalizamos o efeito da incompatibilidade de resistências sobre o desempenho de um amplificador diferencial.

Suponha que sejam escolhidos valores de resistores que não satisfaçam, com precisão, a Equação 5.23. Em vez disso, a relação entre os resistores R_a, R_b, R_c e R_d é

$$\frac{R_a}{R_b} = (1 - \epsilon)\frac{R_c}{R_d},$$

portanto,

$$R_a = (1 - \epsilon)R_c \text{ e } R_b = R_d, \tag{5.32}$$

ou

$$R_d = (1 - \epsilon)R_b \text{ e } R_a = R_c, \tag{5.33}$$

onde ϵ é um número muito pequeno. Podemos ver o efeito dessa incompatibilidade de resistências sobre o ganho de modo comum do amplificador diferencial, substituindo a Equação 5.33 na Equação 5.29 e simplificando a expressão para A_{mc}:

$$A_{mc} = \frac{R_a(1 - \epsilon)R_b - R_aR_b}{R_a[R_a + (1 - \epsilon)R_b]} \tag{5.34}$$

$$= \frac{-\epsilon R_b}{R_a + (1 - \epsilon)R_b} \tag{5.35}$$

$$\approx \frac{-\epsilon R_b}{R_a + R_b}. \tag{5.36}$$

Podemos fazer uma aproximação que resulta na Equação 5.36 porque ϵ é muito pequeno e, portanto, $(1 - \epsilon)$ é aproximadamente 1 no denominador da Equação 5.35. Observe que, quando os resistores do amplificador diferencial satisfazem a Equação 5.23, $\epsilon = 0$ e a Equação 5.36 resulta em $A_{mc} = 0$.

Calcule, agora, o efeito da incompatibilidade de resistências sobre o ganho de modo diferencial, substituindo a Equação 5.33 na Equação 5.29 e simplificando a expressão para A_{md}:

$$A_{md} = \frac{(1 - \epsilon)R_b(R_a + R_b) + R_b[R_a + (1 - \epsilon)R_b]}{2R_a[R_a + (1 - \epsilon)R_b]} \tag{5.37}$$

$$= \frac{R_b}{R_a}\left[1 - \frac{(\epsilon/2)R_a}{R_a + (1 - \epsilon)R_b}\right] \tag{5.38}$$

$$\approx \frac{R_b}{R_a}\left[1 - \frac{(\epsilon/2)R_a}{R_a + R_b}\right]. \tag{5.39}$$

Usamos o mesmo raciocínio para a aproximação que resultou na Equação 5.39, utilizada no cálculo de A_{mc}. Quando os resistores do amplificador diferencial satisfazem a Equação 5.23, $\epsilon = 0$ e a Equação 5.39 resulta em $A_{md} = R_b/R_a$.

O *fator de rejeição de modo comum* (*FRMC*) pode ser usado para medir quão próximo do ideal está um amplificador diferencial. Ele é definido como a razão entre o ganho de modo diferencial e o ganho de modo comum:

$$\text{FRMC} = \left|\frac{A_{md}}{A_{mc}}\right|. \tag{5.40}$$

Quanto maior o FRMC, mais próximo do ideal será o amplificador diferencial. Podemos ver o efeito da incompatibilidade de resistências na FRMC substituindo as equações 5.36 e 5.39 na Equação 5.40:

$$\text{FRMC} \approx \left|\frac{\frac{R_b}{R_a}[1 - (R_a\epsilon/2)/(R_a + R_b)]}{-\epsilon R_b/(R_a + R_b)}\right| \tag{5.41}$$

$$\approx \left|\frac{R_a(1 - \epsilon/2) + R_b}{-\epsilon R_a}\right| \tag{5.42}$$

$$\approx \left|\frac{1 + R_b/R_a}{-\epsilon}\right|. \tag{5.43}$$

Pela Equação 5.43, se os resistores no amplificador diferencial forem compatíveis, $\epsilon = 0$ e FRMC = ∞. Ainda que os resistores sejam incompatíveis, podemos minimizar o impacto da incompatibilidade tornando o ganho de modo diferencial (R_b/R_a) muito grande, o que significa tornar o FRMC grande.

No início, dissemos que outra razão para o ganho não nulo de modo comum é um amp op não-ideal. Observe que

o amp op é, em si, um amplificador diferencial, porque na região linear de operação sua saída é proporcional à diferença entre suas entradas; isto é, $v_o = A(v_p - v_n)$. A saída de um amp op não-ideal não é estritamente proporcional à diferença entre as entradas (a entrada de modo diferencial), mas também é composta de um sinal de modo comum. Incompatibilidades internas nos componentes do circuito integrado tornam o comportamento do amp op não-ideal, do mesmo modo que as incompatibilidades de resistores no circuito amplificador diferencial tornam seu comportamento não-ideal. Embora uma discussão sobre amp ops não-ideais não esteja no escopo deste livro, você pode observar que o FRMC é freqüentemente usado para avaliar quão próximo do ideal é o comportamento de um amp op. Na verdade, é um dos principais modos de classificar amp ops na prática.

NOTA: Avalie o que entendeu desse material tentando resolver os problemas 5.32 e 5.33, apresentados no final deste capítulo.

5.7 Modelo mais realista para o amplificador operacional

Consideramos, agora, um modelo mais realista para o desempenho de um amp op em sua região linear de operação. Tal modelo inclui três modificações no amp op ideal: (1) uma resistência de entrada finita, R_i; (2) um ganho de malha aberta finito, A; e (3) uma resistência de saída não-zero, R_o. O circuito mostrado na Figura 5.15 ilustra o modelo mais realista.

Sempre que usamos o circuito equivalente mostrado na Figura 5.15, desconsideramos as suposições de que $v_n = v_p$ (Equação 5.2) e $i_n = i_p = 0$ (Equação 5.3). Além disso, a Equação 5.1 deixa de ser válida por causa da presença da resistência não-nula de saída, R_o. Outro modo de entender o circuito mostrado na Figura 5.15 é inverter nosso raciocínio. Isto é, podemos ver que o circuito é reduzido ao modelo ideal quando $R_i \to \infty$, $A \to \infty$ e $R_o \to 0$. Para o amp op μA741, os valores típicos de R_i, A e R_o são 2 MΩ, 10^5 e 75 Ω, respectivamente.

Embora a presença de R_i e R_o torne a análise de circuitos que contêm amp ops mais incômoda, tal análise continua sendo simples. Para ilustrar essa situação, analisamos ambos os amplificadores, inversor e não-inversor, usando o circuito equivalente mostrado na Figura 5.15. Começamos com o amplificador inversor.

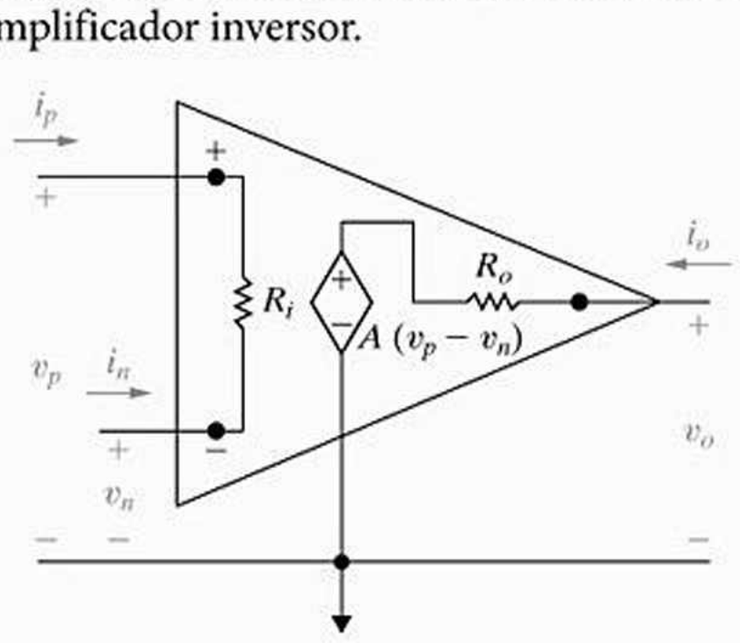


Figura 5.15 ▲ Circuito equivalente para um amplificador operacional.

Análise de um circuito amplificador inversor usando o modelo mais realista de amp op

Se usarmos o modelo mostrado na Figura 5.15, o amplificador inversor será o que está representado na Figura 5.16. Como, antes, nossa meta é expressar a tensão de saída, v_o, em função da tensão da fonte, v_s. Obtemos a expressão desejada escrevendo as duas equações de tensão de nó do circuito e, então, resolvendo o conjunto de equações resultante para v_o. Na Figura 5.16, os dois nós são a e b. Observe também que $v_p = 0$ em virtude da conexão externa em curto-circuito da entrada não-inversora. As duas equações de tensão de nó são as seguintes:

$$\text{nó } a\text{:}\quad \frac{v_n - v_s}{R_s} + \frac{v_n}{R_i} + \frac{v_n - v_o}{R_f} = 0, \tag{5.44}$$

$$\text{nó } b\text{:}\quad \frac{v_o - v_n}{R_f} + \frac{v_o - A(-v_n)}{R_o} = 0. \tag{5.45}$$

Reorganizamos as equações 5.44 e 5.45 de modo que a solução pelo método de Cramer fique aparente:

$$\left(\frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_f}\right)v_n - \frac{1}{R_f}v_o = \frac{1}{R_s}v_s, \tag{5.46}$$

$$\left(\frac{A}{R_o} - \frac{1}{R_f}\right)v_n + \left(\frac{1}{R_f} + \frac{1}{R_o}\right)v_o = 0. \tag{5.47}$$

Resolvendo para v_o, temos

$$v_o = \frac{-A + (R_o/R_f)}{\dfrac{R_s}{R_f}\left(1 + A + \dfrac{R_o}{R_i}\right) + \left(\dfrac{R_s}{R_i} + 1\right) + \dfrac{R_o}{R_f}}\,v_s. \tag{5.48}$$

Observe que a Equação 5.48 se reduz à Equação 5.10 quando $R_o \to 0$, $R_i \to \infty$ e $A \to \infty$.

Se a saída do amplificador inversor mostrado na Figura 5.16 fosse conectada a uma resistência de carga de R_L ohms, a relação entre v_o e v_s se tornaria

$$v_o = \frac{-A + (R_o/R_f)}{\dfrac{R_s}{R_f}\left(1 + A + \dfrac{R_o}{R_i} + \dfrac{R_o}{R_L}\right) + \left(1 + \dfrac{R_o}{R_L}\right)\left(1 + \dfrac{R_s}{R_i}\right) + \dfrac{R_o}{R_f}}\,v_s. \tag{5.49}$$

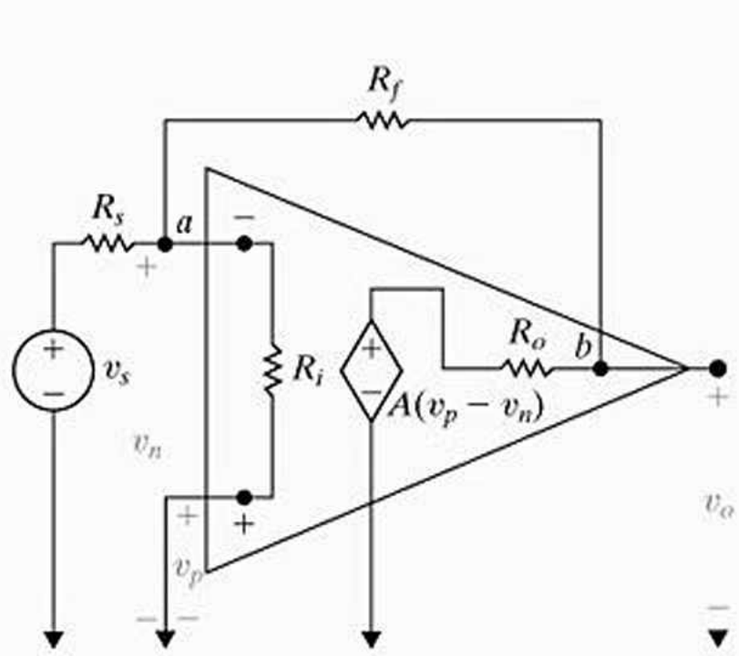


Figura 5.16 ▲ Circuito amplificador inversor.

Análise de um circuito amplificador não-inversor usando o modelo mais realista de amp op

Quando usamos o circuito equivalente mostrado na Figura 5.15 para analisar um amplificador não-inversor, obtivemos o circuito representado na Figura 5.17. Aqui, a fonte de tensão v_g, em série com a resistência R_g, representa a fonte de sinal. O resistor R_L modela a carga do amplificador. Nossa análise consiste em deduzir uma expressão para v_o em função de v_g. Fazemos isso escrevendo as equações de tensão de nó para os nós a e b. No nó a,

$$\frac{v_n}{R_s} + \frac{v_n - v_g}{R_g + R_i} + \frac{v_n - v_o}{R_f} = 0, \tag{5.50}$$

e no nó b,

$$\frac{v_o - v_n}{R_f} + \frac{v_o}{R_L} + \frac{v_o - A(v_p - v_n)}{R_o} = 0. \tag{5.51}$$

Como a corrente em R_g é a mesma que em R_i, temos

$$\frac{v_p - v_g}{R_g} = \frac{v_n - v_g}{R_i + R_g}. \tag{5.52}$$

Usamos a Equação 5.52 para eliminar v_p da Equação 5.51, o que resulta em um par de equações que envolvem as tensões desconhecidas v_n e v_o. Essa manipulação algébrica resulta em

$$v_n\left(\frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_g + R_i} + \frac{1}{R_f}\right) - v_o\left(\frac{1}{R_f}\right) = v_g\left(\frac{1}{R_g + R_i}\right), \tag{5.53}$$

$$v_n\left[\frac{AR_i}{R_o(R_i + R_g)} - \frac{1}{R_f}\right] + v_o\left(\frac{1}{R_f} + \frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_L}\right) = v_g\left[\frac{AR_i}{R_o(R_i + R_g)}\right]. \tag{5.54}$$

Resolvendo para v_o, temos

$$v_o = \frac{[(R_f + R_s) + (R_sR_o/AR_i)]v_g}{R_s + \frac{R_o}{A}(1 + K_r) + \frac{R_fR_s + (R_f + R_s)(R_i + R_g)}{AR_i}}, \tag{5.55}$$

onde

$$K_r = \frac{R_s + R_g}{R_i} + \frac{R_f + R_s}{R_L} + \frac{R_fR_s + R_fR_g + R_gR_s}{R_iR_L}$$

Observe que a Equação 5.55 se reduz à Equação 5.18 quando $R_o \to 0$, $A \to \infty$ e $R_i \to \infty$. Para o amplificador não-inversor não carregado ($R_L = \infty$), a Equação 5.55 é simplificada para

$$v_o = \frac{[(R_f + R_s) + R_sR_o/AR_i]v_g}{R_s + \frac{R_o}{A}\left(1 + \frac{R_s + R_g}{R_i}\right) + \frac{1}{AR_i}[R_fR_s + (R_f + R_s)(R_i + R_g)]}. \tag{5.56}$$

Observe que, na dedução da Equação 5.56 a partir da Equação 5.55, K_r se reduz a $(R_s + R_g) / R_i$.

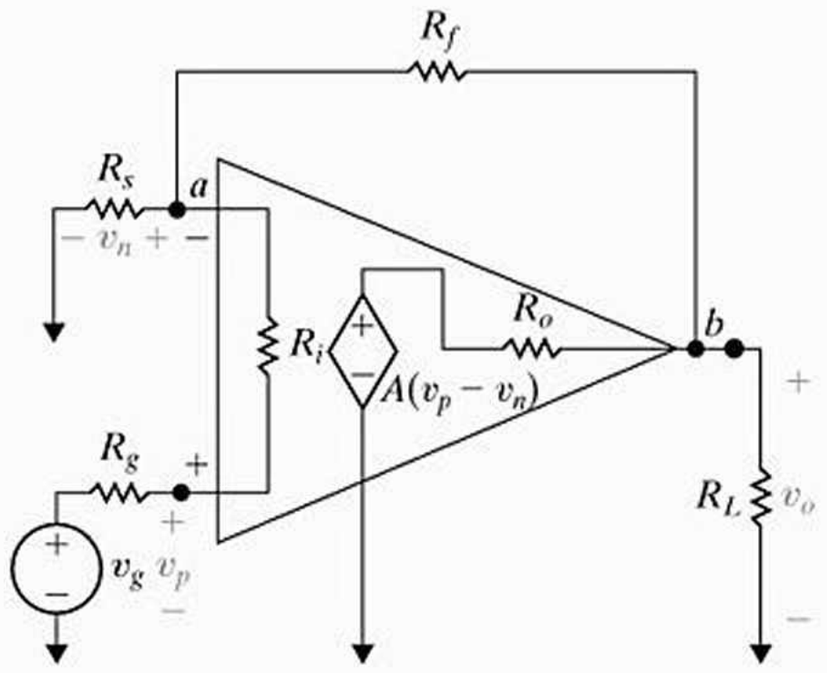


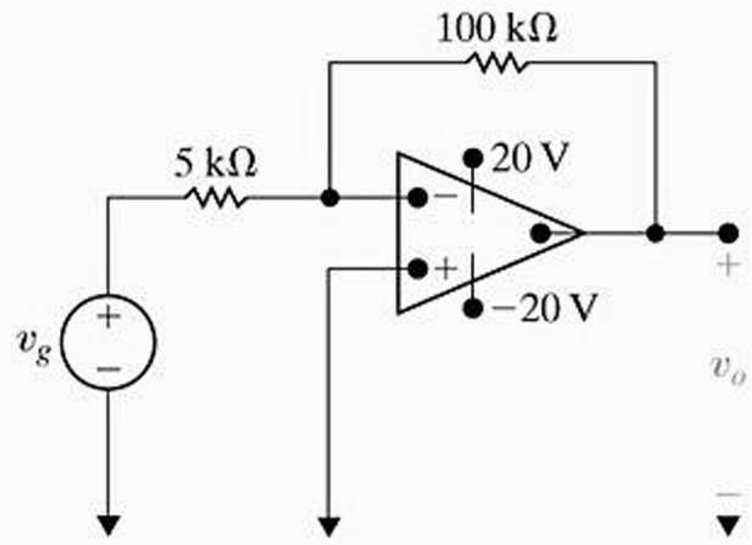
Figura 5.17 ▲ Circuito amplificador não-inversor.

✔ PROBLEMA PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 3 — Entender o modelo mais realista para um amp op

5.6 O amplificador inversor no circuito mostrado tem uma resistência de entrada de 500 kΩ, uma resistência de saída de 5 kΩ, e um ganho de malha aberta de 300.000. Admita que o amplificador esteja operando em sua região linear.

a) Calcule o ganho de tensão (v_o/v_g) do amplificador.
b) Calcule o valor de v_n em microvolts quando $v_g = 1$ V.
c) Calcule a resistência vista pela fonte de sinal v_g.
d) Repita (a)–(c) usando o modelo ideal para o amp op.



Resposta: (a) −19,9985; (c) 5000,35 Ω;
(b) 69,995 μV; (d) −20,0 μV, 5 kΩ.

NOTA: Tente resolver também os problemas 5.42 e 5.43, apresentados no final deste capítulo.

Perspectiva prática

Extensômetros

Variações no formato de sólidos elásticos são de grande importância para engenheiros que projetam estruturas que sofrem torção, estiramento ou curvatura quando sujeitas a forças externas. A estrutura de uma aeronave é o exemplo perfeito de uma estrutura na qual os engenheiros devem levar em consideração a deformação elástica. A aplicação inteligente de extensômetros requer informação sobre a estrutura física do medidor, métodos de acoplamento do medidor à superfície da estrutura e a orientação do medidor em relação às forças exercidas sobre a estrutura. Aqui, nosso propósito é demonstrar que as medições de um extensômetro são importantes em aplicações de engenharia e que conhecer bem os circuitos elétricos é pertinente à sua utilização adequada.

O circuito mostrado na Figura 5.18 apresenta um modo de medir a variação de resistência experimentada por extensômetros em aplicações como a descrita no início deste capítulo. Como veremos, esse circuito é o conhecido amplificador diferencial, sendo que a ponte do extensômetro provê as duas tensões cuja diferença é amplificada. O par de extensômetros alongado quando a barra é curvada tem valores de resistência de $R + \Delta R$ na ponte que alimenta o amplificador diferencial, ao passo que o par de extensômetros encurtado tem valores de resistência de $R - \Delta R$. Analisaremos esse circuito para determinar a relação entre a tensão de saída, v_o, e a variação na resistência, ΔR, experimentada pelos extensômetros.

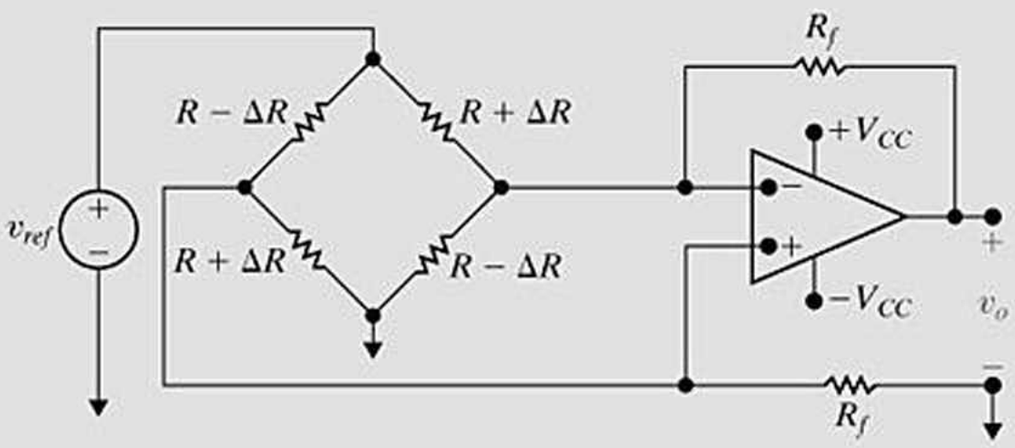


Figura 5.18 ▲ Circuito amp op usado para medir a variação na resistência de um extensômetro.

Para começar, admita que o amp op seja ideal. Escrevendo as equações da lei das correntes de Kirchhoff para as entradas inversora e não-inversora do amp op, vemos que

$$\frac{v_{\text{ref}} - v_n}{R + \Delta R} = \frac{v_n}{R - \Delta R} + \frac{v_n - v_o}{R_f}, \tag{5.57}$$

$$\frac{v_{\text{ref}} - v_p}{R - \Delta R} = \frac{v_p}{R + \Delta R} + \frac{v_p}{R_f}. \tag{5.58}$$

Agora, reorganize a Equação 5.58 para obter uma expressão para a tensão no terminal não-inversor do amp op:

$$v_p = \frac{v_{\text{ref}}}{(R - \Delta R)\left(\dfrac{1}{R + \Delta R} + \dfrac{1}{R - \Delta R} + \dfrac{1}{R_f}\right)}. \tag{5.59}$$

Como sempre, admitiremos que o amp op esteja operando em sua região linear, portanto vp = vn, e a expressão para vp na Equação 5.59 também deve ser a expressão para vn. Assim, podemos substituir vn na equação pelo lado direito da Equação 5.59 e resolver para vo. Após algumas manipulações algébricas,

$$v_o = \frac{R_f(2\Delta R)}{R^2 - (\Delta R)^2} v_{\text{ref}}. \tag{5.60}$$

Como a variação na resistência experimentada pelos extensômetros é muito pequena, $(\Delta R)^2 < R^2$, portanto R^2 2 $(\Delta R)^2 \approx R^2$ e a Equação 5.60 torna-se

$$v_o \approx \frac{R_f}{R} 2\delta v_{\text{ref}}, \tag{5.61}$$

onde $\delta = \Delta R/R$.

NOTA: Avalie o que entendeu dessa "Perspectiva prática" tentando resolver o Problema 5.48, apresentado no final deste capítulo.

Resumo

- A equação que define a característica de transferência de tensão de um amp op ideal é

$$v_o = \begin{cases} -V_{CC}, & A(v_p - v_n) < -V_{CC} \\ A(v_p - v_n), & -V_{CC} \leq A(v_p - v_n) \leq +V_{CC} \\ +V_{CC}, & A(v_p - v_n) > +V_{CC} \end{cases}$$

  onde A é uma constante de proporcionalidade conhecida como o ganho de malha aberta e V_{CC} representa as tensões de alimentação.

- Uma realimentação da saída de um amp op para sua entrada inversora mantém o amp op em sua região linear de operação, onde $v_o = A(v_p - v_n)$.

- As tensões devem obedecer a certas restrições quando o amp op está operando em sua região linear, em função dos valores típicos de V_{CC} e A. No caso ideal — em que admitimos que A seja infinito —, a condição para a tensão é

$$v_p = v_n.$$

- A restrição de corrente caracteriza ainda mais o modelo de amp op ideal porque a resistência de entrada ideal do circuito integrado do amp op é infinita. Essa restrição é dada por

$$i_p = i_n = 0$$

- Neste capítulo, consideramos um modelo simples de amp op e também um modelo mais realista. As diferenças entre ambos são as seguintes:

Modelo simplificado	Modelo mais realista
Resistência de entrada infinita	Resistência de entrada finita
Ganho de malha aberta infinito	Ganho de malha aberta finito
Resistência de saída zero	Resistência de saída não-zero

- Um amplificador inversor é um circuito baseado em um amp op que produz uma tensão de saída que é uma réplica invertida da tensão de entrada, multiplicada por um fator de escala.

- Um amplificador somador é um circuito baseado em um amp op que produz uma tensão de saída que é uma soma das tensões de entrada, multiplicada por fatores de escala.

- Um amplificador não-inversor é um circuito baseado em um amp op que produz uma tensão de saída que é uma réplica da tensão de entrada, multiplicada por um fator de escala.

- Um amplificador diferencial é um circuito baseado em um amp op que produz uma tensão de saída que é uma réplica da diferença da tensão de entrada, multiplicada por um fator de escala.

- As duas tensões de entrada de um amplificador diferencial podem ser usadas para calcular as tensões de entrada de modo comum e de modo diferencial, v_{mc} e v_{md}. A tensão de saída do amplificador diferencial pode ser escrita na forma

$$v_o = A_{mc} v_{mc} + A_{md} v_{md},$$

  onde A_{mc} é o ganho de modo comum, e A_{md} é o ganho de modo diferencial.

- Em um amplificador diferencial ideal, $A_{mc} = 0$. Para medir quão próximo do ideal está um amplificador diferencial, usamos o fator de rejeição de modo comum:

$$\text{FRMC} = \left| \frac{A_{md}}{A_{mc}} \right|.$$

  Um amplificador diferencial ideal tem um FRMC infinito.

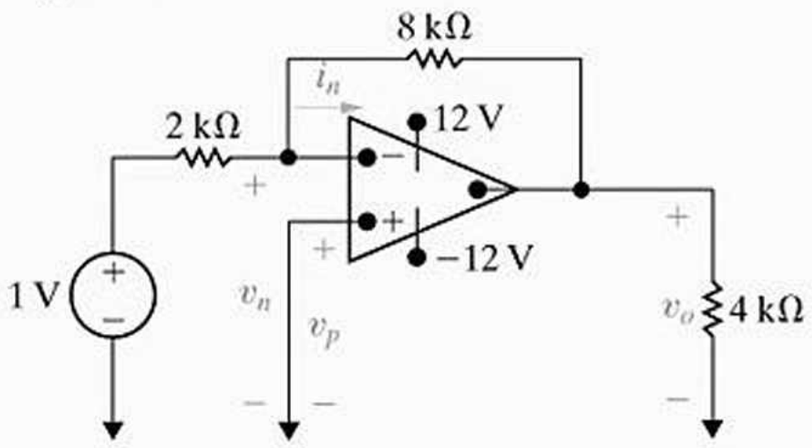
Problemas

Seções 5.1–5.2

5.1* PSPICE O amp op no circuito da Figura P5.1 é ideal.

a) Identifique os cinco terminais do amp op com seus respectivos nomes.
b) Qual restrição do amp op ideal determina o valor de i_n? Qual é esse valor?
c) Qual restrição do amp op ideal determina o valor de $(v_p - v_n)$? Qual é esse valor?
d) Calcule v_o.

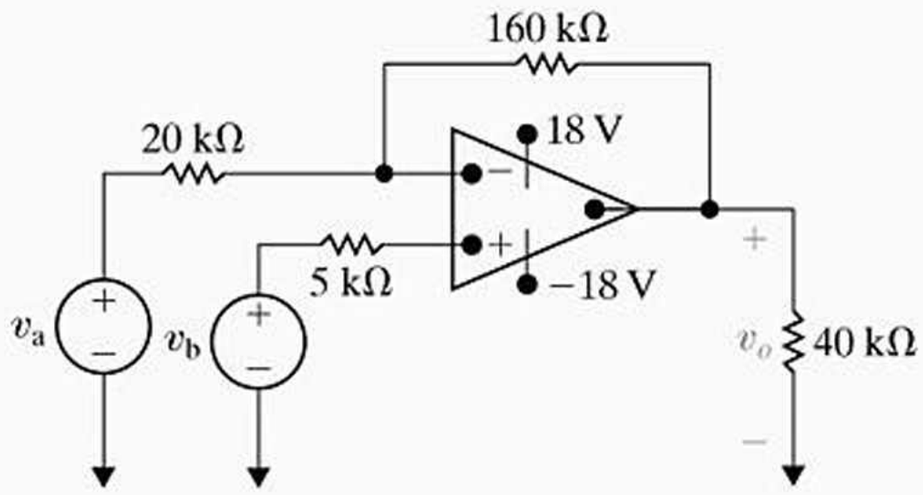
Figura P5.1



5.2* PSPICE O amp op no circuito da Figura P5.2 é ideal.

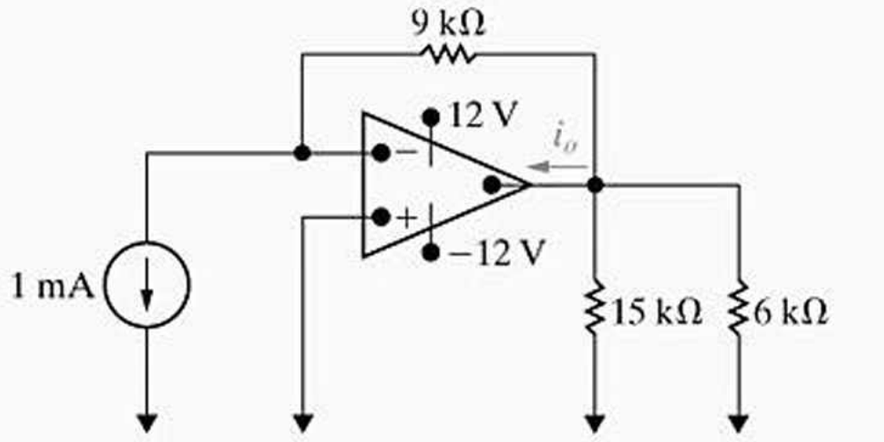
a) Calcule v_o se $v_a = 1{,}5$ V e $v_b = 0$ V.
b) Calcule v_o se $v_a = 3$ V e $v_b = 0$ V.
c) Calcule v_o se $v_a = 1$ V e $v_b = 2$ V.
d) Calcule v_o se $v_a = 4$ V e $v_b = 2$ V.
e) Calcule v_o se $v_a = 6$ V e $v_b = 8$ V.
f) Se $v_b = 4{,}5$ V, especifique a faixa de variação de v_a tal que o amplificador não se sature.

Figura P5.2



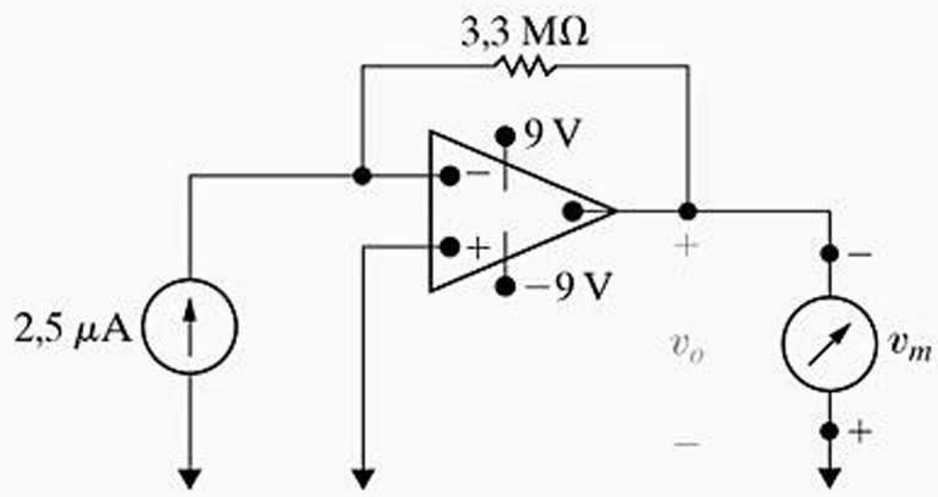
5.3* PSPICE Determine i_o no circuito da Figura P5.3 se o amp op for ideal.

Figura P5.3



5.4 PSPICE Um voltímetro com um fundo de escala de 10 V é usado para medir a tensão de saída no circuito da Figura P5.4. Qual é a leitura do voltímetro? Admita que o amp op seja ideal.

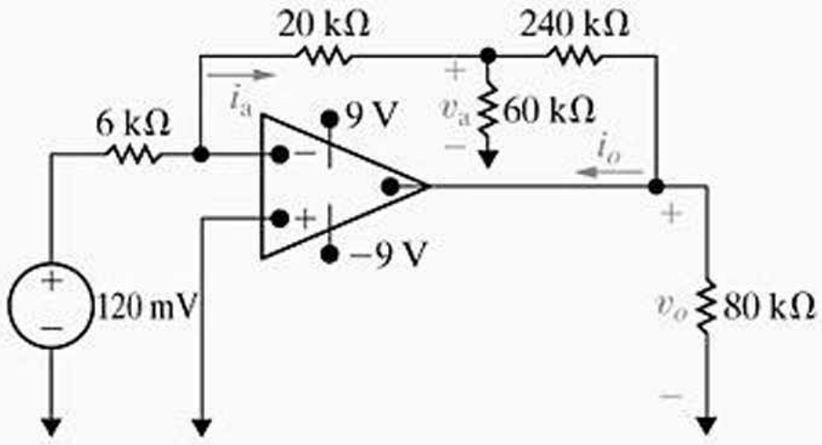
Figura P5.4



5.5 PSPICE O amp op no circuito da Figura P5.5 é ideal. Calcule:

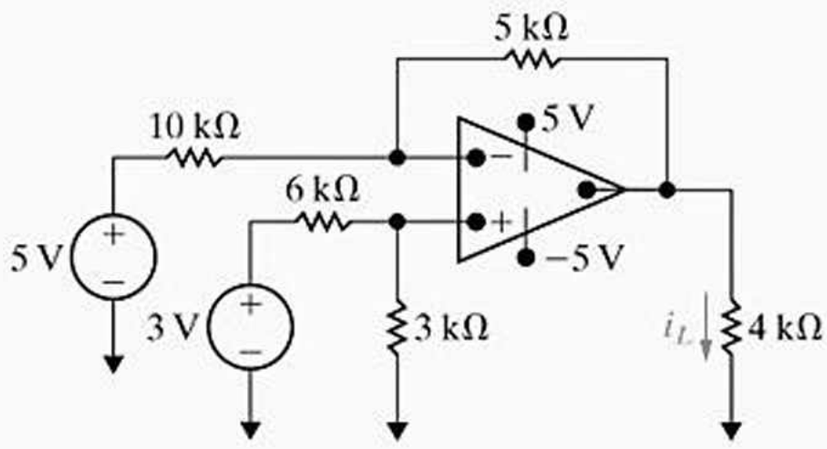
a) v_a
b) v_o
c) i_a
d) i_o

Figura P5.5



5.6 PSPICE Determine i_L (em microampères) no circuito da Figura P5.6.

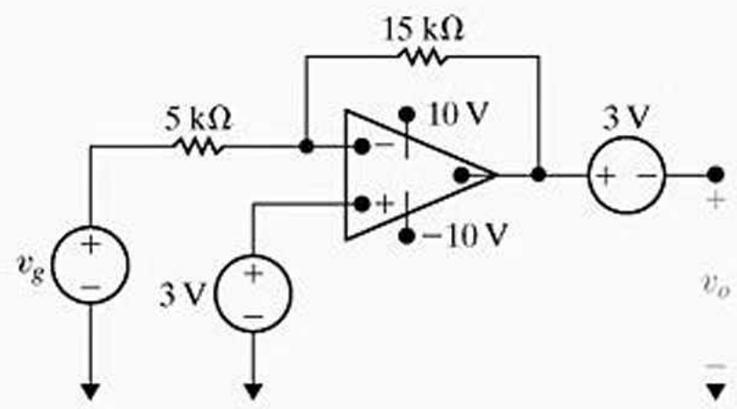
Figura P5.6



5.7 PERSPECTIVA PRÁTICA PSPICE Um projetista de circuitos afirma que o circuito da Figura P5.7 produzirá uma tensão de saída que variará entre ±9 V, quando v_g variar entre 0 e 6 V. Admita que o amp op seja ideal.

a) Desenhe um gráfico da tensão de saída v_o em função da tensão de entrada v_g para $0 \leq v_g \leq 6$ V.
b) Você concorda com a afirmação do projetista?

Figura P5.7

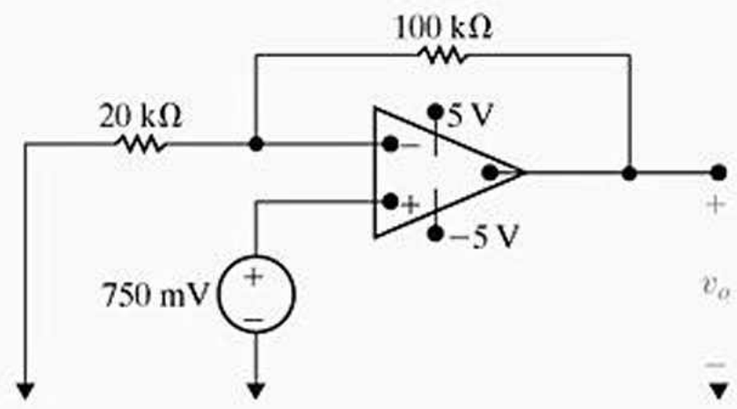


Seção 5.3

5.8* PSPICE O amp op no circuito da Figura P5.8 é ideal.

a) Qual é a configuração desse circuito amp op?
b) Calcule v_o.

Figura P5.8



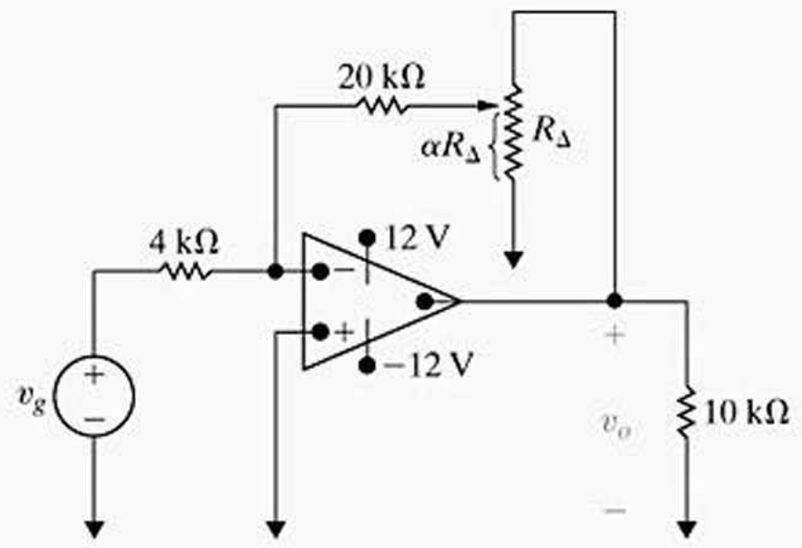
5.9* PROBLEMA DE PROJETO a) Projete um amplificador inversor usando um amp op ideal cujo ganho é 4. Use somente resistores de 10 kΩ.

b) Se quiser amplificar um sinal de entrada de 2,5 V usando o circuito que projetou na parte (a), quais são os menores valores de fonte de alimentação que você pode usar?

5.10 PSPICE a) O amp op no circuito mostrado na Figura P5.10 é ideal. O resistor ajustável R_Δ tem um valor máximo de 120 kΩ, e α está restrita à faixa de $0{,}25 \leq \alpha \leq 0{,}8$. Calcule a faixa de nutrição de v_o se $v_g = 40$ mV.

b) Se α sofrer restrições, para qual valor de α o amp op estará saturado?

Figura P5.10

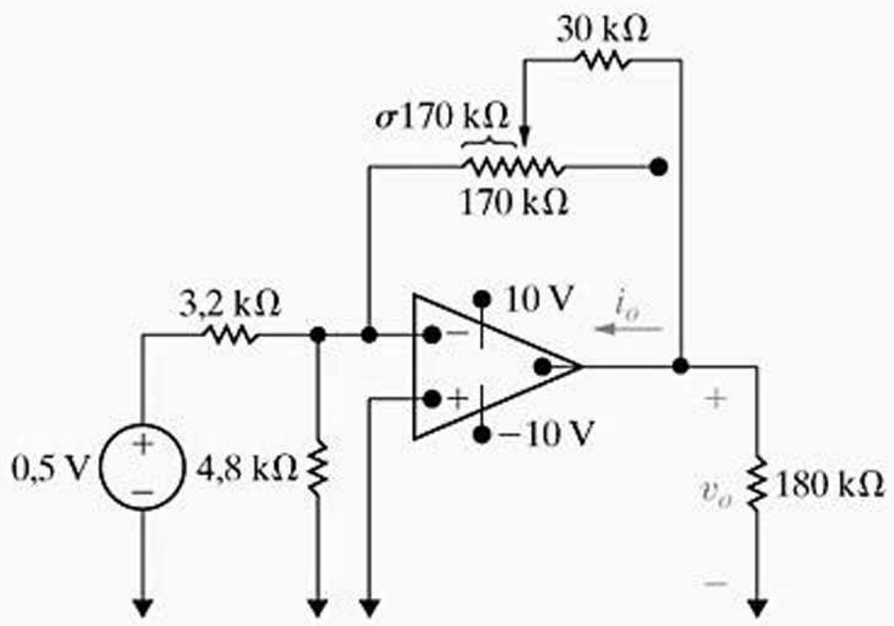


5.11 PSPICE O amp op no circuito da Figura P5.11 é ideal.

a) Determine a faixa de valores de σ para os quais o amp op não ficará saturado.

b) Determine i_o (em microampères) quando σ = 0,12.

Figura P5.11



Seção 5.4

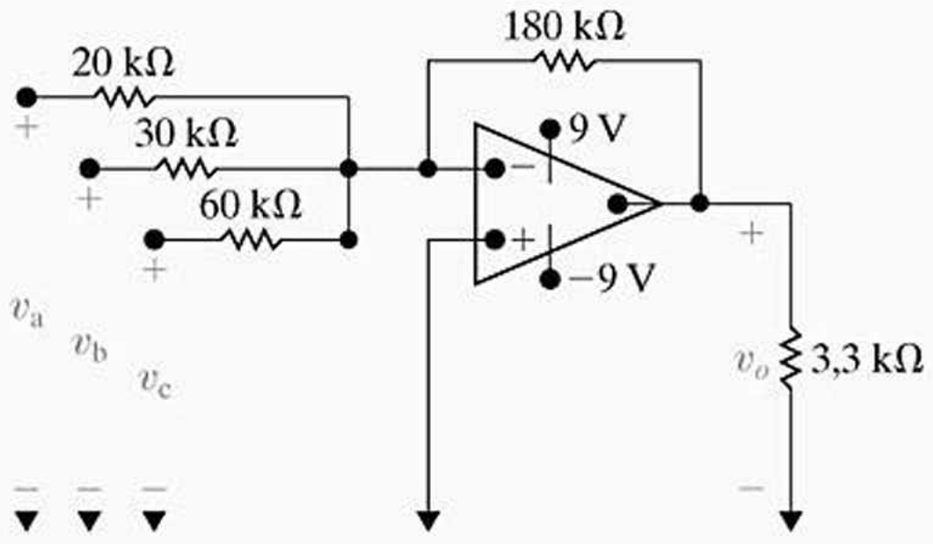
5.12* PSPICE O amp op da Figura P5.12 é ideal.

a) Qual é a configuração de circuito mostrada nessa figura?

b) Determine v_o se $v_a = 0{,}5$ V, $v_b = 1{,}5$ V e $v_c = -2{,}5$ V.

c) As tensões v_a e v_b permanecem em 0,5 V e 1,5 V, respectivamente. Quais são os limites para v_c se o amp op operar dentro de sua região linear?

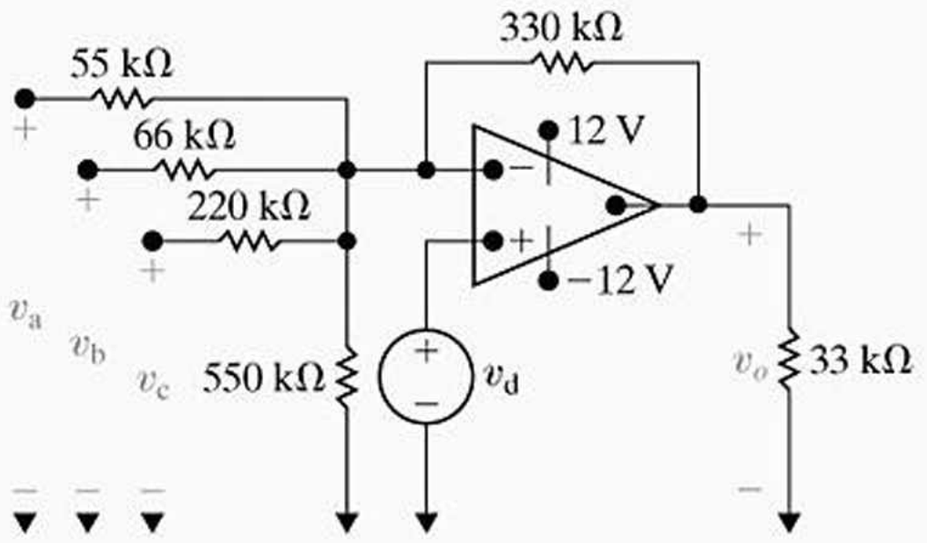
Figura P5.12



5.13* PSPICE a) O amp op da Figura P5.13 é ideal. Determine v_o se $v_a = 16$ V, $v_b = 12$ V, $v_c = -6$ V e $v_d = 10$ V.

b) Admita que v_a, v_c e v_d continuem com os valores dados em (a). Especifique a faixa de variação de v_b tal que o amp op funcione dentro de sua região linear.

Figura P5.13



5.14 PSPICE O resistor de realimentação de 330 kΩ no circuito da Figura P5.13 é substituído por um resistor variável R_f. As tensões $v_a - v_d$ têm os mesmos valores dados no Problema 5.13(a).

a) Qual valor de R_f causará a saturação do amp op? Observe que $0 \leq R_f \leq \infty$.

b) Quando R_f tem o valor determinado em (a), qual é a corrente (em microampères) que entra no terminal de saída do amp op?

5.15* PROBLEMA DE PROJETO PSPICE Projete um amplificador somador inversor de modo que

$$v_o = -(3v_a + 5v_b + 4v_c + 2v_d)$$

Se o resistor de realimentação (R_f) escolhido for de 60 kΩ, desenhe um diagrama do circuito do amplificador e especifique os valores de R_a, R_b, R_c e R_d.

5.16 PSPICE Refira-se ao circuito da Figura 5.11, onde se admite que o amp op seja ideal. Dado que $R_a = 4$ kΩ, $R_b = 5$ kΩ, $R_c = 20$ kΩ, $v_a = 200$ mV, $v_b = 150$ mV, $v_c = 400$ mV e $V_{CC} = \pm 6$ V, especifique a faixa de variação de R_f para a qual o amp op opere dentro de sua região linear.

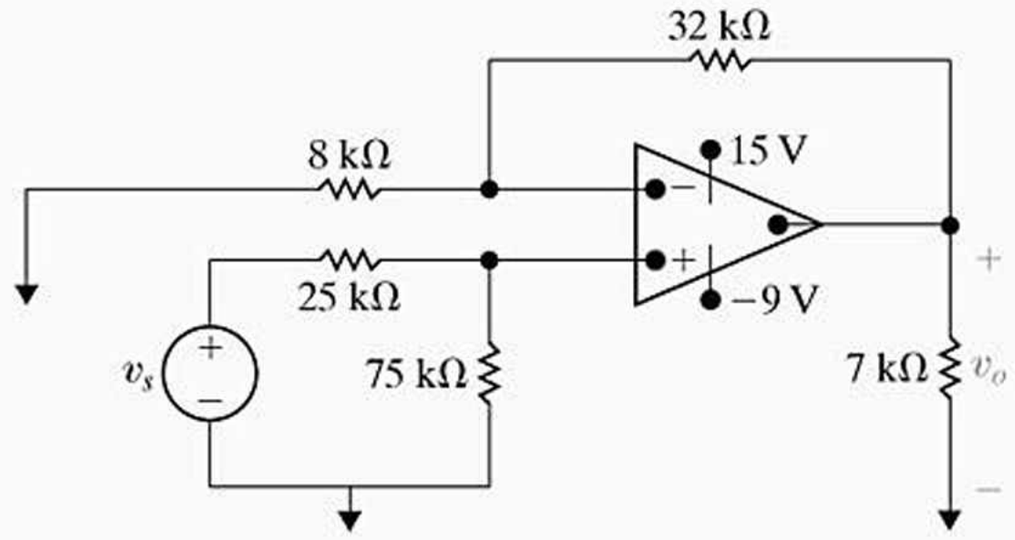
Seção 5.5

5.17* O amp op no circuito da Figura P5.17 é ideal.

a) Qual é a configuração do circuito amp op?

b) Determine v_o em termos de v_s.
c) Determine a faixa de valores para v_s tal que v_o não sature e o amp op permaneça em sua região linear de operação.

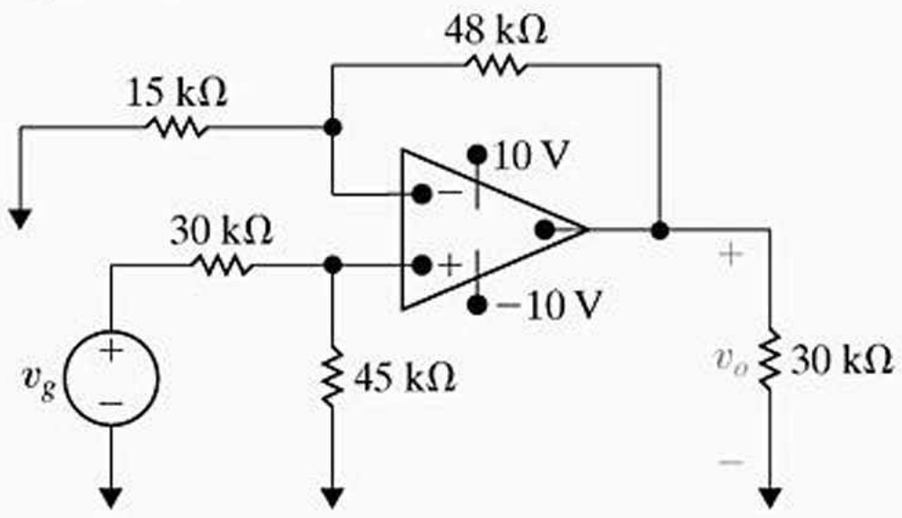
Figura P5.17



5.18* PSPICE O amp op no circuito mostrado na Figura P5.18 é ideal.

a) Calcule v_o quando $v_g = 3$ V.
b) Especifique a faixa de valores de v_g de modo que o amp op opere de modo linear.
c) Admita que v_g seja igual a 5 V e que o resistor de 48 kΩ seja substituído por um resistor variável. Qual é o valor do resistor variável que provocará a saturação do amp op?

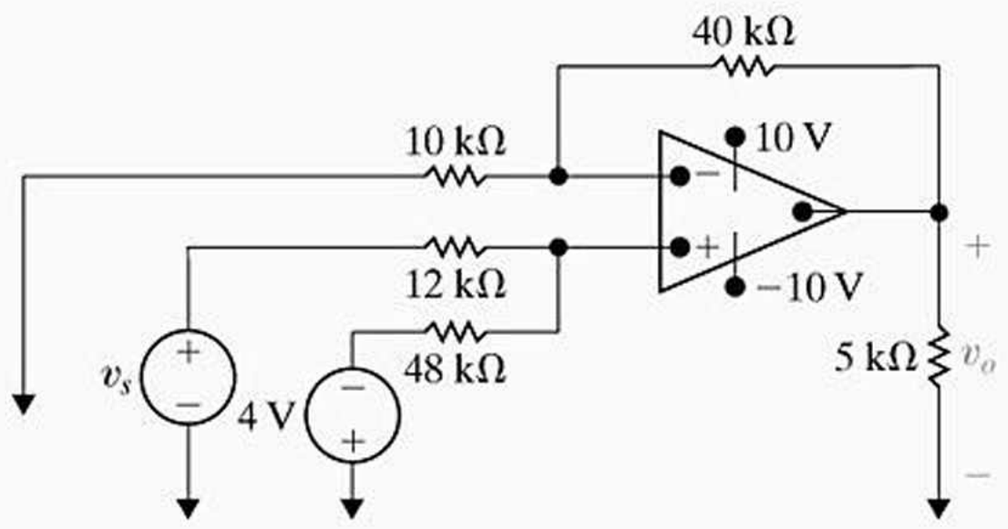
Figura P5.18



5.19 PSPICE O amp op no circuito da Figura P5.19 é ideal.

a) Qual é a configuração desse circuito amp op?
b) Determine v_o em termos de v_s.
c) Determine a faixa de valores para v_s tal que v_o não sature e o amp op permaneça em sua região linear de funcionamento.

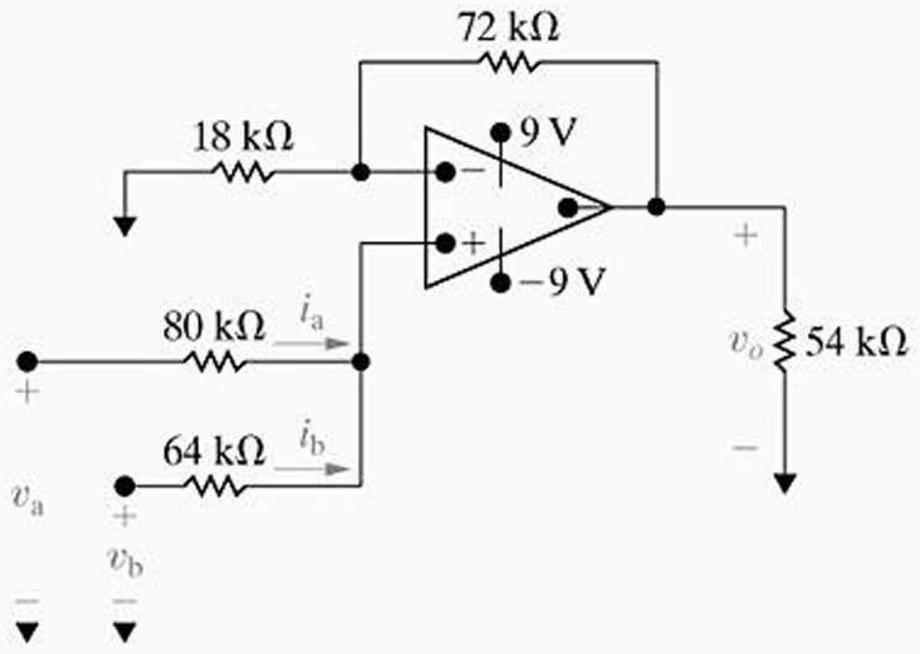
Figura P5.19



5.20 PSPICE O amp op no circuito mostrado na Figura P5.20 é ideal. As tensões de sinal v_a e v_b são 500 mV e 1.200 mV, respectivamente.

a) Qual é a configuração de circuito mostrada na figura?
b) Calcule v_o em volts.
c) Determine i_a e i_b em microampères.
d) Quais são os fatores de ponderação associados à v_a e v_b?

Figura P5.20



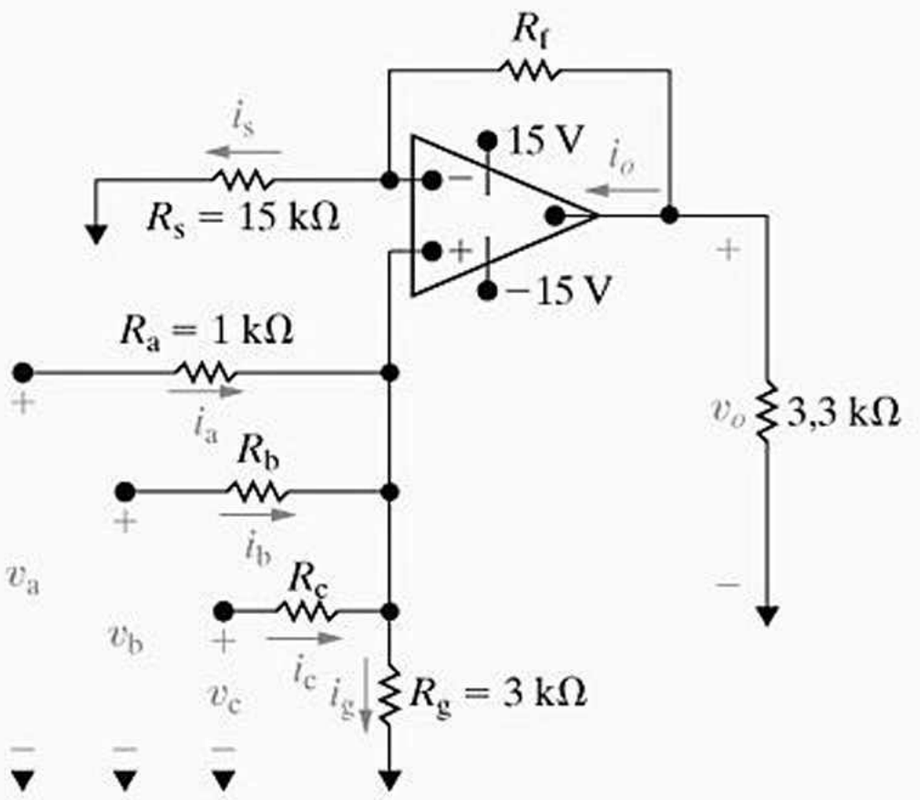
5.21 PSPICE O amp op no amplificador somador não-inversor da Figura P5.21 é ideal.

a) Especifique os valores de R_f, R_b e R_c de modo que

$$v_o = 6v_a + 3v_b + 4v_c.$$

b) Usando os valores definidos na parte (a) para R_f, R_b e R_c, determine i_a, i_b, i_c, i_g e i_s (em microampères), quando $v_a = 0{,}5$ V, $v_b = 2{,}5$ V e $v_c = 1$ V.

Figura P5.21



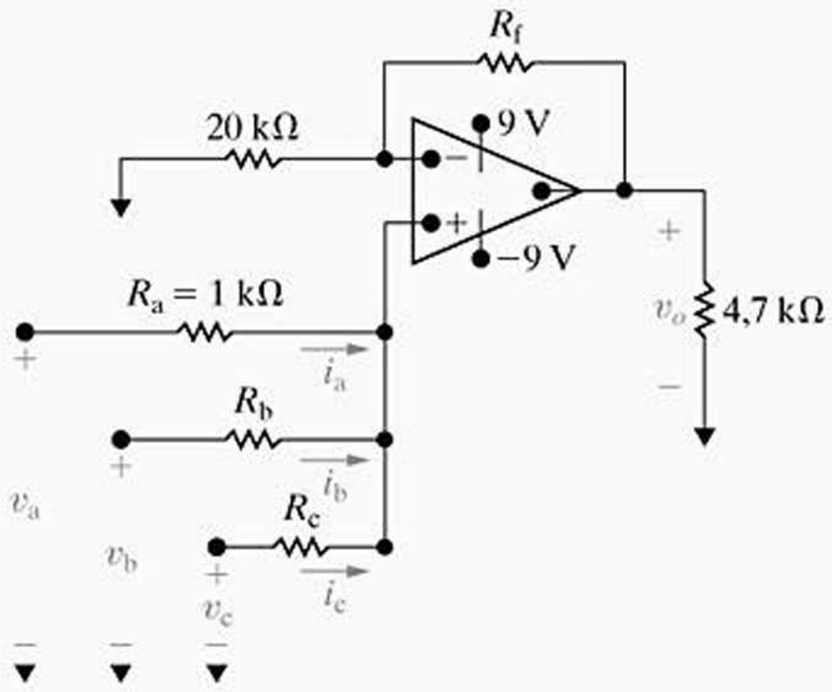
5.22 PROBLEMA DE PROJETO PSPICE O circuito da Figura P5.22 é um amplificador somador não-inversor. Admita que o amp op seja ideal. Projete o circuito de modo que

$$v_o = 4v_a + v_b + 2v_c.$$

a) Especifique os valores de R_b, R_c e R_f.

b) Usando os valores determinados na parte (a) para R_f, R_b e R_c, calcule i_a, i_b e i_c (em microampères), quando $v_a = 0{,}75$ V, $v_b = 1{,}0$ V e $v_c = 1{,}5$ V.

Figura P5.22



Seção 5.6

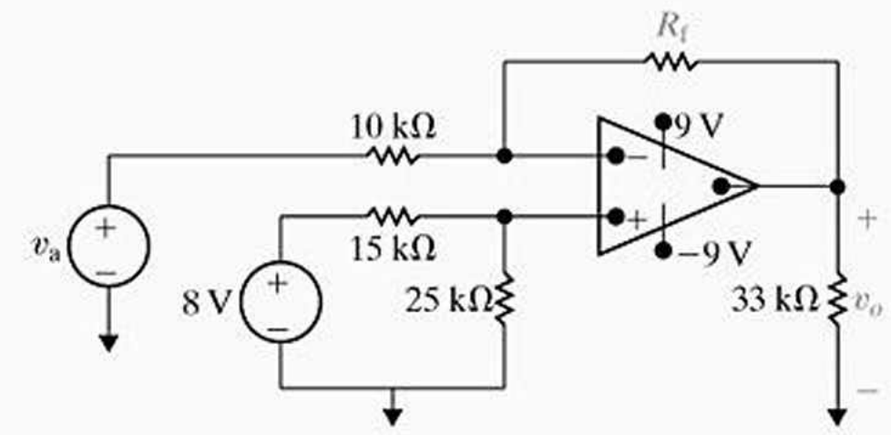
5.23 a) Use o princípio da superposição para deduzir a Equação 5.22.
b) Deduza as equações 5.23 e 5.24.

5.24* O amp op no circuito da Figura P5.24 é ideal. Qual valor de R_f leva à equação

$$v_o = 15 - 2v_a,$$

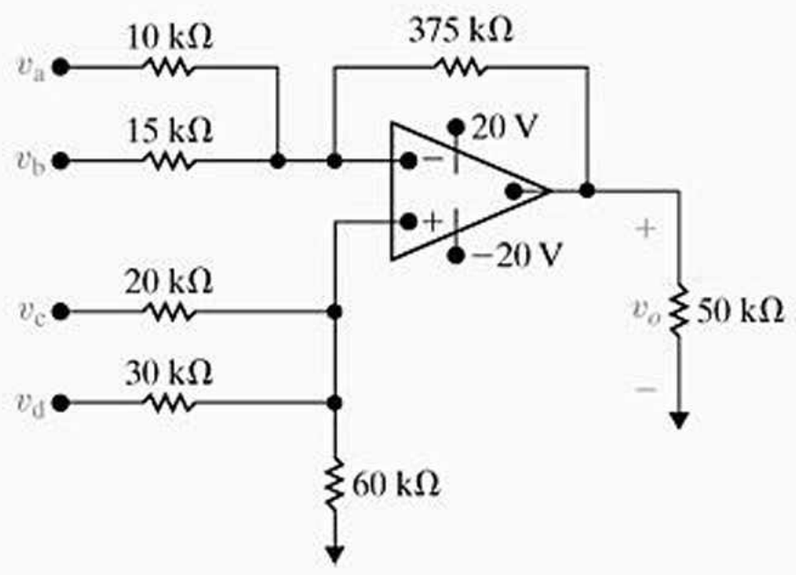
para esse circuito?

Figura P5.24



5.25* PSPICE O circuito amp op aditivo-subtrativo mostrado na Figura P5.25 é ideal.
a) Determine v_o quando $v_a = 0{,}4$ V, $v_b = 0{,}8$ V, $v_c = 0{,}2$ V e $v_d = 0{,}6$ V.
b) Se v_a, v_c e v_d forem mantidas constantes, quais valores de v_b não saturarão o amp op?

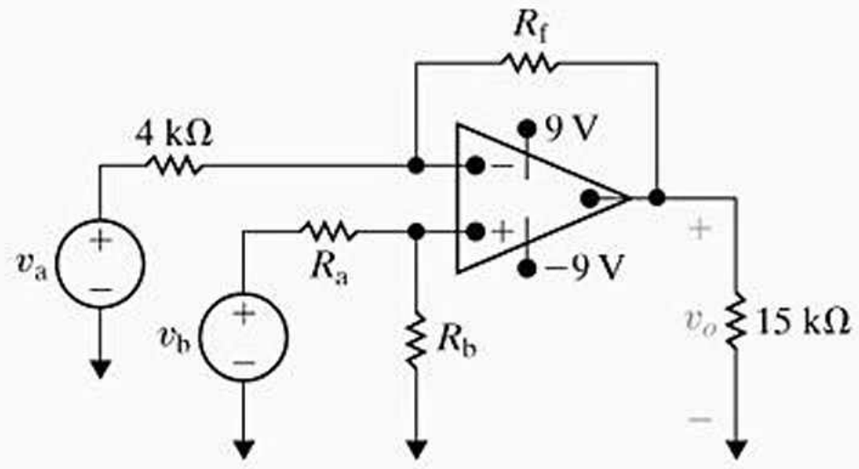
Figura P5.25



5.26* PSPICE Os resistores no amplificador diferencial mostrado na Figura 5.13 são $R_a = 20$ kΩ, $R_b = 80$ kΩ, $R_c = 47$ kΩ e $R_d = 33$ kΩ. Os sinais de entrada de v_a e v_b são 0,45 e 0,9 V, respectivamente, e $V_{CC} = \pm 9$ V.
a) Determine v_o.
b) Qual é a resistência vista pela fonte de sinal v_a?
c) Qual é a resistência vista pela fonte de sinal v_b?

5.27 PROBLEMA DE PROJETO PSPICE Projete o circuito amplificador diferencial da Figura P5.27 de modo que $v_o = 7{,}5(v_b - v_a)$ e a fonte de tensão v_b veja uma resistência de entrada de 170 kΩ. Especifique os valores de R_a, R_b e R_f. Use o modelo ideal para o amp op.

Figura P5.27

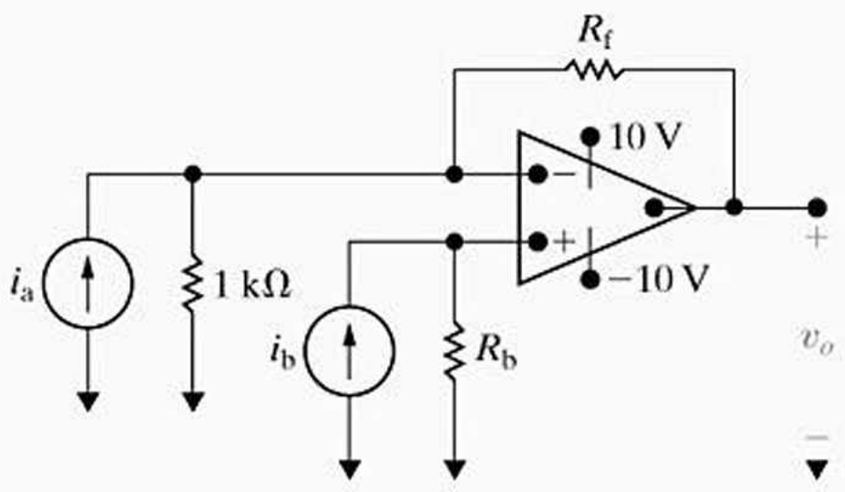


5.28 PROBLEMA DE PROJETO PSPICE Selecione os valores de R_b e R_f no circuito da Figura P5.28 de modo que

$$v_o = 4.000(i_b - i_a)$$

O amp op é ideal.

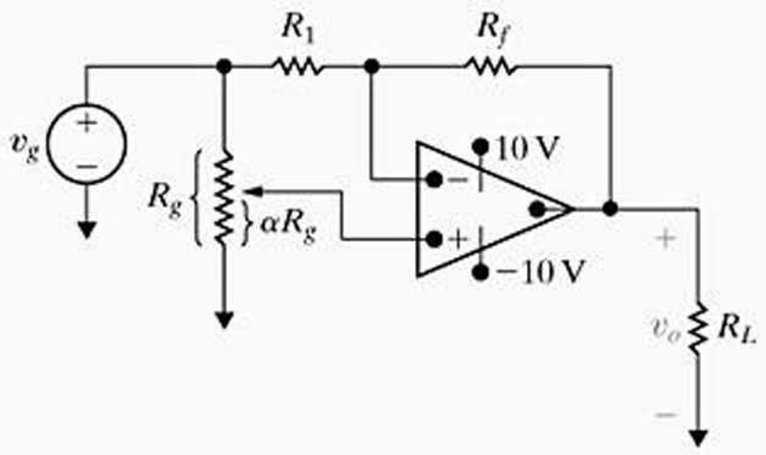
Figura P5.28



5.29 PROBLEMA DE PROJETO PSPICE Projete um amplificador diferencial (Figura 5.13) que obedeça ao seguinte critério: $v_o = 2v_b - 5v_a$. A resistência vista pela fonte de sinal v_b é 600 kΩ e a resistência vista pela fonte de sinal v_a é 18 kΩ quando a tensão de saída v_o é zero. Especifique os valores de R_a, R_b, R_c e R_d.

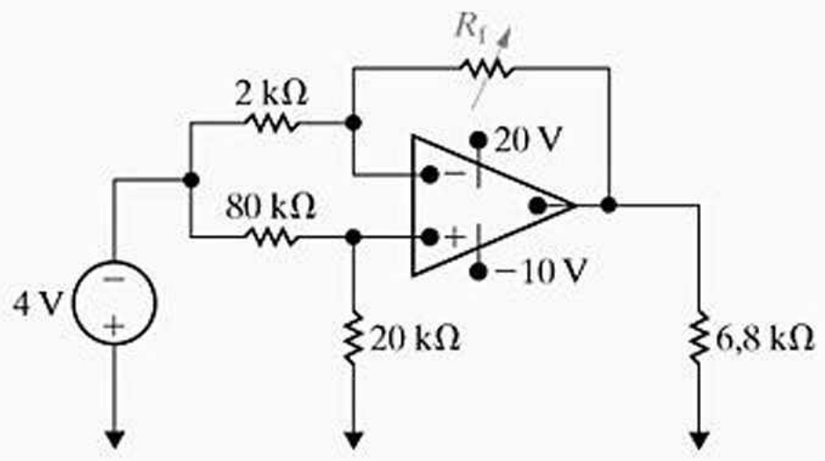
5.30 O amp op no circuito da Figura P5.30 é ideal.
a) Desenhe um gráfico de v_o *versus* α quando $R_f = 4R_1$ e $v_g = 2$ V. Use incrementos de 0,1 e observe, por hipótese, que $0 \leq \alpha \leq 1{,}0$.
b) Escreva uma equação para a reta que você obteve no gráfico do item (a). Qual é a relação entre a inclinação da reta e sua interseção com o eixo v_o e os valores de v_g à razão R_f/R_1?
c) Usando os resultados de (b), escolha valores de v_g e da razão R_f/R_1 tais que $v_o = -6\alpha + 4$.

Figura P5.30



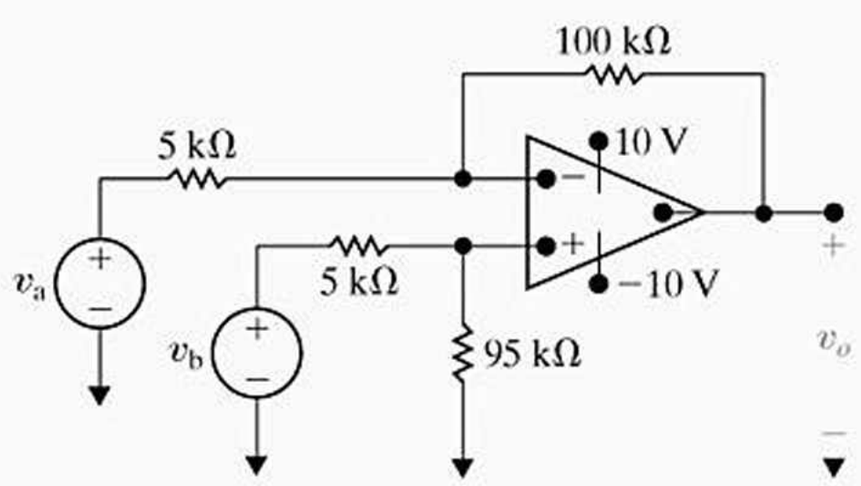
5.31 PSPICE O resistor R_f no circuito da Figura P5.31 é ajustado até que o amp op ideal se sature. Especifique R_f em kohms.

Figura P5.31



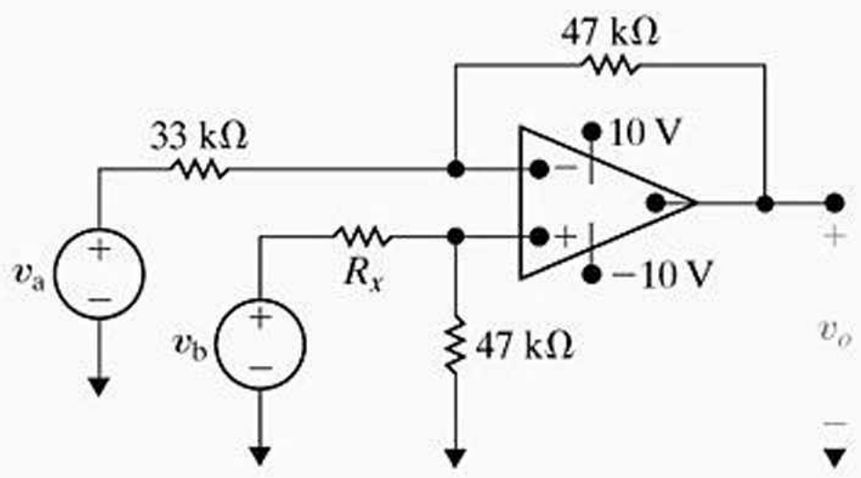
5.32* No amplificador diferencial mostrado na Figura P5.32, calcule (a) o ganho de modo diferencial, (b) o ganho de modo comum e (c) o FRMC.

Figura P5.32



5.33* No amplificador diferencial mostrado na Figura P5.33, qual é a faixa de valores de R_x que resulta em um FRMC ≥ 750?

Figura P5.33



Seções 5.1–5.6

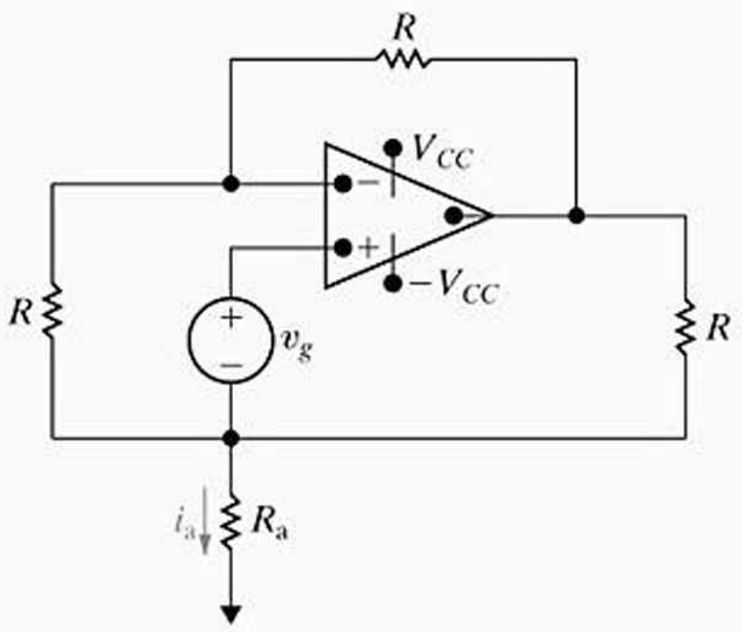
5.34 a) Mostre que, quando o amp op ideal da Figura P5.34 está operando em sua região linear,

$$i_a = \frac{3v_g}{R}.$$

b) Mostre que o amp op ideal ficará saturado quando

$$R_a = \frac{R(\pm V_{CC} - 2v_g)}{3v_g}.$$

Figura P5.34



5.35 PSPICE O circuito no interior da área sombreada da Figura P5.35 é uma fonte de corrente constante para uma faixa limitada de valores de R_L.

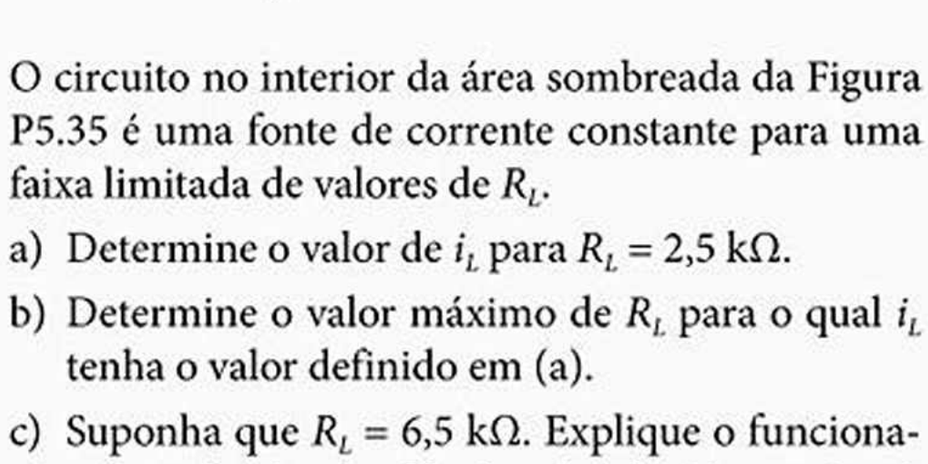
a) Determine o valor de i_L para $R_L = 2{,}5$ kΩ.

b) Determine o valor máximo de R_L para o qual i_L tenha o valor definido em (a).

c) Suponha que $R_L = 6{,}5$ kΩ. Explique o funcionamento do circuito. Você pode admitir que $i_n = i_p \approx 0$ sob todas as condições de operação.

d) Desenhe um gráfico de i_L *versus* R_L para $0 \leq R_L \leq 6{,}5$ kΩ.

Figura P5.35

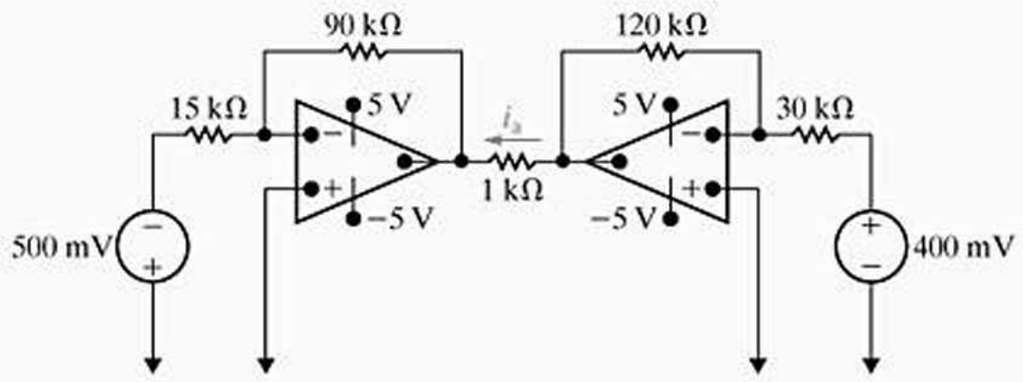


5.36 PSPICE Os amp ops no circuito da Figura P5.36 são ideais.

a) Determine i_a.

b) Determine o valor da tensão da fonte à direita, para a qual $i_a = 0$.

Figura P5.36



5.37 PSPICE Suponha que o amp op ideal no circuito da Figura P5.37 esteja operando em sua região linear.

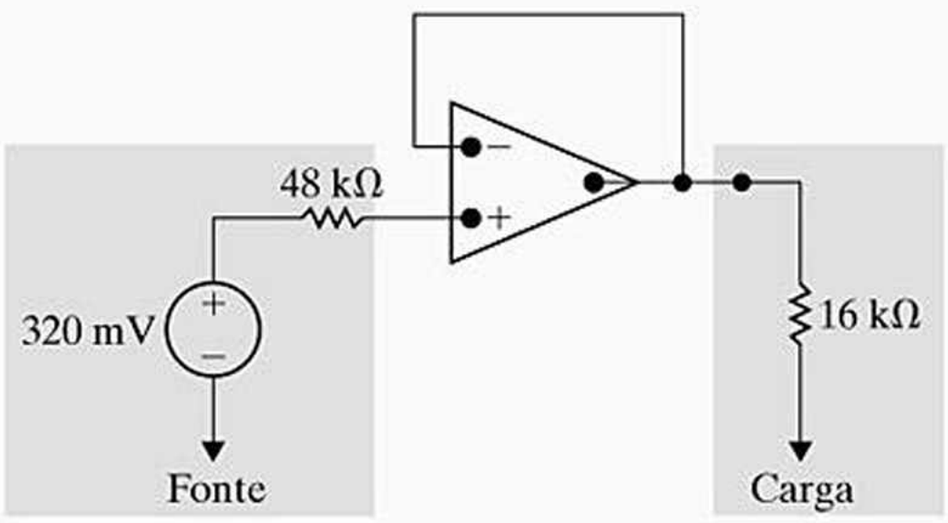
a) Calcule a potência fornecida ao resistor de 16 kΩ.

b) Repita (a) retirando o amp op do circuito, isto é, com o resistor de 16 kΩ ligado em série com a fonte de tensão e o resistor de 48 kΩ.

c) Determine a razão entre a potência determinada em (a) e a encontrada em (b).

d) A inserção do amp op entre a fonte e a carga cumpre alguma finalidade útil? Explique.

Figura P5.37



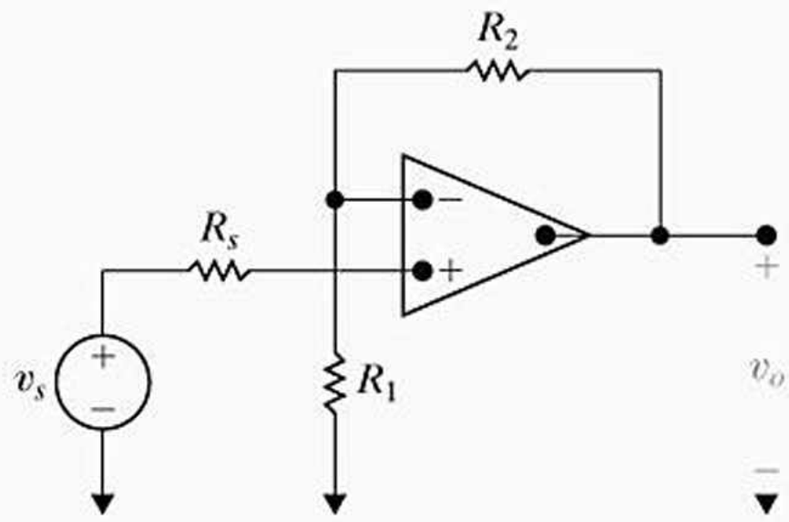
5.38 Suponha que o amp op ideal no circuito apresentado na Figura P5.38 esteja operando em sua região linear.

a) Mostre que $v_o = [(R_1 + R_2) / R_1]v_s$.

b) O que acontece se $R_1 \to \infty$ e $R_2 \to 0$?

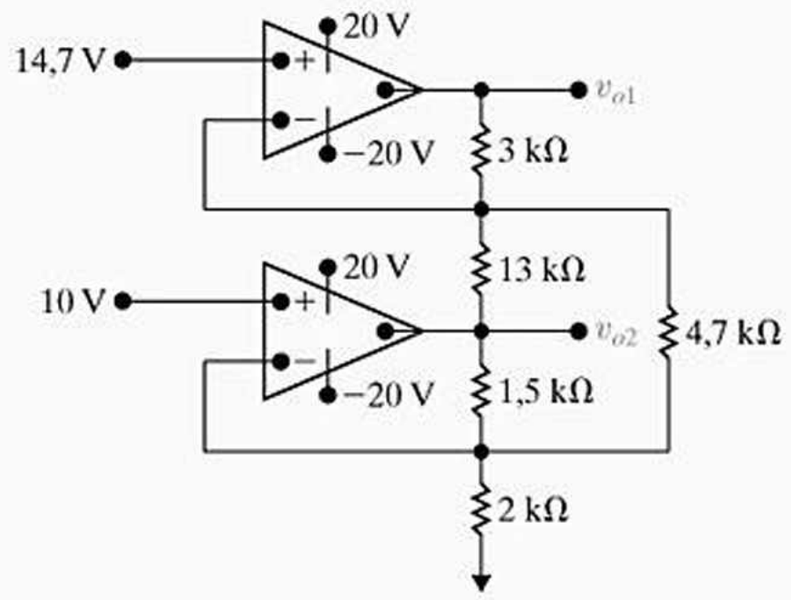
c) Explique por que esse circuito é denominado um seguidor de tensão quando $R_1 = \infty$ e $R_2 = 0$.

Figura P5.38



5.39 PSPICE Os dois amp ops no circuito da Figura P5.39 são ideais. Calcule v_{o1} e v_{o2}.

Figura P5.39



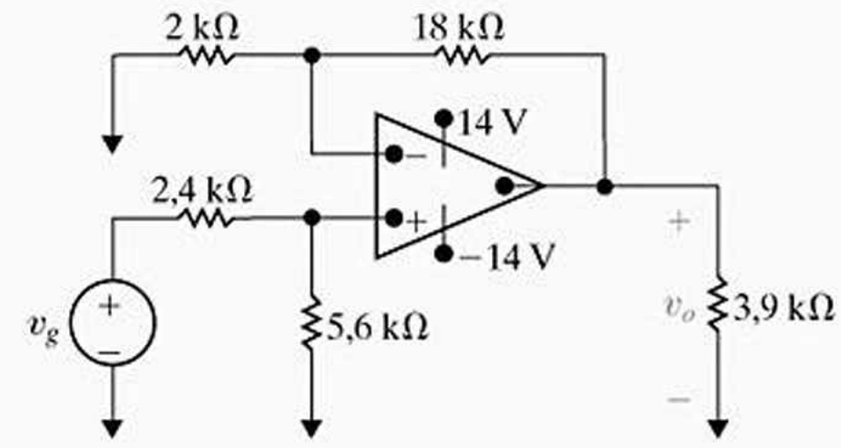
5.40 PSPICE O sinal v_g no circuito mostrado na Figura P5.40 é descrito pelas seguintes equações:

$$v_g = 0, \qquad t \leq 0$$

$$v_g = 4 \operatorname{sen}(5\pi/3)t \text{ V}, \quad 0 \leq t \leq \infty$$

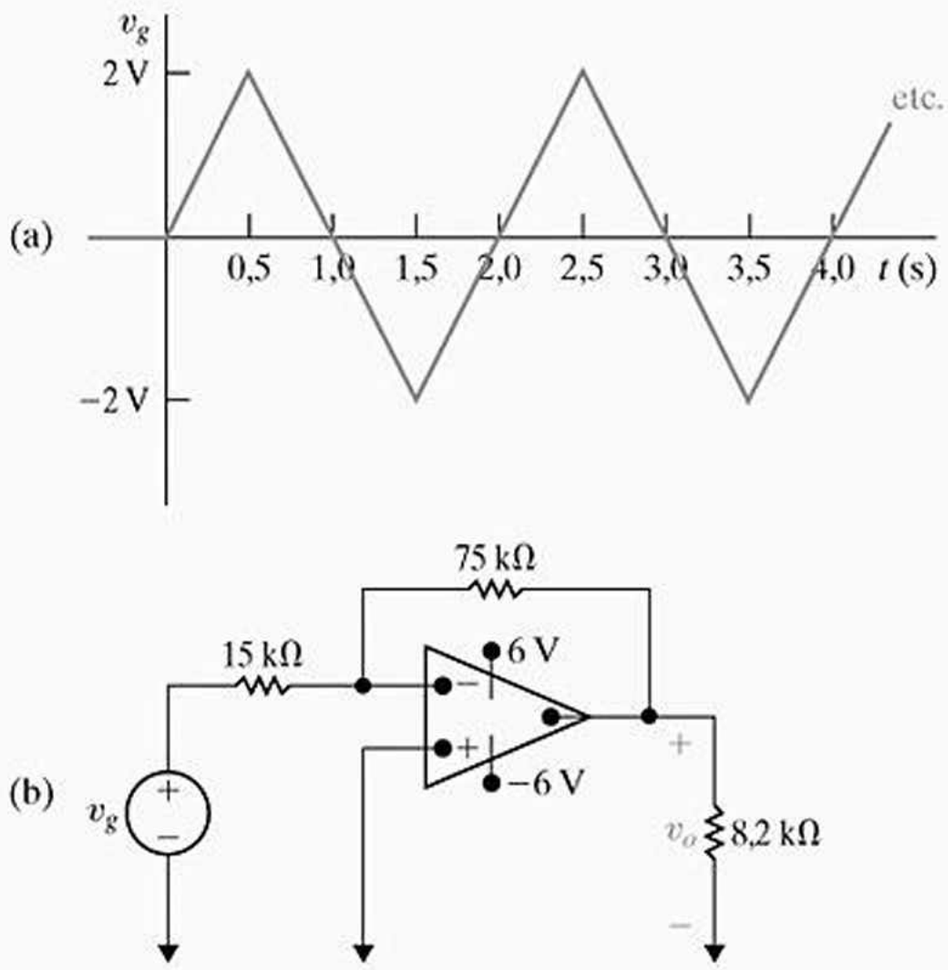
Desenhe um gráfico de v_o *versus* t, supondo que o amp op seja ideal.

Figura P5.40



5.41 PSPICE A tensão v_g mostrada na Figura P5.41(a) é aplicada ao amplificador inversor da Figura P5.41(b). Desenhe um gráfico de v_o *versus* t, supondo que o amp op seja ideal.

Figura P5.41



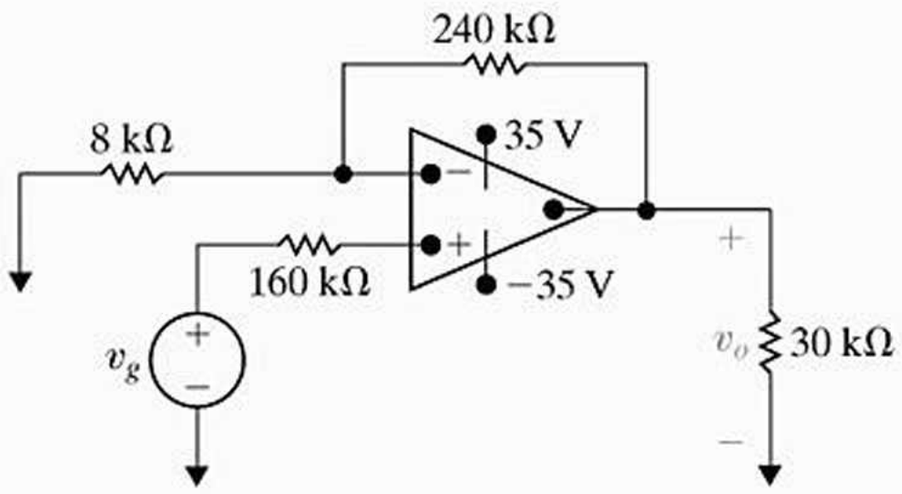
Seção 5.7

5.42* PSPICE Repita o Problema para Avaliação 5.6, considerando que o amplificador inversor esteja carregado com um resistor de 500 Ω.

5.43* PSPICE O amp op no circuito amplificador não-inversor da Figura P5.43 tem uma resistência de entrada de 440 kΩ, uma resistência de saída de 5 kΩ e um ganho de malha aberta de 100.000. Suponha que o amp op esteja operando em sua região linear.

a) Calcule o ganho de tensão (v_o / v_g).
b) Determine as tensões de entrada inversora e não-inversora, v_n e v_p (em milivolts), se v_g = 1 V.
c) Calcule a diferença ($v_p - v_n$) em microvolts quando v_g = 1 V.
d) Determine a corrente, em picoampères, da fonte de tensão, quando v_g = 1 V.
e) Repita (a)–(d) admitindo um amp op ideal.

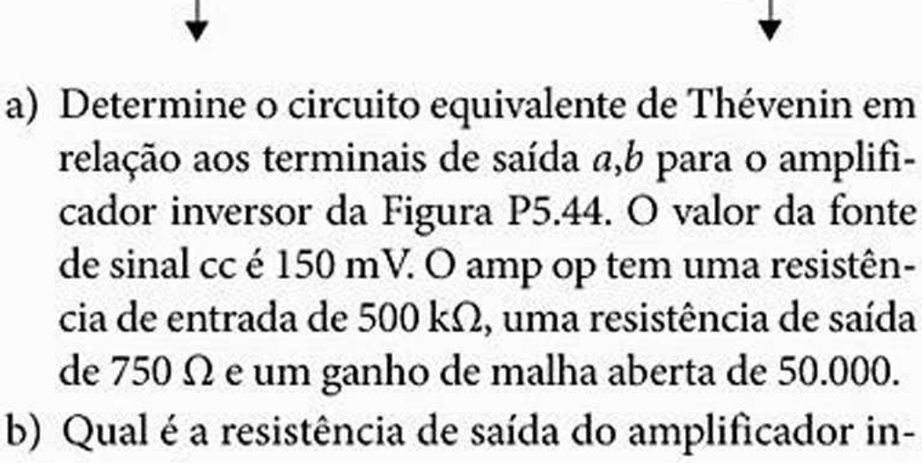
Figura P5.43



5.44 PSPICE a) Determine o circuito equivalente de Thévenin em relação aos terminais de saída *a*,*b* para o amplificador inversor da Figura P5.44. O valor da fonte de sinal cc é 150 mV. O amp op tem uma resistência de entrada de 500 kΩ, uma resistência de saída de 750 Ω e um ganho de malha aberta de 50.000.

b) Qual é a resistência de saída do amplificador inversor?
c) Qual é a resistência (em ohms) vista pela fonte v_s quando a carga nos terminais *a*,*b* é 150 Ω?

Figura P5.44

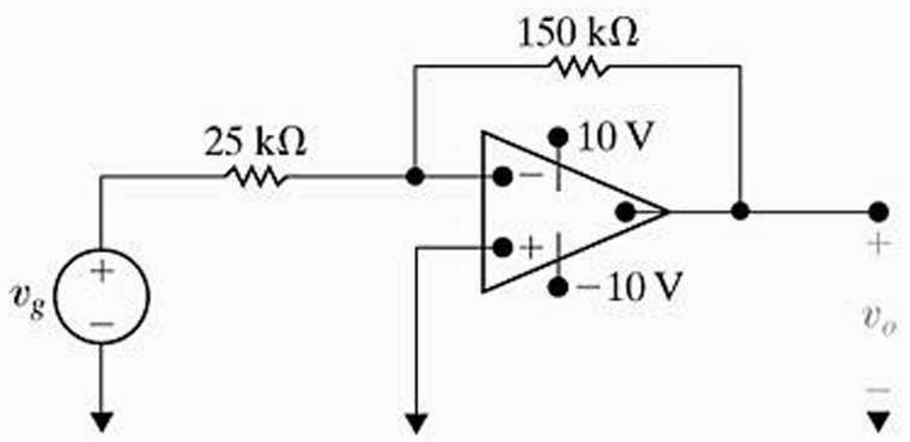


5.45 PSPICE Repita o Problema 5.44 admitindo um amp op ideal.

5.46 PSPICE Suponha que a resistência de entrada do amp op da Figura P5.46 seja infinita e que sua resistência de saída seja zero.

a) Determine v_o como uma função de v_g e o ganho de malha aberta *A*.
b) Qual é o valor de v_o se v_g = 0,5 V e *A* = 150?
c) Qual é o valor de v_o se v_g = 0,5 V e *A* = ∞?
d) Qual deve ser o valor de *A* para que v_o tenha 98% de seu valor em (c)?

Figura P5.46



5.47 Deduza a Equação 5.60.

Seções 5.1–5.7

5.48* PERSPECTIVA PRÁTICA Suponha que o valor dos extensômetros na ponte da Figura 5.18 seja 120 Ω ±1%. A fonte de alimentação do amp op fornece ±15 V e a tensão de referência, v_{ref}, é o valor positivo da fonte de alimentação.

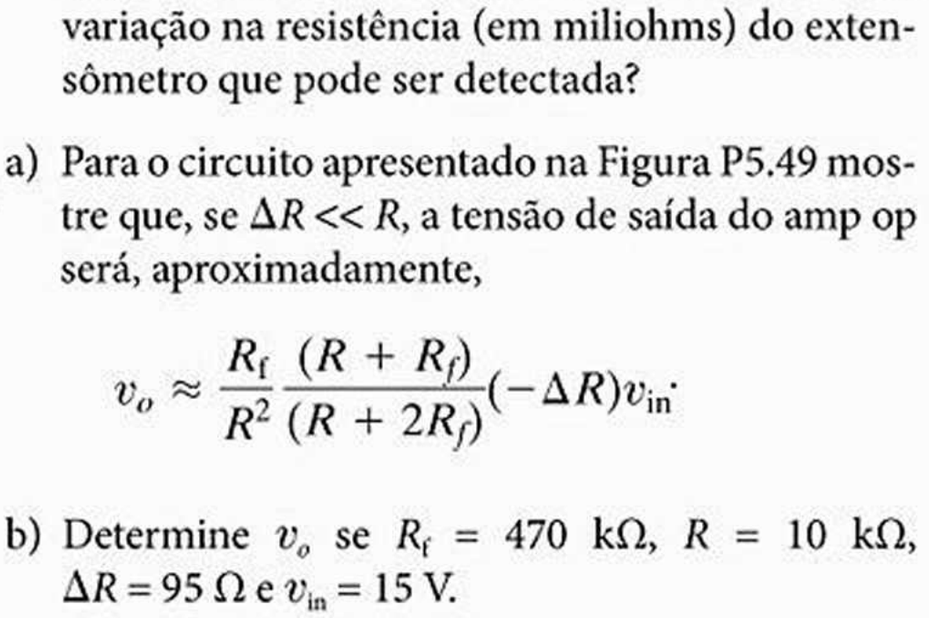
a) Calcule o valor de R_f de modo que, quando o extensômetro alcançar seu comprimento máximo, a tensão de saída seja 5 V.
b) Suponha que podemos medir com precisão variações de 50 mV na tensão de saída. Qual é a variação na resistência (em miliohms) do extensômetro que pode ser detectada?

5.49 PERSPECTIVA PRÁTICA PSPICE a) Para o circuito apresentado na Figura P5.49 mostre que, se $\Delta R << R$, a tensão de saída do amp op será, aproximadamente,

$$v_o \approx \frac{R_f}{R^2}\frac{(R + R_f)}{(R + 2R_f)}(-\Delta R)v_{in}.$$

b) Determine v_o se R_f = 470 kΩ, *R* = 10 kΩ, ΔR = 95 Ω e v_{in} = 15 V.
c) Determine o valor real de v_o em (b).

Figura P5.49



5.50 PERSPECTIVA PRÁTICA PSPICE a) Se o erro percentual for definido como

$$\%\ \text{erro} = \left[\frac{\text{valor aproximado}}{\text{valor real}} - 1\right] \times 100$$

mostre que o erro percentual na aproximação de v_o no Problema 5.49 é

$$\%\ \text{erro} = \frac{\Delta R}{R}\frac{(R + R_f)}{(R + 2R_f)} \times 100.$$

b) Calcule o erro percentual de v_o para o Problema 5.49.

5.51 PERSPECTIVA PRÁTICA PSPICE Suponha que o erro percentual na aproximação de v_o no circuito da Figura P5.49 não deva exceder 1%. Qual é a maior variação percentual em R que pode ser tolerada?

5.52 PERSPECTIVA PRÁTICA PSPICE Suponha que o resistor no ramo variável do circuito da ponte da Figura P5.49 seja $R - \Delta R$.

a) Qual é a expressão para v_o se $\Delta R << R$?

b) Qual é a expressão para o erro percentual de v_o em função de R, R_f e ΔR?

c) Suponha que a resistência no braço variável do circuito da ponte da Figura P5.49 seja 9.810 Ω e que os valores de R, R_f e v_{in} sejam iguais aos do Problema 5.49(b). Qual é o valor aproximado de v_o?

d) Qual é o erro percentual na aproximação de v_o quando a resistência no braço variável é 9.810 Ω?

CAPÍTULO

6

Indutância, capacitância e indutância mútua

SUMÁRIO DO CAPÍTULO

6.1 **Indutor**
6.2 **Capacitor**
6.3 **Combinações de indutância e capacitância em série e em paralelo**
6.4 **Indutância mútua**
6.5 **Um exame mais detalhado da indutância mútua**

✔ OBJETIVOS DO CAPÍTULO

1 Conhecer e saber usar as equações para tensão, corrente, potência e energia em um indutor; entender como um indutor se comporta na presença de corrente constante e o requisito de que a corrente deve ser função contínua em um indutor.

2 Conhecer e saber usar as equações para tensão, corrente, potência e energia em um capacitor; entender como um capacitor se comporta na presença de tensão constante e o requisito de que a tensão deve ser função contínua em um capacitor.

3 Saber combinar indutores com condições iniciais em série e em paralelo para formar um único indutor equivalente com uma condição inicial; saber combinar capacitores com condições iniciais em série e em paralelo para formar um único capacitor equivalente com uma condição inicial.

4 Entender o conceito básico de indutância mútua e saber escrever equações de corrente de malha para um circuito que contém enrolamentos acoplados magneticamente, usando de maneira correta a convenção do ponto.

Iniciamos este capítulo apresentando os últimos dois elementos ideais de circuito mencionados no Capítulo 2, a saber, indutores e capacitores. Pode ter certeza de que as técnicas de análise de circuitos apresentadas nos capítulos 3 e 4 se aplicam a circuitos que contêm indutores e capacitores. Portanto, tão logo você entenda o comportamento terminal desses elementos em termos de corrente e tensão, poderá usar as leis de Kirchhoff para descrever quaisquer interligações com os demais elementos básicos. Como outros componentes, indutores e capacitores são mais fáceis de descrever em termos de variáveis de circuito do que de variáveis eletromagnéticas. Contudo, antes de focalizarmos a descrição de circuitos, é bom fazer uma breve revisão dos conceitos de campo subjacentes a esses elementos básicos.

Um indutor é um componente elétrico que se opõe a qualquer alteração na corrente elétrica. É composto de um condutor em espiral, enrolado em um núcleo de suporte cujo material pode ser magnético ou não-magnético. O comportamento dos indutores é baseado nos fenômenos associados a campos magnéticos. A fonte do campo magnético são cargas em movimento, ou corrente elétrica. Se a corrente variar com o tempo, o campo magnético variará com o tempo. Um campo magnético que varia com o tempo induz uma tensão em qualquer condutor imerso no campo. O parâmetro *indutância* relaciona a tensão induzida com a corrente. Discutiremos essa relação quantitativa na Seção 6.1.

Um capacitor é um componente elétrico que consiste em dois condutores separados por um material isolante ou dielétrico. O capacitor é o único dispositivo, exceto a bateria, que pode armazenar carga elétrica. O comportamento dos capacitores é baseado em fenômenos associados a campos elétricos. A fonte do campo elétrico é a separação de cargas, ou tensão. Se a tensão variar com o tempo, o campo elétrico variará com o tempo. Um campo elétrico que varia com o tempo produz uma corrente de deslocamento no espaço onde existe o campo. O parâmetro *capacitância* relaciona a corrente de deslocamento à tensão, em que a corrente de deslocamento é igual à corrente de condução nos terminais do capacitor.

Discutiremos essa relação quantitativa na Seção 6.2.

Perspectiva prática

Interruptores de proximidade

Os dispositivos elétricos que usamos em nossa vida diária contêm muitos interruptores. A maioria deles é mecânica, como o utilizado na lanterna apresentada no Capítulo 2. Interruptores mecânicos utilizam um acionador que é empurrado, puxado, deslizado ou girado, fazendo com que dois pedaços de metal condutor se toquem e criem um curto-circuito. Às vezes, os projetistas preferem usar interruptores sem peças móveis para aumentar a segurança,

a confiabilidade, a conveniência ou a novidade de seus produtos. Tais interruptores são denominados interruptores de proximidade. Eles podem empregar uma variedade de tecnologias de sensores. Por exemplo, algumas portas de elevador ficam abertas sempre que um feixe de luz é interrompido.

Outra tecnologia de sensores utilizada em interruptores de proximidade detecta a presença de pessoas pela distorção que elas causam em campos elétricos. Esse tipo de interruptor de proximidade é utilizado em algumas lâmpadas de mesa que ligam e desligam quando tocadas e em botões de elevador sem partes móveis. O interruptor tem como base um capacitor. Como você está prestes a descobrir neste capítulo, o capacitor é um elemento de circuito cujas características terminais são determinadas por campos elétricos. Ao tocar em um interruptor capacitivo de proximidade, você produz uma alteração no valor de um capacitor, provocando uma variação na tensão, o que ativa o interruptor. O projeto de um interruptor capacitivo sensível ao toque é o tópico do exemplo da "Perspectiva prática" ao final deste capítulo.

A Seção 6.3 descreve técnicas utilizadas para simplificar circuitos com combinações de capacitores ou indutores em série ou em paralelo.

A energia pode ser armazenada em campos magnéticos, bem como elétricos. Conseqüentemente, você não deve ficar muito surpreso ao saber que indutores e capacitores são capazes de armazenar energia. Por exemplo, a energia pode ser armazenada em um indutor e, então, fornecida para uma vela de ignição. Ela pode ser armazenada em um capacitor e, então, fornecida para acender um flash de máquina fotográfica. Em indutores e capacitores ideais, a quantidade de energia por eles fornecida tem de ser igual à energia neles armazenada. Como indutores e capacitores não podem gerar energia, são classificados como *elementos passivos.*

Nas seções 6.4 e 6.5 consideramos a situação em que dois circuitos estão ligados por um campo magnético e, por isso, são denominados magneticamente acoplados. Nesse caso, a tensão induzida no segundo circuito pode ser relacionada à corrente que varia com o tempo no primeiro circuito por um parâmetro conhecido como *indutância mútua.* O significado prático do acoplamento magnético se revela ao estudarmos as relações entre corrente, tensão, potência e vários novos parâmetros específicos da indutância mútua. Aqui, apresentaremos essas relações e, nos capítulos 9 e 10, descreveremos sua utilidade em um dispositivo denominado transformador.

6.1 Indutor

A indutância é o parâmetro de circuito utilizado para descrever um indutor. Ela é simbolizada pela letra L, é medida em henrys (H) e é representada graficamente como uma espiral — para lembrar que a indutância é uma conseqüência de um condutor imerso em um campo magnético. A Figura 6.1(a) mostra um indutor. Atribuir a direção de referência da corrente na direção da queda de tensão nos terminais do indutor, como mostra a Figura 6.1(b), resulta em

$$v = L\frac{di}{dt}, \tag{6.1}$$

(A equação v – i do indutor)

onde v é medida em volts, L, em henrys, i, em ampères e t, em segundos. A Equação 6.1 reflete a convenção passiva mostrada na Figura 6.1(b); isto é, a referência de corrente está na direção da queda de tensão no indutor. Se a referência de corrente estiver na direção da elevação de tensão, a Equação 6.1 é escrita com um sinal de menos.

Observe, pela Equação 6.1, que a tensão nos terminais de um indutor é proporcional à variação temporal da corrente no indutor. Aqui, podemos fazer duas observações importantes. A primeira é que, se a corrente for constante, a tensão no indutor ideal é zero. Assim, o indutor se comporta como um curto-circuito na presença de uma corrente constante, ou cc. A segunda é que a corrente não pode variar instantaneamente em um indutor; isto é, a corrente não pode variar por uma quantidade finita em tempo zero. A Equação 6.1 nos diz que essa variação exigiria uma tensão infinita, e tensões infinitas não são possíveis. Por exemplo, quando alguém abre o interruptor em um circuito indutivo de um sistema real, inicialmente a corrente continua a fluir no ar pelo interruptor, um fenômeno denominado *centelhamento.* A centelha que passa pelo interruptor evita que a corrente caia a zero instantaneamente. Circuitos interruptores indutivos são um importante problema de engenharia porque o centelhamento e os surtos de tensão associados têm de ser controlados para evitar danos ao equipamento. O primeiro passo para entender a natureza desse problema é dominar o material introdutório apresentado neste capítulo e nos dois capítulos seguintes. O Exemplo 6.1 ilustra a aplicação da Equação 6.1 a um circuito simples.

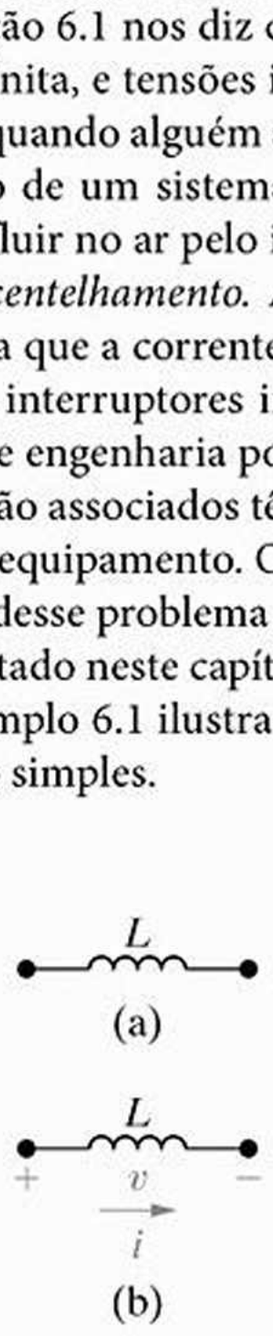


Figura 6.1 ▲ (a) Símbolo gráfico para um indutor com uma indutância de L henrys. (b) Atribuição de tensão e corrente de referência ao indutor conforme a convenção passiva.

Exemplo 6.1 Determinação da tensão, dada a corrente, nos terminais de um indutor

A fonte independente de corrente no circuito mostrado na Figura 6.2 gera corrente zero para $t < 0$ e um pulso $10te^{-5t}$A para $t > 0$.

a) Faça um gráfico da forma de onda da corrente.

b) Em qual instante de tempo a corrente é máxima?

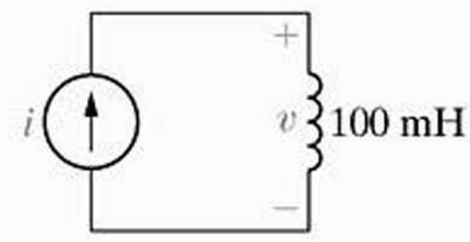
c) Expresse a tensão nos terminais do indutor de 100 mH em função do tempo.

d) Faça um gráfico da forma de onda da tensão.

e) A tensão e a corrente são máximas ao mesmo tempo?

f) Em qual instante de tempo a tensão muda de polaridade?

g) Há, alguma vez, uma variação instantânea de tensão no indutor? Se houver, em que instante ocorre?



$i = 0, \quad t < 0$

$i = 10te^{-5t}\text{A}, \quad t > 0$

Figura 6.2 ▲ Circuito para o Exemplo 6.1.

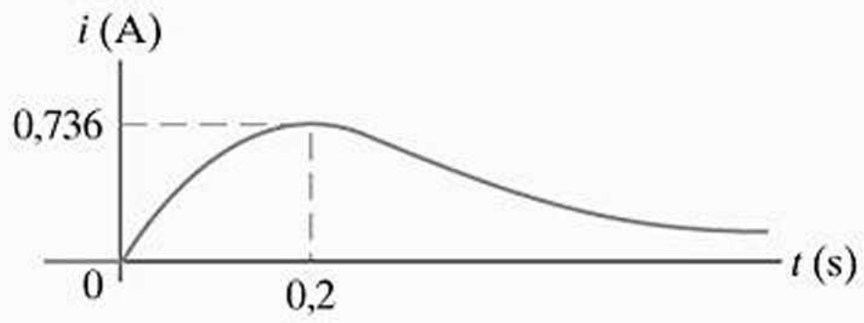


Figura 6.3 ▲ Forma de onda da corrente para o Exemplo 6.1.

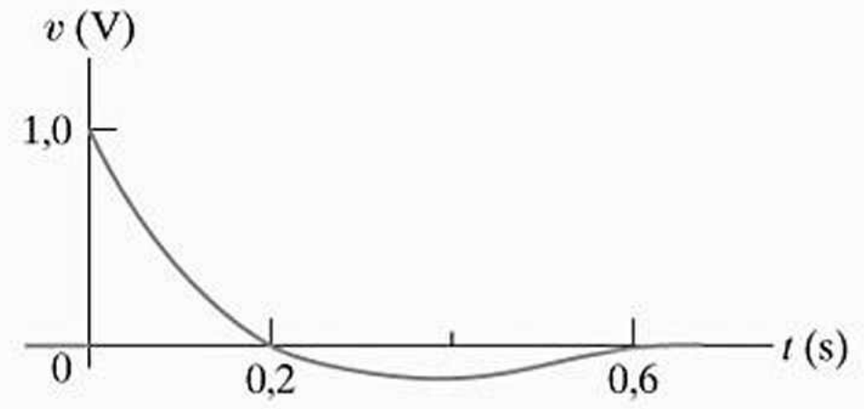


Figura 6.4 ▲ Forma de onda da tensão para o Exemplo 6.1.

Solução

a) A Figura 6.3 mostra a forma de onda da corrente.

b) $d_i/d_t = 10(-5te^{-5t} + e^{-5t}) = 10e^{-5t}(1 - 5t)$ A/s; $di/dt = 0$ quando $t = 0{,}2$ s. (Veja a Figura 6.3.)

c) $v = Ldi/dt = (0{,}1)10e^{-5t}(1 - 5t) = e^{-5t}(1 - 5t)$ V, $t > 0$; $v = 0$, $t < 0$.

d) A Figura 6.4 mostra a forma de onda da tensão.

e) Não; a tensão é proporcional a di/dt, não a i.

f) Em 0,2 s, o que corresponde ao momento em que di/dt está passando pelo zero e mudando de sinal.

g) Sim, em $t = 0$. Observe que a tensão pode variar instantaneamente nos terminais de um indutor.

Corrente em um indutor em termos da tensão no indutor

A Equação 6.1 expressa a tensão nos terminais de um indutor em função da corrente no indutor. É também desejável ser capaz de expressar a corrente em função da tensão. Para determinar i em função de v, começamos multiplicando ambos os lados da Equação 6.1 por um tempo diferencial dt:

$$v\,dt = L\left(\frac{di}{dt}\right)dt. \tag{6.2}$$

Multiplicar a taxa de variação de i em relação a t por uma variação diferencial no tempo gera uma variação diferencial em i, portanto escrevemos a Equação 6.2 como

$$v\,dt = L\,di. \tag{6.3}$$

Em seguida, integramos ambos os lados da Equação 6.3. Por conveniência, trocamos os dois lados da equação e escrevemos

$$L\int_{i(t_0)}^{i(t)} dx = \int_{t_0}^{t} v\,d\tau \tag{6.4}$$

Observe que usamos x e τ como as variáveis de integração, ao passo que i e t tornam-se limites nas integrais. Então, pela Equação 6.4,

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,d\tau + i(t_0), \tag{6.5}$$

(A equação *v* – i do indutor)

onde $i(t)$ é a corrente correspondente a t e $i(t_0)$ é o valor da corrente do indutor quando iniciamos a integração, a saber, t_0. Em muitas aplicações práticas, t_0 é zero, e a Equação 6.5 se torna

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{0}^{t} v\,d\tau + i(0) \tag{6.6}$$

Ambas as equações 6.1 e 6.5 apresentam a relação entre a tensão e a corrente nos terminais de um indutor. A Equação 6.1 expressa a tensão em função da corrente, ao passo que a Equação 6.5 expressa a corrente em função da tensão. Em ambas as equações, a direção de referência para a corrente está na direção da queda de tensão nos terminais. Observe que $i(t_0)$ tem o próprio sinal algébrico. Se a direção da corrente inicial for a mesma da direção de referência para i, ela é uma quantidade positiva. Se a corrente inicial estiver na direção oposta, ela é uma quantidade negativa. O Exemplo 6.2 ilustra a aplicação da Equação 6.5.

Exemplo 6.2 Determinação da corrente, dada a tensão, nos terminais de um indutor

O pulso de tensão aplicado ao indutor de 100 mH mostrado na Figura 6.5 é 0 para $t < 0$ e é dado pela expressão

$$v(t) = 20te^{-10t}\ \text{V}$$

para $t > 0$. Admita também que $i = 0$ para $t \leq 0$.

a) Faça um gráfico da tensão em função do tempo.

b) Determine a corrente no indutor em função do tempo.

c) Faça um gráfico da corrente em função do tempo.

Solução

a) A tensão em função do tempo é mostrada na Figura 6.6.

b) A corrente no indutor é 0 em $t = 0$. Portanto, a corrente para $t > 0$ é

$$i = \frac{1}{0{,}1}\int_0^t 20\tau e^{-10\tau}d\tau + 0$$

$$= 200\left[\frac{-e^{-10\tau}}{100}(10\tau + 1)\right]\Bigg|_0^t,$$

$$= 2(1 - 10te^{-10t} - e^{-10t})\ \text{A}, \qquad t > 0.$$

c) A Figura 6.7 mostra a corrente em função do tempo.

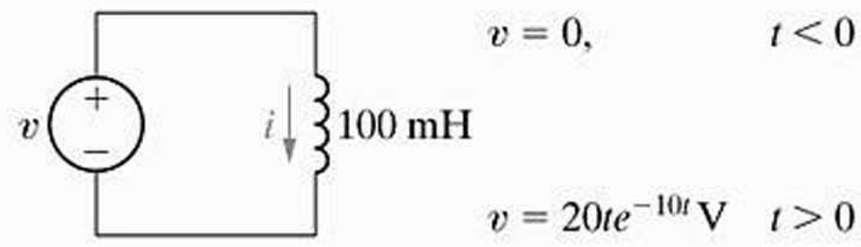


Figura 6.5 ▲ Circuito para o Exemplo 6.2.

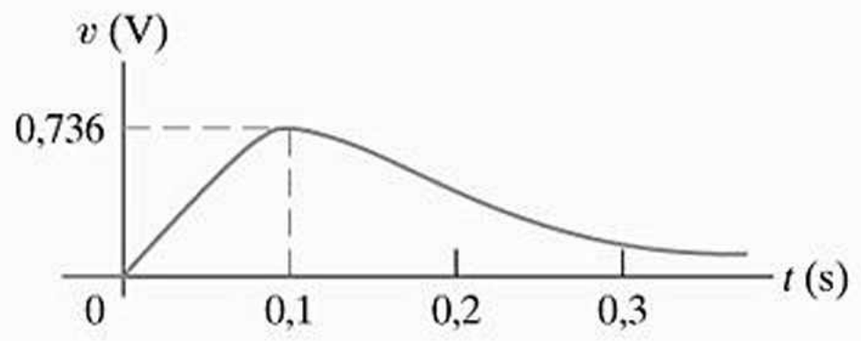


Figura 6.6 ▲ Forma de onda da tensão para o Exemplo 6.2.

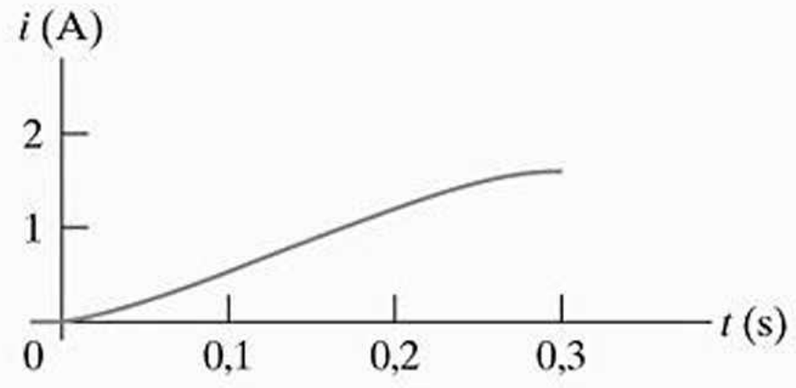


Figura 6.7 ▲ Forma de onda da corrente para o Exemplo 6.2.

Observe, no Exemplo 6.2, que i se aproxima de um valor constante de 2 A à medida que t aumenta. Falaremos mais sobre esse resultado após discutirmos a energia armazenada em um indutor.

Potência e energia no indutor

As relações entre potência e energia para um indutor podem ser deduzidas diretamente das relações entre corrente e tensão. Se a referência de corrente estiver na direção da queda de tensão nos terminais do indutor, a potência é

$$p = vi. \tag{6.7}$$

Lembre-se de que a potência está em watts, a tensão, em volts e a corrente, em ampères. Se expressarmos a tensão do indutor em função da corrente do indutor, a Equação 6.7 torna-se

$$p = Li\frac{di}{dt}. \tag{6.8}$$

(Potência em um indutor)

Também podemos expressar a corrente em termos da tensão:

$$p = v\left[\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\,d\tau + i(t_0)\right]. \tag{6.9}$$

A Equação 6.8 é útil para expressar a energia armazenada no indutor. Potência é a taxa de variação da energia em relação ao tempo, portanto

$$p = \frac{dw}{dt} = Li\frac{di}{dt}. \tag{6.10}$$

Multiplicando ambos os lados da Equação 6.10 por um tempo diferencial, obtemos a relação diferencial

$$dw = Li\,di. \tag{6.11}$$

Ambos os lados da Equação 6.11 são integrados, subentendendo-se que a referência para energia zero corresponde a uma corrente zero no indutor. Assim,

$$\int_0^w dx = L\int_0^i y\,dy,$$

$$w = \frac{1}{2}Li^2. \tag{6.12}$$

(Energia em um indutor)

Como antes, usamos símbolos diferentes para as variáveis de integração a fim de evitar confusão com os limites das integrais. Na Equação 6.12, a energia está em joules, a indutância, em henrys e a corrente, em ampères. Para ilustrar a aplicação das equações 6.7 e 6.12, voltamos aos exemplos 6.1 e 6.2 por meio do Exemplo 6.3.

Exemplo 6.3 Determinação da corrente, tensão, potência e energia para um indutor

a) Faça gráficos de i, v, p e w em função do tempo para o Exemplo 6.1. Alinhe os gráficos na vertical para permitir uma fácil avaliação do comportamento de cada variável.

b) Em qual intervalo de tempo a energia está sendo armazenada no indutor?

c) Em qual intervalo de tempo a energia está sendo extraída do indutor?

d) Qual é a máxima energia armazenada no indutor?

e) Calcule as integrais

$$\int_0^{0,2} p\,dt \qquad \text{e} \qquad \int_{0,2}^{\infty} p\,dt,$$

e comente seus significados.

f) Repita (a)–(c) para o Exemplo 6.2.

g) No Exemplo 6.2, por que há uma corrente finita no indutor à medida que a tensão se aproxima de zero?

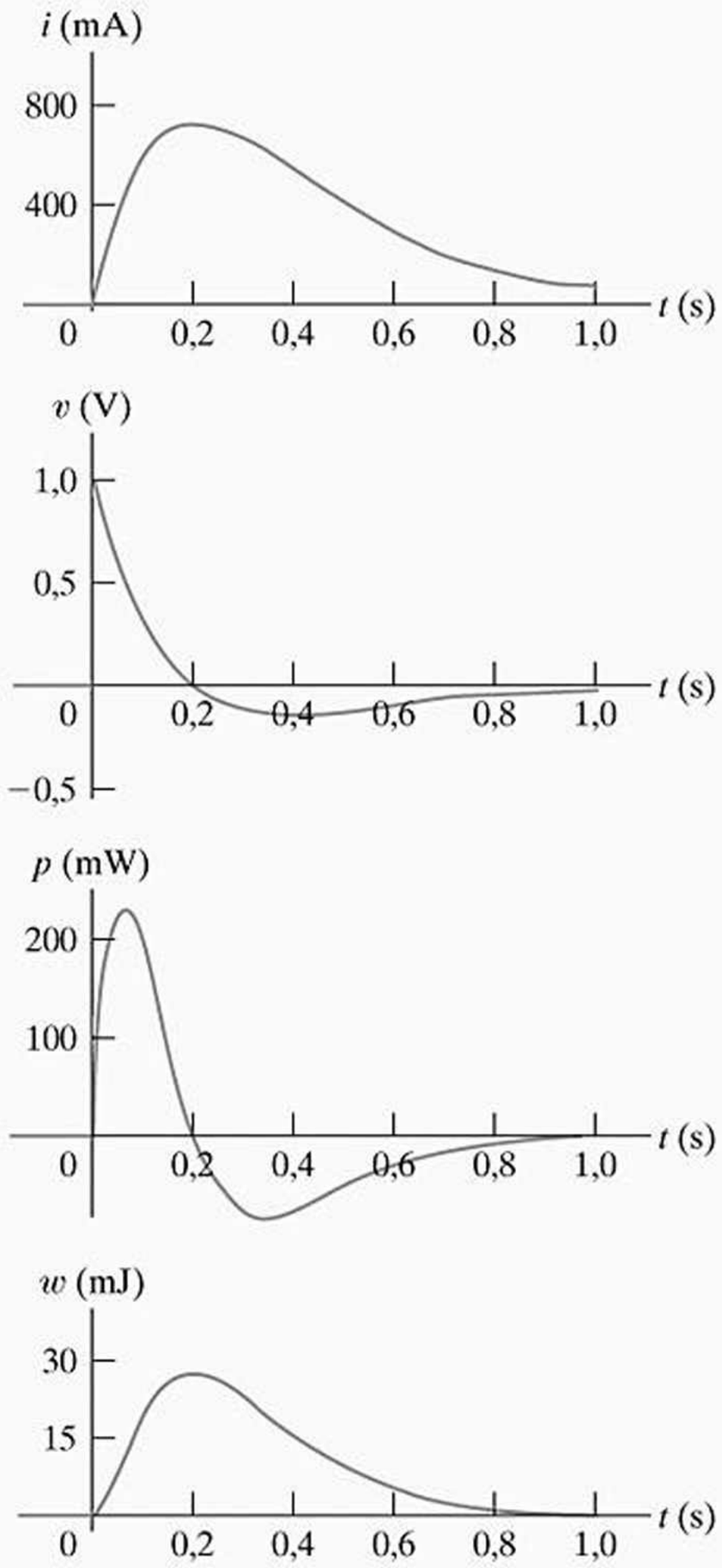


Figura 6.8 ▲ Variáveis i, v, p e w *versus* t para o Exemplo 6.1.

Solução

a) Os gráficos de i, v, p e w decorrem diretamente das expressões para i e v obtidas no Exemplo 6.1 e são mostrados na Figura 6.8. Em particular, $p = vi$ e $w = (1/2)Li^2$.

b) Uma inclinação positiva na curva de energia indica que energia está sendo armazenada. Assim, a energia está sendo armazenada no intervalo de tempo 0 a 0,2 s. Observe que isso corresponde ao intervalo em que $p > 0$.

c) Uma inclinação negativa na curva de energia indica que energia está sendo extraída. Assim, a energia está sendo extraída no intervalo de tempo 0,2 s a ∞. Observe que isso corresponde ao intervalo em que $p < 0$.

d) Pela Equação 6.12, vemos que a energia está em um máximo quando a corrente está em um máximo; um breve exame dos gráficos confirma isso. Pelo Exemplo 6.1, a corrente máxima é 0,736 A. Portanto, $w_{máx} = 27{,}07$ mJ.

e) Pelo Exemplo 6.1,

$$i = 10te^{-5t}\ \text{A} \qquad \text{e} \qquad v = e^{-5t}(1 - 5t)\ \text{V}.$$

Portanto,

$$p = vi = 10te^{-10t} - 50t^2e^{-10t}\ \text{W}.$$

Assim,

$$\int_0^{0,2} p\,dt = 10\left[\frac{e^{-10t}}{100}(-10t - 1)\right]_0^{0,2} - 50\left\{\frac{t^2e^{-10t}}{-10} + \frac{2}{10}\left[\frac{e^{-10t}}{100}(-10t - 1)\right]\right\}_0^{0,2}$$

$$= 0{,}2e^{-2} = 27{,}07\ \text{mJ},$$

$$\int_{0,2}^{\infty} p\,dt = 10\left[\frac{e^{-10t}}{100}(-10t - 1)\right]_{0,2}^{\infty} - 50\left\{\frac{t^2e^{-10t}}{-10} + \frac{2}{10}\left[\frac{e^{-10t}}{100}(-10t - 1)\right]\right\}_{0,2}^{\infty}$$

$$= -0{,}2e^{-2} = -27{,}07\ \text{mJ}.$$

Com base na definição de p, a área sob a curva de p *versus* t representa a energia fornecida ou consumida no intervalo de integração. Assim, a integração da potência entre 0 e 0,2 s representa a energia armazenada no indutor durante esse intervalo de tempo. A integral de p no intervalo 0,2 s $-\infty$ é a energia fornecida pelo indutor. Observe que, nesse intervalo de tempo, toda a energia armazenada antes é fornecida; isto é, após a passagem do pico de corrente, nenhuma energia está armazenada no indutor.

f) Os gráficos de v, i, p e w decorrem diretamente das expressões para v e i dadas no Exemplo 6.2 e são mostrados na Figura 6.9. Observe que, nesse caso, a potência é sempre positiva e, por conseguinte, a energia está sempre sendo armazenada durante o pulso de tensão.

g) A aplicação do pulso de tensão faz com que a energia seja armazenada no indutor. Como o indutor é ideal, essa energia não pode ser dissipada após a tensão cair a zero. Portanto, uma corrente persistente circula no circuito. É óbvio que um indutor sem perda é um elemento ideal de circuito. O modelo de circuito de indutores reais requer, além do indutor, um resistor. (Voltaremos a falar sobre isso.)

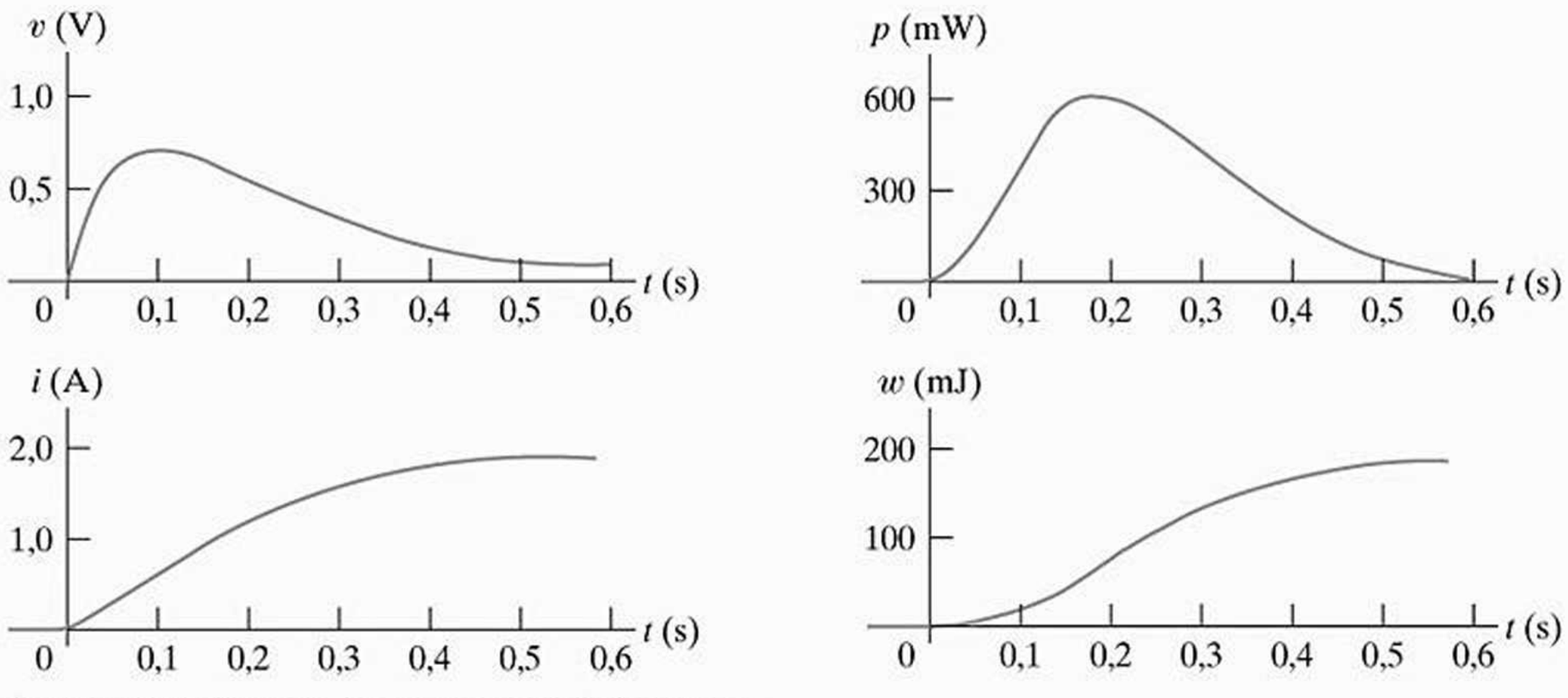


Figura 6.9 ▲ Variáveis v, i, p e w *versus* t para o Exemplo 6.2.

✔ PROBLEMA PARA AVALIAÇÃO

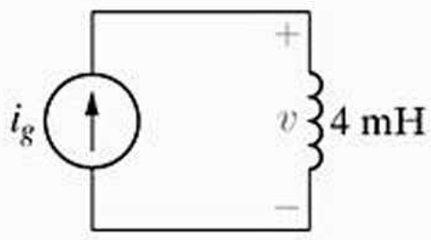
Objetivo 1 — Conhecer e saber usar as equações para tensão, corrente, potência e energia em um indutor

6.1 A fonte de corrente no circuito mostrado gera o pulso de corrente

$$i_g(t) = 0 \qquad t < 0,$$

$$i_g(t) = 8e^{-300t} - 8e^{-1.200t}\,\text{A} \qquad t \geq 0.$$

Determine (a) $v(0)$; (b) o instante de tempo, maior do que zero, em que a tensão v passa por zero; (c) a expressão para a potência fornecida ao indutor; (d) o instante em que a potência fornecida ao indutor é máxima; (e) a potência máxima; (f) o instante em que a energia armazenada é máxima e (g) a máxima energia armazenada no indutor.



Resposta: (a) 28,8 V;
(b) 1,54 ms;
(c) $-76{,}8e^{-600t} + 384e^{-1.500t} - 307{,}2e^{-2.400t}$ W, $t \geq 0$;
(d) 411,05 μs;
(e) 32,72 W;
(f) 1,54 ms;
(g) 28,57 mJ.

NOTA: Tente resolver também os problemas 6.1 e 6.3, apresentados no final deste capítulo.

6.2 Capacitor

O parâmetro capacitância é representado pela letra *C*, medido em farads (F) e seu símbolo gráfico são duas placas condutoras curtas e paralelas, como mostra a Figura 6.10(a). Como o farad é uma quantidade de capacitância extremamente grande, na prática os valores de capacitores costumam encontrar-se na faixa de picofarad (pF) a microfarad (μF).

O símbolo gráfico para um capacitor nos lembra que a capacitância ocorre sempre que condutores elétricos estiverem separados por um material dielétrico ou isolante. Essa condição implica que a carga elétrica não seja transportada pelo capacitor. Embora a aplicação de uma tensão aos terminais do capacitor não possa movimentar uma carga pelo dielétrico, ela pode deslocar uma carga dentro dele. À medida que a tensão varia com o tempo, o deslocamento de carga também varia com o tempo, provocando a denominada *corrente de deslocamento*.

Nos terminais, a corrente de deslocamento é indistinguível de uma corrente de condução. A corrente é proporcional à taxa de variação temporal da tensão no capacitor ou, em termos matemáticos,

$$i = C\frac{dv}{dt}, \tag{6.13}$$

(Equação i – *v* do capacitor)

onde i é medida em ampères, C, em farads, v, em volts e t, em segundos.

A Equação 6.13 reflete a convenção passiva mostrada na Figura 6.10(b); isto é, a referência de corrente está na direção da queda de tensão no capacitor. Se a referência de corrente estiver na direção da elevação de tensão, a Equação 6.13 é escrita com um sinal negativo.

Duas importantes observações decorrem da Equação 6.13. A primeira é que a tensão não pode variar instantaneamente nos terminais de um capacitor. A Equação 6.13 indica que tal variação produziria uma corrente infinita, o que é uma impossibilidade física. A segunda é que, se a tensão nos terminais for constante, a corrente no capacitor é zero. A razão é que uma corrente de condução não pode ser estabelecida no material dielétrico do capacitor. Somente uma tensão que varie com o tempo pode produzir uma corrente de deslocamento. Assim, o capacitor se comporta como uma malha aberta na presença de uma tensão constante.

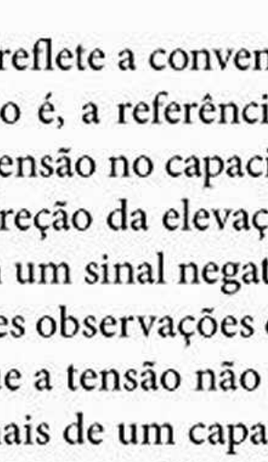


Figura 6.10 ▲ (a) Símbolo de circuito para um capacitor. (b) Atribuição de tensão e corrente de referência ao capacitor conforme a convenção passiva.

A Equação 6.13 expressa a corrente do capacitor em função da tensão em seus terminais. Expressar a tensão em função da corrente também é útil. Para fazer isso, multiplicamos ambos os lados da Equação 6.13 por um tempo diferencial dt e, então, integramos as diferenciais resultantes:

$$i\,dt = C\,dv \qquad \text{ou} \qquad \int_{v(t_0)}^{v(t)} dx = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,d\tau.$$

Executando a integração do lado esquerdo da segunda equação, temos

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,d\tau + v(t_0). \tag{6.14}$$

(Equação *v* – i do capacitor)

Em muitas aplicações práticas da Equação 6.14, o tempo inicial é zero; isto é, $t_0 = 0$. Assim, a Equação 6.14 torna-se

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i\,d\tau + v(0) \tag{6.15}$$

Podemos deduzir com facilidade as relações entre potência e energia para o capacitor. Pela definição de potência,

$$p = vi = Cv\frac{dv}{dt}, \tag{6.16}$$

(Equação de potência do capacitor)

ou

$$p = i\left[\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,d\tau + v(t_0)\right]. \tag{6.17}$$

Combinando a definição de energia com a Equação 6.16, obtemos

$$dw = Cv\,dv,$$

pela qual

$$\int_0^w dx = C\int_0^v y\,dy,$$

ou

$$w = \frac{1}{2}Cv^2. \tag{6.18}$$

(Equação de energia do capacitor)

Na derivação da Equação 6.18, a referência para energia zero corresponde à tensão zero.

Os exemplos 6.4 e 6.5 ilustram a aplicação das relações entre corrente, tensão, potência e energia para um capacitor.

Exemplo 6.4 Determinação da corrente, tensão, potência e energia para um capacitor

O pulso de tensão descrito pelas seguintes equações está aplicado nos terminais de um capacitor de 0,5 μF:

$$v(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0\,\text{s} \\ 4t\ \text{V} & 0\,\text{s} \leq t \leq 1\,\text{s}; \\ 4e^{-(t-1)}\ \text{V} & t \geq 1\,\text{s} \end{cases}$$

a) Deduza as expressões para a corrente, potência e energia do capacitor.

b) Faça os gráficos da tensão, corrente, potência e energia em função do tempo. Alinhe os gráficos na vertical.

c) Especifique o intervalo de tempo em que energia está sendo armazenada no capacitor.

d) Especifique o intervalo de tempo em que energia está sendo fornecida pelo capacitor.

e) Avalie as integrais

$$\int_0^1 p\,dt \quad \text{e} \quad \int_1^\infty p\,dt$$

e comente seus significados.

Solução

a) Pela Equação 6.13,

$$i = \begin{cases} (0{,}5 \times 10^{-6})(0) = 0, & t < 0\text{s}; \\ (0{,}5 \times 10^{-6})(4) = 2\,\mu\text{A}, & 0\,\text{s} < t < 1\,\text{s}; \\ (0{,}5 \times 10^{-6})(-4e^{-(t-1)}) = -2e^{-(t-1)}\,\mu\text{A}, & t > 1\,\text{s}. \end{cases}$$

A expressão para a potência é deduzida da Equação 6.16:

$$p = \begin{cases} 0, & t \leq 0\,\text{s}; \\ (4t)(2) = 8t\ \mu\text{W}, & 0\,\text{s} \leq t < 1\,\text{s}; \\ (4e^{-(t-1)})(-2e^{-(t-1)}) = -8e^{-2(t-1)}\,\mu\text{W}, & t > 1\,\text{s}. \end{cases}$$

A expressão para a energia decorre diretamente da Equação 6.18:

$$w = \begin{cases} 0 & t \leq 0\,\text{s}; \\ \frac{1}{2}(0{,}5)16t^2 = 4t^2\mu\text{J}, & 0\,\text{s} \leq t \leq 1\,\text{s}; \\ \frac{1}{2}(0{,}5)16e^{-2(t-1)} = 4e^{-2(t-1)}\,\mu\text{J}, & t \geq 1\,\text{s}. \end{cases}$$

b) A Figura 6.11 mostra a tensão, corrente, potência e energia em função do tempo.

c) A energia é armazenada no capacitor sempre que a potência for positiva. Por conseguinte, a energia é armazenada no intervalo 0 −1 s.

d) A energia é fornecida pelo capacitor sempre que a potência for negativa. Por conseguinte, a energia é fornecida para todo t maior do que 1 s.

e) A integral de $p\,dt$ é a energia associada ao intervalo de tempo correspondente aos limites da integral. Assim, a primeira integral representa a energia armazenada no capacitor entre 0 e 1 s, ao passo que a segunda integral representa a energia devolvida, ou fornecida, pelo capacitor no intervalo 1 s a ∞:

$$\int_0^1 p\,dt = \int_0^1 8t\,dt = 4t^2\Big|_0^1 = 4\,\mu\text{J},$$

$$\int_1^\infty p\,dt = \int_1^\infty (-8e^{-2(t-1)})dt = (-8)\frac{e^{-2(t-1)}}{-2}\Big|_1^\infty = -4\,\mu\text{J}.$$

A tensão aplicada ao capacitor volta a zero à medida que o tempo tende ao infinito, de tal forma que a energia devolvida por esse capacitor ideal deve ser igual à energia nele armazenada.

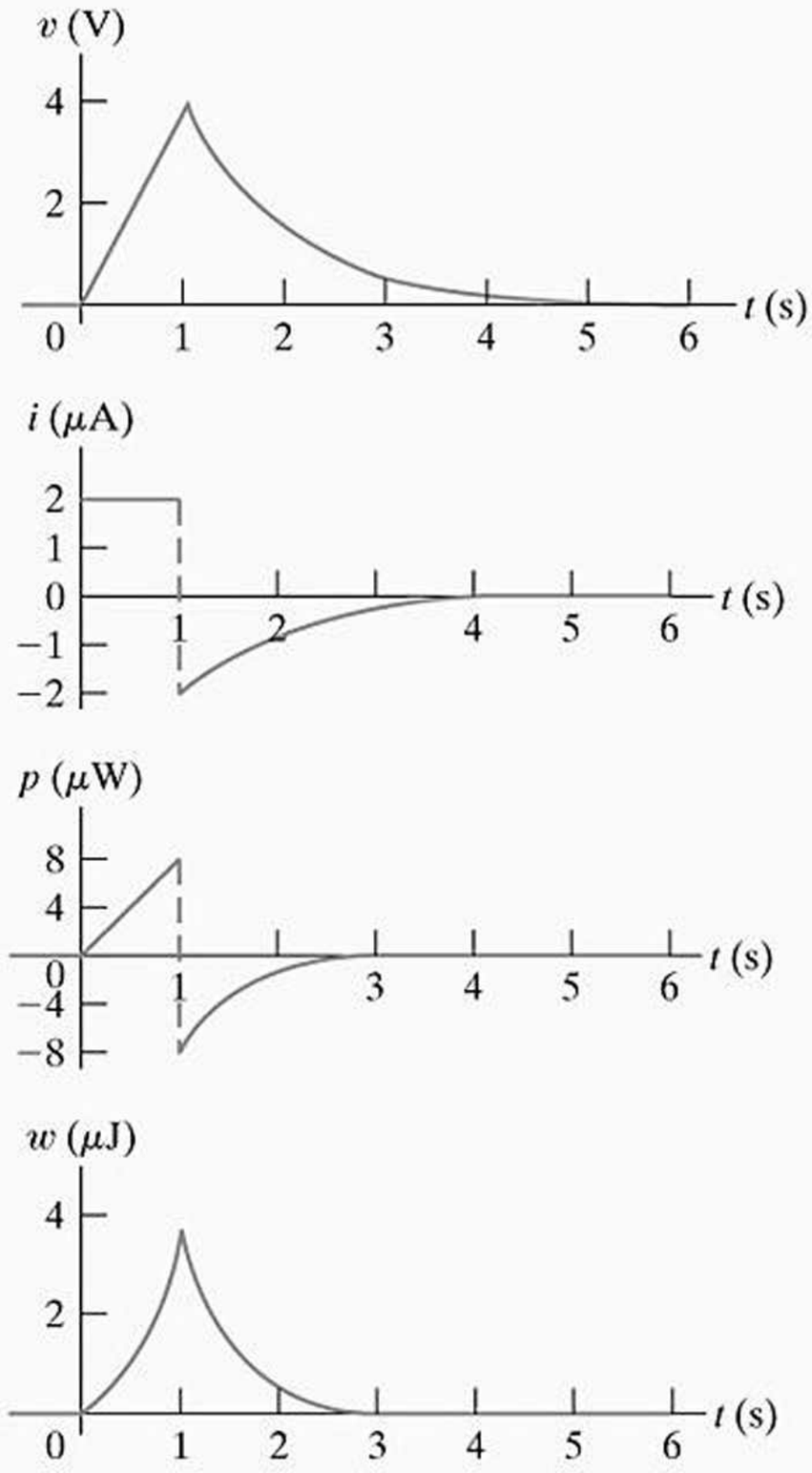


Figura 6.11 ▲ Variáveis v, i, p e w *versus* t para o Exemplo 6.4.

Exemplo 6.5 Determinação de v, p e w induzidas, num capacitor, por um pulso triangular de corrente

A um capacitor descarregado de 0,2 μF é aplicado um pulso de corrente de formato triangular. O pulso de corrente é descrito por

$$i(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0; \\ 5.000t\,\text{A}, & 0 \leq t \leq 20\ \mu\text{s}; \\ 0{,}2 - 5.000t\,\text{A}, & 20 \leq t \leq 40\ \mu\text{s}; \\ 0, & t \geq 40\ \mu\text{s}. \end{cases}$$

a) Deduza as expressões para a tensão, potência e energia no capacitor para cada um dos quatro intervalos de tempo necessários para descrever a corrente.

b) Faça os gráficos de i, v, p e w *versus* t. Alinhe os gráficos como especificado nos exemplos anteriores.

c) Por que continua a existir tensão no capacitor após a corrente voltar a zero?

Solução

a) Para $t \leq 0$, v, p e w são zero.

Para $0 \leq t \leq 20\ \mu$s,

$$v = 5 \times 10^6 \int_0^t (5.000\tau)\,d\tau + 0 = 12{,}5 \times 10^9 t^2\ \text{V},$$

$$p = vi = 62{,}5 \times 10^{12} t^3\ \text{W},$$

$$\omega = \frac{1}{2}Cv^2 = 15{,}625 \times 10^{12} t^4\ \text{J}.$$

Para $20\ \mu\text{s} \leq t \leq 40\ \mu$s,

$$v = 5 \times 10^6 \int_{20\mu\text{s}}^t (0{,}2 - 5.000\,\tau)\,d\tau + 5.$$

(Observe que 5 V é a tensão no capacitor ao final do intervalo anterior.) Então,

$$v = (10^6 t - 12{,}5 \times 10^9 t^2 - 10)\ \text{V},$$

$$p = vi,$$

$$= (62{,}5 \times 10^{12} t^3 - 7{,}5 \times 10^9 t^2 + 2{,}5 \times 10^5 t - 2)\ \text{W},$$

$$w = \frac{1}{2}Cv^2,$$

$$= (15{,}625 \times 10^{12} t^4 - 2{,}5 \times 10^9 t^3 + 0{,}125 \times 10^6 t^2 - 2t + 10^{-5})\ \text{J}.$$

Então, para $t \geq 40\,\mu$s,

$$v = 10\ \text{V}$$

$$p = vi = 0$$

$$w = \frac{1}{2}Cv^2 = 10\ \mu\text{J}.$$

b) A variação temporal da corrente e a tensão, potência e energia resultantes estão plotadas na Figura 6.12.

c) Observe que a potência é sempre positiva para a duração do pulso de corrente, o que significa que a energia está sendo armazenada continuamente no capacitor. Quando a corrente volta a zero, a energia armazenada permanece a mesma, porque o capacitor ideal não oferece nenhum meio para dissipá-la. Assim, uma tensão permanece nos terminais do capacitor após i voltar a zero.

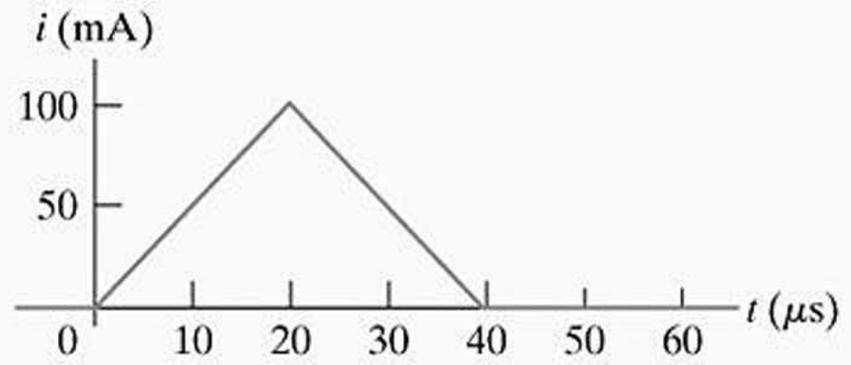
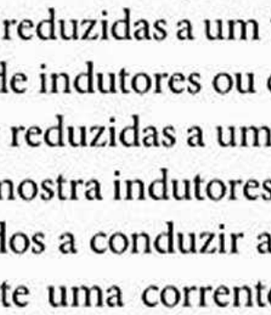


Figura 6.12 ▲ Variáveis i, v, p e w *versus* t para o Exemplo 6.5.

✔ PROBLEMAS PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 2 — Conhecer e saber usar as equações para tensão, corrente, potência e energia em um capacitor

6.2 A tensão nos terminais do capacitor de 0,6 μF mostrado na figura é 0 para $t < 0$ e $40e^{-15.000t}$ sen $30.000t$ V para $t \geq 0$. Determine (a) $i(0)$; (b) a potência fornecida ao capacitor em $t = \pi/80$ ms e (c) a energia armazenada no capacitor em $t = \pi/80$ ms.



Resposta: (a) 0,72 A;
(b) −649,2 mW;
(c) 126,13 μJ.

6.3 A corrente no capacitor do Problema para Avaliação 6.2 é 0 para $t < 0$ e 3 cos $50.000t$ A para $t \geq 0$. Determine (a) $v(t)$; (b) a máxima potência fornecida ao capacitor em qualquer instante do tempo e (c) a máxima energia armazenada no capacitor em qualquer instante do tempo.

Resposta: (a) 100 sen $50.000t$ V, $t \geq 0$;
(b) 150 W; (c) 3 mJ.

NOTA: Tente resolver também os problemas 6.14 e 6.15, apresentados no final deste capítulo.

6.3 Combinações de indutância e capacitância em série e em paralelo

Exatamente como combinações de resistores em série e em paralelo podem ser reduzidas a um único resistor equivalente, as combinações de indutores ou capacitores em série e em paralelo podem ser reduzidas a um único indutor ou capacitor. A Figura 6.13 mostra indutores em série. Nesse caso, os indutores são forçados a conduzir a mesma corrente; assim, definimos somente uma corrente para a combinação em série. As quedas de tensão nos indutores individuais são

$$v_1 = L_1\frac{di}{dt}, \qquad v_2 = L_2\frac{di}{dt} \qquad \text{e} \qquad v_3 = L_3\frac{di}{dt}.$$

A tensão nos terminais da ligação em série é

$$v = v_1 + v_2 + v_3 = (L_1 + L_2 + L_3)\frac{di}{dt},$$

do que deve ficar evidente que a indutância equivalente de indutores ligados em série é a soma das indutâncias individuais. Para n indutores em série,

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + L_3 + \cdots + L_n. \tag{6.19}$$

(Combinação de indutores em série)

Se os indutores originais conduzirem uma corrente inicial de $i(t_0)$, o indutor equivalente conduzirá a mesma corrente inicial. A Figura 6.14 mostra o circuito equivalente para indutores em série que conduzem uma corrente inicial.

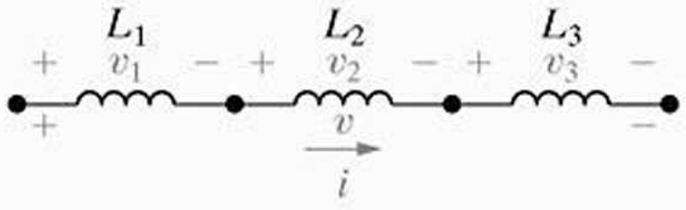


Figura 6.13 ▲ Indutores em série.

Indutores em paralelo têm a mesma tensão terminal. No circuito equivalente, a corrente em cada indutor é função da tensão terminal e da corrente inicial no indutor. Para os três indutores em paralelo mostrados na Figura 6.15, as correntes para os indutores individuais são

$$i_1 = \frac{1}{L_1}\int_{t_0}^{t} v\,d\tau + i_1(t_0),$$

$$i_2 = \frac{1}{L_2}\int_{t_0}^{t} v\,d\tau + i_2(t_0),$$

$$i_3 = \frac{1}{L_3}\int_{t_0}^{t} v\,d\tau + i_3(t_0). \tag{6.20}$$

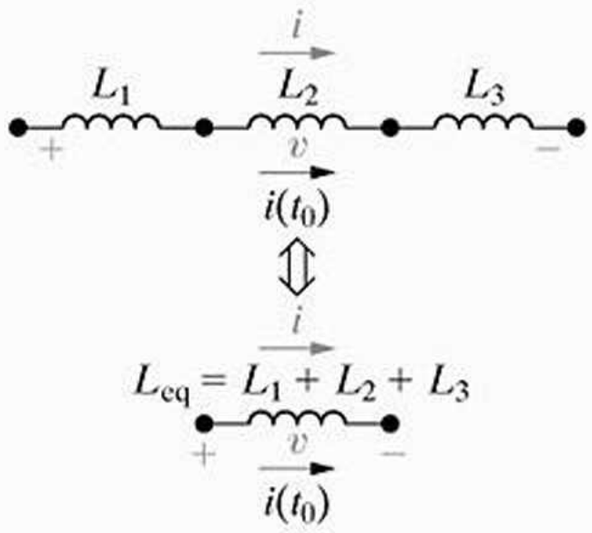


Figura 6.14 ▲ Circuito equivalente para indutores em série que transportam uma corrente inicial $i(t_0)$.

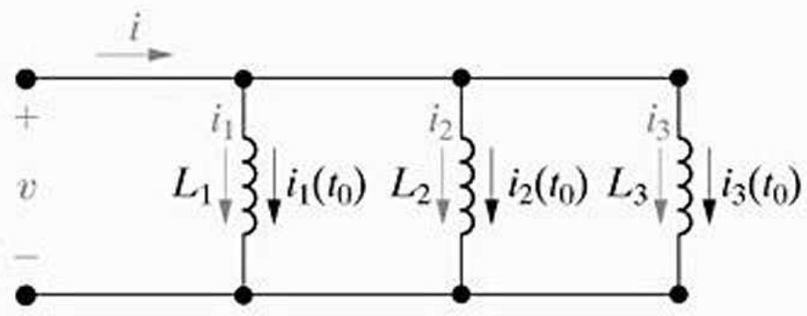


Figura 6.15 ▲ Três indutores em paralelo.

A corrente nos terminais dos três indutores em paralelo é a soma das correntes dos indutores:

$$i = i_1 + i_2 + i_3\,. \tag{6.21}$$

Substituindo a Equação 6.20 na Equação 6.21 obtemos

$$i = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3}\right)\int_{t_0}^{t} v\,d\tau + i_1(t_0) + i_2(t_0) + i_3(t_0). \tag{6.22}$$

Agora, podemos interpretar a Equação 6.22 em termos de um único indutor; isto é,

$$i = \frac{1}{L_{\text{eq}}}\int_{t_0}^{t} v\,d\tau + i(t_0). \tag{6.23}$$

Comparando a Equação 6.23 com (6.22) obtemos

$$\frac{1}{L_{\text{eq}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} \tag{6.24}$$

$$i(t_0) = i_1(t_0) + i_2(t_0) + i_3(t_0). \tag{6.25}$$

A Figura 6.16 mostra o circuito equivalente para os três indutores em paralelo na Figura 6.15.

Os resultados das equações 6.24 e 6.25 podem ser ampliados para n indutores em paralelo:

$$\frac{1}{L_{\text{eq}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_n}\cdot \tag{6.26}$$

(Combinação de indutores em paralelo)

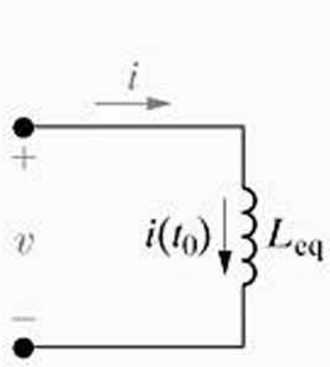
$$i(t_0) = i_1(t_0) + i_2(t_0) + \cdots + i_n(t_0)\cdot \tag{6.27}$$

(Corrente inicial da indutância equivalente)

Capacitores ligados em série podem ser reduzidos a um único capacitor equivalente. A recíproca da capacitância equivalente é igual à soma das recíprocas das capacitâncias individuais. Se cada capacitor apresentar a própria tensão inicial, a tensão inicial no capacitor equivalente será a soma algébrica das tensões iniciais nos capacitores individuais. A Figura 6.17 e as seguintes equações resumem essas observações:

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}, \tag{6.28}$$

(Combinação de capacitores em série)



$$\frac{1}{L_{\text{eq}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3}$$

$$i(t_0) = i_1(t_0) + i_2(t_0) + i_3(t_0)$$

Figura 6.16 ▲ Circuito equivalente para os três indutores em paralelo.

$$v(t_0) = v_1(t_0) + v_2(t_0) + \cdots + v_n(t_0). \tag{6.29}$$

(Tensão inicial da capacitância equivalente)

Deixamos a dedução do circuito equivalente para capacitores ligados em série como exercício. (Veja o Problema 6.30.)

A capacitância equivalente de capacitores ligados em paralelo é simplesmente a soma das capacitâncias dos capacitores individuais, como mostram a Figura 6.18 e a seguinte equação:

$$C_{\text{eq}} = C_1 + C_2 + \cdots + C_n. \tag{6.30}$$

(Combinação de capacitores em paralelo)

Capacitores ligados em paralelo devem apresentar a mesma tensão terminal. Portanto, se houver uma tensão inicial nos capacitores em paralelo originais, essa mesma tensão inicial aparecerá nos terminais do capacitor equivalente C_{eq}. A dedução do circuito equivalente para capacitores em paralelo fica como exercício. (Veja o Problema 6.31.)

Falaremos mais sobre circuitos equivalentes de indutores em série e em paralelo no Capítulo 7, onde interpretamos resultados baseados em sua utilização.

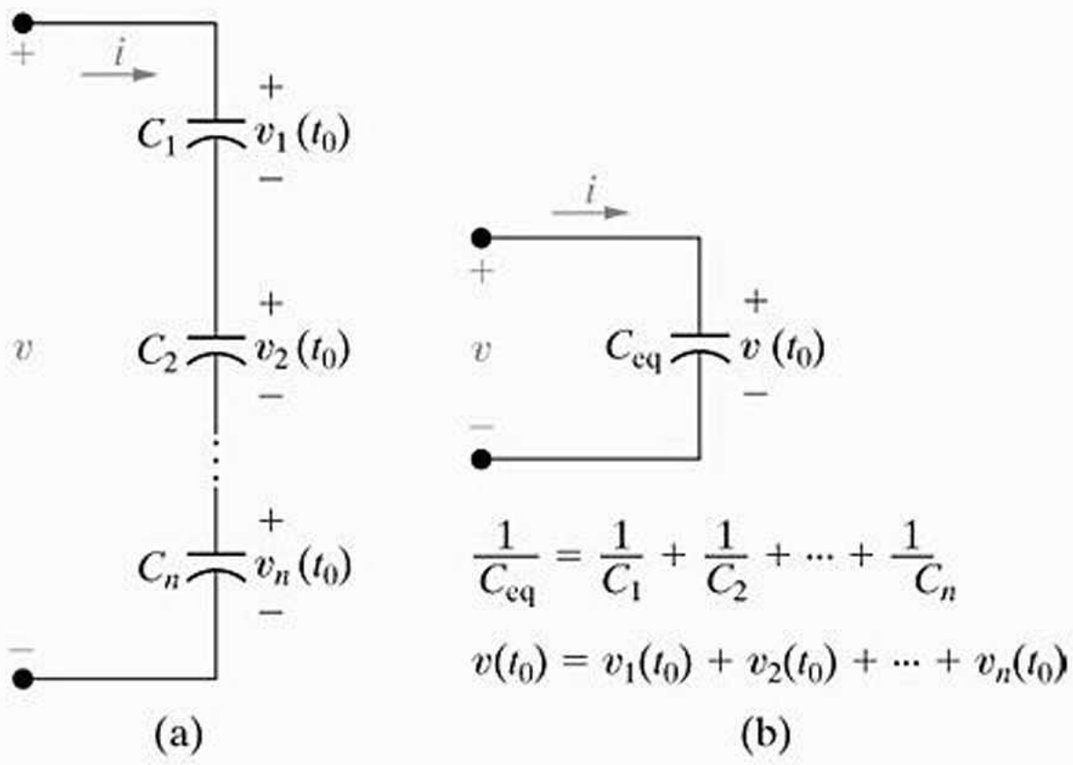


Figura 6.17 ▲ Circuito equivalente para capacitores ligados em série. (a) Capacitores em série. (b) Circuito equivalente.

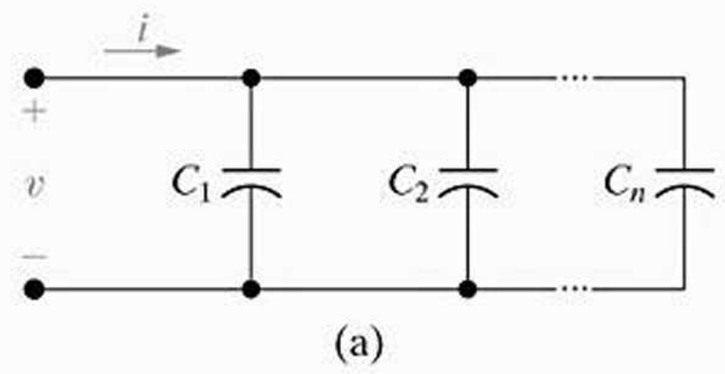


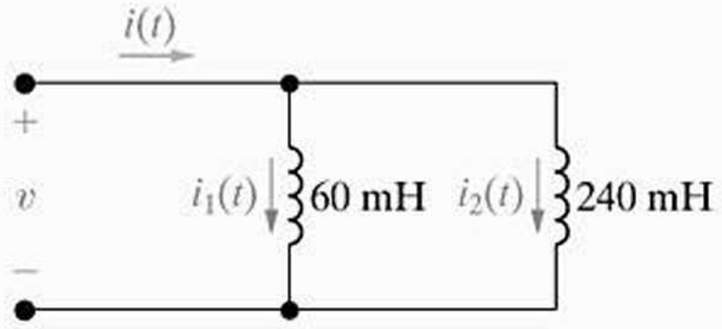
Figura 6.18 ▲ Circuito equivalente para capacitores ligados em paralelo. (a) Capacitores em paralelo. (b) Circuito equivalente.

✔ PROBLEMAS PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 3 — Saber combinar indutores ou capacitores em série e em paralelo para formar um único indutor equivalente

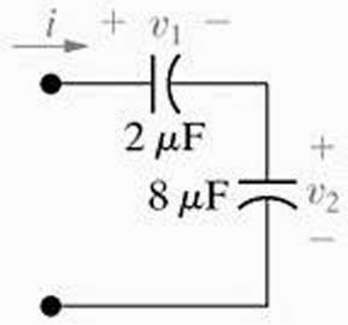
6.4 Os valores iniciais de i_1 e i_2 no circuito mostrado são +3 A e −5 A, respectivamente. A tensão nos terminais dos indutores em paralelo para $t \geq 0$ é $-30e^{-5t}$ mV.

a) Se os indutores em paralelo forem substituídos por um único indutor, qual será sua indutância?
b) Qual é a corrente inicial e sua direção de referência no indutor equivalente?
c) Use o indutor equivalente para determinar $i(t)$.
d) Determine $i_1(t)$ e $i_2(t)$. Verifique se as soluções para $i_1(t)$, $i_2(t)$ e $i(t)$ satisfazem a lei das correntes de Kirchhoff.



Resposta: (a) 48 mH;
(b) 2 A, para cima;
(c) $0{,}125e^{-5t} - 2{,}125$ A, $t \geq 0$;
(d) $i_1(t) = 0{,}1e^{-5t} + 2{,}9$ A, $t \geq 0$,
$i_2(t) = 0{,}025e^{-5t} - 5{,}025$ A, $t \geq 0$.

6.5 A corrente nos terminais dos dois capacitores mostrados é $240e^{-10t}\mu$A para $t \geq 0$. Os valores iniciais de v_1 e v_2 são −10 V e −5 V, respectivamente. Calcule a energia total armazenada nos capacitores à medida que $t \to \infty$. (*Sugestão*: não combine os capacitores em série — determine a energia armazenada em cada um e, então, some-as.)



Resposta: 20 μJ.

NOTA: Tente resolver também os problemas 6.21, 6.22, 6.26 e 6.27, apresentados no final deste capítulo.

6.4 Indutância mútua

O campo magnético que consideramos em nosso estudo de indutores na Seção 6.1 estava restrito a um único circuito. Dissemos que a indutância é o parâmetro que relaciona uma tensão a uma corrente que varia com o tempo no mesmo circuito; assim, uma denominação mais exata para indutância é auto-indutância.

Consideramos, agora, a situação em que dois circuitos estão imersos num campo magnético. Nesse caso, a tensão induzida no segundo circuito pode ser relacionada com a corrente variável com o tempo no primeiro circuito por um parâmetro conhecido como indutância mútua. O circuito mostrado na Figura 6.19 representa dois enrolamentos acoplados magneticamente. As auto-indutâncias dos dois enrolamentos são denominadas L_1 e L_2 e a indutância mútua é denominada M. A seta de duas pontas adjacente a M indica o par de enrolamentos que tem esse valor de indutância mútua. Essa notação é necessária, em particular, em circuitos que contêm mais de um par de enrolamentos acoplados magneticamente.

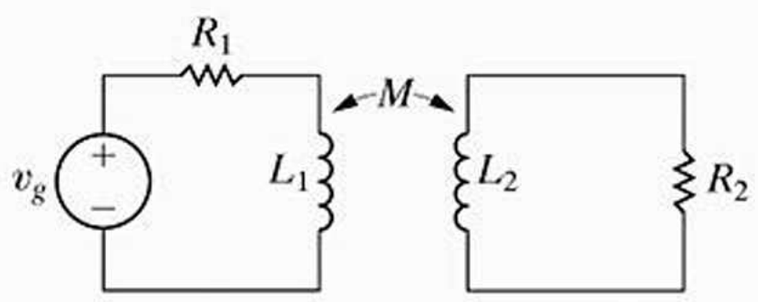


Figura 6.19 ▲ Dois enrolamentos acoplados magneticamente.

O modo mais fácil de analisar circuitos que contêm indutância mútua é usar correntes de malha. O problema é escrever as equações que descrevem o circuito em termos das correntes dos enrolamentos. Em primeiro lugar, escolha uma direção de referência para a corrente de cada enrolamento. A Figura 6.20 mostra correntes de referência escolhidas arbitrariamente. Após escolher as direções de referência para i_1 e i_2, some as tensões ao longo de cada circuito fechado. Por causa da indutância mútua M, haverá duas tensões em cada enrolamento, a saber, uma tensão auto-induzida e uma tensão mutuamente induzida. A tensão auto-induzida é o produto entre a auto-indutância do enrolamento e a derivada de primeira ordem da corrente naquele enrolamento. A tensão mutuamente induzida é o produto entre a indutância mútua dos enrolamentos e a derivada de primeira ordem da corrente no outro enrolamento. Considere o enrolamento da esquerda na Figura 6.20 cuja auto-indutância tem o valor L_1. A tensão auto-induzida nesse enrolamento é $L_1(di_1/dt)$ e a tensão mutuamente induzida nesse enrolamento é $M(di_2/dt)$. Mas e as polaridades dessas duas tensões?

Usando a convenção passiva, a tensão auto-induzida é uma queda de tensão na direção da corrente que produz a tensão. Mas a polaridade da tensão mutuamente induzida depende do modo como os enrolamentos estão dispostos

em relação à direção de referência das correntes. De modo geral, mostrar os detalhes de enrolamentos mutuamente acoplados é muito incômodo. Em vez disso, monitoramos as polaridades por um método conhecido como *convenção do ponto*, pelo qual um ponto é colocado em um terminal de cada enrolamento, como mostra a Figura 6.21. Esses pontos representam a informação de sinal e nos permitem desenhar os enrolamentos esquematicamente, em vez de mostrar como seus condutores estão enrolados em uma estrutura de núcleo.

A regra para usar a convenção do ponto para determinar a polaridade de tensão mutuamente induzida pode ser resumida da seguinte forma:

Convenção do ponto para enrolamentos mutuamente acoplados: Quando a direção de referência para uma corrente entra no terminal de um enrolamento identificado por um ponto, a polaridade de referência da tensão que ela induz no outro enrolamento é positiva no terminal identificado pelo ponto.

Ou, por um enunciado alternativo,

Convenção do ponto para enrolamentos mutuamente acoplados (alternativa): Quando a direção de referência para uma corrente sair do terminal de um enrolamento identificado por um ponto, a polaridade de referência da tensão que ela induz no outro enrolamento é negativa no terminal identificado pelo ponto.

Na maioria das vezes, fornecemos as marcações dos pontos nos diagramas de circuito deste livro. Uma habilidade importante é saber escrever as equações de circuito adequadas, a partir do entendimento da indutância mútua e da convenção do ponto. Se os pontos de polaridade não forem dados, é possível descobrir onde colocá-los examinando a configuração física de um circuito real ou testando-o no laboratório. Abordaremos esses procedimentos após discutirmos a utilização dos pontos de marcação.

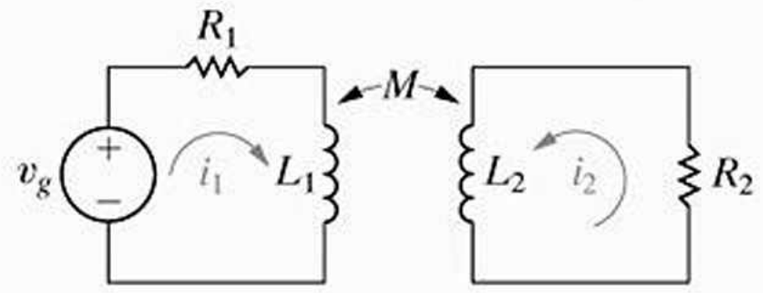


Figura 6.20 ▲ Correntes dos enrolamentos i_1 e i_2 usadas para descrever o circuito mostrado na Figura 6.19.

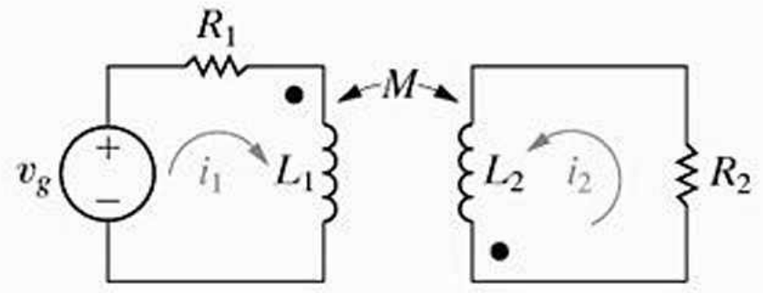


Figura 6.21 ▲ Circuito da Figura 6.20 com pontos adicionados aos enrolamentos para indicar a polaridade das tensões mutuamente induzidas.

Na Figura 6.21, a regra da convenção do ponto indica que a polaridade de referência para a tensão induzida no enrolamento 1 pela corrente i_2 é negativa no terminal do enrolamento 1 marcado com um ponto. Essa tensão ($M/di_2/dt$) é uma elevação de tensão em relação a i_1. A tensão induzida no enrolamento 2 pela corrente i_1 é $M\,di_1/dt$, e sua polaridade de referência é positiva no terminal do enrolamento 2 marcado por um ponto. Essa tensão é uma elevação de tensão na direção de i_2. A Figura 6.22 mostra as tensões auto-induzidas e mutuamente induzidas nos enrolamentos 1 e 2, além de suas marcas de polaridade.

Agora, vamos examinar a soma das tensões ao longo de cada circuito fechado. Nas equações 6.31 e 6.32, as elevações de tensão na direção de referência de uma corrente são negativas:

$$-v_g + i_1R_1 + L_1\frac{di_1}{dt} - M\frac{di_2}{dt} = 0, \qquad (6.31)$$

$$i_2R_2 + L_2\frac{di_2}{dt} - M\frac{di_1}{dt} = 0. \qquad (6.32)$$

Procedimento para determinar a marcação de pontos

Agora, passamos para dois métodos para determinar a marcação de pontos. O primeiro supõe que conheçamos o arranjo físico dos dois enrolamentos e o modo como cada um está enrolado em um circuito acoplado magneticamente. As seis etapas seguintes, aqui aplicadas à Figura 6.23, determinam um conjunto de marcação de pontos:

a) Selecione arbitrariamente um terminal — por exemplo, o terminal D — de um enrolamento e marque-o com um ponto.

b) Designe uma corrente entrando nesse terminal marcado e denomine-a i_D.

c) Use a regra da mão direita[1] para determinar o sentido do campo magnético criado por i_D no interior dos enrolamentos acoplados e denomine esse campo ϕ_D.

d) Escolha arbitrariamente um terminal do segundo enrolamento — por exemplo, terminal A —, designe uma corrente entrando nesse terminal e identifique-a como i_A.

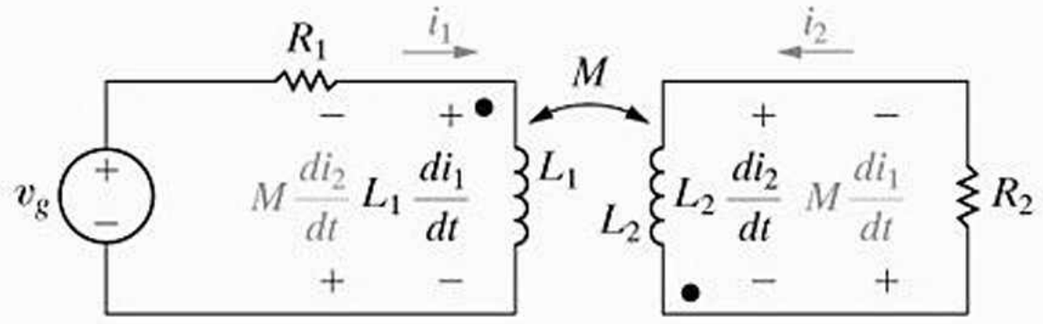


Figura 6.22 ▲ Tensões auto-induzidas e mutuamente induzidas que aparecem nos enrolamentos mostrados na Figura 6.21.

[1] Veja a discussão sobre a lei de Faraday na página 145.

e) Use a regra da mão direita para determinar o sentido do fluxo estabelecido por i_A no interior dos enrolamentos acoplados e denomine esse fluxo ϕ_A.

f) Compare as direções dos dois fluxos ϕ_D e ϕ_A. Se eles tiverem a mesma direção de referência, coloque um ponto no terminal do segundo enrolamento onde a corrente de teste (i_A) entra. (Na Figura 6.23, os fluxos ϕ_D e ϕ_A têm a mesma direção de referência e, portanto, um ponto vai para o terminal A.) Se as direções de referência dos fluxos forem diferentes, coloque um ponto no terminal do segundo enrolamento onde a corrente auxiliar sai.

As polaridades relativas de enrolamentos acoplados magneticamente também podem ser determinadas por meios experimentais. Isso é importante porque em algumas situações é impossível determinar como os enrolamentos estão dispostos no núcleo. Um método experimental é ligar uma fonte de tensão cc, um resistor, um interruptor e um voltímetro cc ao par de enrolamentos, como mostra a Figura 6.24. O retângulo sombreado que envolve os enrolamentos implica não ser possível fazer uma inspeção física desses enrolamentos. O resistor R limita o valor da corrente fornecida pela fonte de tensão cc.

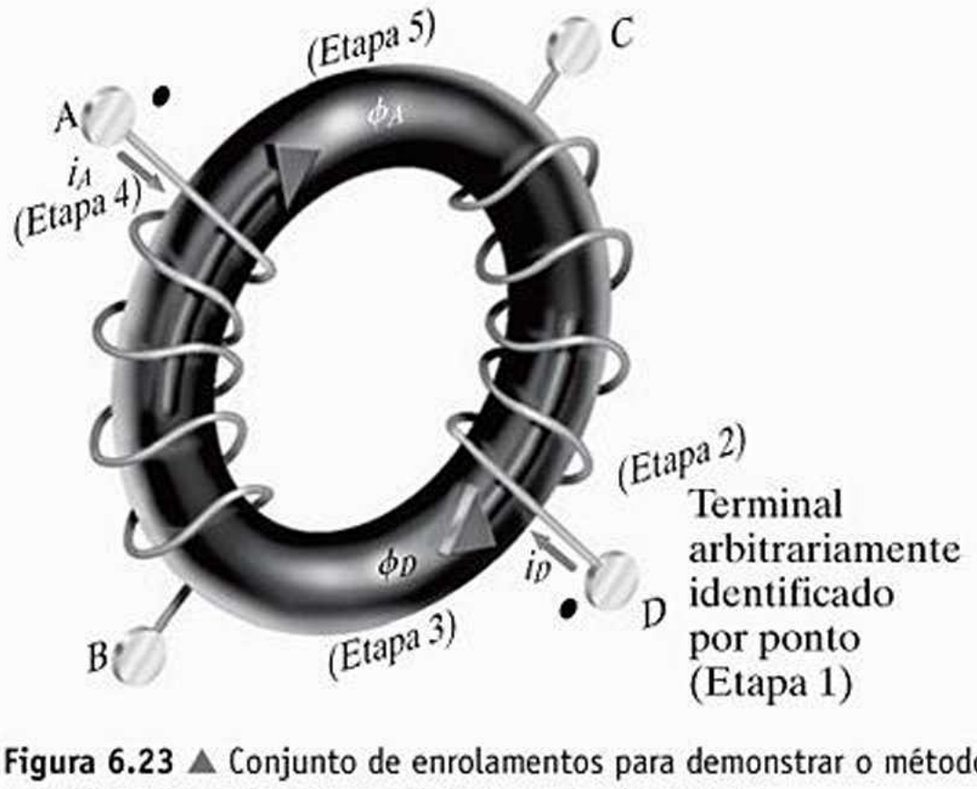


Figura 6.23 ▲ Conjunto de enrolamentos para demonstrar o método que determina um conjunto de marcações de pontos.

O terminal do enrolamento ligado ao terminal positivo da fonte cc por meio do interruptor e do resistor limitador recebe uma marcação de polaridade, como mostra a Figura 6.24. Quando o interruptor é fechado, a deflexão do voltímetro é observada. Se a deflexão momentânea for positiva, o terminal do enrolamento ligado ao terminal positivo do voltímetro recebe a marcação de polaridade. Se a deflexão for negativa, o terminal do enrolamento ligado ao terminal negativo do voltímetro recebe a marca de polaridade.

O Exemplo 6.6 mostra como usar a marcação de pontos para formular um conjunto de equações em um circuito que contém enrolamentos acoplados magneticamente.

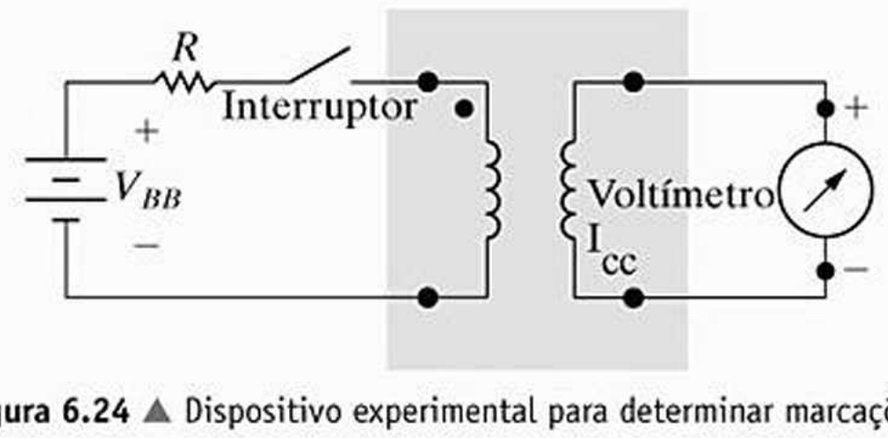


Figura 6.24 ▲ Dispositivo experimental para determinar marcações de polaridade.

Exemplo 6.6 Determinação das equações de corrente de malha para um circuito com enrolamentos acoplados magneticamente

a) Escreva um conjunto de equações de corrente de malha que descreva o circuito da Figura 6.25 em termos das correntes i_1 e i_2.

b) Verifique que, se não houver nenhuma energia armazenada no circuito em $t = 0$ e se $i_g = 16 - 16e^{-5t}$ A, as soluções para i_1 e i_2 serão:

$$i_1 = 4 + 64e^{-5t} - 68e^{-4t} \text{ A},$$

$$i_2 = 1 - 52e^{-5t} + 51e^{-4t} \text{ A}.$$

Solução

a) Somando as tensões ao longo da malha de i_1 obtemos

$$4\frac{di_1}{dt} + 8\frac{d}{dt}(i_g - i_2) + 20(i_1 - i_2) + 5(i_1 - i_g) = 0$$

A equação de malha i_2 é

$$20(i_2 - i_1) + 60i_2 + 16\frac{d}{dt}(i_2 - i_g) - 8\frac{di_1}{dt} = 0$$

Observe que a tensão no enrolamento de 4 H devida à corrente $(i_g - i_2)$, isto é, $8d(i_g - i_2)/dt$, é uma queda de tensão na direção de i_1. A tensão induzida no enrolamento de 16 H pela corrente i_1, isto é, $8di_1/dt$, é uma elevação de tensão na direção de i_2.

b) Para verificar a validade das expressões para i_1 e i_2, começamos testando os valores inicial e final de i_1 e i_2. Sabemos, por hipótese, que $i_1(0) = i_2(0) = 0$. Pelas soluções dadas, temos

$$i_1(0) = 4 + 64 - 68 = 0,$$

$$i_2(0) = 1 - 52 + 51 = 0.$$

Agora, observamos que, à medida que t tende ao infinito, a fonte de corrente (i_g) se aproxima de um valor constante de 16 A e, por conseguinte, os enrolamentos acoplados magneticamente comportam-se como curtos-circuitos. Então, em $t = \infty$, o circuito se reduz ao mostrado na Figura 6.26. Pela Figura 6.26, vemos que

em $t = \infty$ os três resistores estão em paralelo com a fonte de 16 A. Assim, a resistência equivalente é 3,75 Ω e, portanto, a tensão na fonte de corrente de 16 A é 60 V. Portanto,

$$i_1(\infty) = \frac{60}{20} + \frac{60}{60} = 4 \text{ A},$$

$$i_2(\infty) = \frac{60}{60} = 1 \text{ A}.$$

Esses valores estão de acordo com os valores finais previstos pelas soluções para i_1 e i_2.

Por fim, conferimos as soluções verificando se elas satisfazem as equações diferenciais deduzidas em (a). Deixamos essa verificação final para o leitor, por meio do Problema 6.37.

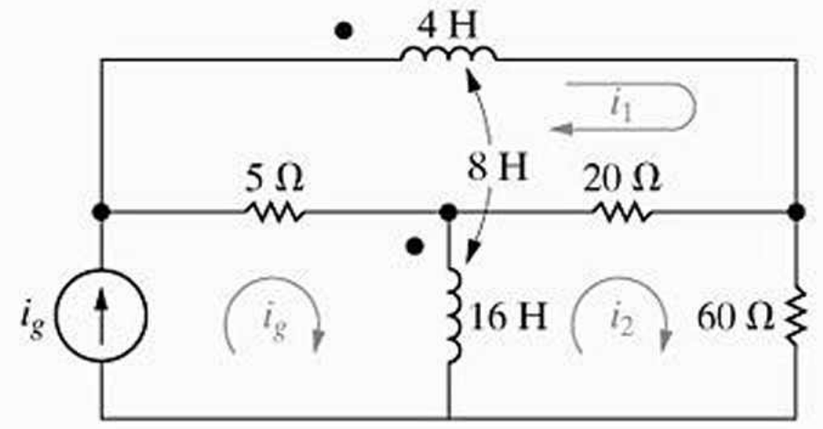


Figura 6.25 ▲ Circuito para o Exemplo 6.6.

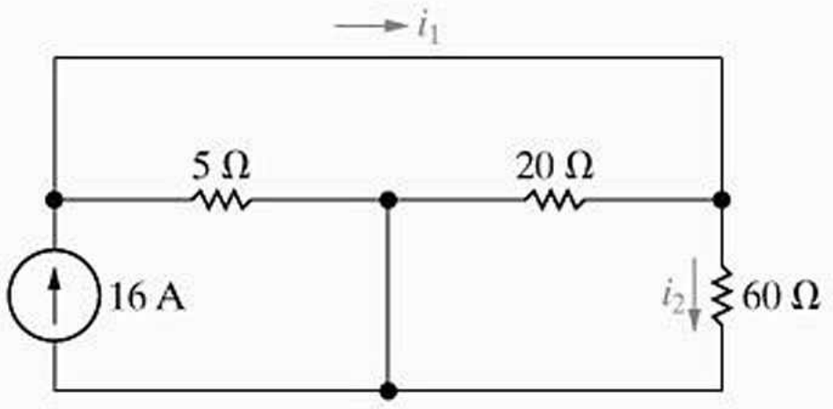


Figura 6.26 ▲ Circuito do Exemplo 6.6 quando t = ∞.

✔ PROBLEMA PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 4 — Usar a convenção do ponto para escrever equações de corrente de malha para enrolamentos mutuamente acoplados

6.6 a) Escreva um conjunto de equações de corrente de malha para o circuito do Exemplo 6.6 se o ponto no indutor de 4 H estiver no terminal do lado direito, a direção de referência de i_g for invertida e o resistor de 60 Ω for aumentado para 780 Ω.

b) Verifique que, se não houver nenhuma energia armazenada no circuito em $t = 0$ e se $i_g = 1{,}96 - 1{,}96e^{-4t}$ A, as soluções para as equações diferenciais deduzidas em (a) desse Problema para Avaliação serão

$$i_1 = -0{,}4 - 11{,}6e^{-4t} + 12e^{-5t} \text{ A},$$
$$i_2 = -0{,}01 - 0{,}99e^{-4t} + e^{-5t} \text{ A}.$$

Resposta: (a) $4(di_1/dt) + 25i_1 + 8(di_2/dt) - 20i_2 = -5i_g - 8(di_g/dt)$

e

$8(di_1/dt) - 20i_1 + 16(di_2/dt) + 800i_2 = -16(di_g/dt)$;

(b) verificação.

NOTA: Tente resolver também o Problema 6.34, apresentado no final deste capítulo.

6.5 Um exame mais detalhado da indutância mútua

Para explicar completamente o parâmetro indutância mútua e examinar as limitações e premissas adotadas na discussão qualitativa apresentada na Seção 6.4, começamos com uma descrição mais quantitativa da auto-indutância.

Uma revisão da auto-indutância

O conceito de indutância pode ser creditado a Michael Faraday, que foi o pioneiro nessa área de trabalho no início do século XIX. Faraday postulou que um campo magnético consiste em linhas de força que cercam um condutor que conduz corrente. Visualize essas linhas de força como tiras de elástico que armazenam energia e se fecham em si mesmas. À medida que a corrente aumenta e diminui, as tiras elásticas (isto é, as linhas de força) se expandem e contraem ao longo do condutor. A tensão induzida no condutor é proporcional ao número de linhas que se contraem para dentro do condutor ou que o atravessam. Essa imagem da tensão induzida é expressa pelo que se denomina lei de Faraday; isto é,

$$v = \frac{d\lambda}{dt}, \tag{6.33}$$

onde λ é denominado fluxo total e medido em weber-espiras.

Como passamos da lei de Faraday para a definição de indutância apresentada na Seção 6.1? Podemos começar a inferir essa conexão usando a Figura 6.27 como referência.

As linhas ϕ que perpassam as N espiras representam as linhas de força magnética que compõem o campo magnético. A intensidade do campo magnético depende da intensidade da corrente, e a orientação espacial do campo depende do sentido da corrente. A regra da mão direita relaciona a orientação do campo com o sentido da corrente: quando os dedos da mão direita envolvem o enrolamento no sentido da corrente, o polegar indica a direção daquela porção do campo magnético no interior do enrolamento. O fluxo total é o produto entre o fluxo magnético (ϕ), medido em webers (Wb), e o número de espiras atravessadas pelo campo (N):

$$\lambda = N\phi. \tag{6.34}$$

A magnitude do fluxo, ϕ, está relacionada à magnitude da corrente do enrolamento pela relação

$$\phi = \mathcal{P}Ni, \tag{6.35}$$

onde N é o número de espiras do enrolamento e $\mathcal{P}$ é a permeância do espaço atravessado pelo fluxo. Permeância é a quantidade que descreve as propriedades magnéticas desse espaço e, por isso, uma descrição detalhada da permeância está fora do escopo deste livro. Aqui, basta observar que, quando o espaço atravessado pelo fluxo é composto de materiais magnéticos (como ferro, níquel e cobalto), a permeância varia com o fluxo, dando origem a uma relação não-linear entre ϕ e i. No entanto, quando o espaço é composto por materiais não-magnéticos, a permeância é constante, dando origem a uma relação linear entre ϕ e i. Observe que, pela Equação 6.35, o fluxo também é proporcional ao número de espiras no enrolamento.

Aqui, admitimos que o material do núcleo — espaço atravessado pelo fluxo — é não-magnético. Então, substituindo as equações 6.34 e 6.35 na Equação 6.33, temos

$$\begin{aligned} v &= \frac{d\lambda}{dt} = \frac{d(N\phi)}{dt} \\ &= N\frac{d\phi}{dt} = N\frac{d}{dt}(\mathcal{P}Ni) \\ &= N^2\mathcal{P}\frac{di}{dt} = L\frac{di}{dt}, \end{aligned} \tag{6.36}$$

que mostra que a auto-indutância é proporcional ao quadrado do número de espiras do enrolamento. Utilizaremos essa observação mais adiante.

A polaridade da tensão induzida no circuito da Figura 6.27 reflete a reação do campo à corrente que o cria. Por exemplo, quando i está crescendo, di/dt é positiva e v é positiva. Assim, é preciso fornecer energia para estabelecer o campo magnético. O produto vi é a taxa de armazenamento de energia no campo. Quando o campo diminui, di/dt é negativa e, mais uma vez, a polaridade da tensão induzida é oposta à alteração na corrente. À medida que o campo diminui em torno do enrolamento, mais energia é devolvida ao circuito.

Mantendo em mente mais essas particularidades do conceito da auto-indutância, voltemos agora à indutância mútua.

O conceito de indutância mútua

A Figura 6.28 mostra dois enrolamentos acoplados magneticamente. Você deve verificar se a marcação de pontos está de acordo com a direção dos enrolamentos e correntes mostrados. O número de espiras em cada enrolamento é N_1 e N_2, respectivamente. O enrolamento 1 é energizado por uma fonte de corrente variável com o tempo que estabelece a corrente i_1 nas espiras N_1. O enrolamento 2 não é energizado e está aberto. Os enrolamentos são dispostos em um núcleo não-magnético. O fluxo produzido pela corrente i_1 pode ser dividido em dois componentes, denominados ϕ_{11} e ϕ_{21}. O componente de fluxo ϕ_{11} é o fluxo produzido por i_1 que atravessa somente as espiras N_1. O componente ϕ_{21} é o fluxo produzido por i_1 que atravessa as espiras N_2 e N_1. O primeiro dígito do índice do fluxo se refere ao número do enrolamento atravessado pelo fluxo e o segundo dígito refere-se ao enrolamento percorrido pela corrente. Assim, ϕ_{11} é um fluxo que atravessa o enrolamento 1 que é produzido por uma corrente no enrolamento 1, ao passo que ϕ_{21} é um fluxo que atravessa o enrolamento 2 que é produzido por uma corrente no enrolamento 1.

O fluxo total que atravessa o enrolamento 1 é ϕ_1, a soma de ϕ_{11} e ϕ_{21}.

$$\phi_1 = \phi_{11} + \phi_{21}. \tag{6.37}$$

O fluxo ϕ_1 e seus componentes ϕ_{11} e ϕ_{21} estão relacionados com a corrente i_1 da seguinte forma:

$$\phi_1 = \mathcal{P}_1 N_1 i_1, \tag{6.38}$$

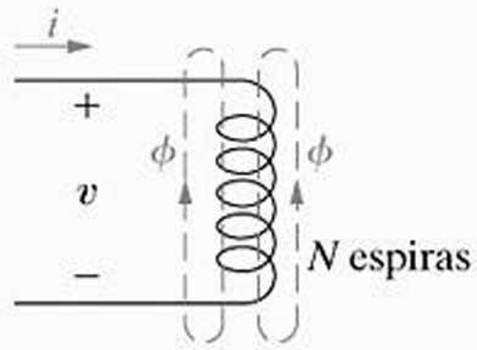


Figura 6.27 ▲ Representação de um campo magnético ligando um enrolamento de N espiras.

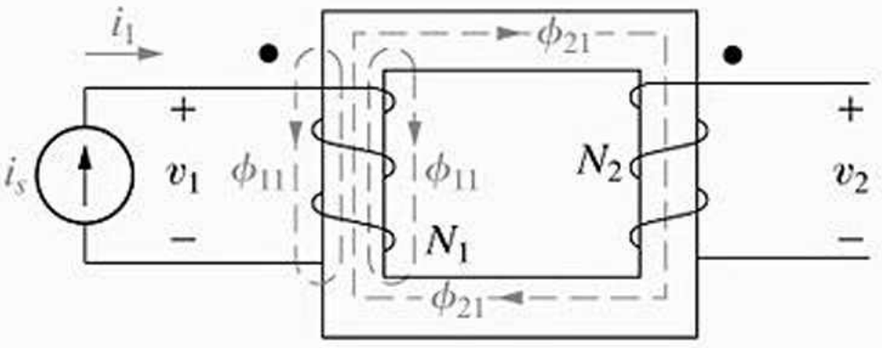


Figura 6.28 ▲ Dois enrolamentos acoplados magneticamente.

$$\phi_{11} = \mathcal{P}_{11} N_1 i_1 , \tag{6.39}$$

$$\phi_{21} = \mathcal{P}_{21} N_1 i_1 , \tag{6.40}$$

onde $\mathcal{P}_1$ é a permeância do espaço atravessado pelo fluxo ϕ_1, $\mathcal{P}_{11}$ é a permeância do espaço atravessado pelo fluxo ϕ_{11} e $\mathcal{P}_{21}$ é a permeância do espaço atravessado pelo fluxo ϕ_{21}. Substituindo as equações 6.38, 6.39 e 6.40 na Equação 6.37, obtemos a relação entre a permeância do espaço atravessado pelo fluxo total ϕ_1 e as permeâncias dos espaços atravessados por seus componentes ϕ_{11} e ϕ_{21}:

$$\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_{11} + \mathcal{P}_{21} . \tag{6.41}$$

Usamos a lei de Faraday para deduzir as expressões para v_1 e v_2:

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{d\lambda_1}{dt} = \frac{d(N_1\phi_1)}{dt} = N_1 \frac{d}{dt}(\phi_{11} + \phi_{21}) \\ &= N_1^2(\mathcal{P}_{11} + \mathcal{P}_{21})\frac{di_1}{dt} = N_1^2 \mathcal{P}_1 \frac{di_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} , \end{aligned} \tag{6.42}$$

e

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{d\lambda_2}{dt} = \frac{d(N_2\phi_{21})}{dt} = N_2 \frac{d}{dt}(\mathcal{P}_{21} N_1 i_1) \\ &= N_2 N_1 \mathcal{P}_{21} \frac{di_1}{dt} . \end{aligned} \tag{6.43}$$

O coeficiente de di_1/dt na Equação 6.42 é a auto-indutância do enrolamento 1. O coeficiente de di_1/dt na Equação 6.43 é a indutância mútua entre os enrolamentos 1 e 2. Assim,

$$M_{21} = N_2 N_1 \mathcal{P}_{21} . \tag{6.44}$$

O índice de M especifica uma indutância que relaciona a tensão induzida no enrolamento 2 com a corrente no enrolamento 1.

Dessa definição temos:

$$v_2 = M_{21} \frac{di_1}{dt} . \tag{6.45}$$

Observe que a convenção do ponto é usada para estabelecer a referência de polaridade de v_2 na Figura 6.28.

No caso dos enrolamentos acoplados da Figura 6.28, excitar o enrolamento 2 com uma fonte de corrente variável com o tempo (i_2) e deixar o enrolamento 1 aberto produz o arranjo mostrado na Figura 6.29. Novamente, a referência de polaridade atribuída a v_1 é estabelecida pela convenção do ponto.

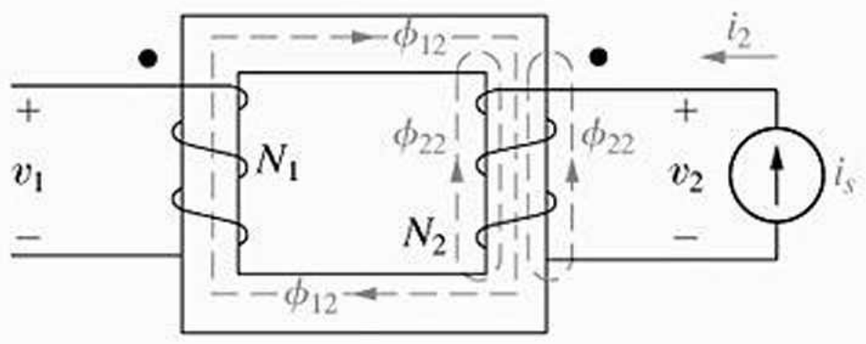


Figura 6.29 ▲ Enrolamentos acoplados magneticamente da Figura 6.28, com o enrolamento 2 excitado e o enrolamento 1 aberto.

O fluxo total que atravessa o enrolamento 2 é

$$\phi_2 = \phi_{22} + \phi_{12} . \tag{6.46}$$

O fluxo ϕ_2 e seus componentes ϕ_{22} e ϕ_{12} estão relacionados com a corrente i_2 da seguinte forma:

$$\phi_2 = \mathcal{P}_2 N_2 i_2 , \tag{6.47}$$

$$\phi_{22} = \mathcal{P}_{22} N_2 i_2 , \tag{6.48}$$

$$\phi_{12} = \mathcal{P}_{12} N_2 i_2 . \tag{6.49}$$

As tensões v_2 e v_1 são

$$v_2 = \frac{d\lambda_2}{dt} = N_2^2 \mathcal{P}_2 \frac{di_2}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} , \tag{6.50}$$

$$v_1 = \frac{d\lambda_1}{dt} = \frac{d}{dt}(N_1\phi_{12}) = N_1 N_2 \mathcal{P}_{12} \frac{di_2}{dt} . \tag{6.51}$$

O coeficiente de indutância mútua que relaciona a tensão induzida no enrolamento 1 com a corrente variável com o tempo no enrolamento 2 é o coeficiente de di_2/dt na Equação 6.51:

$$M_{12} = N_1 N_2 \mathcal{P}_{12} . \tag{6.52}$$

Para materiais não-magnéticos, as permeâncias $\mathcal{P}_{12}$ e $\mathcal{P}_{21}$ são iguais e, portanto,

$$M_{12} = M_{21} = M. \tag{6.53}$$

Por conseguinte, para circuitos lineares com apenas dois enrolamentos acoplados magneticamente, não é necessário acrescentar índices ao coeficiente da indutância mútua.

Indutância mútua em termos de auto-indutância

O valor da indutância mútua é uma função das auto-indutâncias. Derivamos essa relação como se segue. Pelas equações 6.42 e 6.50,

$$L_1 = N_1^2 \mathcal{P}_1 , \tag{6.54}$$

$$L_2 = N_2^2 \mathcal{P}_2 , \tag{6.55}$$

respectivamente. Pelas equações 6.54 e 6.55,

$$L_1 L_2 = N_1^2 N_2^2 \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2 . \tag{6.56}$$

Agora, usamos a Equação 6.41 e a expressão correspondente para $\mathcal{P}_2$ para escrever

$$L_1 L_2 = N_1^2 N_2^2 (\mathcal{P}_{11} + \mathcal{P}_{21})(\mathcal{P}_{22} + \mathcal{P}_{12}) . \tag{6.57}$$

No entanto, para um sistema linear, $\mathcal{P}_{21} = \mathcal{P}_{12}$; portanto, a Equação 6.57 torna-se

$$L_1L_2 = (N_1N_2\mathcal{P}_{12})^2\left(1 + \frac{\mathcal{P}_{11}}{\mathcal{P}_{12}}\right)\left(1 + \frac{\mathcal{P}_{22}}{\mathcal{P}_{12}}\right)$$

$$= M^2\left(1 + \frac{\mathcal{P}_{11}}{\mathcal{P}_{12}}\right)\left(1 + \frac{\mathcal{P}_{22}}{\mathcal{P}_{12}}\right). \qquad (6.58)$$

Substituir os dois termos que envolvem permeâncias por uma única constante resulta em uma expressão mais significativa da Equação 6.58:

$$\frac{1}{k^2} = \left(1 + \frac{\mathcal{P}_{11}}{\mathcal{P}_{12}}\right)\left(1 + \frac{\mathcal{P}_{22}}{\mathcal{P}_{12}}\right). \qquad (6.59)$$

Substituindo a Equação 6.59 na Equação 6.58, obtemos

$$M^2 = k^2L_1L_2$$

ou

$$M = k\sqrt{L_1L_2}\,, \qquad (6.60)$$

(Relação entre auto-indutâncias e indutância mútua usando coeficiente de acoplamento)

onde a constante k é denominada *coeficiente de acoplamento.* De acordo com a Equação 6.59, $1/k^2$ deve ser maior do que 1, o que significa que k deve ser menor do que 1. De fato, o coeficiente de acoplamento deve estar entre 0 e 1, ou

$$0 \leq k \leq 1. \qquad (6.61)$$

O coeficiente de acoplamento é 0 quando os dois enrolamentos não têm nenhum fluxo em comum; isto é, quando $\phi_{12} = \phi_{21} = 0$. Essa condição implica $\mathcal{P}_{12} = 0$, e a Equação 6.59 indica que $1/k^2 = \infty$, ou $k = 0$. Se não houver nenhum fluxo que atravesse ambos os enrolamentos, é óbvio que M será 0.

O coeficiente de acoplamento é igual a 1 quando ϕ_{11} e ϕ_{22} são 0. Essa condição implica que todo o fluxo que atravessa o enrolamento 1 também atravesse o enrolamento 2. Em termos da Equação 6.59, $\mathcal{P}_{11} = \mathcal{P}_{22} = 0$, o que obviamente representa um estado ideal; na realidade, dispor os enrolamentos de modo que compartilhem exatamente o mesmo fluxo é fisicamente impossível. Materiais magnéticos (como ligas de ferro, cobalto e níquel) possibilitam um espaço de alta permeância e são usados para estabelecer coeficientes de acoplamento próximos à unidade. (Falaremos mais sobre essa importante qualidade de materiais magnéticos no Capítulo 9.)

NOTA: Avalie o que entendeu desse material tentando resolver os problemas 6.42 e 6.43, apresentados no final deste capítulo.

Cálculos de energia

Vamos concluir nosso primeiro exame da indutância mútua com uma discussão da energia total armazenada em enrolamentos acoplados magneticamente. Ao fazer isso, confirmaremos duas observações feitas antes: para acoplamento magnético linear, (1) $M_{12} = M_{21} = M$ e (2) $M = k\sqrt{L_1L_2}$, onde $0 \leq k \leq 1$.

Usamos o circuito mostrado na Figura 6.30 para deduzir a expressão para a energia total armazenada nos campos magnéticos associados a um par de enrolamentos acoplados linearmente. Começamos supondo que as correntes i_1 e i_2 são nulas e que esse estado corresponda à energia nula armazenada nos enrolamentos. Então, fazemos i_1 crescer de zero a algum valor arbitrário I_1 e calculamos a energia armazenada quando $i_1 = I_1$. Como $i_2 = 0$, a potência total fornecida ao par de enrolamentos é v_1i_1 e a energia armazenada é

$$\int_0^{W_1} dw = L_1\int_0^{I_1} i_1di_1\,,$$

$$W_1 = \frac{1}{2}L_1I_1^2. \qquad (6.62)$$

Manteremos i_1 constante em I_1, aumentaremos i_2 de zero a algum valor arbitrário I_2. Durante esse intervalo de tempo, a tensão induzida no enrolamento 2 por i_2 é zero porque I_1 é constante. A tensão induzida no enrolamento 1 por i_2 é $M_{12}di_2/dt$. Portanto, a potência total fornecida ao par de enrolamentos é

$$p = I_1M_{12}\frac{di_2}{dt} + i_2v_2\,.$$

A energia total armazenada no par de enrolamentos quando $i_2 = I_2$ é

$$\int_{W_1}^{W} dw = \int_0^{I_2} I_1M_{12}di_2 + \int_0^{I_2} L_2i_2di_2\,,$$

e

$$W = W_1 + I_1I_2M_{12} + \frac{1}{2}L_2I_2^2\,,$$

$$= \frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 + I_1I_2M_{12}\,. \qquad (6.63)$$

Se invertermos o procedimento — isto é, se, primeiro, aumentarmos i_2 de zero a I_2 e, então, aumentarmos i_1 de zero a I_1 — a energia total armazenada será

$$W = \frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 + I_1I_2M_{21}\,. \qquad (6.64)$$

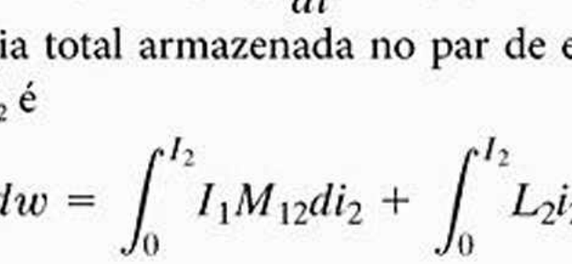


Figura 6.30 ▲ Circuito usado para deduzir as relações básicas de energia.

As equações 6.63 e 6.64 expressam a energia total armazenada em um par de enrolamentos acoplados linearmente em função das correntes de enrolamento, das autoindutâncias e da indutância mútua. Observe que a única diferença entre essas equações é o coeficiente do produto de correntes I_1I_2. Usamos a Equação 6.63 se i_1 for estabelecida em primeiro lugar e a Equação 6.64 se i_2 for estabelecida em primeiro lugar.

Quando o meio acoplador é linear, a energia total armazenada é a mesma, independentemente da ordem utilizada para estabelecer I_1 e I_2. A razão é que, em um acoplamento linear, o fluxo magnético resultante depende somente dos valores finais de i_1 e i_2 e não de como as correntes chegaram a seus valores finais. Se o fluxo resultante for o mesmo, a energia armazenada será a mesma. Por conseqüência, para acoplamento linear, $M_{12} = M_{21}$. Além disso, como I_1 e I_2 são valores arbitrários de i_1 e i_2, respectivamente, representamos as correntes de enrolamento por seus valores instantâneos i_1 e i_2. Assim, a qualquer instante do tempo, a energia total armazenada nos enrolamentos acoplados é

$$w(t) = \frac{1}{2}L_1i_1^2 + \frac{1}{2}L_2i_2^2 + Mi_1i_2. \tag{6.65}$$

Deduzimos a Equação 6.65 admitindo que ambas as correntes entraram em terminais com polaridades marcadas. Deixamos para você verificar que, se uma corrente entrar em um terminal com polaridade marcada enquanto a outra sair desse mesmo terminal, o sinal algébrico do termo Mi_1i_2 é invertido. Assim, em geral,

$$w(t) = \frac{1}{2}L_1i_1^2 + \frac{1}{2}L_2i_2^2 \pm Mi_1i_2. \tag{6.66}$$

Usamos a Equação 6.66 para mostrar que M não pode exceder $\sqrt{L_1L_2}$. Os enrolamentos acoplados magneticamente são elementos passivos, de tal forma que a energia total armazenada neles nunca pode ser negativa. Se $w(t)$ nunca pode ser negativa, a Equação 6.66 indica que a quantidade

$$\frac{1}{2}L_1i_1^2 + \frac{1}{2}L_2i_2^2 - Mi_1i_2$$

deve ser maior ou igual a zero quando i_1 e i_2 forem ambas positivas, ou quando ambas forem negativas. O valor-limite de M corresponde a igualar a quantidade a zero:

$$\frac{1}{2}L_1i_1^2 + \frac{1}{2}L_2i_2^2 - Mi_1i_2 = 0. \tag{6.67}$$

Para determinar o valor-limite de M somamos e subtraímos o termo $i_1i_2\sqrt{L_1L_2}$ do lado esquerdo da Equação 6.67, o que gera um termo que é um quadrado perfeito:

$$\left(\sqrt{\frac{L_1}{2}}i_1 - \sqrt{\frac{L_2}{2}}i_2\right)^2 + i_1i_2\left(\sqrt{L_1L_2} - M\right) = 0. \tag{6.68}$$

O termo elevado ao quadrado na Equação 6.68 nunca pode ser negativo, mas pode ser zero. Portanto, $w(t) \geq 0$ só se

$$\sqrt{L_1L_2} \geq M. \tag{6.69}$$

que é uma outra maneira de dizer que

$$M = k\sqrt{L_1L_2}, \text{ onde } 0 \leq k \leq 1$$

Deduzimos a Equação 6.69 admitindo que i_1 e i_2 fossem ambas positivas ou ambas negativas. Contudo, obteremos o mesmo resultado se i_1 e i_2 tiverem sinais contrários porque, nesse caso, obteremos o valor-limite de M selecionando o sinal positivo na Equação 6.66.

NOTA: Avalie o que você entendeu desse material tentando resolver os problemas 6.47 e 6.48, apresentados no final deste capítulo.

Perspectiva prática

Interruptores de proximidade

No início deste capítulo, apresentamos o interruptor de proximidade capacitivo. Há duas variedades desse interruptor. A usada em lâmpadas de mesa é baseada em um interruptor com um único eletrodo. Deixamos que você a investigue no Problema 6.50. No exemplo apresentado aqui, consideramos um interruptor de dois eletrodos utilizado em botões de chamada de elevadores.

EXEMPLO

O botão de chamada de elevadores é um pequeno receptáculo no qual o dedo é inserido, como mostra a Figura 6.31. O receptáculo é composto de um eletrodo de anel metálico e de um eletrodo de placa circular isolados um do outro. Como alternativa, às vezes são utilizados dois anéis concêntricos embutidos em um material plástico isolante. Os eletrodos são cobertos com uma camada isolante para evitar contato direto com o metal. O dispositivo resultante pode ser modelado como um capacitor, como mostra a Figura 6.32.

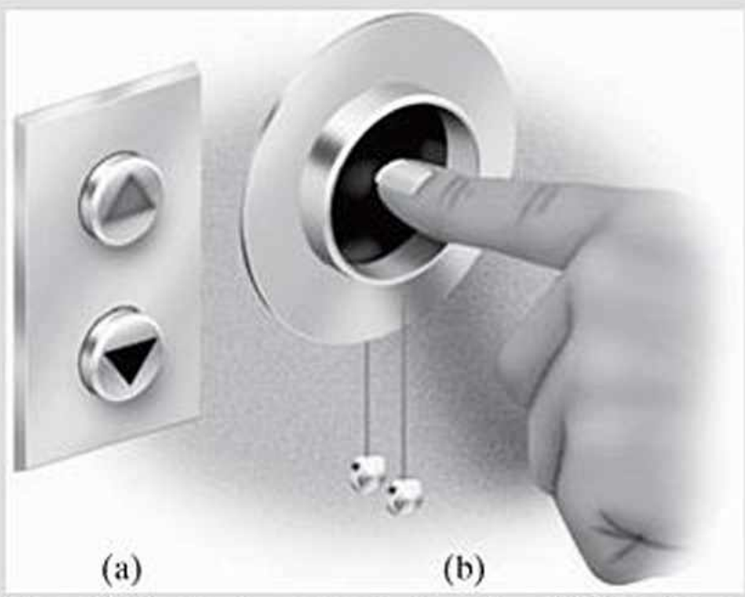


Figura 6.31 ▲ Botão de chamada de elevador. (a) Vista frontal. (b) Vista lateral.

Diferentemente da maioria dos capacitores, o interruptor de proximidade capacitivo permite a inserção de um objeto, por exemplo, um dedo, entre os eletrodos. Como os dedos são muito mais condutivos do que a capa isolante que circunda os eletrodos, o circuito responde como se tivesse sido acrescentado outro eletrodo, conectado à terra. O resultado é um circuito de três terminais que contém três capacitores, como mostra a Figura 6.33.

Os valores reais dos capacitores das figuras 6.32 e 6.33 estão na faixa de 10 a 50 pF, dependendo da exata geometria do interruptor, de como o dedo é inserido, de a pessoa estar ou não usando luvas, e assim por diante. Nos problemas a seguir, admita que todos os capacitores têm o mesmo valor de 25 pF. Ademais, suponha que o botão de chamada do elevador esteja inserido como um elemento de divisor capacitivo de tensão, como mostra a Figura 6.34.

a) Calcule a tensão de saída sem a presença do dedo.
b) Calcule a tensão de saída quando um dedo toca o botão.

Solução

a) Comece desenhando novamente o circuito da Figura 6.34, substituindo o botão de chamada por seu modelo capacitivo da Figura 6.32. O circuito resultante é mostrado na Figura 6.35. Escreva a equação de corrente para o único nó:

$$C_1 = \frac{d(v - v_s)}{dt} + C_2\frac{dv}{dt} = 0. \qquad (6.70)$$

Rearranje essa equação para obter uma equação diferencial para a tensão de saída $v(t)$:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{C_1}{C_1 + C_2}\frac{dv_s}{dt}. \qquad (6.71)$$

Por fim, integre a Equação 6.71 para determinar a tensão de saída:

$$v(t) = \frac{C_1}{C_1 + C_2}v_s(t) + v(0). \qquad (6.72)$$

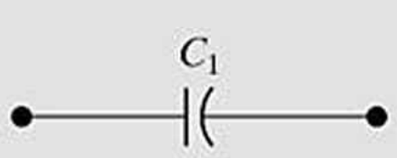


Figura 6.32 ▲ Modelo de capacitor do interruptor de dois eletrodos utilizado em botões de chamada de elevadores.

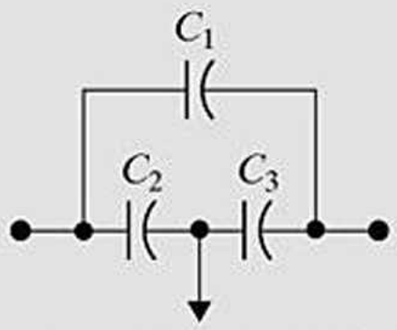


Figura 6.33 ▲ Modelo de circuito de um interruptor de proximidade capacitivo acionado pelo toque de um dedo.

O resultado da Equação 6.72 mostra que o circuito de capacitores em série da Figura 6.35 forma um divisor de tensão exatamente como o circuito de resistores em série visto no Capítulo 3. Em ambos os circuitos divisores de tensão, a tensão de saída não depende dos valores dos componentes, mas apenas da razão entre eles. Aqui, $C_1 = C_2 = 25$ pF e, portanto, a razão do capacitor é $C_1/C_2 = 1$. Assim, a tensão de saída é

$$v(t) = 0{,}5v_s(t) + v(0). \qquad (6.73)$$

O termo constante na Equação 6.73 deve-se à carga inicial no capacitor. Podemos admitir que $v(0) = 0$ V porque o circuito que percebe a tensão de saída elimina o efeito da carga inicial do capacitor. Por conseguinte, a tensão de saída é

$$v(t) = 0{,}5v_s(t). \qquad (6.74)$$

b) Agora, substituímos o botão de chamada da Figura 6.34 pelo modelo do interruptor ativado da Figura 6.33. O resultado é mostrado na Figura 6.36. Mais uma vez, calculamos as correntes que deixam o nó de saída:

$$C_1\frac{d(v - v_s)}{dt} + C_2\frac{dv}{dt} + C_3\frac{dv}{dt} = 0. \qquad (6.75)$$

Rearranjando os termos de forma a escrever uma equação diferencial para $v(t)$, obtemos

$$\frac{dv}{dt} = \frac{C_1}{C_1 + C_2 + C_3}\frac{dv_s}{dt}. \qquad (6.76)$$

Por fim, resolvendo a equação diferencial da Equação 6.76, vemos que

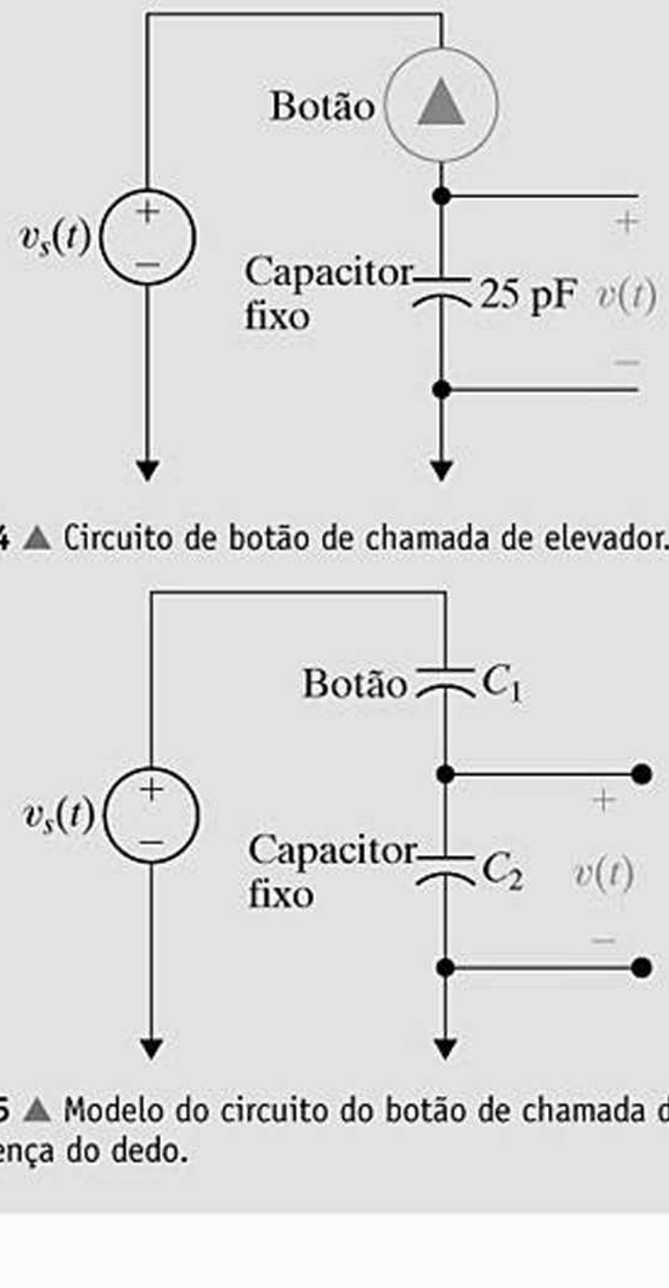


Figura 6.34 ▲ Circuito de botão de chamada de elevador.

Figura 6.35 ▲ Modelo do circuito do botão de chamada de elevador sem a presença do dedo.

$$v(t) = \frac{C_1}{C_1 + C_2 + C_3} v_s(t) + v(0). \qquad (6.77)$$

Se $C_1 = C_2 = C_3 = 25$ pF,

$$v(t) = 0{,}333 v_s(t) + v(0). \qquad (6.78)$$

Como antes, o circuito sensor elimina $v(0)$ e, portanto, a tensão de saída medida é

$$v(t) = 0{,}333 v_s(t). \qquad (6.79)$$

Comparando as equações 6.74 e 6.79 vemos que, quando o botão é acionado, a tensão de saída é um terço da tensão de entrada. Quando o botão não é acionado, a tensão de saída é metade da tensão de entrada. Qualquer queda da tensão de saída é detectada pelo computador de controle do elevador, o que resulta na chegada do elevador ao andar apropriado.

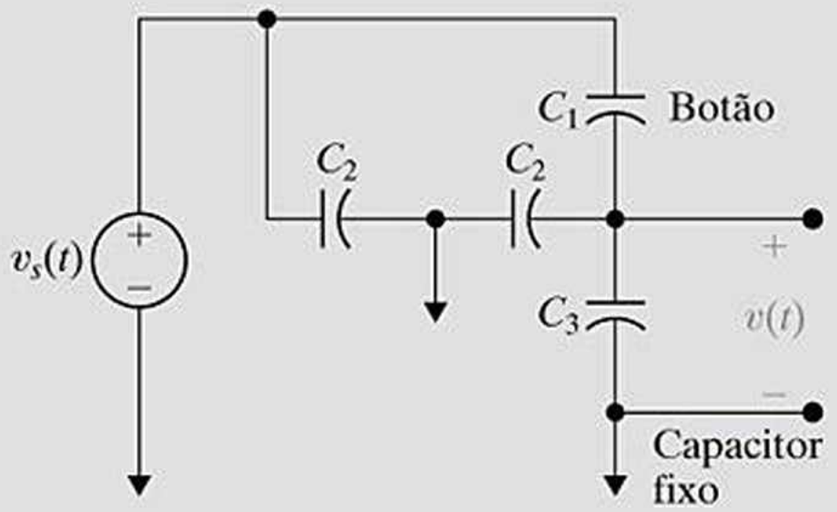


Figura 6.36 ▲ Modelo de circuito de botão de chamada de elevador quando acionado pelo toque do dedo.

NOTA: Avalie o que entendeu dessa "Perspectiva prática" tentando resolver os problemas 6.49 e 6.51, apresentados no final deste capítulo.

Resumo

- *Indutância* é um parâmetro de circuitos lineares que relaciona a tensão induzida por um campo magnético variável com o tempo com a corrente que produz o campo.
- *Capacitância* é um parâmetro de circuitos lineares que relaciona a corrente induzida por um campo elétrico variável com o tempo com a tensão que produz o campo.
- Indutores e capacitores são elementos passivos; eles podem armazenar e fornecer energia, mas não podem gerar nem dissipar energia.
- A potência instantânea nos terminais de um indutor ou capacitor pode ser positiva ou negativa, dependendo de a energia estar sendo fornecida ou extraída do elemento.
- Um indutor:
  - não permite uma variação instantânea em sua corrente terminal
  - permite uma variação instantânea em sua tensão terminal
  - comporta-se como um curto-circuito na presença de uma corrente terminal constante
- Um capacitor:
  - não permite uma variação instantânea em sua tensão terminal
  - permite uma variação instantânea em sua corrente terminal
  - comporta-se como uma malha aberta na presença de uma tensão terminal constante
- As equações para tensão, corrente, potência e energia em indutores e capacitores ideais são dadas na Tabela 6.1.
- Indutores em série ou em paralelo podem ser substituídos por um indutor equivalente. Capacitores em série ou em paralelo podem ser substituídos por um capacitor equivalente. As equações estão resumidas na Tabela 6.2. A Seção 6.3 apresenta uma discussão sobre como lidar com as condições iniciais para circuitos equivalentes em série e em paralelo que envolvam indutores e capacitores.

TABELA 6.1 Equações terminais para indutores e capacitores ideais

Indutores	
$v = L\frac{di}{dt}$	(V)
$i = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\, d\tau + i(t_0)$	(A)
$p = vi = Li\frac{di}{dt}$	(W)
$w = \frac{1}{2}Li^2$	(J)
Capacitores	
$v = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\, d\tau + v(t_0)$	(V)
$i = C\frac{dv}{dt}$	(A)
$p = vi = Cv\frac{dv}{dt}$	(W)
$w = \frac{1}{2}Cv^2$	(J)

TABELA 6.2 Equações para indutores e capacitores ligados em série e em paralelo

Ligados em série
$L_{eq} = L_1 + L_2 + \cdots + L_n$
$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}$
Ligados em paralelo
$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_n}$
$C_{eq} = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$

- *Indutância mútua*, M, é o parâmetro de circuito que relaciona a tensão induzida em um circuito a uma corrente variável com o tempo em outro circuito. Especificamente,

$$v_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + M_{12}\frac{di_2}{dt}$$

$$v_2 = M_{21}\frac{di_1}{dt} + L_2\frac{di_2}{dt},$$

onde v_1 e i_1 são a tensão e a corrente no circuito 1, e v_2 e i_2 são a tensão e a corrente no circuito 2. Para enrolamentos dispostos em núcleos não-magnéticos, $M_{12} = M_{21} = M$.

- A *convenção do ponto* estabelece a polaridade de tensões mutuamente induzidas:

Quando a direção de referência para uma corrente é tal que ela entra no terminal do enrolamento identificado por um ponto, a polaridade de referência da tensão que ela induz no outro enrolamento é positiva em seu terminal identificado pelo ponto.

Ou, alternativamente,

Quando a direção de referência para uma corrente é tal que ela saia do terminal do enrolamento identificado por um ponto, a polaridade de referência da tensão que ela induz no outro enrolamento é negativa em seu terminal identificado pelo ponto.

- A relação entre a auto-indutância de cada enrolamento e a indutância mútua entre enrolamentos é

$$M = k\sqrt{L_1L_2}\,.$$

O coeficiente de acoplamento, k, é uma medida do grau de acoplamento magnético. Por definição, $0 \leq k \leq 1$.

- A energia armazenada em enrolamentos acoplados magneticamente em um meio linear está relacionada com as correntes e indutâncias dos enrolamentos pela relação

$$w = \frac{1}{2}L_1i_1^2 + \frac{1}{2}L_2i_2^2 \pm Mi_1i_2.$$

Problemas

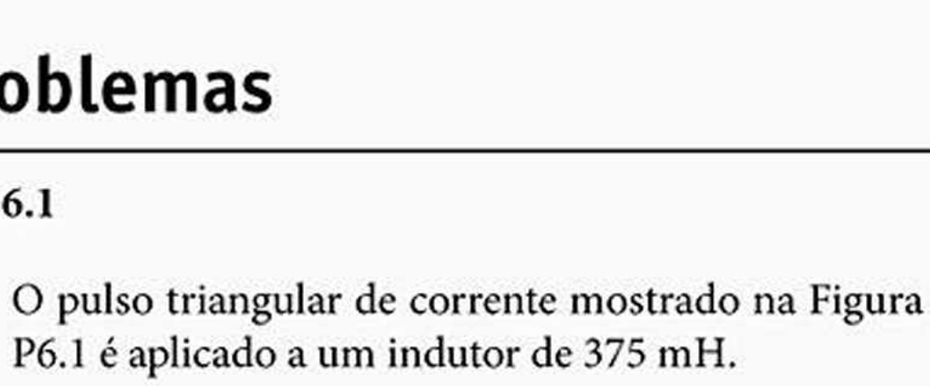
Seção 6.1

6.1* PSPICE O pulso triangular de corrente mostrado na Figura P6.1 é aplicado a um indutor de 375 mH.

a) Escreva as expressões que descrevem $i(t)$ nos quatro intervalos $t < 0$, $0 \leq t \leq 25$ ms, 25 ms $\leq t \leq 50$ ms e $t > 50$ ms.

b) Escreva as expressões para a tensão, potência e energia do indutor. Use a convenção passiva.

Figura P6.1

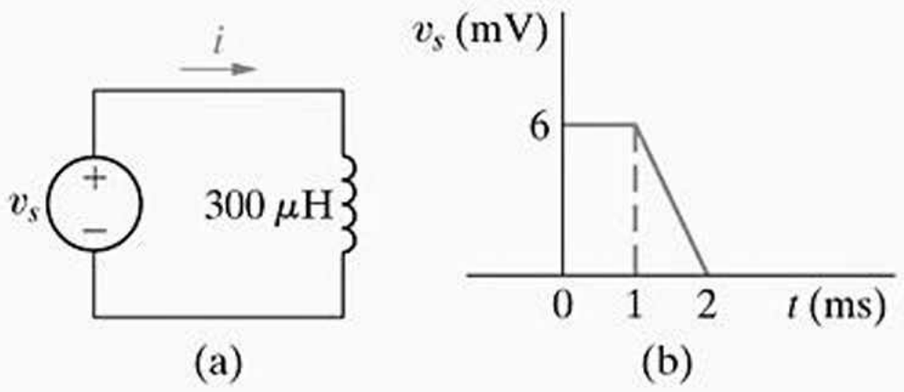


6.2 PSPICE A tensão nos terminais do indutor de 300 μH da Figura P6.2(a) é mostrada na Figura P6.2(b). Sabe-se que a corrente i do indutor é zero para $t \leq 0$.

a) Escreva as expressões para i para $t \geq 0$.

b) Faça um gráfico de i *versus* t para $0 \leq t \leq \infty$.

Figura P6.2

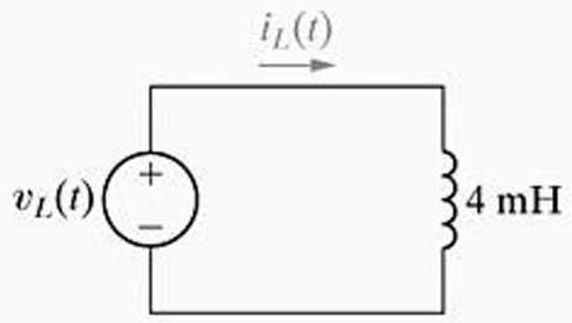


6.3* PSPICE Sabe-se que a corrente no indutor de 4 mH da Figura P6.3 é 2,5 A para $t < 0$. A tensão do indutor para $t \geq 0$ é dada pela expressão

$$v_L(t) = 30e^{-3t}\ \text{mV},\ 0^+ \leq t < \infty$$

Faça um gráfico de $v_L(t)$ e $i_L(t)$ para $0 \leq t < \infty$.

Figura P6.3



6.4 PSPICE Sabe-se que a corrente em um indutor de 100 μH é

$$i_L = 20te^{-5t} \text{ A para } t \geq 0$$

a) Determine a tensão no indutor para $t > 0$. (Suponha a convenção passiva.)

b) Determine a potência (em microwatts) nos terminais do indutor quando $t = 100$ ms.

c) O indutor está absorvendo ou fornecendo potência em 100 ms?

d) Determine a energia (em microjoules) armazenada no indutor em 100 ms.

e) Determine a máxima energia (em microjoules) armazenada no indutor e o instante (em microssegundos) em que ela ocorre.

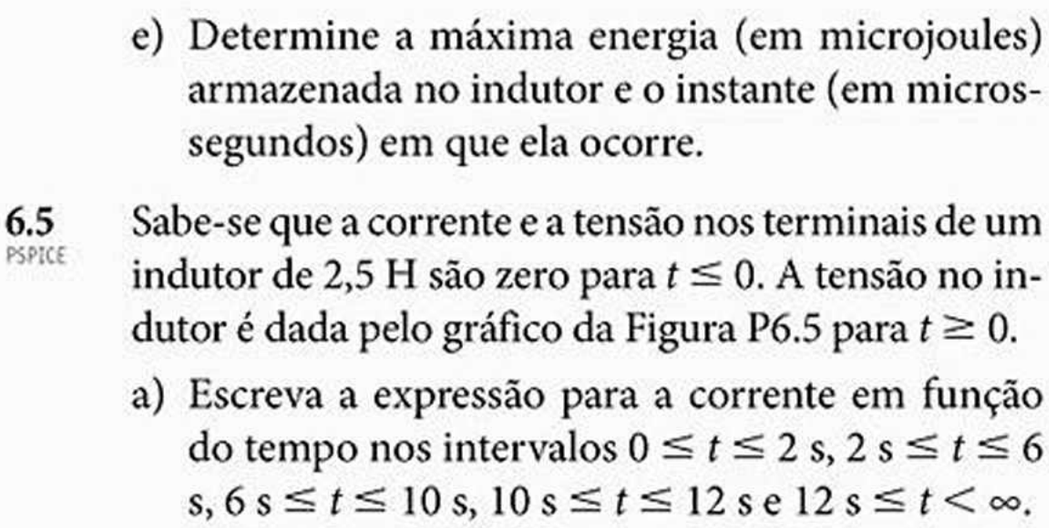
6.5 PSPICE Sabe-se que a corrente e a tensão nos terminais de um indutor de 2,5 H são zero para $t \leq 0$. A tensão no indutor é dada pelo gráfico da Figura P6.5 para $t \geq 0$.

a) Escreva a expressão para a corrente em função do tempo nos intervalos $0 \leq t \leq 2$ s, $2 \text{ s} \leq t \leq 6$ s, $6 \text{ s} \leq t \leq 10$ s, $10 \text{ s} \leq t \leq 12$ s e $12 \text{ s} \leq t < \infty$.

b) Para $t > 0$, qual é a corrente no indutor quando a tensão é zero?

c) Faça um gráfico de i *versus* t para $0 \leq t < \infty$.

Figura P6.5



6.6 PSPICE Sabe-se que a corrente em um indutor de 20 mH é $7 + (15 \text{ sen } 140t - 35 \cos 140t)e^{-20t}$ mA para $t \geq 0$. Admita a convenção passiva.

a) Em que instante de tempo a tensão no indutor é máxima?

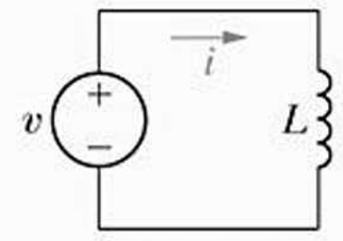
b) Qual é a máxima tensão?

6.7 PSPICE a) Determine a corrente do indutor da Figura P6.7 se $v = 250 \text{ sen } 1.000t$ V, $L = 50$ mH e $i(0) = -5$ A.

b) Faça os gráficos de v, i, p e w *versus* t usando o formato da Figura 6.8. Os gráficos devem abranger um ciclo completo da onda de tensão.

c) Descreva os subintervalos no intervalo de tempo entre 0 e 2π ms quando a potência está sendo armazenada pelo indutor. Repi ta para os subintervalos em que a potência está sendo fornecida pelo indutor.

Figura P6.7



6.8 Sabe-se que a corrente em um indutor de 15 mH é

$$i = 1\text{A}, \qquad t \leq 0;$$
$$i = \text{A}_1 e^{-2.000t} + \text{A}_2 e^{-8.000t} \text{ A}, \; t \geq 0.$$

A tensão no indutor (convenção passiva) é 60 V em $t = 0$.

a) Determine a expressão para a tensão no indutor para $t > 0$.

b) Determine o tempo, maior do que zero, no qual a potência nos terminais do indutor é zero.

6.9 No Problema 6.8, suponha que o valor da tensão no indutor em $t = 0$ seja -300 V em vez de 60 V.

a) Determine as expressões numéricas para i e v para $t \geq 0$.

b) Especifique os intervalos de tempo em que o indutor está armazenando energia e os intervalos de tempo em que o indutor está fornecendo energia.

c) Demonstre que a energia total fornecida pelo indutor é igual à energia total armazenada.

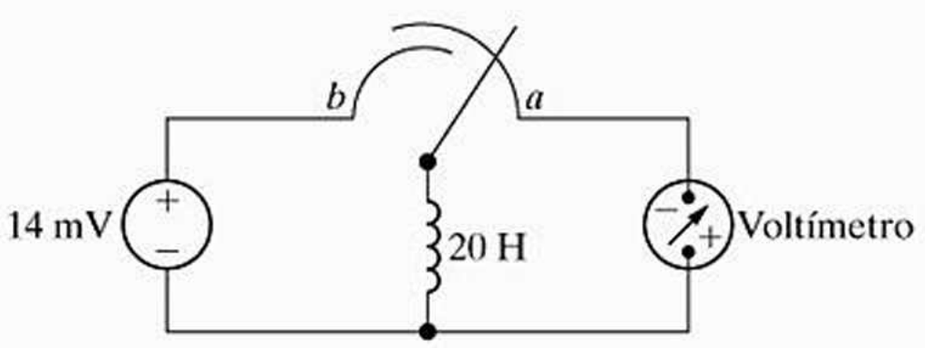
6.10 A corrente em um indutor de 2 H é

$$i = 25 \text{ A}, \qquad t \leq 0;$$
$$i = (B_1 \cos 5t + B_2 \text{ sen } 5t)e^{-t} \text{ A}, \; t \geq 0.$$

A tensão no indutor (convenção passiva) é 100 V em $t = 0$. Calcule a potência nos terminais do indutor em $t = 0{,}5$ s. O indutor está absorvendo ou fornecendo potência?

6.11 Inicialmente não havia nenhuma energia armazenada no indutor de 20 H no circuito da Figura P6.11 quando ele foi ligado aos terminais do voltímetro. Em $t = 0$, o indutor passou instantaneamente para a posição b, onde permaneceu durante 1,2 s antes de voltar instantaneamente para a posição a. O voltímetro de d'Arsonval tem um fundo de escala de 25 V e uma sensibilidade de 1.000 Ω/V. Qual será a leitura do voltímetro no instante em que o interruptor volta à posição a se a inércia do medidor de d'Arsonval for desprezível?

Figura P6.11



6.12 Avalie a integral

$$\int_0^\infty p \, dt$$

para o Exemplo 6.2. Comente o significado do resultado.

6.13 As expressões para tensão, potência e energia deduzidas no Exemplo 6.5 envolveram integração, bem como manipulação de expressões algébricas. Como engenheiro, você não pode aceitar tais resultados só na boa-fé. Isto é, você deve desenvolver o hábito de perguntar a si mesmo, "Esses resultados fazem sentido em termos do comportamento conhecido do circuito que se propõem descrever?" Pensando nisso, teste as expressões do Exemplo 6.5 realizando as seguintes verificações:

a) Verifique as expressões para ver se a tensão não varia bruscamente quando passa de um intervalo de tempo para o seguinte.
b) Examine a expressão da potência em cada intervalo, selecione um tempo dentro do intervalo e verifique se a potência calculada tem valor idêntico ao do produto de v por i, nesse mesmo instante. Por exemplo, teste em 10 μs e 30 μs.
c) Examine a expressão da energia dentro de cada intervalo, selecione um instante dentro do intervalo e verifique se a energia calculada tem valor idêntico ao da expressão $1/2\ Cv^2$. Use 10 μs e 30 μs como instantes de teste.

Seção 6.2

6.14* Um pulso de tensão com a duração de 2 s é aplicado a um capacitor de 0,5 μF. O pulso é descrito pelas seguintes equações:

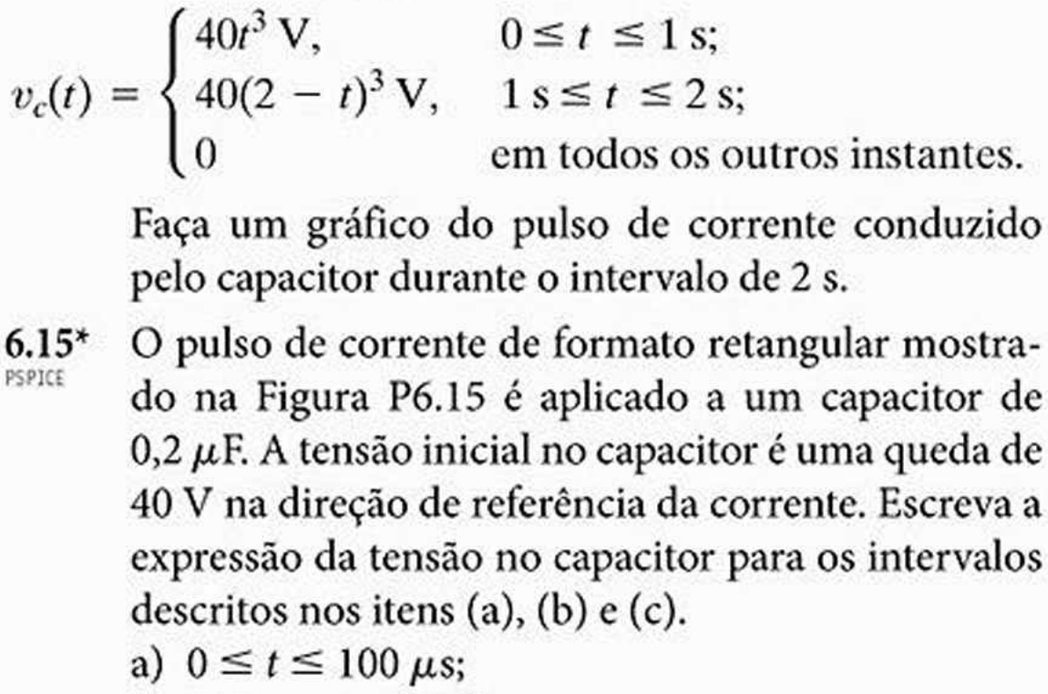
$$v_c(t) = \begin{cases} 40t^3\ \text{V}, & 0 \le t \le 1\ \text{s}; \\ 40(2-t)^3\ \text{V}, & 1\ \text{s} \le t \le 2\ \text{s}; \\ 0 & \text{em todos os outros instantes.} \end{cases}$$

Faça um gráfico do pulso de corrente conduzido pelo capacitor durante o intervalo de 2 s.

6.15* PSPICE O pulso de corrente de formato retangular mostrado na Figura P6.15 é aplicado a um capacitor de 0,2 μF. A tensão inicial no capacitor é uma queda de 40 V na direção de referência da corrente. Escreva a expressão da tensão no capacitor para os intervalos descritos nos itens (a), (b) e (c).

a) $0 \le t \le 100\ \mu$s;
b) $100\ \mu\text{s} \le t \le 300\ \mu$s;
c) $300\ \mu\text{s} \le t < \infty$;
d) Faça um gráfico de $v(t)$ no intervalo $-100\ \mu\text{s} \le t \le 500\ \mu$s.

Figura P6.15



6.16 PSPICE Sabe-se que a tensão nos terminais do capacitor da Figura 6.10 é

$$v = \begin{cases} -30\ \text{V} & t \le 0 \\ 10 - 10e^{-1.000t}(4\cos 3.000t + \operatorname{sen} 3.000t)\ \text{V} & t \ge 0 \end{cases}$$

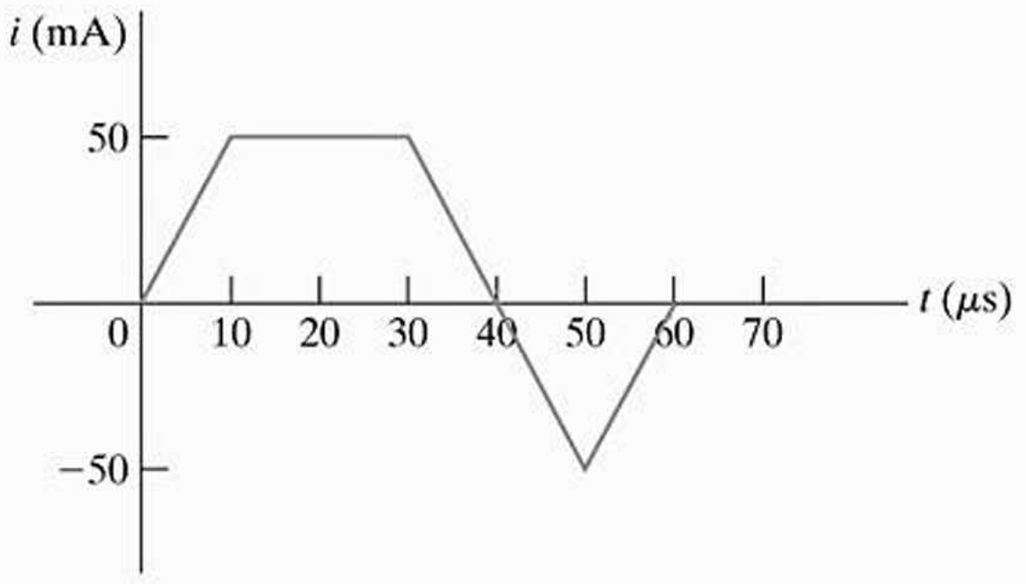
Suponha $C = 0{,}5\ \mu$F.

a) Determine a corrente no capacitor para $t < 0$.
b) Determine a corrente no capacitor para $t > 0$.
c) Há uma variação instantânea da tensão no capacitor em $t = 0$?
d) Há uma variação instantânea da corrente no capacitor em $t = 0$?
e) Qual é a energia (em microjoules) armazenada no capacitor em $t = \infty$?

6.17 PSPICE A corrente mostrada na Figura P6.17 é aplicada a um capacitor de 0,25 μF. A tensão inicial no capacitor é zero.

a) Determine a carga no capacitor em $t = 30\ \mu$s.
b) Determine a tensão no capacitor em $t = 50\ \mu$s.
c) Qual é a energia armazenada no capacitor por essa corrente?

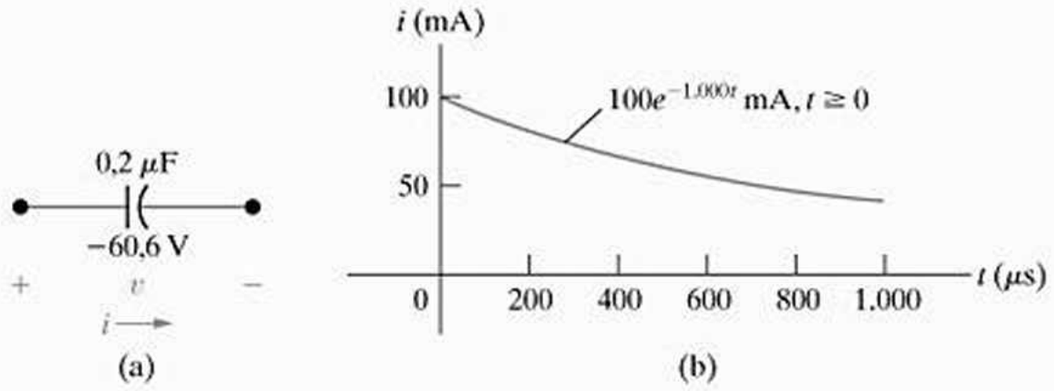
Figura P6.17



6.18 PSPICE A tensão inicial no capacitor de 0,2 μF mostrado na Figura P6.18(a) é − 60,6 V. A forma de onda da corrente no capacitor é mostrada na Figura P6.18(b).

a) Qual é a energia, em microjoules, armazenada no capacitor em $t = 250\ \mu$s?
b) Repita (a) para $t = \infty$.

Figura P6.18



6.19 PSPICE A tensão nos terminais de um capacitor de 0,4 μF é

$$v = \begin{cases} 25\ \text{V}, & t \le 0; \\ A_1 te^{-1.500t} + A_2 e^{-1.500t}\ \text{V}, & t \ge 0; \end{cases}$$

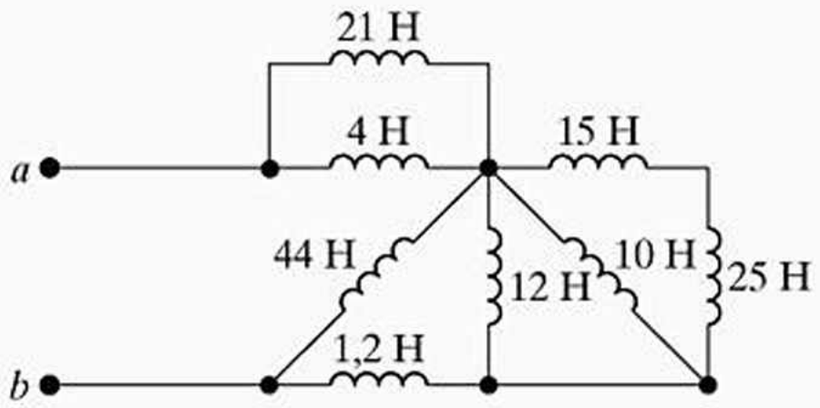
A corrente inicial no capacitor é 90 mA. Admita a convenção passiva.

a) Qual é a energia inicial armazenada no capacitor?
b) Avalie os coeficientes A_1 e A_2.
c) Qual é a expressão para a corrente no capacitor?

Seção 6.3

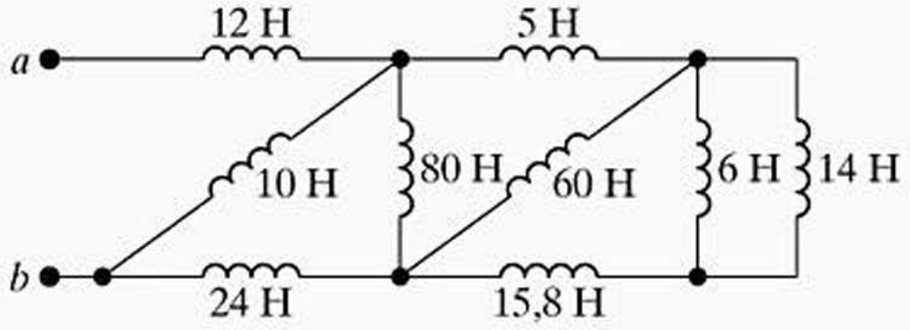
6.20 Suponha que a energia inicial armazenada nos indutores da Figura P6.20 seja zero. Determine a indutância equivalente em relação aos terminais *a*,*b*.

Figura P6.20



6.21* Suponha que a energia inicial armazenada nos indutores da Figura P6.21 seja zero. Determine a indutância equivalente em relação aos terminais *a*,*b*.

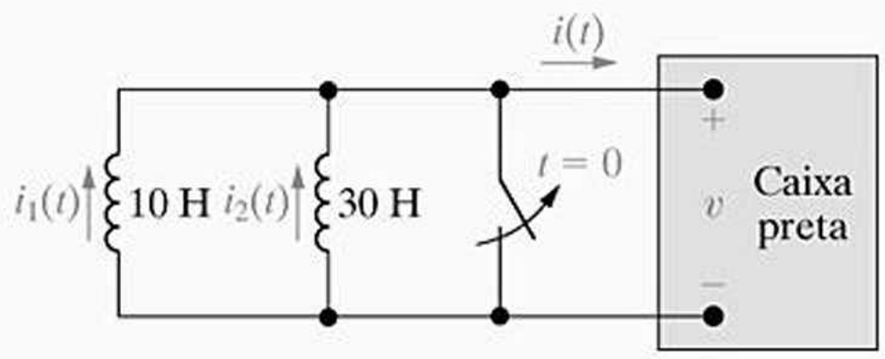
Figura P6.21



6.22* Os dois indutores paralelos da Figura P6.22 estão ligados aos terminais de uma caixa preta em $t = 0$. Sabe-se que a tensão resultante v para $t > 0$ é $-1.800e^{-20t}$ V. Sabe-se também que $i_1(0) = 4$ A e $i_2(0) = -16$ A.

a) Substitua os indutores originais por um indutor equivalente e determine $i(t)$ para $t \geq 0$.
b) Determine $i_1(t)$ para $t \geq 0$.
c) Determine $i_2(t)$ para $t \geq 0$.
d) Qual é a energia fornecida à caixa preta no intervalo de tempo $0 \leq t < \infty$?
e) Qual era a energia armazenada inicialmente nos indutores paralelos?
f) Qual é a energia final armazenada nos indutores ideais?
g) Mostre que suas soluções para i_1 e i_2 estão de acordo com a resposta obtida em (f).

Figura P6.22



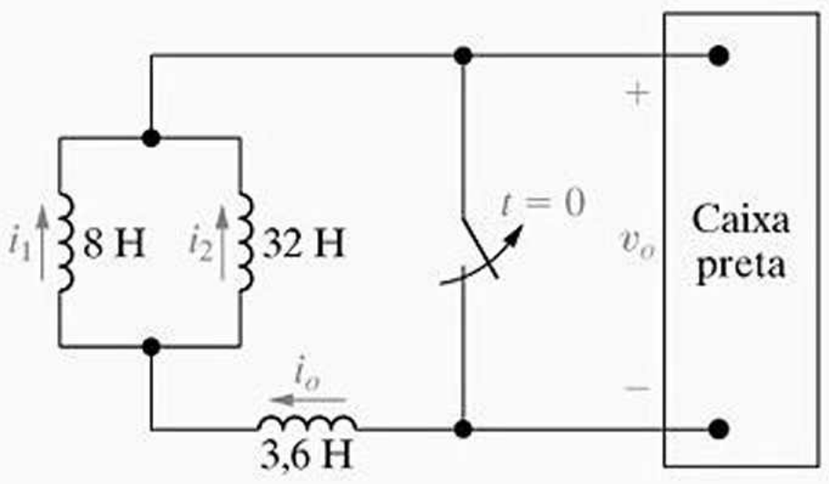
6.23 Os três indutores no circuito da Figura P6.23 estão ligados aos terminais de uma caixa preta em $t = 0$. Sabe-se que a tensão resultante para $t > 0$ é

$$v_o = 1.250e^{-25t} \text{ V}.$$

Se $i_1(0) = 10$ A e $i_2(0) = -5$ A, determine:

a) $i_o(0)$;
b) $i_o(t)$, $t \geq 0$;
c) $i_1(t)$, $t \geq 0$;
d) $i_2(t)$, $t \geq 0$;
e) a energia inicial armazenada nos três indutores;
f) a energia total fornecida à caixa preta e
g) a energia final armazenada nos indutores ideais.

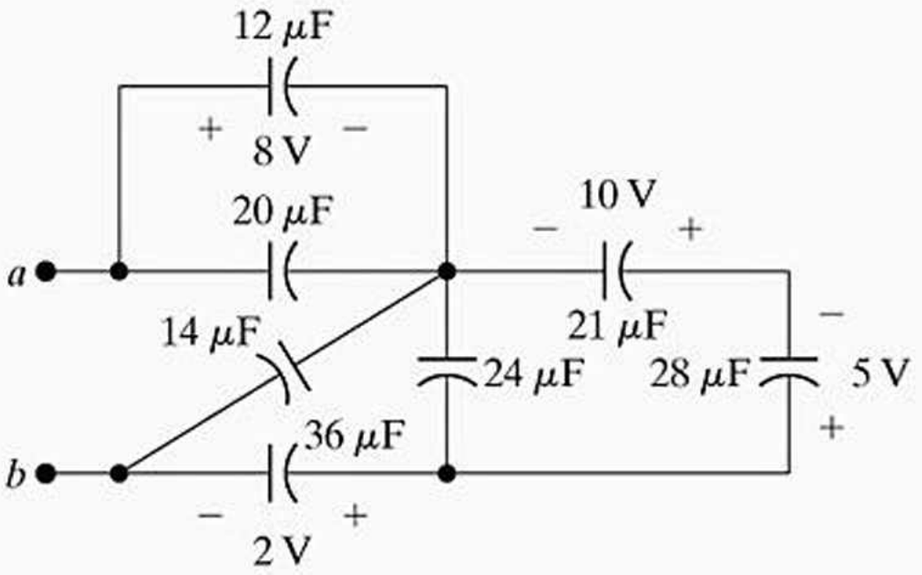
Figura P6.23



6.24 Para o circuito mostrado na Figura P6.23, quantos milissegundos após o interruptor ser aberto a energia fornecida à caixa preta é 80% da energia total fornecida?

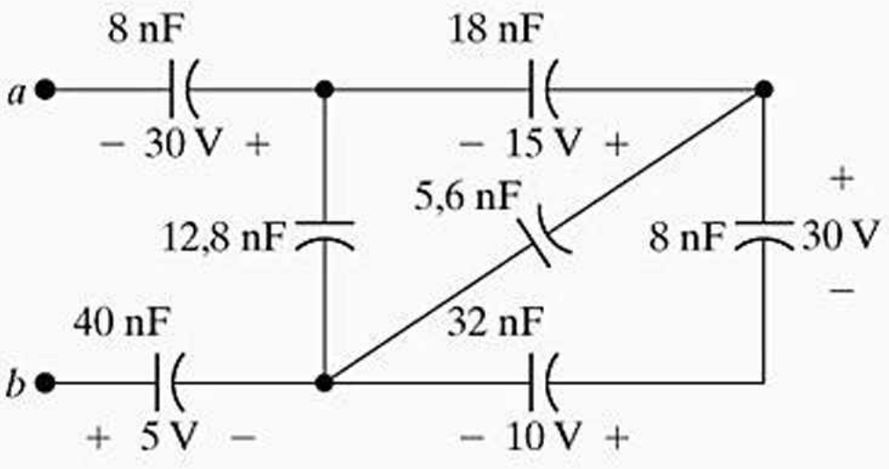
6.25 Determine a capacitância equivalente em relação aos terminais *a*,*b* para o circuito mostrado na Figura P6.25.

Figura P6.25



6.26* Determine a capacitância equivalente em relação aos terminais *a*,*b* para o circuito mostrado na Figura P6.26.

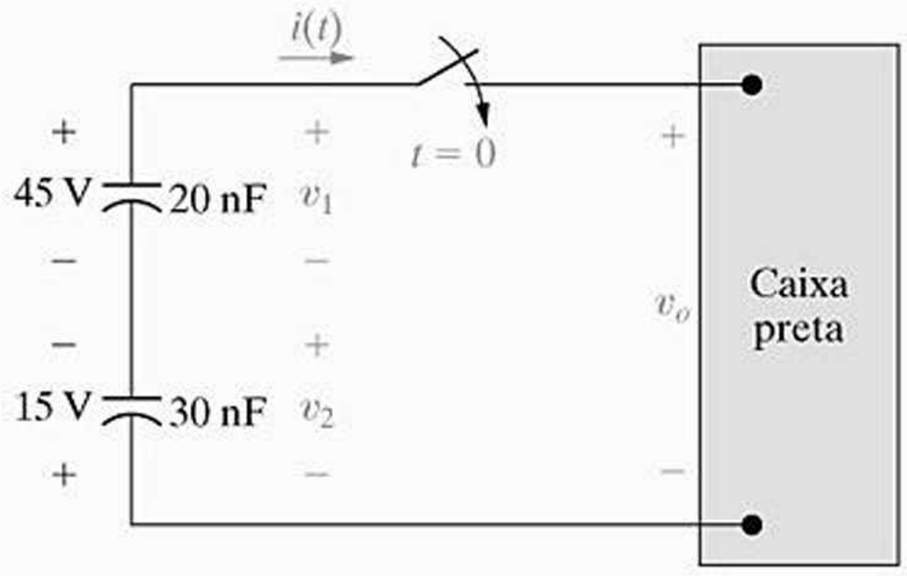
Figura P6.26



6.27* Os dois capacitores ligados em série na Figura P6.27 estão ligados aos terminais de uma caixa preta em $t = 0$. Sabe-se que a corrente resultante $i(t)$ para $t > 0$ é $900e^{-2.500t}\ \mu$A.

a) Substitua os capacitores originais por um capacitor equivalente e determine $v_o(t)$ para $t \geq 0$.
b) Determine $v_1(t)$ para $t \geq 0$.
c) Determine $v_2(t)$ para $t \geq 0$.
d) Qual é a energia fornecida à caixa preta no intervalo de tempo $0 \leq t < \infty$?
e) Qual era a energia inicialmente armazenada nos capacitores em série?
f) Qual é a energia final armazenada nos capacitores ideais?
g) Mostre que as soluções para v_1 e v_2 estão de acordo com a resposta obtida em (f).

Figura P6.27

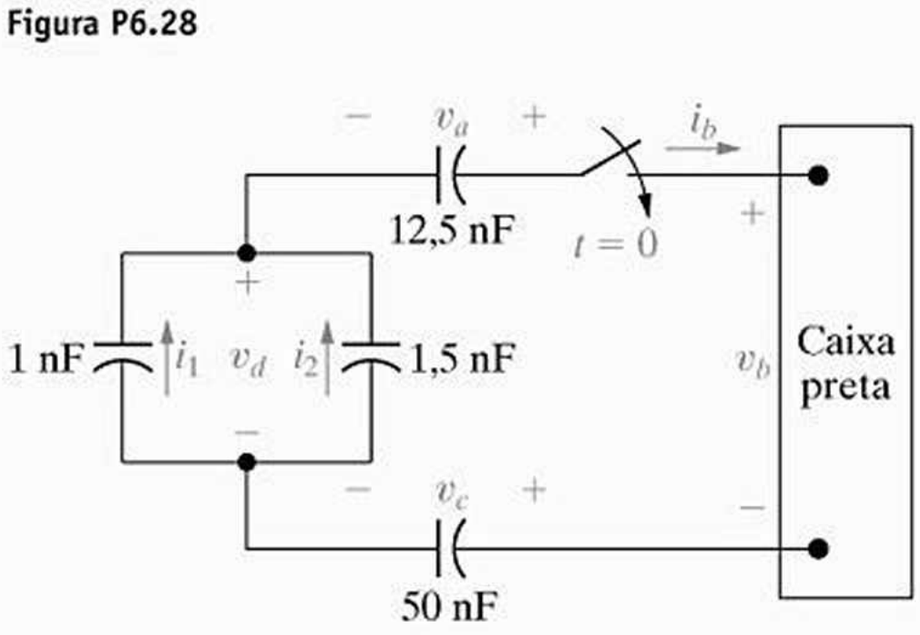


6.28 Os quatro capacitores no circuito da Figura P6.28 estão ligados aos terminais de uma caixa preta em $t = 0$. Sabe-se que a corrente resultante i_b para $t > 0$ é

$$i_b = 50e^{-250t}\ \mu\text{A}$$

Se $v_a(0) = 15$ V, $v_c(0) = -45$ V e $v_d(0) = 40$ V, determine o seguinte para $t \geq 0$: (a) $v_b(t)$, (b) $v_a(t)$, (c) $v_c(t)$, (d) $v_d(t)$, (e) $i_1(t)$ e (f) $i_2(t)$.

Figura P6.28



6.29 Para o circuito da Figura P6.28, calcule

a) a energia inicial armazenada nos capacitores;
b) a energia final armazenada nos capacitores;
c) a energia total fornecida à caixa preta;
d) a porcentagem da energia inicial armazenada que é fornecida à caixa preta e
e) o tempo, em milissegundos, necessário para fornecer 5 μJ à caixa preta.

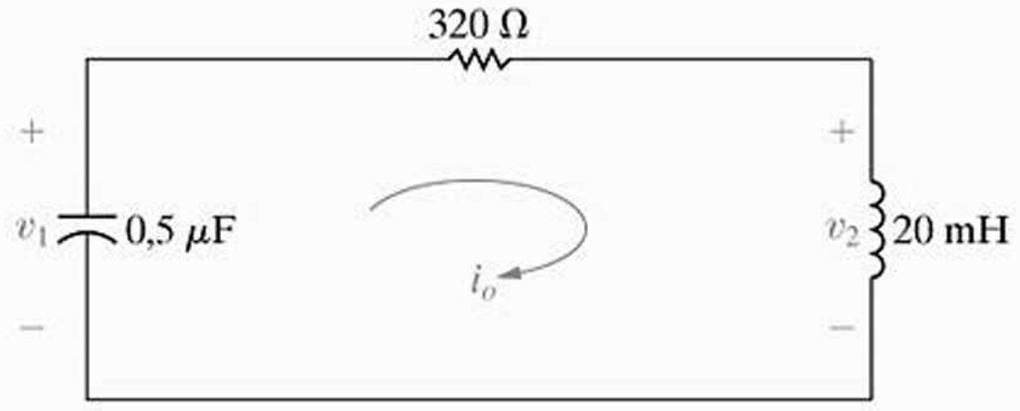
6.30 Determine o circuito equivalente para uma ligação em série de capacitores ideais. Suponha que cada capacitor tem sua própria tensão inicial. Denote essas tensões iniciais por $v_1(t_0)$, $v_2(t_0)$ e assim por diante. (*Sugestão*: some as tensões dos capacitores reconhecendo que a ligação em série obriga a corrente em cada capacitor a ser a mesma.)

6.31 Determine o circuito equivalente para uma ligação em paralelo de capacitores ideais. Suponha que a tensão inicial nos capacitores em paralelo seja $v(t_0)$. (*Sugestão*: some as correntes dos capacitores reconhecendo que a ligação em paralelo obriga a tensão em cada capacitor a ser a mesma.)

Seções 6.1–6.3

6.32 Sabe-se que a corrente no circuito da Figura P6.32 é $i_o = 50e^{-8.000t}(\cos 6.000t + 2 \operatorname{sen} 6.000t)$ mA para $t \geq 0^+$. Determine $v_1(0^+)$ e $v_2(0^+)$.

Figura P6.32

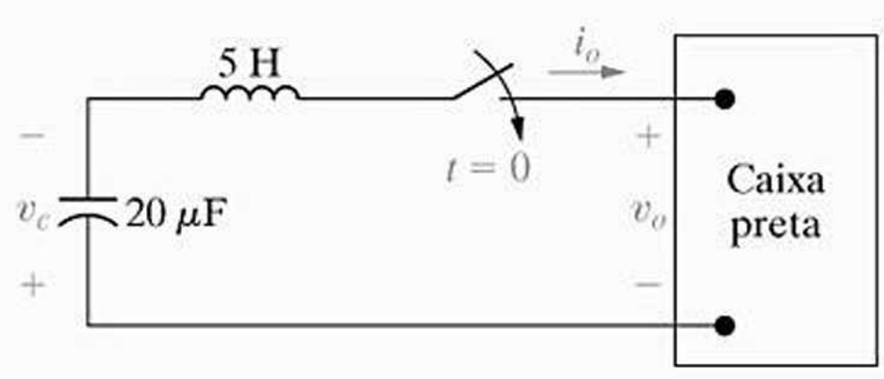


6.33 Em $t = 0$, um capacitor e um indutor ligados em série são ligados aos terminais de uma caixa preta, como mostra a Figura P6.33. Para $t > 0$, sabe-se que

$$i_o = -e^{-80t}\operatorname{sen} 60t\ \text{A}.$$

Se $v_c(0) = -300$ V, determine v_o para $t \geq 0$.

Figura P6.33



Seção 6.4

6.34* Não há nenhuma energia armazenada no circuito da Figura P6.34 no momento em que a chave é aberta.

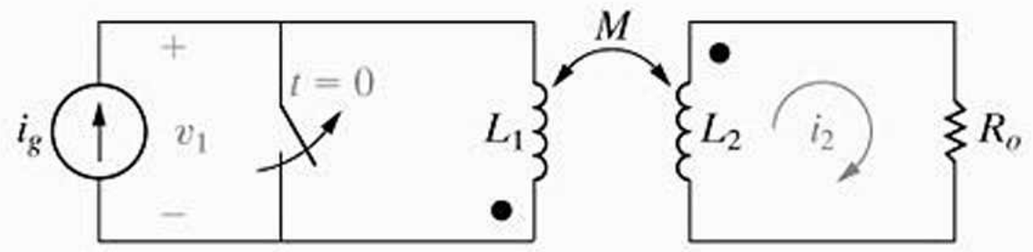
a) Escreva a equação diferencial que descreve o comportamento de i_2 se $L_1 = 10$ H, $L_2 = 40$ H, $M = 5$ H e $R_o = 90\ \Omega$.

b) Mostre que, quando $i_g = 10e^{-t} - 10$ A, $t \geq 0$, a equação diferencial encontrada em (a) é satisfeita quando $i_2 = e^{-t} - 5e^{-2,25t}$ A, $t \geq 0$.

c) Determine a expressão para a tensão v_1 nos terminais da fonte de corrente.

d) Qual é o valor inicial de v_1? Isso faz sentido em termos do comportamento conhecido do circuito?

Figura P6.34



6.35 Considere v_o a tensão no indutor de 16 H no circuito da Figura 6.25. Suponha que v_o seja positiva no ponto. Como no Exemplo 6.6, $i_g = 16 - 16e^{-5t}$ A.

a) Você pode determinar v_o sem ter de diferenciar as expressões para as correntes? Explique.

b) Escreva a expressão para v_o.

c) Verifique sua resposta em (b) usando as indutâncias e as derivadas adequadas de correntes.

6.36 Considere v_g a tensão nos terminais da fonte de corrente no circuito da Figura 6.25. A referência para v_g é positiva no terminal superior da fonte de corrente.

a) Determine v_g em função do tempo quando $i_g = 16 - 16e^{-5t}$ A.

b) Qual é o valor inicial de v_g?

c) Determine a expressão para a potência desenvolvida pela fonte de corrente.

d) Qual é a potência fornecida pela fonte de corrente quando t é infinito?

e) Calcule a potência dissipada em cada resistor quando t é infinito.

6.37 a) Mostre que as equações diferenciais deduzidas em (a) do Exemplo 6.6 podem ser rearranjadas da seguinte forma:

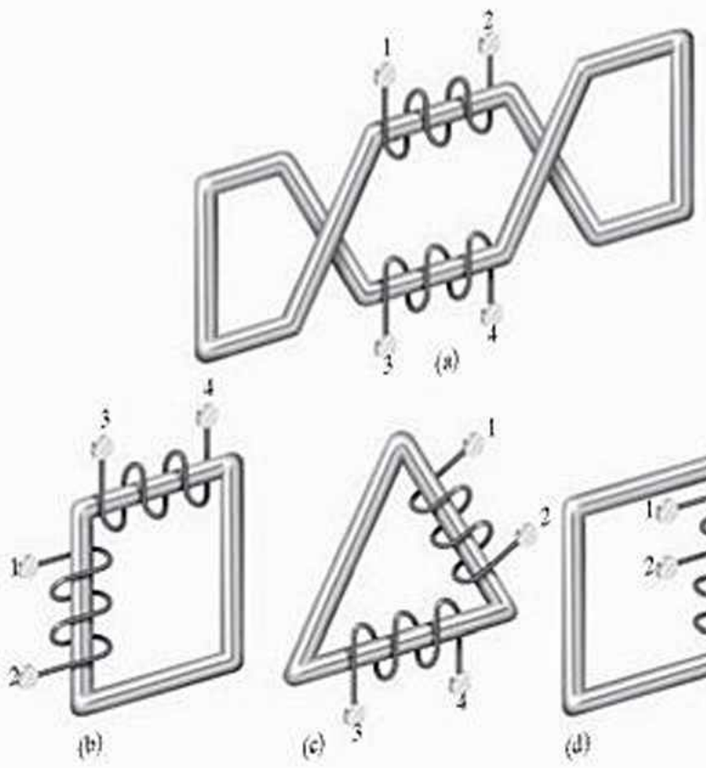
$$4\frac{di_1}{dt} + 25i_1 - 8\frac{di_2}{dt} - 20i_2 = 5i_g - 8\frac{di_g}{dt};$$

$$-8\frac{di_1}{dt} - 20i_1 + 16\frac{di_2}{dt} + 80i_2 = 16\frac{di_g}{dt}.$$

b) Mostre que as soluções para i_1 e i_2 dadas em (b) do Exemplo 6.6 satisfazem as equações diferenciais dadas na parte (a) deste problema.

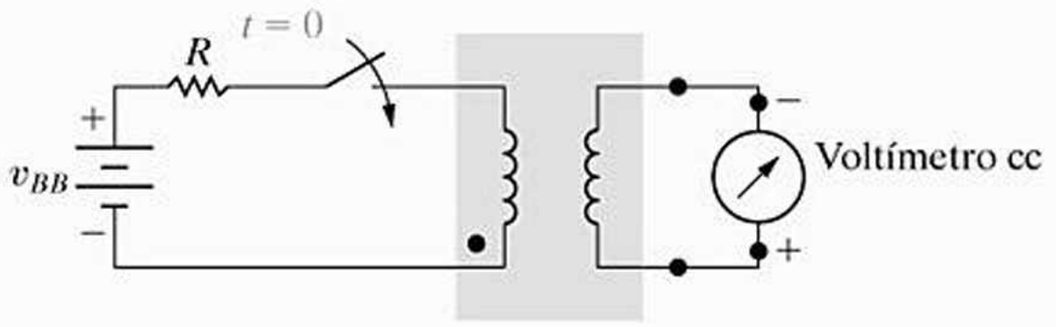
6.38 A montagem física de quatro pares de enrolamentos acoplados magneticamente é mostrada na Figura P6.38. Suponha que o fluxo magnético esteja confinado ao material do núcleo em cada estrutura. Mostre duas possíveis localizações para a marcação de pontos em cada par de enrolamentos.

Figura P6.38



6.39 As marcações de polaridade em dois enrolamentos devem ser determinadas experimentalmente. O dispositivo para tal determinação é mostrado na Figura P6.39. Suponha que o terminal ligado ao terminal negativo da bateria receba a marcação de polaridade como mostra a figura. Quando o interruptor está fechado, o voltímetro cc sofre uma deflexão positiva. Em que lugar do enrolamento ligado ao voltímetro deve ser colocada a marcação de polaridade?

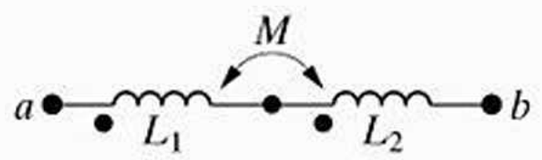
Figura P6.39



6.40 a) Mostre que os dois enrolamentos acoplados da Figura P6.40 podem ser substituídos por um único enrolamento com uma indutância de $L_{ab} = L_1 + L_2 + 2M$. (*Sugestão*: expresse v_{ab} em função de i_{ab}.)

b) Mostre que, se os terminais do enrolamento L_2 forem invertidos, $L_{ab} = L_1 + L_2 - 2M$.

Figura P6.40



6.41 a) Mostre que os dois enrolamentos acoplados magneticamente na Figura P6.41 podem ser substituídos por um único enrolamento com uma indutância de

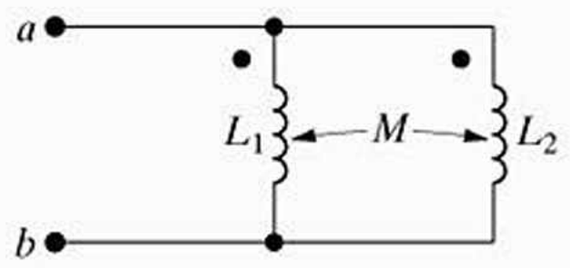
$$L_{ab} = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}.$$

(*Sugestão*: Considere i_1 e i_2 correntes de malha no sentido horário nas 'janelas' da esquerda e da direita da Figura P6.41, respectivamente. Some as tensões ao longo das duas malhas. Na malha 1, considere v_{ab} a tensão aplicada não especificada. Resolva para di_1/dt em função de v_{ab}.)

b) Mostre que, se a polaridade magnética do enrolamento 2 for invertida, então

$$L_{ab} = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}.$$

Figura P6.41



Seção 6.5

6.42* Dois enrolamentos acoplados magneticamente são enrolados em um núcleo não-magnético. A auto-indutância do enrolamento 1 é 250 mH, a indutância mútua é 100 mH, o coeficiente de acoplamento é 0,5 e a estrutura física dos enrolamentos é tal que $\mathcal{P}_{11} = \mathcal{P}_{22}$.

a) Determine L_2 e a razão N_1/N_2 do número de espiras.
b) Se $N_1 = 1.000$, qual é o valor de $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$?

6.43* As auto-indutâncias de dois enrolamentos acoplados magneticamente são $L_1 = 400\ \mu$H e $L_2 = 900\ \mu$H. O meio de acoplamento é não-magnético. Se o enrolamento 1 tiver 250 espiras e o enrolamento 2, 500 espiras, determine $\mathcal{P}_{11}$ e $\mathcal{P}_{21}$ (em nanowebers por ampère) quando o coeficiente de acoplamento for 0,75.

6.44 Dois enrolamentos magneticamente acoplados têm auto-indutâncias de 52 mH e 13 mH, respectivamente. A indutância mútua entre eles é 19,5 mH.

a) Qual é o coeficiente de acoplamento?
b) Qual é o maior valor que M pode ter?
c) Suponha que a estrutura física desses enrolamentos acoplados seja tal que $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$. Qual é a razão N_1/N_2 entre o número de espiras se N_1 for o número de espiras do enrolamento de 52 mH?

6.45 As auto-indutâncias de dois enrolamentos acoplados magneticamente são 288 mH e 162 mH, respectivamente. O enrolamento de 288 mH tem 1.000 espiras e o coeficiente de acoplamento é 1/3. O meio de acoplamento é não-magnético. Quando o enrolamento 1 é excitado com o enrolamento 2 em aberto, o fluxo que atravessa somente o enrolamento 1 é 50% maior do que o fluxo que atravessa o enrolamento 2.

a) Quantas espiras tem o enrolamento 2?
b) Qual é o valor de $\mathcal{P}_2$ em nanowebers por ampère?
c) Qual é o valor de $\mathcal{P}_{11}$ em nanowebers por ampère?
d) Qual é a razão (ϕ_{22}/ϕ_{12})?

6.46 a) Partindo da Equação 6.59, mostre que o coeficiente de acoplamento também pode ser expresso como

$$k = \sqrt{\left(\frac{\phi_{21}}{\phi_1}\right)\left(\frac{\phi_{12}}{\phi_2}\right)}.$$

b) Com base nas frações ϕ_{21}/ϕ_1 e ϕ_{12}/ϕ_2, explique por que k é menor do que 1,0.

6.47* As auto-indutâncias dos enrolamentos da Figura 6.30 são $L_1 = 25$ mH e $L_2 = 100$ mH. Se o coeficiente de acoplamento for 0,8, calcule a energia armazenada no sistema em milijoules quando (a) $i_1 = 10$ A, $i_2 = 15$ A; (b) $i_1 = -10$ A, $i_2 = -15$ A; (c) $i_1 = -10$ A, $i_2 = 15$ A e (d) $i_1 = 10$ A, $i_2 = -15$ A.

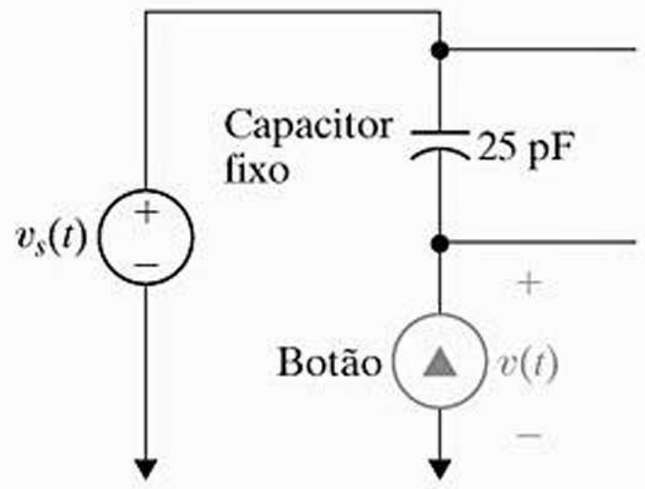
6.48* O coeficiente de acoplamento do Problema 6.47 é aumentado para 1,0.

a) Se i_1 for igual a 10 A, qual será o valor de i_2 que resultará em energia armazenada zero?
b) Há qualquer valor fisicamente viável de i_2 que possa fazer a energia armazenada ser negativa?

Seções 6.1–6.5

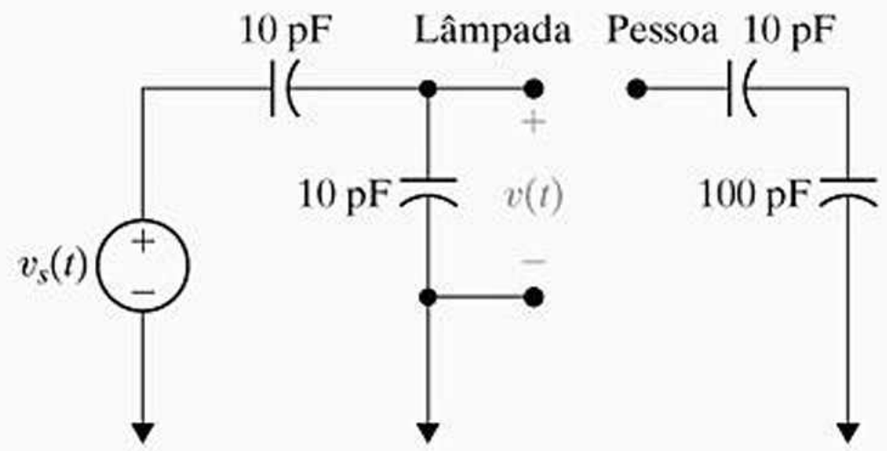
6.49* PERSPECTIVA PRÁTICA Reconsidere o exemplo da "Perspectiva prática" posicionando, desta vez, o botão na parte inferior do circuito divisor, como mostra a Figura P6.49. Calcule a tensão de saída $v(t)$ quando um dedo está presente.

Figura P6.49



6.50 PERSPECTIVA PRÁTICA Algumas lâmpadas de mesa são fabricadas para ligar e desligar quando sua base é tocada. Elas usam uma variação do circuito interruptor capacitivo de um único terminal discutido na Perspectiva Prática. A Figura P6.50 mostra um modelo de circuito para tal lâmpada. Calcule a variação na tensão $v(t)$ quando uma pessoa toca a lâmpada. Suponha que todos os capacitores estejam inicialmente descarregados.

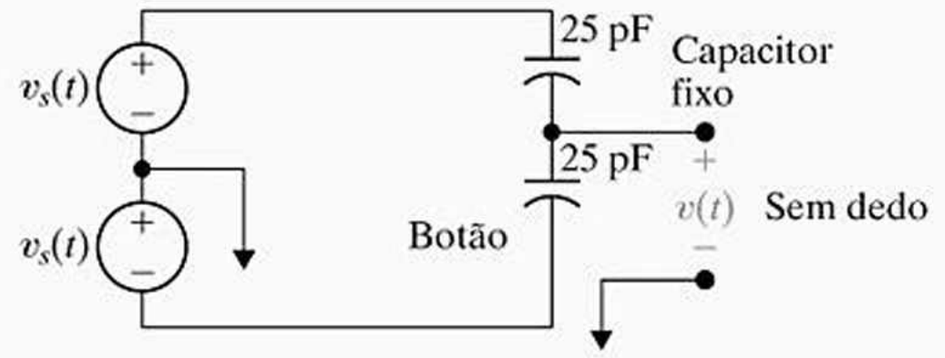
Figura P6.50



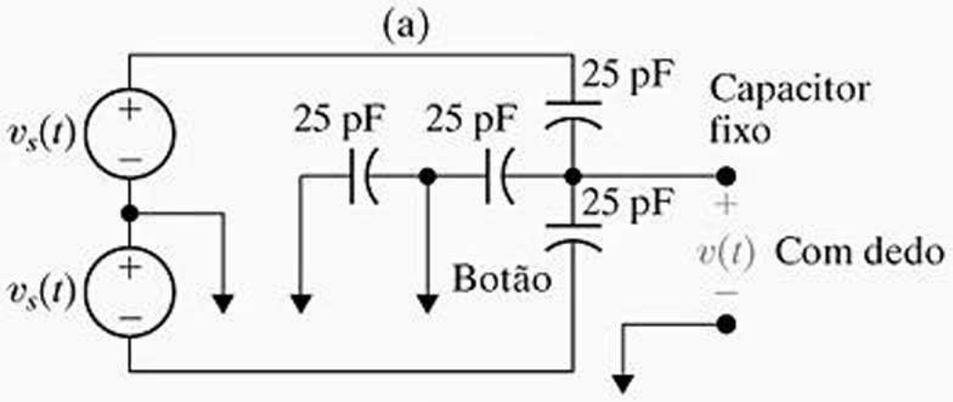
6.51*
PERSPECTIVA PRÁTICA

No exemplo da "Perspectiva prática", calculamos a tensão de saída quando o botão do elevador é o capacitor situado na parte superior de um divisor de tensão. No Problema 6.49, calculamos a tensão quando o botão é o capacitor situado na parte inferior do divisor e obtivemos o mesmo resultado! Talvez você esteja imaginando se isso é válido para todos os divisores de tensão. Calcule a diferença de tensão (sem dedo e com dedo) para os circuitos das Figuras P6.51(a) e (b), que utilizam duas fontes de tensão idênticas.

Figura P6.51



(a)



(b)

CAPÍTULO

7

Resposta de circuitos *RL* e *RC* de primeira ordem

SUMÁRIO DO CAPÍTULO

7.1 **Resposta natural de um circuito *RL***
7.2 **Resposta natural de um circuito *RC***
7.3 **Resposta a um degrau de circuitos *RL* e *RC***
7.4 **Solução geral para respostas a um degrau e natural**
7.5 **Chaveamento seqüencial**
7.6 **Resposta indefinidamente crescente**
7.7 **Amplificador-integrador**

✔ OBJETIVOS DO CAPÍTULO

1 Saber determinar a resposta natural de circuitos *RL* e *RC*.
2 Saber determinar a resposta a um degrau de circuitos *RL* e *RC*.
3 Saber analisar circuitos com chaveamento seqüencial.
4 Saber analisar circuitos de amp op que contenham resistores e um único capacitor.

No Capítulo 6, observamos que um importante atributo de indutores e capacitores é sua capacidade de armazenar energia. Agora, estamos aptos a determinar as correntes e tensões que surgem quando a energia é fornecida ou recebida por um indutor ou capacitor em resposta a uma variação abrupta em uma fonte de corrente ou tensão cc. Neste capítulo, analisaremos circuitos compostos somente por resistores e indutores ou capacitores (mas não ambos). Por uma questão de brevidade, essas configurações são denominadas *circuitos RL* (resistor-indutor) e *RC* (resistor-capacitor).

Nossa análise de circuitos *RL* e *RC* será dividida em três fases. Na primeira fase, consideramos as correntes e tensões que surgem quando a energia armazenada em um indutor ou capacitor é repentinamente fornecida a uma rede resistiva. Isso acontece quando o indutor ou capacitor é desligado abruptamente de sua fonte cc. Assim, podemos reduzir o circuito a uma das duas formas equivalentes mostradas na Figura 7.1. As correntes e tensões que surgem nessa configuração são denominadas *resposta natural* do circuito, para deixar bem claro que é a natureza do circuito em si, e não as fontes externas de excitação, que determina seu comportamento.

Na segunda fase de nossa análise, consideraremos as correntes e as tensões que surgem quando a energia está sendo recebida por um indutor ou capacitor por causa da aplicação repentina de uma fonte de tensão ou corrente cc. Essa resposta é denominada *resposta ao degrau*. O processo para determinar a resposta natural e ao degrau é o mesmo; por isso, na terceira fase de nossa análise, desenvolveremos um método geral que pode ser usado para determinar a resposta de circuitos *RL* e *RC* a qualquer variação abrupta em uma fonte de tensão ou corrente cc.

A Figura 7.2 mostra as quatro possibilidades para a configuração geral de circuitos *RL* e *RC*. Observe que, quando não há nenhuma fonte independente no circuito, a tensão de Thévenin ou a corrente de Norton é zero e o circuito se reduz aos mostrados na Figura 7.1; isto é, temos um problema de resposta natural.

Circuitos *RL* e *RC* também são conhecidos como *circuitos de primeira ordem* porque suas tensões e correntes são descritas por equações diferenciais de primeira ordem. Independentemente da complexidade aparente de um circuito, se ele puder ser reduzido a um equivalente de Thévenin ou de Norton ligado aos terminais de um indutor ou capacitor equivalente, é um circuito de primeira ordem. (Observe que, se existirem vários indutores ou capacitores no circuito original, eles devem ser interligados de modo que possam ser substituídos por um único elemento equivalente.)

Após apresentarmos as técnicas para analisar respostas naturais e ao degrau de circuitos de primeira ordem, discutiremos alguns casos especiais de interesse. O primeiro é o de chaveamento seqüencial, que envolve circuitos em que o chaveamento pode ocorrer em dois ou mais instantes no tempo. Em seguida vem a resposta indefinidamente crescente. Por fim, analisaremos um circuito útil denominado amplificador-integrador.

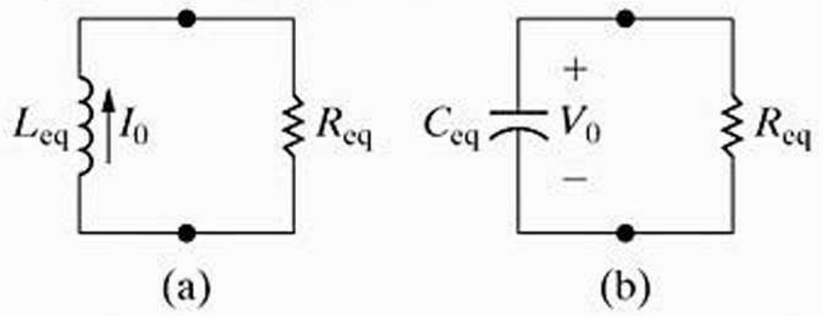


Figura 7.1 ▲ Duas formas de circuitos para a resposta natural. (a) Circuito *RL*. (b) Circuito *RC*.

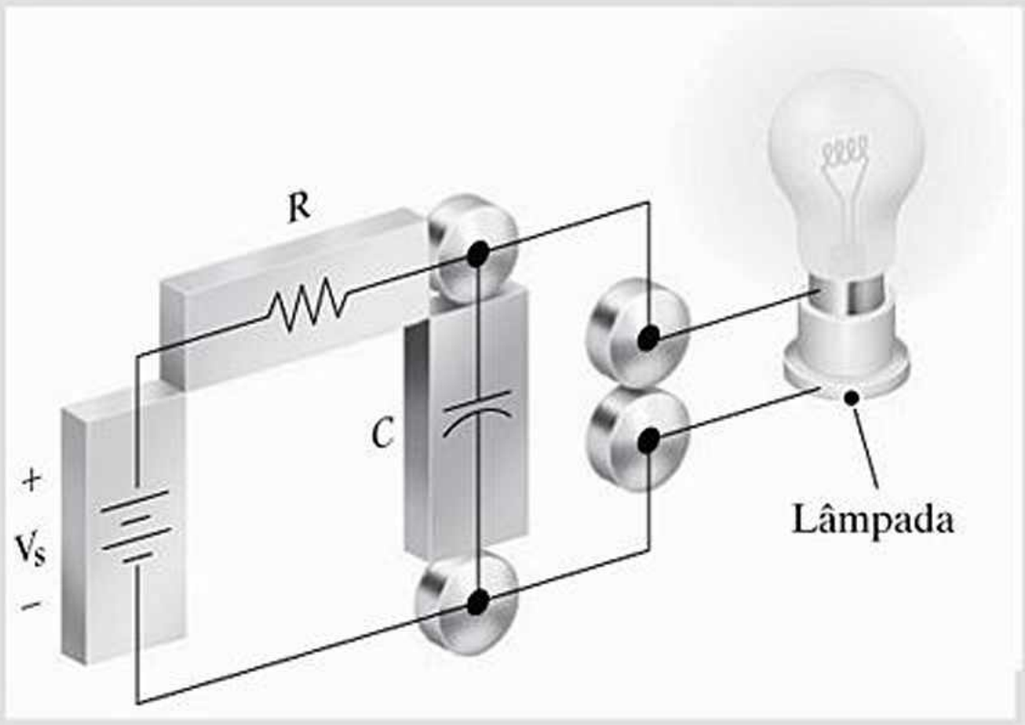
Perspectiva prática

Circuito de luz intermitente

É bem provável que você consiga imaginar muitas aplicações diferentes que requerem uma luz intermitente. Uma máquina fotográfica utilizada para tirar fotografias em condições de baixa intensidade de luz emprega uma luz brilhante, ou flash, para iluminar a cena por um tempo apenas suficiente para registrar a imagem em filme. De modo geral, a câmera não pode tirar outra fotografia até que o circuito que cria o flash, ou luz intermitente, seja 'recarregado'.

Outras aplicações usam luzes intermitentes como dispositivos de segurança em torres de antenas, canteiros de obras e áreas de segurança. Ao projetar circuitos para produzir uma luz intermitente, o engenheiro deve saber quais são os requisitos da aplicação. Por exemplo, o engenheiro projetista tem de saber se a luz será controlada manualmente, por meio de um interruptor (como no caso da câmera fotográfica), ou se ela será repetida automaticamente a uma taxa predeterminada. Além disso, ele precisa saber se a luz intermitente é um acessório permanente (como em uma antena) ou uma instalação temporária (como em um canteiro de obras). Outra pergunta que precisa ser respondida é se a fonte de potência estará imediatamente disponível.

Muitos dos circuitos usados hoje para controlar luzes intermitentes são baseados em circuitos eletrônicos e fogem do escopo deste livro. Ainda assim, podemos ter uma idéia do processo de raciocínio envolvido no projeto de um circuito de luz intermitente ao analisar um circuito composto por uma fonte de tensão cc, um resistor, um capacitor e uma lâmpada projetada para emitir um facho de luz intermitente a uma tensão crítica. Tal circuito é mostrado na figura e nós o discutiremos no final do capítulo.



7.1 Resposta natural de um circuito *RL*

A resposta natural de um circuito *RL* pode ser mais bem descrita em termos do circuito mostrado na Figura 7.3. Admitimos que a fonte independente de corrente gere uma corrente constante de I_s A e que a chave esteja fechada há longo tempo. Definiremos a expressão *longo tempo* com mais exatidão adiante nesta seção. Por enquanto, ela significa que todas as correntes e tensões atingiram um valor constante. Portanto, somente correntes constantes, ou cc, podem existir no circuito imediatamente antes de a chave ser aberta e, por conseguinte, o indutor se comporta como um curto-circuito ($L di/dt = 0$) antes do fornecimento ao circuito resistivo da energia armazenada nele.

Como o indutor se comporta como um curto-circuito, a tensão no ramo indutivo é zero e não pode haver nenhuma corrente nem em R_0, nem em R. Assim, toda a corrente da fonte I_s percorre o ramo indutivo. Para determinar a resposta natural, é necessário determinar a tensão e a corrente nos terminais do resistor após a chave ter sido aberta, isto é, após a fonte ter sido desligada e o indutor começar a fornecer energia ao circuito externo. Se considerarmos $t = 0$ o instante em que a chave é aberta, o problema passa a ser determinar

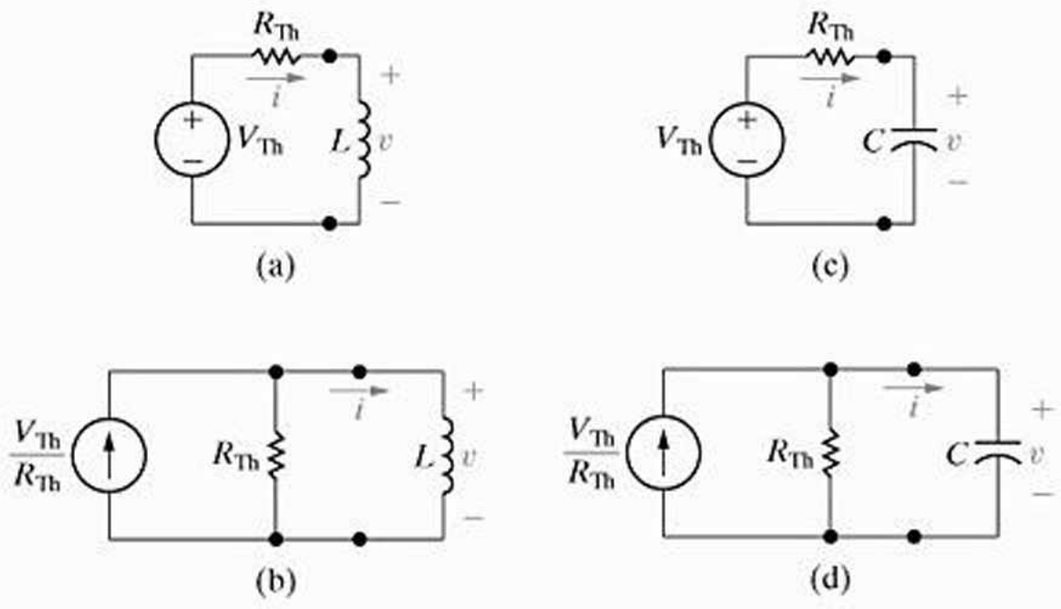


Figura 7.2 ▲ Quatro possíveis circuitos de primeira ordem.
(a) Um indutor ligado a um equivalente de Thévenin.
(b) Um indutor ligado a um equivalente de Norton.
(c) Um capacitor ligado a um equivalente de Thévenin.
(d) Um capacitor ligado a um equivalente de Norton.

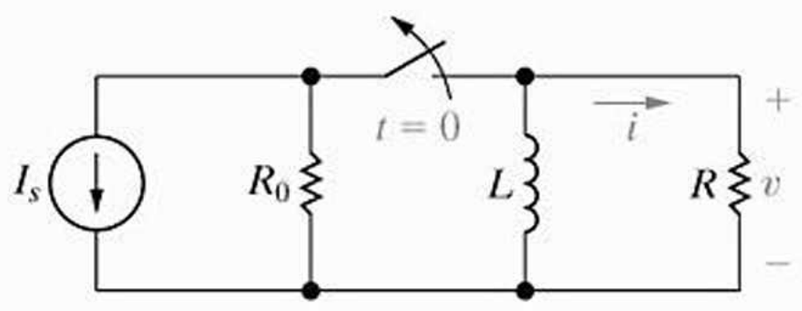


Figura 7.3 ▲ Circuito *RL*.

$v(t)$ e $i(t)$ para $t \geq 0$. Para $t \geq 0$, o circuito da Figura 7.3 se reduz ao mostrado na Figura 7.4.

Cálculo da expressão da corrente

Para determinar $i(t)$, usamos a lei das tensões de Kirchhoff para obter uma expressão que envolva i, R e L. Somando as tensões ao longo do caminho fechado, temos

$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0, \tag{7.1}$$

onde usamos a convenção passiva. A Equação 7.1 é conhecida como equação diferencial de primeira ordem porque contém termos que envolvem a derivada ordinária da incógnita, isto é, di/dt. A ordem de derivação mais alta que aparece na equação é 1; daí o termo *primeira ordem*.

Podemos avançar mais um pouco na descrição dessa equação. Os coeficientes da equação, R e L, são constantes; isto é, não são funções da variável dependente i, nem da variável independente t. Assim, a equação também pode ser descrita como uma equação diferencial ordinária com coeficientes constantes.

Para resolver a Equação 7.1, dividimos ambos os lados por L, transferimos o termo que envolve i para o lado direito e, então, multiplicamos por um tempo diferencial dt. O resultado é

$$\frac{di}{dt}dt = -\frac{R}{L}i\,dt. \tag{7.2}$$

Em seguida, reconhecemos o lado esquerdo da Equação 7.2 como uma variação diferencial na corrente i, isto é, di. Agora, dividimos todos os termos por i e obtemos

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L}dt. \tag{7.3}$$

Obtemos uma expressão explícita para i como uma função de t integrando ambos os lados da Equação 7.3. Usando x e y como variáveis de integração, temos

$$\int_{i(t_0)}^{i(t)} \frac{dx}{x} = -\frac{R}{L}\int_{t_0}^{t} dy, \tag{7.4}$$

na qual $i(t_0)$ é a corrente correspondente ao tempo t_0 e $i(t)$ é a corrente correspondente ao tempo t. Aqui, $t_0 = 0$. Portanto, executando a integração indicada, obtemos

$$\ln\frac{i(t)}{i(0)} = -\frac{R}{L}t. \tag{7.5}$$

Com base na definição de logaritmo natural,

$$i(t) = i(0)e^{-(R/L)t}. \tag{7.6}$$

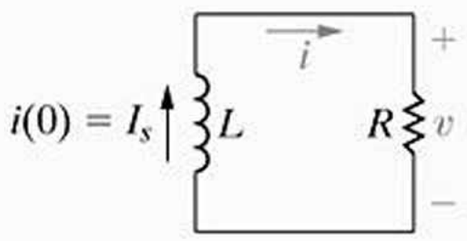


Figura 7.4 ▲ Circuito mostrado na Figura 7.3, para $t \geq 0$.

Lembre-se de que no Capítulo 6 afirmamos que não pode ocorrer uma variação instantânea de corrente em um indutor. Portanto, no primeiro instante após a chave ter sido aberta, a corrente no indutor permanece inalterada. Se usarmos 0^- para indicar o tempo imediatamente anterior ao chaveamento e 0^+ para o tempo imediatamente após o chaveamento, então

$$i(0^-) = i(0^+) = I_0,$$

(Corrente inicial do indutor)

onde, como na Figura 7.1, I_0 é a corrente inicial no indutor. A corrente inicial no indutor está orientada na direção de referência de i. Daí, a Equação 7.6 torna-se

$$i(t) = I_0e^{-(R/L)t}, \quad t \geq 0, \tag{7.7}$$

(Resposta natural de um circuito *RL*)

o que mostra que a corrente começa no valor inicial I_0 e diminui exponencialmente tendendo a zero à medida que t aumenta. A Figura 7.5 mostra essa resposta.

Derivamos a tensão no resistor da Figura 7.4 por uma aplicação direta de lei de Ohm:

$$v = iR = I_0Re^{-(R/L)t}, \quad t \geq 0^+. \tag{7.8}$$

Observe que, em contraste com a expressão para a corrente mostrada na Equação 7.7, a tensão é definida somente para $t > 0$, e não em $t = 0$. A razão é que ocorre uma variação abrupta na tensão em $t = 0$. Observe que, para $t < 0$, a derivada da corrente é zero, portanto a tensão também é zero. (Esse resultado decorre de $v = Ldi/dt = 0$.) Assim,

$$v(0^-) = 0, \tag{7.9}$$

$$v(0^+) = I_0R, \tag{7.10}$$

onde $v(0^+)$ é obtida da Equação 7.8 com $t = 0^+$.[1] Com essa variação instantânea, o valor da tensão em $t = 0$ é desconhecido. Por isso, usamos $t \geq 0^+$ para definir a região de validade para essas soluções.

Calculamos a potência dissipada no resistor de qualquer uma das seguintes expressões:

$$p = vi, \quad p = i^2R \quad \text{ou} \quad p = \frac{v^2}{R}. \tag{7.11}$$

Seja qual for a forma usada, a expressão resultante pode ser reduzida a

$$p = I_0^2Re^{-2(R/L)t}, \quad t \geq 0^+. \tag{7.12}$$

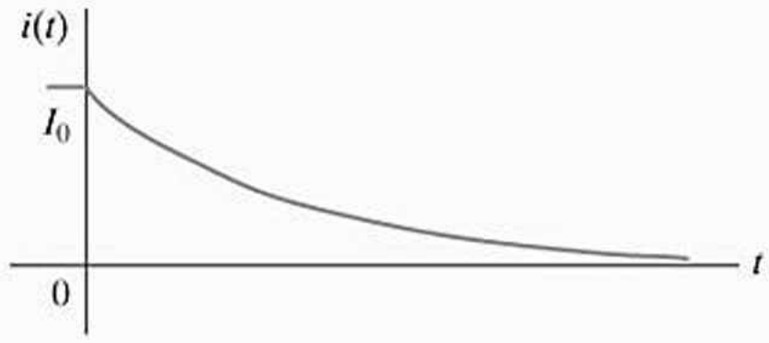


Figura 7.5 ▲ Corrente para o circuito mostrado na Figura 7.4.

[1] Podemos definir as expressões 0^- e 0^+ mais formalmente. A expressão $x(0^-)$ refere-se ao limite da variável x quando $t \to 0$ pela esquerda, ou a partir de tempos negativos. A expressão $x(0^+)$ refere-se ao limite da variável x quando $t \to 0$ pela direita, ou a partir de tempos positivos.

A energia fornecida ao resistor durante qualquer intervalo de tempo após a chave ter sido aberta é

$$w = \int_0^t p\,dx = \int_0^t I_0^2 R e^{-2(R/L)x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2(R/L)} I_0^2 R(1 - e^{-2(R/L)t})$$

$$= \frac{1}{2} L I_0^2 (1 - e^{-2(R/L)t}), \quad t \geq 0. \tag{7.13}$$

Observe que, pela Equação 7.13, à medida que t tende ao infinito, a energia dissipada no resistor se aproxima da energia inicial armazenada no indutor.

O significado da constante de tempo

As expressões para $i(t)$ (Equação 7.7) e $v(t)$ (Equação 7.8) incluem um termo da forma $e^{-(R/L)t}$. O coeficiente de t — a saber, R/L — determina a taxa à qual a corrente ou tensão se aproxima de zero. A recíproca dessa razão é a *constante de tempo* do circuito,

$$\tau = \text{constante de tempo} = \frac{L}{R}. \tag{7.14}$$

(Constante de tempo para o circuito *RL*)

Usando o conceito de constante de tempo, escrevemos as expressões para corrente, tensão, potência e energia como

$$i(t) = I_0 e^{-t/\tau},\ t \geq 0, \tag{7.15}$$

$$v(t) = I_0 R e^{-t/\tau},\ t \geq 0^+, \tag{7.16}$$

$$p = I_0^2 R e^{-2t/\tau},\ t \geq 0^+, \tag{7.17}$$

$$w = \frac{1}{2} L I_0^2 (1 - e^{-2t/\tau}), \quad t \geq 0. \tag{7.18}$$

A constante de tempo é um parâmetro importante para circuitos de primeira ordem e, portanto, vale a pena mencionar várias de suas características. Em primeiro lugar, é conveniente imaginar o tempo transcorrido após o chaveamento em termos de múltiplos inteiros de τ. Assim, uma constante de tempo após o indutor ter começado a fornecer sua energia armazenada ao resistor, a corrente foi reduzida a e^{-1}, ou aproximadamente 0,37 de seu valor inicial.

A Tabela 7.1 dá o valor de $e^{-t/\tau}$ para múltiplos inteiros de τ de 1 a 10. Observe que, quando o tempo transcorrido excede cinco constantes de tempo, a corrente é menos de 1% de seu valor inicial. Assim, às vezes dizemos que em cinco constantes de tempo após o chaveamento ter ocorrido, para a maioria das finalidades práticas, as correntes e tensões alcançam seus valores finais. Para circuitos com uma única constante de tempo (circuitos de primeira ordem) com 1% de precisão, a expressão um *longo tempo* implica que transcorreram cinco ou mais constantes de tempo. Assim, a existência de corrente no circuito *RL* mostrado na Figura 7.1(a) é um evento momentâneo e é denominada *resposta transitória* do circuito. A resposta que existe depois de um longo tempo após o chaveamento é denominada *resposta de regime permanente*. Então, a expressão *um longo tempo* também significa o tempo que leva para o circuito alcançar seu regime permanente.

Qualquer circuito de primeira ordem é caracterizado, em parte, pelo valor de sua constante de tempo. Se não tivermos nenhum método para calcular a constante de tempo de tal circuito (talvez por não conhecermos os valores de seus componentes), podemos determinar seu valor a partir do gráfico da resposta natural do circuito. Isso porque outra importante característica da constante de tempo é que ela corresponde ao tempo que seria necessário para a corrente alcançar seu valor final se continuasse a variar de acordo com sua taxa de variação inicial. Para ilustrar, calculamos di/dt em 0^+ e admitimos que a corrente continua a variar a essa taxa:

$$\frac{di}{dt}(0^+) = -\frac{R}{L} I_0 = -\frac{I_0}{\tau}. \tag{7.19}$$

Agora, se i começar de I_0 e diminuir a uma taxa constante de I_0/τ ampères por segundo, a expressão para i torna-se

$$i = I_0 - \frac{I_0}{\tau} t. \tag{7.20}$$

A Equação 7.20 indica que i alcançaria seu valor final (zero) em τ segundos. A Figura 7.6 mostra como essa interpretação gráfica é útil para estimar a constante de tempo de um circuito a partir de um gráfico de sua resposta natural. Esse gráfico poderia ser gerado em um osciloscópio que medisse a corrente de saída. Traçando a tangente à curva da resposta natural em $t = 0$ e lendo o valor no ponto onde a tangente intercepta o eixo do tempo, temos o valor de τ.

TABELA 7.1 Valor de $e^{-t/\tau}$ para t igual a múltiplos inteiros de τ

t	$e^{-t/\tau}$	t	$e^{-t/\tau}$
τ	$3{,}6788 \times 10^{-1}$	6τ	$2{,}4788 \times 10^{-3}$
2τ	$1{,}3534 \times 10^{-1}$	7τ	$9{,}1188 \times 10^{-4}$
3τ	$4{,}9787 \times 10^{-2}$	8τ	$3{,}3546 \times 10^{-4}$
4τ	$1{,}8316 \times 10^{-2}$	9τ	$1{,}2341 \times 10^{-4}$
5τ	$6{,}7379 \times 10^{-3}$	10τ	$4{,}5400 \times 10^{-5}$

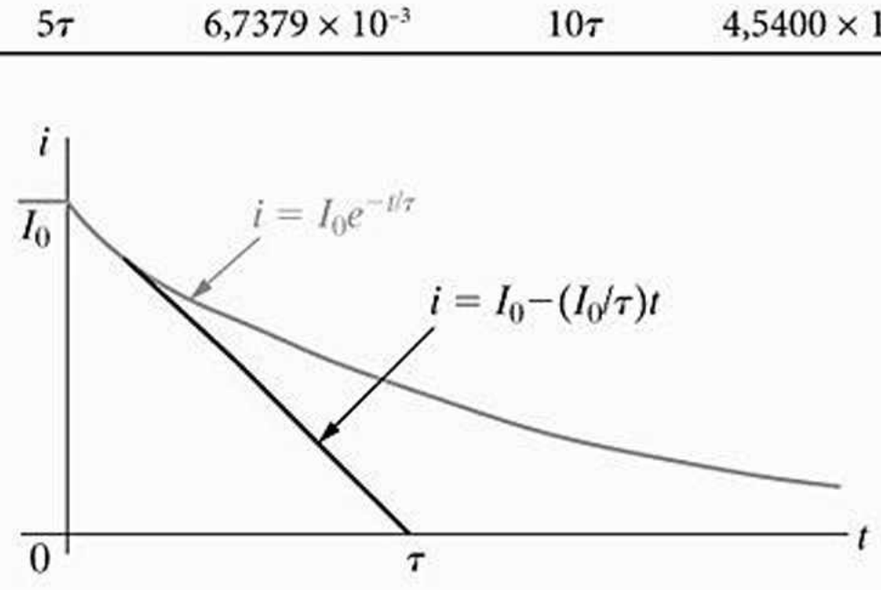


Figura 7.6 ▲ Interpretação gráfica da constante de tempo do circuito *RL* mostrado na Figura 7.4.

O cálculo da resposta natural de um circuito *RL* pode ser resumido da seguinte forma:

1. Determine a corrente inicial, I_0, que passa pelo indutor.
2. Calcule a constante de tempo do circuito, $t = L/R$.
3. Use a Equação 7.15, $I_0e^{-t/\tau}$, para gerar $i(t)$ a partir de I_0 e τ.

(Cálculo da resposta natural de circuito *RL*)

Todos os outros cálculos de interesse decorrem do conhecimento de $i(t)$. Os exemplos 7.1 e 7.2 ilustram os cálculos numéricos associados à resposta natural de um circuito *RL*.

Exemplo 7.1 Determinação da resposta natural de um circuito *RL*

A chave no circuito mostrado na Figura 7.7 esteve fechada por um longo tempo antes de ser aberta em $t = 0$. Determine

a) $i_L(t)$ para $t \geq 0$,

b) $i_o(t)$ para $t \geq 0^+$,

c) $v_o(t)$ para $t \geq 0^+$,

d) a porcentagem da energia total armazenada no indutor de 2 H que é dissipada no resistor de 10 Ω.

Solução

a) A chave esteve fechada por um longo tempo antes de $t = 0$ e, portanto, sabemos que a tensão no indutor deve ser zero em $t = 0^-$. Logo, a corrente inicial no indutor é 20 A em $t = 0^-$. Assim, $i_L(0^+)$ também é 20 A, pois a corrente não pode sofrer uma variação instantânea em um indutor. Substituímos o circuito resistivo ligado aos terminais do indutor por um único resistor de 10 Ω:

$$R_{eq} = 2 + (40 \,||\, 10) = 10\ \Omega.$$

A constante de tempo do circuito é L/R_{eq} ou 0,2 s, o que resulta na expressão para a corrente no indutor

$$i_L(t) = 20e^{-5t}\ \text{A}, \qquad t \geq 0.$$

b) Determinamos a corrente no resistor de 40 Ω mais facilmente usando divisão de corrente; isto é,

$$i_o = -i_L \frac{10}{10 + 40}.$$

Observe que essa expressão é válida para $t \geq 0^+$ porque $i_o = 0$ em $t = 0^-$. O indutor comporta-se como um curto-circuito antes de a chave ser aberta, produzindo uma variação instantânea na corrente i_o. Então,

$$i_o(t) = -4e^{-5t}\ \text{A}, \quad t \geq 0^+.$$

c) Determinamos a tensão v_o pela aplicação direta da lei de Ohm:

$$v_o(t) = 40i_o = -160e^{-5t}\ \text{V}, \quad t \geq 0^+.$$

d) A potência dissipada no resistor de 10 Ω é

$$p_{10\Omega}(t) = \frac{v_o^2}{10} = 2.560e^{-10t}\ \text{W}, \qquad t \geq 0^+.$$

A energia total dissipada no resistor de 10 Ω é

$$w_{10\Omega}(t) = \int_0^\infty 2.560e^{-10t}\,dt = 256\ \text{J}.$$

A energia inicial armazenada no indutor de 2 H é

$$w(0) = \frac{1}{2}Li^2(0) = \frac{1}{2}(2)(400) = 400\ \text{J}.$$

Portanto, a porcentagem de energia dissipada no resistor de 10 Ω é

$$\frac{256}{400}(100) = 64\%.$$

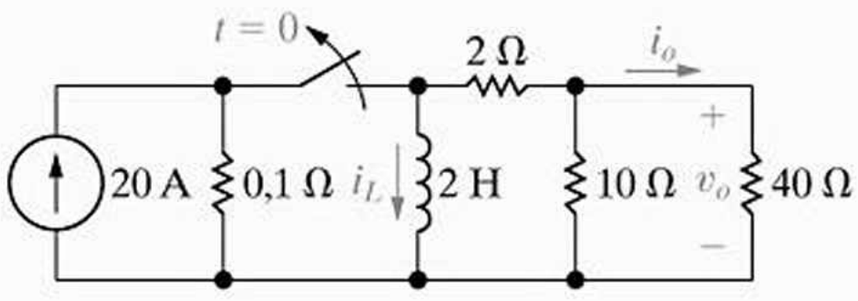


Figura 7.7 ▲ Circuito para o Exemplo 7.1.

Exemplo 7.2 Determinação da resposta natural de um circuito *RL* com indutores em paralelo

No circuito mostrado na Figura 7.8, as correntes iniciais nos indutores L_1 e L_2 foram estabelecidas por fontes não mostradas. A chave é aberta em $t = 0$.

a) Determine i_1, i_2 e i_3 para $t \geq 0$.

b) Calcule a energia inicial armazenada nos indutores em paralelo.

c) Determine qual é a energia armazenada nos indutores quando $t \to \infty$.

d) Mostre que a energia total fornecida à rede resistiva é igual à diferença entre os resultados obtidos em (b) e (c).

Solução

a) Para determinar as correntes i_1, i_2 e i_3 é preciso conhecer a tensão $v(t)$. Podemos determiná-la, com facilidade, se reduzirmos o circuito da Figura 7.8 à forma equivalente mostrada na Figura 7.9. Os indutores em paralelo são substituídos por uma indutância equivalente de 4 H,

transportando uma corrente inicial de 12 A. A rede resistiva se reduz a uma única resistência de 8 Ω. Por conseguinte, o valor inicial de $i(t)$ é 12 A e a constante de tempo é 4/8 ou 0,5 s. Portanto,

$$i(t) = 12e^{-2t}\ \text{A}, \qquad t \geq 0.$$

Agora, $v(t)$ é simplesmente o produto $8i$, portanto,

$$v(t) = 96e^{-2t}\ \text{V}, \qquad t \geq 0^+.$$

O circuito mostra que $v(t) = 0$ em $t = 0^-$, portanto, a expressão para $v(t)$ é válida para $t \geq 0^+$. Após obter $v(t)$, podemos calcular i_1, i_2 e i_3:

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{1}{5}\int_0^t 96e^{-2x}\,dx - 8 \\ &= 1{,}6 - 9{,}6e^{-2t}\ \text{A}, \quad t \geq 0. \\ i_2 &= \frac{1}{20}\int_0^t 96e^{-2x}\,dx - 4 \\ &= -1{,}6 - 2{,}4e^{-2t}\ \text{A}, \quad t \geq 0, \\ i_3 &= \frac{v(t)}{10}\frac{15}{25} = 5{,}76e^{-2t}\ \text{A}, \quad t \geq 0^+. \end{aligned}$$

Observe que as expressões para as correntes nos indutores, i_1 e i_2, são válidas para $t \geq 0$, ao passo que a expressão para a corrente no resistor, i_3, é válida para $t \geq 0^+$.

b) A energia inicial armazenada nos indutores é

$$w = \frac{1}{2}(5)(64) + \frac{1}{2}(20)(16) = 320\ \text{J}.$$

c) Quando $t \to \infty$, $i_1 \to 1{,}6$ A e $i_2 \to -1{,}6$ A. Portanto, um longo tempo após a chave ter sido aberta, a energia armazenada nos dois indutores é

$$w = \frac{1}{2}(5)(1{,}6)^2 + \frac{1}{2}(20)(-1{,}6)^2 = 32\ \text{J}.$$

d) Obtemos a energia total fornecida à rede resistiva integrando a expressão para a potência instantânea de zero a infinito:

$$\begin{aligned} w &= \int_0^\infty p\,dt = \int_0^\infty 1.152e^{-4t}\,dt \\ &= 1.152\frac{e^{-4t}}{-4}\bigg|_0^\infty = 288\ \text{J}. \end{aligned}$$

Esse resultado é a diferença entre a energia inicialmente armazenada (320 J) e a energia final armazenada nos indutores em paralelo (32 J). O indutor equivalente para os indutores em paralelo (que prevê o comportamento terminal da combinação em paralelo) tem uma energia inicial de 288 J; isto é, a energia armazenada no indutor equivalente representa a quantidade de energia que será fornecida à rede resistiva ligada aos terminais dos indutores originais.

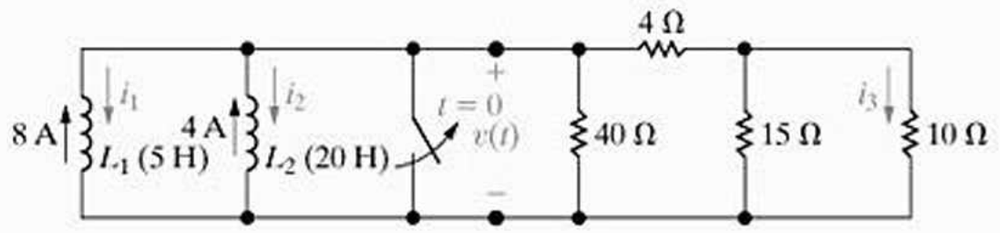


Figura 7.8 ▲ Circuito para o Exemplo 7.2.

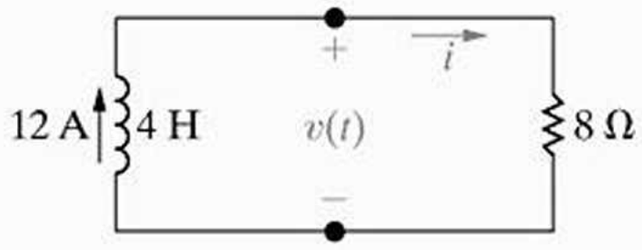


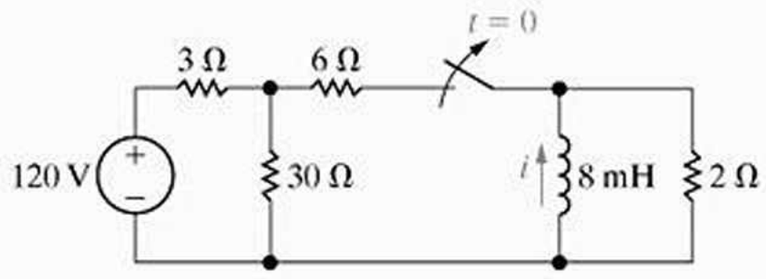
Figura 7.9 ▲ Simplificação do circuito mostrado na Figura 7.8.

✔ PROBLEMAS PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 1 — Saber determinar a resposta natural de circuitos *RL* e *RC*

7.1 A chave no circuito mostrado esteve fechada por um longo tempo e é aberta em $t = 0$.

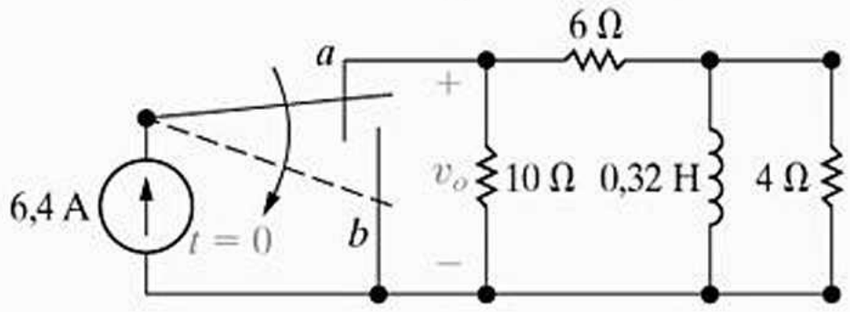
a) Calcule o valor inicial de i.
b) Calcule a energia inicial armazenada no indutor.
c) Qual é a constante de tempo do circuito para $t > 0$?
d) Qual é a expressão numérica para $i(t)$ para $t \geq 0$?
e) Qual porcentagem da energia inicial armazenada é dissipada no resistor de 2 Ω 5 ms após a chave ter sido aberta?



Resposta: (a) −12,5 A; (b) 625 mJ; (c) 4 ms; (d) $-12{,}5e^{-250t}$ A, $t \geq 0$; (e) 91,8%.

7.2 Em $t = 0$, a chave, no circuito mostrado, passa instantaneamente da posição a para a posição b.

a) Calcule v_o para $t \geq 0^+$.
b) Qual porcentagem da energia inicial armazenada no indutor é dissipada no resistor de 4 Ω?



Resposta: (a) $-8e^{-10t}$ V, $t \geq 0$; (b) 80%.

NOTA: Tente resolver também os problemas 7.1–7.3, apresentados no final deste capítulo.

7.2 Resposta natural de um circuito *RC*

Como mencionado na Seção 7.1, a resposta natural de um circuito *RC* é análoga à de um circuito *RL*. Assim, não trataremos o circuito *RC* com os mesmos detalhes com que tratamos o circuito *RL*.

A resposta natural de um circuito *RC* é analisada a partir do circuito mostrado na Figura 7.10. Começamos supondo que a chave esteve na posição *a* por um longo tempo, o que permite que o laço formado pela fonte de tensão cc V_g, o resistor R_1 e o capacitor C cheguem a uma condição de regime permanente. Lembre-se de que dissemos, no Capítulo 6, que um capacitor comporta-se como um circuito aberto na presença de uma tensão constante. Assim, a fonte de tensão não faz circular no capacitor uma corrente e, portanto, a tensão da fonte aparece nos terminais do capacitor. Na Seção 7.3, discutiremos como a tensão no capacitor cresce até o valor de regime permanente, igual ao da fonte de tensão cc, mas, por enquanto, o ponto importante é que, quando a chave passa da posição *a* para a posição *b* (em $t = 0$), a tensão no capacitor é V_g. Como não pode haver variação instantânea de tensão nos terminais de um capacitor, o problema se reduz a resolver o circuito mostrado na Figura 7.11.

Cálculo da expressão da tensão

Podemos determinar a tensão $v(t)$ com facilidade pensando em termos de tensões de nó. Usando a junção inferior entre R e C como o nó de referência e somando as correntes que saem da junção superior entre R e C, temos

$$C\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0. \tag{7.21}$$

Comparando a Equação 7.21 com a Equação 7.1 vemos que as mesmas técnicas matemáticas podem ser usadas para obter a solução para $v(t)$. Deixamos para você a demonstração de que

$$v(t) = v(0)e^{-t/RC},\ t \geq 0. \tag{7.22}$$

Como já havíamos observado, a tensão inicial no capacitor é igual à tensão da fonte de tensão, V_g, ou

$$v(0^-) = v(0) = v(0^+) = V_g = V_0, \tag{7.23}$$

(Tensão inicial no capacitor)

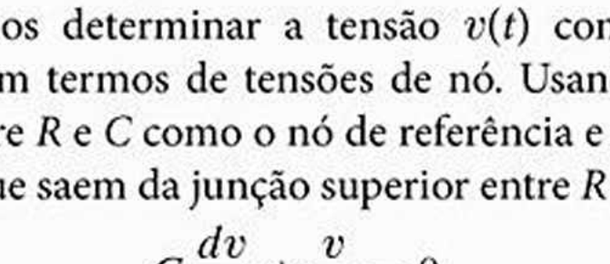


Figura 7.10 ▲ Circuito *RC*.

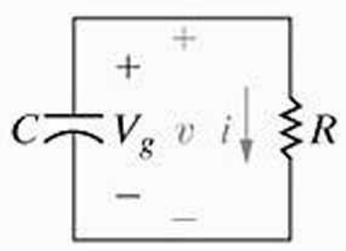


Figura 7.11 ▲ Circuito mostrado na Figura 7.10, após chaveamento.

onde V_0 é a tensão inicial no capacitor. A constante de tempo para o circuito *RC* é igual ao produto entre a resistência e a capacitância, a saber,

$$\tau = RC. \tag{7.24}$$

(Constante de tempo para circuito *RC*)

Substituindo as equações 7.23 e 7.24 na Equação 7.22, obtemos

$$v(t) = V_0 e^{-t/\tau},\quad t \geq 0. \tag{7.25}$$

(Resposta natural de um circuito *RC*)

o que indica que a resposta natural de um circuito *RC* é uma queda exponencial a partir da tensão inicial. A constante de tempo *RC* comanda a rapidez da queda. A Figura 7.12 mostra o gráfico da Equação 7.25 e a interpretação gráfica da constante de tempo.

Após a determinação de $v(t)$, podemos calcular com facilidade as expressões para i, p e w:

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{V_0}{R}e^{-t/\tau},\quad t \geq 0^+, \tag{7.26}$$

$$p = vi = \frac{V_0^2}{R}e^{-2t/\tau},\quad t \geq 0^+, \tag{7.27}$$

$$w = \int_0^t p\,dx = \int_0^t \frac{V_0^2}{R}e^{-2x/\tau}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}CV_0^2(1 - e^{-2t/\tau}),\quad t \geq 0. \tag{7.28}$$

O cálculo da resposta natural de um circuito *RC* pode ser resumido da seguinte forma:

1. Determine a tensão inicial, V_0, no capacitor.
2. Determine a constante de tempo do circuito, $\tau = RC$.
3. Use a Equação 7.25, $v(t) = V_0e^{-t}/\tau$, para gerar $v(t)$ a partir de V_0 e τ.

(Cálculo da resposta natural de um circuito *RC*)

Todos os outros cálculos de interesse decorrem da expressão de $v(t)$. Os exemplos 7.3 e 7.4 ilustram os cálculos associados à resposta natural de um circuito *RC*.

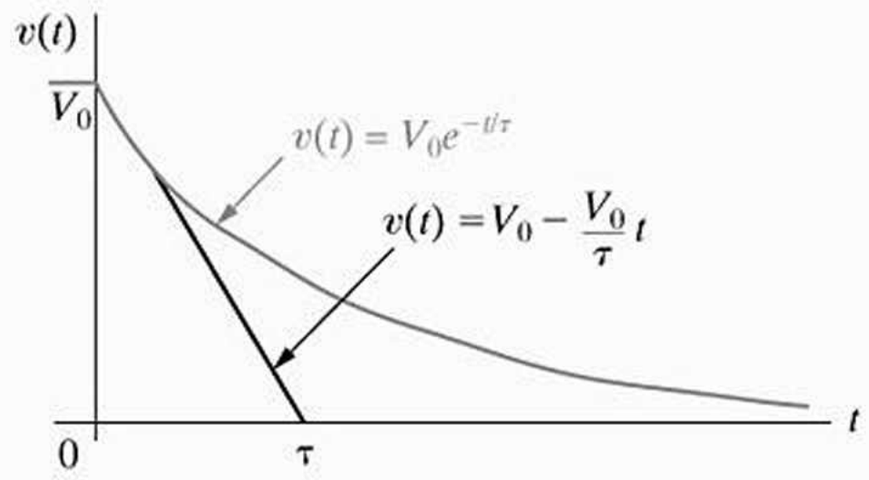


Figura 7.12 ▲ Resposta natural de um circuito *RC*.

Exemplo 7.3 Determinação da resposta natural de um circuito *RC*

A chave do circuito mostrado na Figura 7.13 esteve na posição x por um longo tempo. Em $t = 0$ ela passa instantaneamente para a posição y. Determine

a) $v_C(t)$ para $t \geq 0$,

b) $v_o(t)$ para $t \geq 0^+$,

c) $i_o(t)$ para $t \geq 0^+$ e

d) a energia total dissipada no resistor de 60 kΩ.

Solução

a) Como a chave esteve na posição x por um longo tempo, o capacitor de 0,5 μF se carregará até 100 V, com o terminal superior positivo. Podemos substituir a rede resistiva ligada ao capacitor em $t = 0^+$ por uma resistência equivalente de 80 kΩ. Assim, a constante de tempo do circuito é $(0{,}5 \times 10^{-6})(80 \times 10^3)$ ou 40 ms. Então,

$$v_C(t) = 100e^{-25t}\ \text{V}, \qquad t \geq 0.$$

b) O modo mais fácil de determinar $v_o(t)$ é observar que o circuito resistivo forma um divisor de tensão nos terminais do capacitor. Assim,

$$v_o(t) = \frac{48}{80}v_C(t) = 60e^{-25t}\ \text{V}, \qquad t \geq 0^+.$$

Essa expressão para $v_o(t)$ é válida para $t \geq 0^+$ porque $v_o(0^-)$ é zero. Assim, temos uma variação instantânea na tensão no resistor de 240 kΩ.

c) Determinamos a corrente $i_o(t)$ pela lei de Ohm:

$$i_o(t) = \frac{v_o(t)}{60 \times 10^3} = e^{-25t}\ \text{mA}, \qquad t \geq 0^+.$$

d) A potência dissipada no resistor de 60 kΩ é

$$p_{60\text{k}\Omega}(t) = i_o^2(t)(60 \times 10^3) = 60e^{-50t}\ \text{mW}, \ t \geq 0^+.$$

A energia total dissipada é

$$w_{60\text{k}\Omega} = \int_0^\infty i_o^2(t)(60 \times 10^3)\,dt = 1{,}2\ \text{mJ}.$$

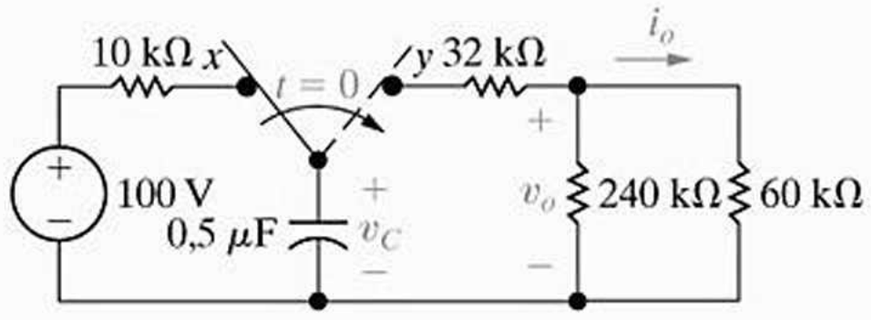


Figura 7.13 ▲ Circuito para o Exemplo 7.3.

Exemplo 7.4 Determinação da resposta natural de um circuito *RC* com capacitores em série

As tensões iniciais nos capacitores C_1 e C_2 no circuito da Figura 7.14 foram estabelecidas por fontes não mostradas. A chave é fechada em $t = 0$.

a) Determine $v_1(t)$, $v_2(t)$ e $v(t)$ para $t \geq 0$ e $i(t)$ para $t \geq 0^+$.

b) Calcule a energia inicial armazenada nos capacitores C_1 e C_2.

c) Determine a energia que fica armazenada nos capacitores quando $t \to \infty$.

d) Mostre que a energia total fornecida ao resistor de 250 kΩ é a diferença entre os resultados obtidos em (b) e (c).

Solução

a) Tão logo conheçamos $v(t)$, poderemos obter a corrente $i(t)$ pela lei de Ohm. Após determinar $i(t)$, podemos calcular $v_1(t)$ e $v_2(t)$, porque a tensão em um capacitor é função de sua corrente. Para determinar $v(t)$, substituímos os capacitores ligados em série por um capacitor equivalente. Ele tem uma capacitância de 4 μF e é carregado até uma tensão de 20 V. Portanto, o circuito mostrado na Figura 7.14 se reduz ao mostrado na Figura 7.15, o que revela que o valor inicial de $v(t)$ é 20 V e que a constante de tempo do circuito é $(4)(250) \times 10^{-3}$, ou 1 s. Assim, a expressão para $v(t)$ é

$$v(t) = 20e^{-t}\ \text{V}, \qquad t \geq 0.$$

A corrente $i(t)$ é

$$i(t) = \frac{v(t)}{250.000} = 80e^{-t}\ \mu\text{A}, \qquad t \geq 0^+.$$

Conhecendo $i(t)$, calculamos as expressões para $v_1(t)$ e $v_2(t)$:

$$\begin{aligned} v_1(t) &= -\frac{10^6}{5}\int_0^t 80 \times 10^{-6}e^{-x}\,dx - 4 \\ &= (16e^{-t} - 20)\ \text{V}, \quad t \geq 0, \\ v_2(t) &= -\frac{10^6}{20}\int_0^t 80 \times 10^{-6}e^{-x}\,dx + 24 \\ &= (4e^{-t} + 20)\ \text{V}, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

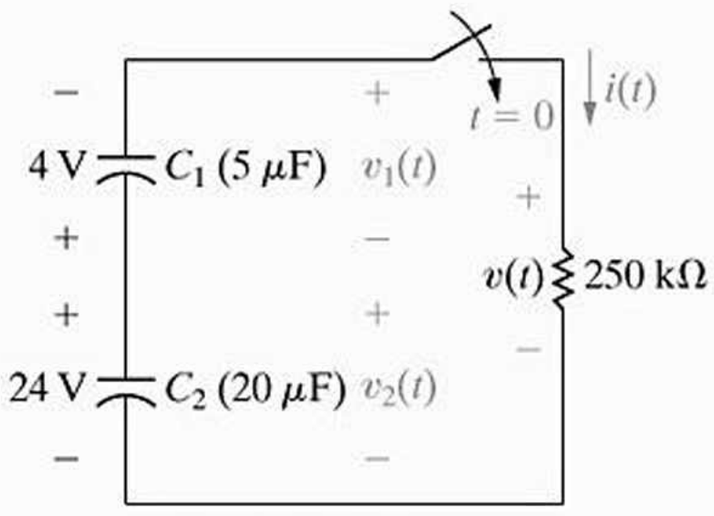


Figura 7.14 ▲ Circuito para o Exemplo 7.4.

b) A energia inicial armazenada em C_1 é

$$w_1 = \frac{1}{2}(5 \times 10^{-6})(16) = 40\,\mu\text{J}.$$

A energia inicial armazenada em C_2 é

$$w_2 = \frac{1}{2}(20 \times 10^{-6})(576) = 5.760\,\mu\text{J}.$$

A energia total armazenada nos dois capacitores é

$$w_o = 40 + 5.760 = 5.800\ \mu\text{J}.$$

c) Quando $t \to \infty$,

$$v_1 \to -20\text{ V e } v_2 \to +20\text{ V}.$$

Portanto, a energia armazenada nos dois capacitores é

$$w_\infty = \frac{1}{2}(5 + 20) \times 10^{-6}(400) = 5.000\ \mu\text{J}.$$

d) A energia total fornecida ao resistor de 250 kΩ é

$$w = \int_0^\infty p\,dt = \int_0^\infty \frac{400e^{-2t}}{250.000}\,dt = 800\ \mu\text{J}.$$

Comparando os resultados obtidos em (b) e (c), vemos que

$$800\ \mu\text{J} = (5.800 - 5.000)\ \mu\text{J}.$$

A energia armazenada no capacitor equivalente na Figura 7.15 é 1/2 $(4 \times 10^{-6})(400)$, ou 800 μJ. Como esse capacitor se equivale aos capacitores originais ligados em série, a energia armazenada no capacitor equivalente é a energia fornecida ao resistor de 250 kΩ.

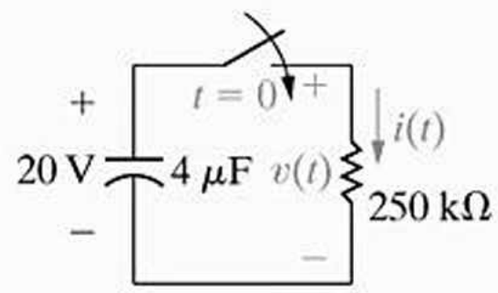


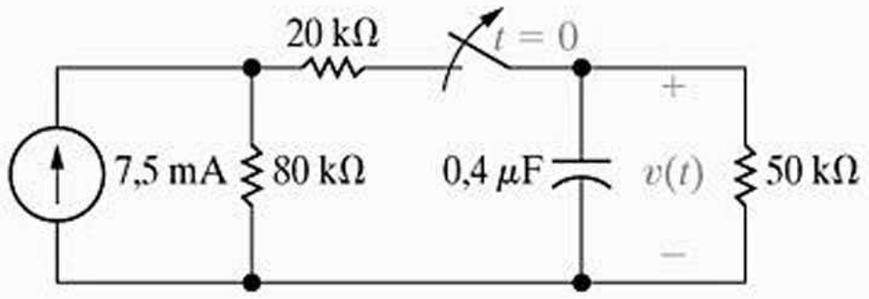
Figura 7.15 ▲ Simplificação do circuito mostrado na Figura 7.14.

✔ PROBLEMAS PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 1 — Saber determinar a resposta natural de circuitos *RL* e *RC*

7.3 A chave no circuito mostrado esteve fechada por um longo tempo e é aberta em $t = 0$. Determine

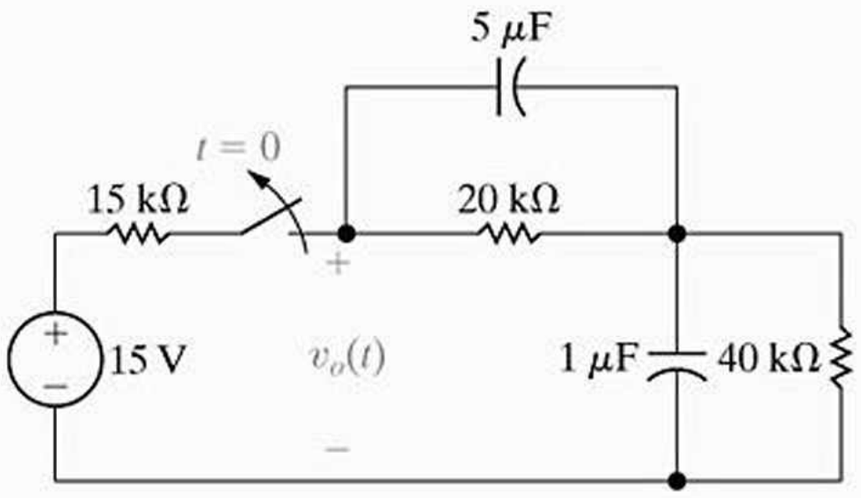
a) o valor inicial de $v(t)$,
b) a constante de tempo para $t > 0$,
c) a expressão numérica para $v(t)$, após a chave ter sido aberta,
d) a energia inicial armazenada no capacitor e
e) o tempo necessário para que 75% da energia inicialmente armazenada seja dissipada.



Resposta: (a) 200 V; (b) 20 ms; (c) $200e^{-50t}$ V, $t \geq 0$; (d) 8 mJ; (e) 13,86 ms.

7.4 A chave no circuito mostrado esteve fechada durante um longo tempo antes de ser aberta em $t = 0$.

a) Determine $v_o(t)$ para $t \geq 0$.
b) Qual porcentagem da energia inicial armazenada no circuito é dissipada após a chave estar aberta por 60 ms?



Resposta: (a) $8e^{-25t} + 4e^{-10t}$ V, $t \geq 0$; (b) 81,05%.

NOTA: Tente resolver também os problemas 7.21 e 7.24, apresentados no final deste capítulo.

7.3 Resposta a um degrau de circuitos *RL* e *RC*

Estamos prontos para discutir o problema de determinar as correntes e tensões geradas em circuitos *RL* ou *RC* de primeira ordem quando são aplicadas repentinamente fontes de tensão ou corrente cc. A resposta de um circuito à aplicação repentina de uma fonte de tensão ou corrente constante é denominada resposta ao degrau. Ao apresentarmos a resposta ao degrau, mostramos como o circuito responde quando a energia está sendo armazenada no indutor ou capacitor. Começamos com a resposta a um degrau de um circuito *RL*.

Resposta a um degrau de um circuito *RL*

Para começar, modificamos o circuito de primeira ordem mostrado na Figura 7.2(a) acrescentando uma chave. Usamos o circuito resultante, mostrado na Figura 7.16, para desenvolver a resposta ao degrau. A energia armazenada no indutor no instante em que a chave fecha é dada em termos de uma corrente inicial não-zero $i(0)$. A tarefa é determinar as expressões para a corrente no circuito e para a tensão no indutor após o fechamento da chave. O procedimento é o mesmo usado na Seção 7.1; utilizamos a análise de circuitos para escrever a equação diferencial que descreve o circuito em termos da variável de interesse e, então, usamos o cálculo diferencial e integral elementar para resolver a equação.

Após a chave da Figura 7.16 ter sido fechada, a lei das tensões de Kirchhoff determina que

$$V_s = Ri + L\frac{di}{dt}, \tag{7.29}$$

o que pode ser resolvido para a corrente, separando as variáveis i e t e, então, integrando. A primeira etapa dessa abordagem é resolver a Equação 7.29 para a derivada di/dt:

$$\frac{di}{dt} = \frac{-Ri + V_s}{L} = \frac{-R}{L}\left(i - \frac{V_s}{R}\right). \tag{7.30}$$

Em seguida, multiplicamos ambos os lados da Equação 7.30 por um tempo diferencial dt. Essa etapa reduz o lado esquerdo da equação a uma variação diferencial na corrente. Assim,

$$\frac{di}{dt}dt = \frac{-R}{L}\left(i - \frac{V_s}{R}\right)dt, \tag{7.31}$$

ou

$$di = \frac{-R}{L}\left(i - \frac{V_s}{R}\right)dt.$$

Agora, separamos as variáveis na Equação 7.31 para obter

$$\frac{di}{i - (V_s/R)} = \frac{-R}{L}dt, \tag{7.32}$$

e, então, integramos ambos o lados da Equação 7.32. Usando x e y como variáveis para a integração, obtemos

$$\int_{I_0}^{i(t)} \frac{dx}{x - (V_s/R)} = \frac{-R}{L}\int_0^t dy, \tag{7.33}$$

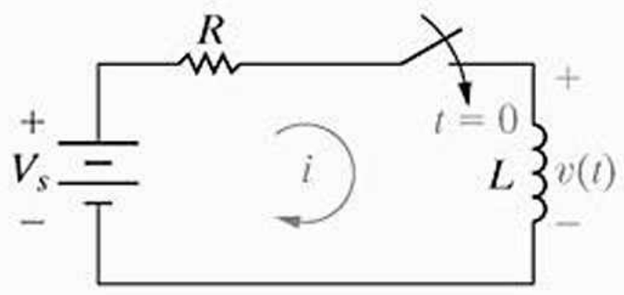


Figura 7.16 ▲ Circuito usado para ilustrar a resposta a um degrau de um circuito *RL* de primeira ordem.

onde I_0 é a corrente em $t = 0$ e $i(t)$ é a corrente em qualquer $t > 0$. A integração da Equação 7.33 resulta na expressão

$$\ln\frac{i(t) - (V_s/R)}{I_0 - (V_s/R)} = \frac{-R}{L}t, \tag{7.34}$$

da qual

$$\frac{i(t) - (V_s/R)}{I_0 - (V_s/R)} = e^{-(R/L)t},$$

ou

$$i(t) = \frac{V_s}{R} + \left(I_0 - \frac{V_s}{R}\right)e^{-(R/L)t}. \tag{7.35}$$

(Resposta a um degrau de circuito *RL*)

Quando a energia inicial no indutor é zero, I_0 é zero. Assim, a Equação 7.35 se reduz a

$$i(t) = \frac{V_s}{R} - \frac{V_s}{R}e^{-(R/L)t}. \tag{7.36}$$

A Equação 7.36 indica que, após a chave ser fechada, a corrente aumenta exponencialmente de zero a um valor final de V_s/R. A constante de tempo do circuito, L/R, determina a rapidez do aumento. Uma constante de tempo depois de a chave ter sido fechada, a corrente terá alcançado aproximadamente 63% de seu valor final, ou

$$i(\tau) = \frac{V_s}{R} - \frac{V_s}{R}e^{-1} \approx 0{,}6321\frac{V_s}{R}. \tag{7.37}$$

Se a corrente continuasse a aumentar à sua taxa inicial, alcançaria seu valor final em $t = \tau$; isto é, como

$$\frac{di}{dt} = \frac{-V_s}{R}\left(\frac{-1}{\tau}\right)e^{-t/\tau} = \frac{V_s}{L}e^{-t/\tau}, \tag{7.38}$$

a taxa de variação inicial de $i(t)$ é

$$\frac{di}{dt}(0) = \frac{V_s}{L}. \tag{7.39}$$

Se a corrente continuasse a aumentar a essa taxa, a expressão para i seria

$$i = \frac{V_s}{L}t, \tag{7.40}$$

da qual, em $t = \tau$,

$$i = \frac{V_s}{L}\frac{L}{R} = \frac{V_s}{R}. \tag{7.41}$$

As equações 7.36 e 7.40 estão plotadas na Figura 7.17. Os valores dados pelas equações 7.37 e 7.41 também são mostrados na figura.

A tensão no indutor é $L di/dt$, portanto, pela Equação 7.35, para $t \geq 0^+$,

$$v = L\left(\frac{-R}{L}\right)\left(I_0 - \frac{V_s}{R}\right)e^{-(R/L)t} = (V_s - I_0R)e^{-(R/L)t}. \tag{7.42}$$

A tensão no indutor é zero antes de a chave ser fechada. A Equação 7.42 indica que a tensão no indutor salta para $V_s - I_0R$ no instante em que a chave é fechada e, então, cai exponencialmente a zero.

O valor de v em $t = 0^+$ faz sentido? Como a corrente inicial é I_0 e o indutor impede uma variação instantânea na corrente, a corrente é I_0 num instante após o fechamento da chave. A queda de tensão no resistor é I_0R e a tensão nos terminais do indutor é a tensão da fonte menos a queda de tensão, isto é, $V_s - I_0R$.

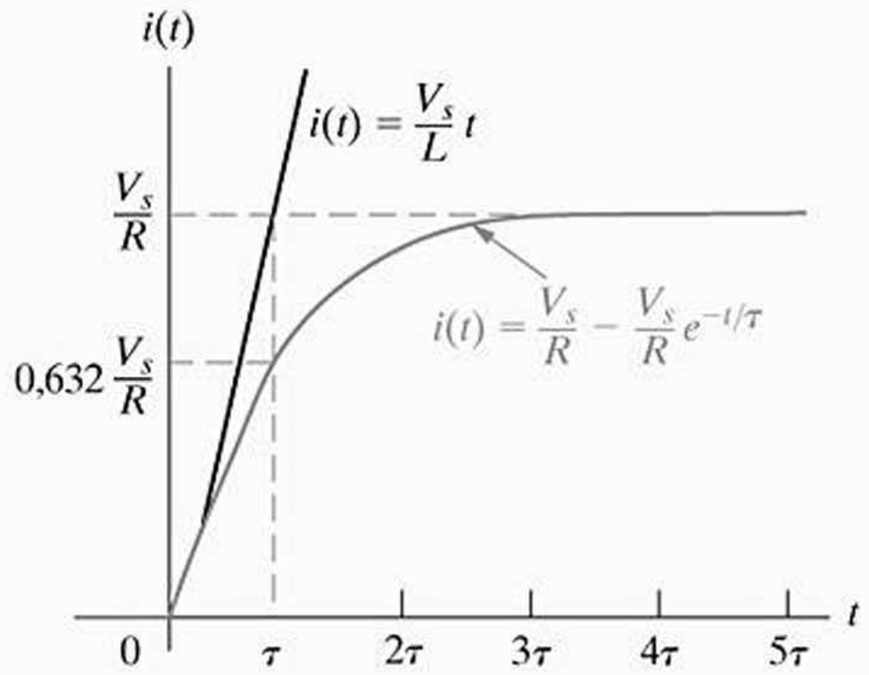


Figura 7.17 ▲ Resposta a um degrau do circuito *RL* mostrado na Figura 7.16 quando $I_0 = 0$.

Quando a corrente inicial no indutor é zero, a Equação 7.42 é simplificada para

$$v = V_s\, e^{-(R/L)t}. \tag{7.43}$$

Se a corrente inicial for zero, a tensão no indutor saltará para V_s. Também esperamos que a tensão do indutor se aproxime de zero à medida que t aumenta, porque a corrente no circuito está se aproximando do valor constante de V_s/R. A Figura 7.18 mostra o gráfico da Equação 7.43 e a relação entre a constante de tempo e a taxa de variação inicial (negativa) da tensão no indutor.

Se houver uma corrente inicial no indutor, a corrente para todo instante de tempo é dada pela Equação 7.35. O sinal algébrico de I_0 é positivo se a corrente inicial estiver na mesma direção de i; caso contrário, I_0 leva um sinal negativo. O Exemplo 7.5 ilustra a aplicação da Equação 7.35 a um circuito específico.

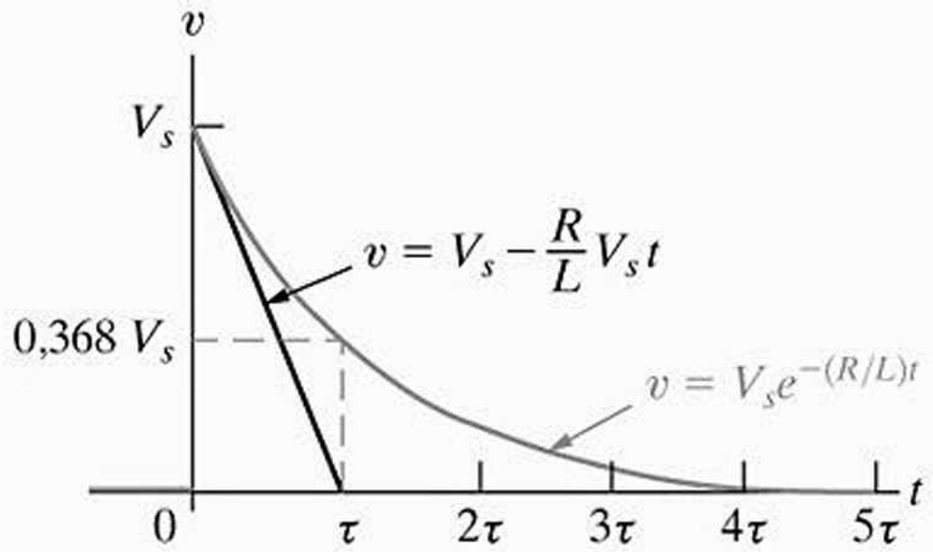


Figura 7.18 ▲ Tensão no indutor *versus* tempo.

Exemplo 7.5 Determinação da resposta a um degrau de um circuito *RL*

A chave do circuito mostrado na Figura 7.19 esteve na posição a por um longo tempo. Em $t = 0$, ela passa da posição a para a posição b. A chave é do tipo liga-antes-interrompe-depois; isto é, a ligação na posição b é estabelecida antes de a ligação na posição a ser interrompida, o que evita a interrupção da corrente no indutor.

a) Determine a expressão para $i(t)$ para $t \geq 0$.

b) Qual é a tensão inicial no indutor imediatamente após a chave ter passado para a posição b?

c) Quantos milissegundos após a chave ter mudado de posição a tensão nos terminais do indutor atinge 24 V?

d) Essa tensão inicial faz sentido em termos do comportamento do circuito?

e) Faça um gráfico de $i(t)$ e $v(t)$ em função de t.

Solução

a) A chave esteve na posição a por um longo tempo, de forma que o indutor de 200 mH é um curto-circuito para a fonte de corrente de 8 A. Logo, o indutor conduz uma corrente inicial de 8 A. Essa corrente tem sentido oposto ao da referência escolhida para i; assim, $I_0 = -8$ A. Quando a chave estiver na posição b, o valor final de i será 24/2, ou 12 A. A constante de tempo do circuito é 200/2, ou 100 ms. Substituindo esses valores na Equação 7.35 temos

$$i = 12 + (-8 - 12)e^{-t/0,1}$$

$$= 12 - 20e^{-10t}\ \text{A}, \qquad t \geq 0.$$

b) A tensão no indutor é

$$v = L\frac{di}{dt}$$

$$= 0,2(200e^{-10t})$$

$$= 40e^{-10t}\ \text{V}, \quad t \geq 0^+.$$

A tensão inicial no indutor é

$$v(0^+) = 40\ \text{V}.$$

c) Sim; no instante após ter passado para a posição b, o indutor conduz uma corrente de 8 A em sentido anti-horário ao longo do caminho fechado recém-formado. Essa corrente provoca uma queda de 16 V no resistor

de 2 Ω. Essa queda de tensão soma-se à queda na fonte, o que produz uma queda de 40 V no indutor.

d) Determinamos o tempo para o qual a tensão nos terminais do indutor é igual a 24 V resolvendo a expressão

$$24 = 40e^{-10t}$$

para t:

$$t = \frac{1}{10}\ln\frac{40}{24}$$
$$= 51{,}08 \times 10^{-3}$$
$$= 51{,}08 \text{ ms}.$$

e) A Figura 7.20 mostra os gráficos de $i(t)$ e $v(t)$ em função de t. Observe que o instante de tempo para o qual a corrente é igual a zero corresponde ao instante de tempo para o qual a tensão nos terminais do indutor é igual à tensão da fonte de 24 V, como previsto pela lei das tensões de Kirchhoff.

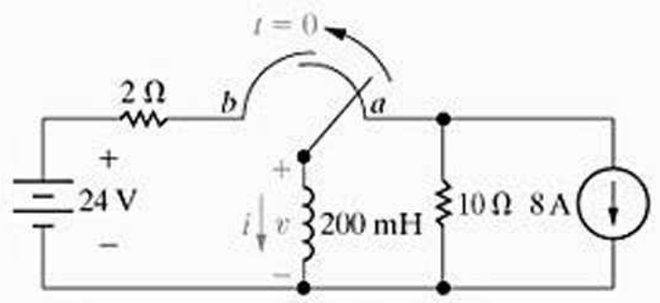


Figura 7.19 ▲ Circuito para o Exemplo 7.5.

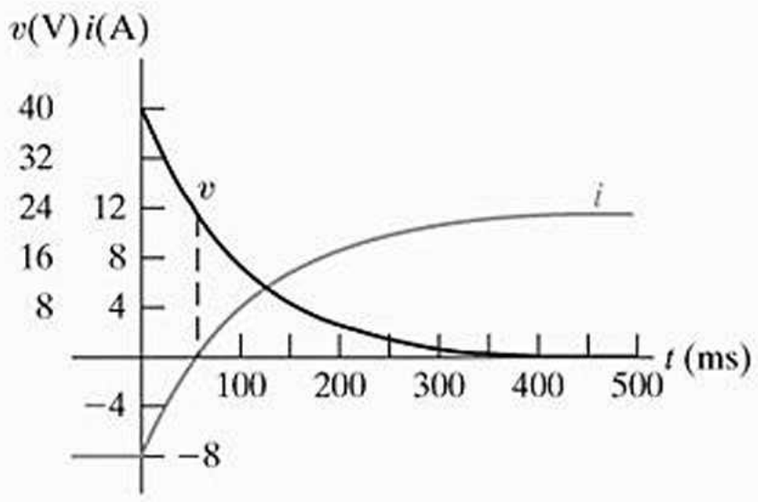


Figura 7.20 ▲ Formas de onda de corrente e tensão para o Exemplo 7.5.

✔ PROBLEMA PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 2 — Saber determinar a resposta a um degrau de circuitos *RL* e *RC*

7.5 Suponha que a chave no circuito mostrado na Figura 7.19 esteja na posição b por um longo tempo e, em $t = 0$, ela passe para a posição a. Determine (a) $i(0^+)$; (b) $v(0^+)$; (c) τ, $t > 0$; (d) $i(t)$, $t \geq 0$ e (e) $v(t)$, $t \geq 0^+$.

Resposta: (a) 12 A; (b) –200 V; (c) 20 ms; (d) $-8 + 20e^{-50t}$ A, $t \geq 0$; (e) $-200e^{-50t}$ V, $t \geq 0^+$.

NOTA: Tente resolver também os problemas 7.33–7.35, apresentados no final deste capítulo.

Podemos ainda descrever a tensão v(t) no indutor da Figura 7.16 diretamente, e não em termos da corrente do circuito. Começamos observando que a tensão no resistor é a diferença entre a tensão da fonte e a tensão do indutor. Escrevemos

$$i(t) = \frac{V_s}{R} - \frac{v(t)}{R}, \tag{7.44}$$

onde V_s é uma constante. Diferenciando ambos os lados em relação ao tempo, temos

$$\frac{di}{dt} = -\frac{1}{R}\frac{dv}{dt}. \tag{7.45}$$

Então, se multiplicarmos cada lado da Equação 7.45 pela indutância L, obteremos, no lado esquerdo, uma expressão para a tensão no indutor, ou

$$v = -\frac{L}{R}\frac{dv}{dt}. \tag{7.46}$$

Colocando a Equação 7.46 na forma padrão, temos

$$\frac{dv}{dt} + \frac{R}{L}v = 0. \tag{7.47}$$

Você deve averiguar (no Problema 7.40) se a solução da Equação 7.47 é idêntica à dada na Equação 7.42.

Neste ponto, é pertinente uma observação geral sobre a resposta a um degrau em um circuito *RL*. (Essa observação mostrará ser útil mais adiante.) Quando derivamos a equação diferencial para a corrente do indutor, obtivemos a Equação 7.29. Agora, escrevemos novamente a Equação 7.29 como

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{V_s}{L}. \tag{7.48}$$

Observe que as equações 7.47 e 7.48 têm a mesma forma. Especificamente, ambas igualam a um valor constante a soma da derivada de primeira ordem da variável e uma constante vezes a variável. Na Equação 7.47, a constante do lado direito por acaso é zero; assim, essa equação toma a mesma forma das equações que descrevem a resposta natural da Seção 7.1. Em ambas as equações 7.47 e 7.48, a constante que multiplica a variável dependente é a recíproca da constante de tempo, isto é, $R/L = 1/\tau$. Encontramos uma situação semelhante nos cálculos da resposta a um degrau de um circuito *RC*. Na Seção 7.4, usaremos essas observações para desenvolver uma abordagem geral para a determinação das respostas natural e a um degrau de circuitos *RL* e *RC*.

Resposta a um degrau de um circuito *RC*

Podemos determinar a resposta a um degrau de um circuito *RC* de primeira ordem analisando o circuito mostrado na Figura 7.21. Por conveniência matemática, escolhemos o equivalente de Norton da rede ligada ao capacitor equivalente. Somando as correntes que saem do nó superior da Figura 7.21, obtemos a equação diferencial

$$C\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{R} = I_s. \tag{7.49}$$

A divisão da Equação 7.49 por C dá

$$\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{RC} = \frac{I_s}{C}. \tag{7.50}$$

A comparação da Equação 7.50 com a Equação 7.48 revela que a forma da solução para v_C é a mesma que para a corrente no circuito indutivo, ou seja, a Equação 7.35. Portanto, pela simples substituição de variáveis e coeficientes adequados podemos escrever a solução para v_C diretamente. A translação requer a substituição de V_s por I_s, L por C, R por $1/R$ e I_0 por V_0. Obtemos

$$v_C = I_sR + (V_0 - I_sR)e^{-t/RC}, \quad t \geq 0. \tag{7.51}$$

(Resposta a um degrau de um circuito *RC*)

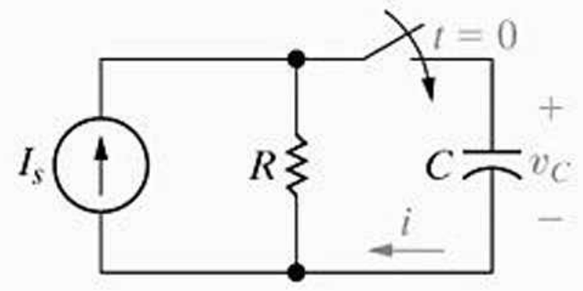


Figura 7.21 ▲ Circuito usado para ilustrar a resposta a um degrau de um circuito *RC* de primeira ordem.

Um cálculo semelhante para a corrente no capacitor resulta na equação diferencial

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{RC}i = 0. \tag{7.52}$$

A Equação 7.52 tem a mesma forma da Equação 7.47; assim, a solução para i é obtida usando as mesmas translações utilizadas para a solução da Equação 7.50. Então,

$$i = \left(I_s - \frac{V_0}{R}\right)e^{-t/RC} \qquad t \geq 0^+, \tag{7.53}$$

onde V_0 é o valor inicial de v_C, a tensão no capacitor.

Obtivemos as equações 7.51 e 7.53 usando uma analogia matemática com a solução para a resposta a um degrau do circuito indutivo. Vamos ver se essas soluções para o circuito *RC* fazem sentido em termos do comportamento conhecido desse circuito. Observe na Equação 7.51 que a tensão inicial no capacitor é V_0, a tensão final no capacitor é I_sR e a constante de tempo do circuito é RC. Observe também que a solução para v_C é válida para $t \geq 0$. Essas observações são consistentes com o comportamento de um capacitor em paralelo com um resistor quando alimentados por uma fonte de corrente constante.

A Equação 7.53 prevê que a corrente no capacitor em $t = 0^+$ é $I_s - V_0/R$. Essa previsão faz sentido porque a tensão no capacitor não pode variar instantaneamente e, portanto, a corrente inicial no resistor é V_0/R. A corrente do ramo do capacitor varia instantaneamente de zero em $t = 0^-$ a $I_s - V_0/R$ em $t = 0^+$. A corrente no capacitor é zero em $t = \infty$. Observe também que o valor final de v é I_sR0.

O Exemplo 7.6 ilustra como usar as equações 7.51 e 7.53 para determinar a resposta a um degrau de um circuito *RC* de primeira ordem.

Exemplo 7.6 Determinação da resposta a um degrau de um circuito *RC*

A chave do circuito mostrado na Figura 7.22 esteve na posição 1 por um longo tempo. Em $t = 0$, ela passa para a posição 2. Determine

a) $v_o(t)$ para $t \geq 0$ e

b) $i_o(t)$para $t \geq 0^+$.

Solução

a) A chave esteve na posição 1 por um longo tempo, de forma que o valor inicial de v_o é 40(60/80), ou 30 V. Para usarmos as equações 7.51 e 7.53, devemos determinar o equivalente de Norton visto dos terminais do capacitor para $t \geq 0$. Para isso, começamos calculando a tensão de circuito aberto, que é dada pela divisão da tensão da fonte (de −75 V) por entre os resistores de 40 kΩ e 160 kΩ:

$$V_{oc} = \frac{160 \times 10^3}{(40 + 160) \times 10^3}(-75) = -60 \text{ V}.$$

Em seguida, calculamos a resistência equivalente de Thévenin, vista dos terminais do capacitor, curto-circuitando os terminais da fonte de −75 V e fazendo combinações em série e paralelo dos resistores

$$R_{\text{Th}} = 8.000 + 40.000 \,||\, 160.000 = 40 \text{ k}\Omega$$

O valor da fonte de corrente de Norton é a razão entre a tensão de circuito aberto e a resistência de Thévenin, ou $-60/(40 \times 10^3) = -1{,}5$ mA. O circuito equivalente de Norton resultante é mostrado na Figura 7.23. Pela Figura 7.23, $I_sR = -60$ V e $RC = 10$ ms. Já observamos que $v_o(0) = 30$ V e, portanto, a solução para v_o é

$$v_o = -60 + [30 - (-60)]e^{-100t}$$
$$= -60 + 90e^{-100t} \text{ V}, \; t \geq 0$$

b) Escrevemos a solução para i_o diretamente da Equação 7.53, observando que $I_s = -1{,}5$ mA e $V_o/R = (30/40) \times 10^{-3}$ ou 0,75 mA:

$$i_o = -2{,}25e^{-100t} \text{ mA}, \; t \geq 0^+.$$

Verificamos a consistência das soluções para v_o e i_o observando que

$$i_o = C\frac{dv_o}{dt} = (0{,}25 \times 10^{-6})(-9.000e^{-100t})$$
$$= -2{,}25e^{-100t}\ \text{mA}.$$

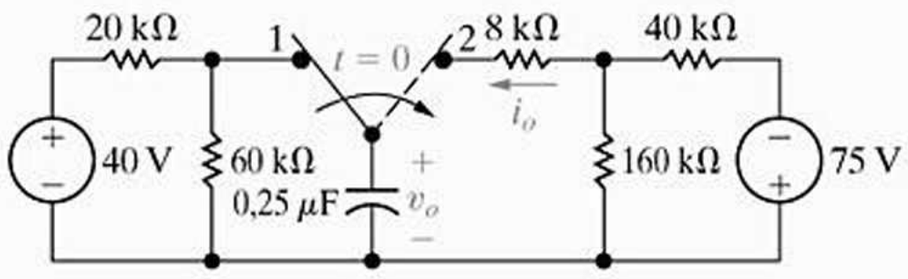


Figura 7.22 ▲ Circuito para o Exemplo 7.6.

Como $dv_o(0^-)/dt = 0$, fica claro que a expressão para i_o só é válida para $t \geq 0^+$.

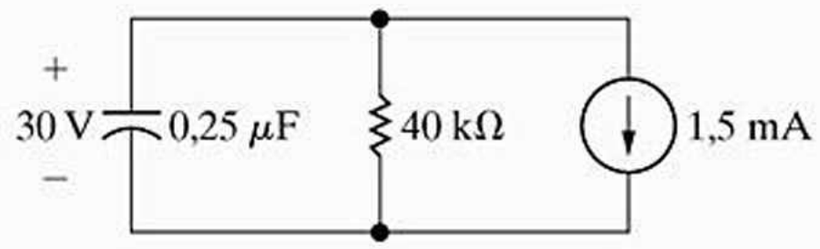


Figura 7.23 ▲ Circuito equivalente para $t > 0$ para o circuito mostrado na Figura 7.22.

✔ PROBLEMAS PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 2 — Saber determinar a resposta a um degrau de circuitos *RL* e *RC*

7.6 a) Determine a expressão para a tensão no resistor de 160 kΩ do circuito mostrado na Figura 7.22. Chamamos essa tensão v_A e admitimos que a polaridade de referência seja positiva no terminal superior do resistor de 160 kΩ.

b) Especifique o intervalo de tempo para o qual a expressão obtida em (a) é válida.

Resposta: (a) $-60 + 72e^{-100t}$ V;
(b) $t \geq 0^+$.

NOTA: Tente resolver também os problemas 7.50 e 7.51, apresentados no final deste capítulo.

7.4 Solução geral para respostas a um degrau e natural

A abordagem geral para a determinação da resposta natural ou da resposta a um degrau de circuitos *RL* e *RC* de primeira ordem mostrada na Figura 7.24 é baseada no fato de suas equações diferenciais terem a mesma forma (compare a Equação 7.48 e a Equação 7.50). Para generalizar a solução desses quatro circuitos possíveis, vamos chamar a quantidade desconhecida de $x(t)$ e dar a ela quatro representações possíveis. Ela pode representar a corrente ou tensão nos terminais de um indutor ou a corrente ou tensão nos terminais de um capacitor. Pelas equações 7.47, 7.48, 7.50 e 7.52, sabemos que a equação diferencial que descreve qualquer um desses quatro circuitos na Figura 7.24 assume a forma

$$\frac{dx}{dt} + \frac{x}{\tau} = K, \tag{7.54}$$

onde o valor da constante K pode ser zero. Como as fontes no circuito são fontes de tensão e/ou corrente constantes, o valor final de x será constante; isto é, o valor final deve satisfazer a Equação 7.54 e, quando x atingir seu valor final, a derivada dx/dt deve ser zero. Conseqüentemente

$$x_f = K\tau, \tag{7.55}$$

onde x_f representa o valor final da variável.

Resolvemos a Equação 7.54 por separação de variáveis, começando por resolver a derivada de primeira ordem:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-x}{\tau} + K = \frac{-(x - K\tau)}{\tau} = \frac{-(x - x_f)}{\tau}. \tag{7.56}$$

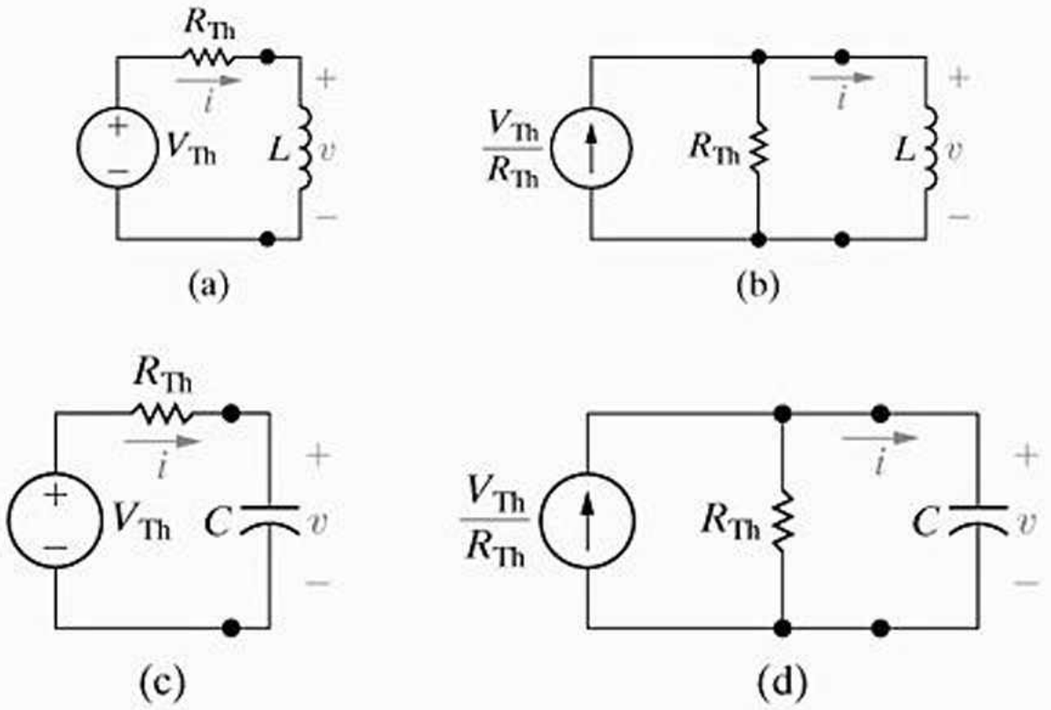


Figura 7.24 ▲ Quatro possíveis circuitos de primeira ordem.
(a) Um indutor ligado a um equivalente de Thévenin.
(b) Um indutor ligado a um equivalente de Norton.
(c) Um capacitor ligado a um equivalente de Thévenin.
(d) Um capacitor ligado a um equivalente de Norton.

Para escrever a Equação 7.56, usamos a Equação 7.55 para substituir x_f por $K\tau$. Agora, multiplicamos ambos os lados da Equação 7.56 por dt e dividimos por $x - x_f$ para obter

$$\frac{dx}{x - x_f} = \frac{-1}{\tau}dt. \tag{7.57}$$

Em seguida, integramos a Equação 7.57. Para obter a solução mais geral possível, usamos o tempo t_0 como limite inferior e t como limite superior. O tempo t_0 corresponde ao instante do chaveamento ou de outra variação. Antes, tínhamos admitido que $t_0 = 0$, mas essa mudança permite que o chaveamento ocorra a qualquer tempo. Usando u e v como variáveis de integração, obtemos

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{du}{u - x_f} = -\frac{1}{\tau}\int_{t_0}^{t} dv. \tag{7.58}$$

Executando a integração da Equação 7.58 obtemos

$$x(t) = x_f + [x(t_0) - x_f]e^{-(t-t_0)/\tau}. \tag{7.59}$$

(Solução geral para resposta natural ou a um degrau de circuitos *RL* ou *RC*)

A importância da Equação 7.59 torna-se evidente se a escrevermos por extenso:

$$\begin{matrix}\textit{a variável}\\ \textit{desconhecida}\\ \textit{em função}\\ \textit{do tempo}\end{matrix} = \begin{matrix}\textit{o valor}\\ \textit{final da}\\ \textit{variável}\end{matrix} + \left[\begin{matrix}\textit{o valor}\\ \textit{inicial da}\\ \textit{variável}\end{matrix} - \begin{matrix}\textit{o valor}\\ \textit{final da}\\ \textit{variável}\end{matrix}\right] \times e^{\frac{-[t - (\text{tempo de chaveamento})]}{(\text{constante de tempo})}} \tag{7.60}$$

Em muitos casos, o instante de tempo do chaveamento — isto é, t_0 — é zero.

Quando calculamos as respostas a um degrau e natural de circuitos, seguir estas etapas poderá ajudar:

1. Identifique a variável de interesse para o circuito. Para circuitos *RC*, é mais conveniente escolher a tensão nos terminais do capacitor; para circuitos *RL*, é melhor escolher a corrente que percorre o indutor.
2. Determine o valor inicial da variável, que é seu valor em t_0. Observe que, se você escolher a tensão no capacitor ou a corrente no indutor como sua variável de interesse, não será necessário distinguir entre $t = t_0^-$ e $t = t_0^+$.[2] Isso porque ambas são variáveis contínuas, em $t = t_0$. Se você escolher outra variável, precisará lembrar-se de que seu valor inicial é definido em $t = t_0^+$.
3. Calcule o valor final da variável, que é seu valor quando $t \to \infty$.
4. Calcule a constante de tempo para o circuito.

(Cálculo da resposta natural ou a um degrau de circuitos *RL* ou *RC*)

Com esses valores, você pode usar a Equação 7.60 para produzir uma equação que descreva o comportamento da variável de interesse em função do tempo. Então, você pode determinar equações para as outras variáveis do circuito usando técnicas de análise de circuitos apresentadas nos capítulos 3 e 4 ou repetindo as etapas precedentes para as outras variáveis.

Os exemplos 7.7–7.9 ilustram como usar a Equação 7.60 para determinar a resposta a um degrau de um circuito *RC* ou *RL*.

Exemplo 7.7 Utilização do método de solução geral para determinar a resposta a um degrau de um circuito *RC*

A chave do circuito mostrado na Figura 7.25 esteve na posição *a* por um longo tempo. Em $t = 0$, ela passa para a posição *b*.

a) Qual é o valor inicial de v_C?

b) Qual é o valor final de v_C?

c) Qual é a constante de tempo do circuito quando a chave está na posição *b*?

d) Qual é a expressão para $v_C(t)$ para $t \geq 0$?

e) Qual é a expressão para $i(t)$ para $t \geq 0^+$?

f) Quanto tempo após a chave passar para a posição *b* a tensão no capacitor atinge o valor zero?

g) Faça um gráfico de $v_C(t)$ e $i(t)$ em função de *t*.

Solução

a) A chave esteve na posição *a* por um longo tempo, de tal forma que o capacitor se comporta como um circuito aberto. Assim, a tensão no capacitor é a tensão no resistor de 60 Ω. Pela regra da divisão de tensão, a tensão no resistor de 60 Ω é $40 \times [60/(60 + 20)]$, ou 30 V. Como a referência para v_C é positiva no terminal superior do capacitor, temos $v_C(0) = -30$ V.

b) Após a chave ter estado na posição *b* por um longo tempo, o capacitor se comportará como um circuito aberto em relação à fonte de 90 V. Assim, o valor final da tensão no capacitor é + 90 V.

c) A constante de tempo é

$$\begin{aligned}\tau &= RC\\ &= (400 \times 10^3)(0{,}5 \times 10^{-6})\\ &= 0{,}2 \text{ s.}\end{aligned}$$

d) Substituindo os valores adequados para v_f, $v(0)$ e τ na Equação 7.60, temos

$$\begin{aligned}v_C(t) &= 90 + (-30 - 90)e^{-5t}\\ &= 90 - 120e^{-5t} \text{ V}, \qquad t \geq 0.\end{aligned}$$

e) Aqui, o valor para τ não muda. Por isso, precisamos determinar apenas os valores inicial e final para a corrente no capacitor. Para obtermos o valor inicial, devemos usar o valor de $i(0^+)$, porque a corrente no capacitor pode variar instantaneamente. Essa corrente é igual à corrente no resistor que, pela lei de Ohm, é $[90 - (-30)]/(400 \times 10^3) = 300\ \mu$A. Observe que, ao aplicarmos a lei de Ohm, reconhecemos que a tensão

[2] As expressões t_0^- e t_0^+ são análogas a 0^- e 0^+. Assim, $x(t_0^-)$ é o limite de $x(t)$ quando $t \to t_0$ pela esquerda e $x(t_0^+)$ é o limite de $x(t)$ quando $t \to t_0$ pela direita.

no capacitor não pode variar instantaneamente. O valor final de $i(t)$ é zero, portanto,

$$i(t) = 0 + (300 - 0)e^{-5t}$$
$$= 300e^{-5t}\,\mu\text{A}, \quad t \geq 0^+$$

Poderíamos ter obtido essa solução diferenciando a solução em (d) e multiplicando pela capacitância. Talvez você pudesse fazer isso! Observe que essa abordagem alternativa para a determinação de $i(t)$ também prevê a descontinuidade em $t = 0$.

f) Para determinar quanto tempo a chave deve ficar na posição b antes que a tensão no capacitor torne-se nula, usamos a equação calculada em (d) e calculamos o instante em que $v_C(t) = 0$:

$$120e^{-5t} = 90 \quad \text{ou} \quad e^{5t} = \frac{120}{90},$$

portanto

$$t = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{4}{3}\right)$$
$$= 57{,}54 \text{ ms}.$$

Observe que, quando $v_C = 0$, $i = 225\,\mu$A e a queda de tensão no resistor de 400 kΩ é 90 V.

g) A Figura 7.26 mostra os gráficos de $v_C(t)$ e $i(t)$ em função de t.

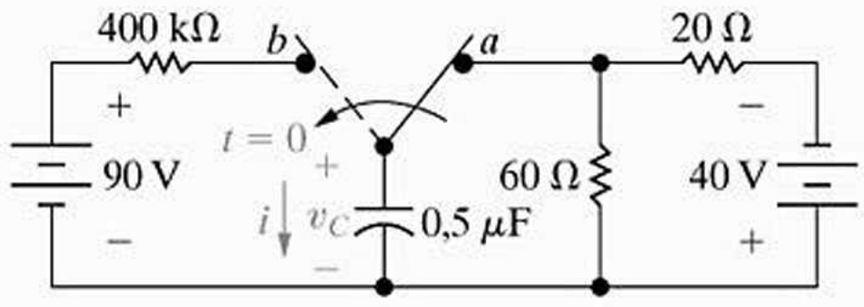


Figura 7.25 ▲ Circuito para o Exemplo 7.7.

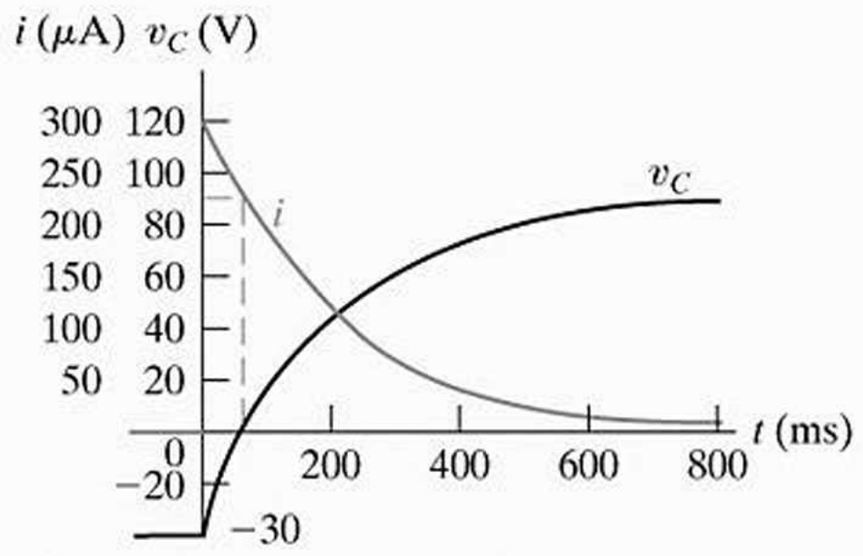


Figura 7.26 ▲ Formas de onda de corrente e tensão para o Exemplo 7.7.

Exemplo 7.8 Utilização do método de solução geral com condições iniciais nulas

A chave no circuito mostrado na Figura 7.27 esteve aberta por um longo tempo. A carga inicial no capacitor é zero. Em $t = 0$, a chave é fechada. Determine a expressão para

a) $i(t)$ para $t \geq 0^+$ e

b) $v(t)$ quando $t \geq 0^+$.

Solução

a) Como a tensão inicial no capacitor é zero, no instante em que a chave é fechada, a corrente no ramo de 30 kΩ será

$$i(0^+) = \frac{(7{,}5)(20)}{50}$$
$$= 3 \text{ mA}.$$

O valor final da corrente no capacitor será zero porque, à medida que t tende ao infinito, o capacitor se comportará, cada vez mais, como um circuito aberto. Assim, $i_f = 0$. A constante de tempo do circuito será igual ao produto entre a resistência de Thévenin (como vista dos terminais do capacitor) e a capacitância. Portanto, $\tau = (20 + 30)10^3(0{,}1) \times 10^{-6} = 5$ ms. Substituindo esses valores na Equação 7.60, teremos a expressão

$$i(t) = 0 + (3 - 0)e^{-t/5\times10^{-3}}$$
$$= 3e^{-200t} \text{ mA}, \; t \geq 0^+.$$

b) Para determinar a tensão $v(t)$, observamos que ela é igual à soma da tensão no capacitor e da tensão no resistor de 30 kΩ. Para determinar a tensão no capacitor (que é uma queda no sentido da corrente), observamos que seu valor inicial é zero e seu valor final é (7,5)(20), ou 150 V. A constante de tempo é a mesma de antes, ou seja, 5 ms. Portanto, usamos a Equação 7.60 para escrever

$$v_C(t) = 150 + (0 - 150)e^{-200t}$$
$$= (150 - 150e^{-200t}) \text{ V}, \quad t \geq 0.$$

Então, a expressão para a tensão $v(t)$ é

$$v(t) = 150 - 150e^{-200t} + (30)(3)e^{-200t}$$
$$= (150 - 60e^{-200t}) \text{ V}, \; t \geq 0^+.$$

Como verificação para essa expressão, observe que ela prevê que o valor inicial da tensão no resistor de 20 Ω será 150 − 60, ou 90 V. No instante em que a chave é fechada, a corrente no resistor de 20 kΩ é (7,5)(30/50), ou 4,5 mA. Essa corrente produz uma queda de 90 V no resistor de 20 kΩ, confirmando o valor previsto pela solução.

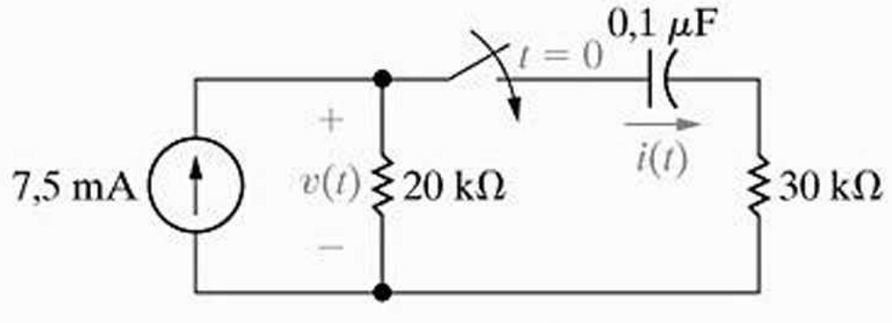


Figura 7.27 ▲ Circuito para o Exemplo 7.8.

Exemplo 7.9 Utilização do método de solução geral para determinar a resposta a um degrau em um circuito *RL*

A chave do circuito mostrado na Figura 7.28 esteve aberta por um longo tempo. Em $t = 0$, ela é fechada. Determine a expressão para

a) $v(t)$ quando $t \geq 0^+$ e
b) $i(t)$ quando $t \geq 0$.

Solução

a) A chave esteve aberta por um longo tempo, de forma que a corrente inicial no indutor é 5 A, orientada de cima para baixo. Imediatamente após a chave fechar, a corrente ainda é 5 A, resultando em uma tensão inicial no indutor de $20 - 5(1)$, ou 15 V. O valor final da tensão no indutor é 0 V. Com a chave fechada, a constante de tempo é 80/1, ou 80 ms. Usamos a Equação 7.60 para escrever a expressão para $v(t)$:

$$v(t) = 0 + (15 - 0)e^{-t/80\times10^{-3}}$$

$$= 15e^{-12,5t}\ \text{V}, \quad t \geq 0^+.$$

b) Já observamos que o valor inicial da corrente no indutor é 5 A. Depois de a chave estar fechada por um longo tempo, a corrente no indutor alcança 20/1, ou 20 A. A constante de tempo do circuito é 80 ms, portanto a expressão para $i(t)$ é

$$i(t) = 20 + (5 - 20)e^{-12,5t}$$

$$= (20 - 15e^{-12,5t})\ \text{A}, \quad t \geq 0.$$

Determinamos que as soluções para $v(t)$ e $i(t)$ estão de acordo, observando que

$$v(t) = L\frac{di}{dt}$$

$$= 80 \times 10^{-3}[15(12,5)e^{-12,5t}]$$

$$= 15e^{-12,5t}\ \text{V}, \quad t \geq 0^+.$$

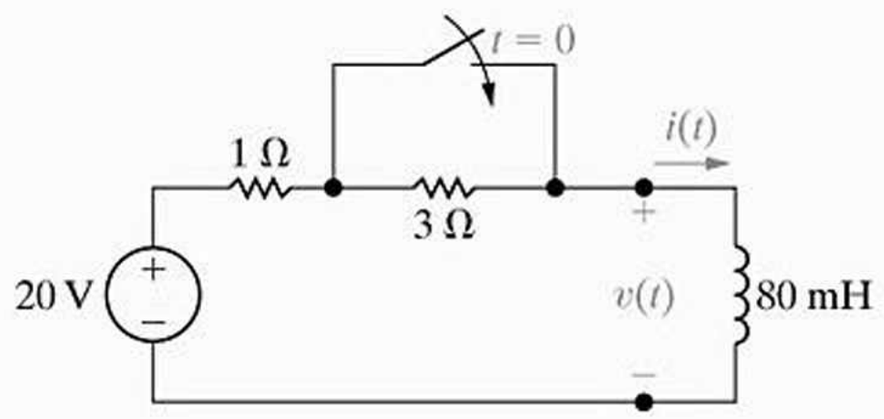


Figura 7.28 ▲ Circuito para o Exemplo 7.9.

NOTA: Avalie o que entendeu do método de solução geral tentando resolver os problemas 7.53 e 7.54, apresentados no final deste capítulo.

O Exemplo 7.10 mostra que a Equação 7.60 pode ser usada até para determinar a resposta a um degrau de alguns circuitos que contêm enrolamentos magneticamente acoplados.

Exemplo 7.10 Determinação da resposta a um degrau de um circuito com enrolamentos magneticamente acoplados

Não há nenhuma energia armazenada no circuito da Figura 7.29 no instante em que a chave é fechada.

a) Determine as soluções para i_o, v_o, i_1 e i_2.
b) Mostre que as soluções obtidas em (a) fazem sentido em termos do comportamento conhecido do circuito.

Solução

a) No circuito da Figura 7.29, os enrolamentos magneticamente acoplados podem ser substituídos por um único enrolamento com uma indutância de

$$L_{eq} = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} = \frac{45 - 36}{18 - 12} = 1,5\ \text{H}.$$

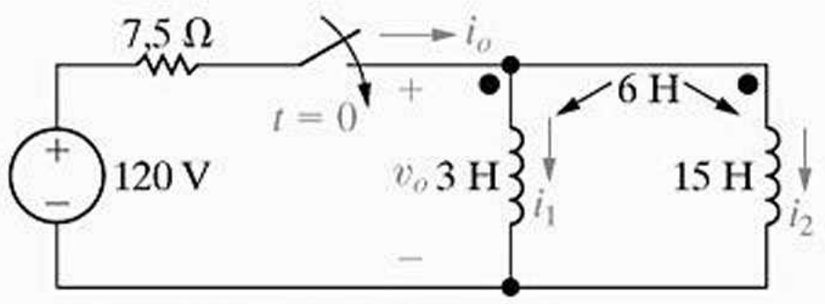


Figura 7.29 ▲ Circuito para o Exemplo 7.10.

(Veja o Problema 6.41.) Dessa forma, o circuito na Figura 7.29 pode ser simplificado como mostrado na Figura 7.30.

Por hipótese, o valor inicial de i_o é zero. Pela Figura 7.30, vemos que o valor final de i_o será 120/7,5 ou 16 A. A constante de tempo do circuito é 1,5/7,5 ou 0,2 s. Decorre diretamente da Equação 7.60 que

$$i_o = 16 - 16e^{-5t}\ \text{A}, \qquad t \geq 0.$$

Calcula-se a tensão v_o a partir da lei das tensões de Kirchhoff. Assim,

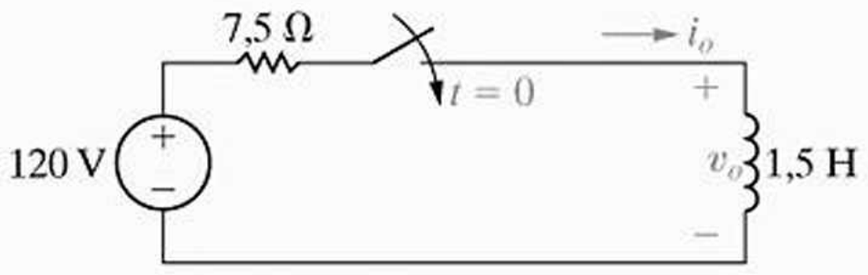


Figura 7.30 ▲ Circuito da Figura 7.29 com os enrolamentos magneticamente acoplados substituídos por um enrolamento equivalente.

$$v_o = 120 - 7{,}5i_o$$
$$= 120e^{-5t}\ \text{V}, \quad t \geq 0^+.$$

Para determinar i_1 e i_2, primeiro observamos pela Figura 7.29 que

$$3\frac{di_1}{dt} + 6\frac{di_2}{dt} = 6\frac{di_1}{dt} + 15\frac{di_2}{dt}.$$

ou

$$\frac{di_1}{dt} = -3\frac{di_2}{dt}.$$

Também decorre da Figura 7.29 que, como $i_o = i_1 + i_2$,

$$\frac{di_o}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt}.$$

Portanto,

$$80e^{-5t} = -2\frac{di_2}{dt}.$$

Como $i_2(0)$ é zero, temos

$$i_2 = \int_0^t -40e^{-5x}\,dx$$
$$= -8 + 8e^{-5t}\ \text{A}, \quad t \geq 0.$$

Usando a lei das correntes de Kirchhoff, obtemos

$$i_1 = 24 - 24e^{-5t}\ \text{A}, \quad t \geq 0.$$

b) Em primeiro lugar, observamos que $i_o(0)$, $i_1(0)$ e $i_2(0)$ são todas zero, o que é consistente com a afirmação de que nenhuma energia está armazenada no circuito, no instante em que a chave é fechada.
Em seguida, observamos que $v_o(0^+) = 120$ V, o que é consistente com o fato de que $i_o(0)$ seja 0.
Agora, observamos que as soluções para i_1 e i_2 são consistentes com a solução para v_o, observando que

$$v_o = 3\frac{di_1}{dt} + 6\frac{di_2}{dt}$$
$$= 360e^{-5t} - 240e^{-5t}$$
$$= 120e^{-5t}\ \text{V}, \quad t \geq 0^+,$$

ou

$$v_o = 6\frac{di_1}{dt} + 15\frac{di_2}{dt}$$
$$= 720e^{-5t} - 600e^{-5t}$$
$$= 120e^{-5t}\ \text{V}, \quad t \geq 0^+.$$

Os valores finais de i_1 e i_2 podem ser verificados observando os fluxos que atravessam os enrolamentos. O fluxo no enrolamento de 3 H (λ_1) deve ser igual ao fluxo do enrolamento de 15 H (λ_2), porque

$$v_o = \frac{d\lambda_1}{dt}$$
$$= \frac{d\lambda_2}{dt}.$$

Além disso,

$$\lambda_1 = 3i_1 + 6i_2\ \text{Wb-espiras}$$

e

$$\lambda_2 = 6i_1 + 15i_2\ \text{Wb-espiras}.$$

Independentemente de qual expressão usamos, obtemos

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 24 - 24e^{-5t}\ \text{Wb-espiras}.$$

Observe que a solução para λ_1 ou λ_2 é consistente com a solução para v_o.

O valor final do fluxo tanto do enrolamento 1 quanto do enrolamento 2 é 24 Wb-espiras, isto é,

$$\lambda_1(\infty) = \lambda_2(\infty) = 24\ \text{Wb-espiras}.$$

O valor final de i_1 é

$$i_1(\infty) = 24\ \text{A}$$

e o valor final de i_2 é

$$i_2(\infty) = -8\ \text{A}.$$

A consistência entre esses valores finais para i_1 e i_2 e o valor final do fluxo pode ser verificada pelas expressões:

$$\lambda_1(\infty) = 3i_1(\infty) + 6i_2(\infty)$$
$$= 3(24) + 6(-8) = 24\ \text{Wb-espiras},$$

$$\lambda_2(\infty) = 6i_1(\infty) + 15i_2(\infty)$$
$$= 6(24) + 15(-8) = 24\ \text{Wb-espiras}.$$

Vale a pena observar que os valores finais de i_1 e i_2 só podem ser verificados por meio dos fluxos porque em $t = \infty$ os dois enrolamentos são curtos-circuitos ideais. A divisão de corrente entre curtos-circuitos ideais não pode ser determinada pela lei de Ohm.

NOTA: Avalie o que entendeu desse material tentando resolver os problemas 7.65 e 7.67, apresentados no final deste capítulo.

7.5 Chaveamento seqüencial

Sempre que chaveamentos ocorrem mais de uma vez em um circuito, temos o *chaveamento seqüencial*. Por exemplo, uma chave única, de duas posições, pode ser ligada e desligada em seqüência, ou várias chaves podem ser abertas ou fechadas em seqüência. A referência de tempo para todos os chaveamentos não pode ser $t = 0$. Determinamos as tensões e correntes geradas por uma seqüência de chaveamentos usando as técnicas já descritas neste capítulo. Calculamos as expressões para $v(t)$ e $i(t)$ para uma dada posição da chave ou chaves e, então, usamos essas soluções para determinar as condições iniciais para a próxima posição da chave ou chaves.

No caso de problemas de chaveamento seqüencial, é fundamental o cálculo do valor inicial $x(t_0)$. Lembre-se de que qualquer grandeza elétrica, exceto correntes indutivas e tensões capacitivas, pode variar instantaneamente no instante do chaveamento. Assim, calcular primeiro as correntes indutivas e tensões capacitivas é ainda mais importante em problemas de chaveamento seqüencial. Desenhar o circuito válido para cada intervalo de tempo é freqüentemente útil no processo de solução.

Os exemplos 7.11 e 7.12 ilustram as técnicas de análise para circuitos com chaveamento seqüencial. O primeiro é um problema de resposta natural com dois chaveamentos e o segundo é um problema de resposta a um degrau.

Exemplo 7.11 Análise de um circuito *RL* em que ocorre um chaveamento seqüencial

As duas chaves do circuito mostrado na Figura 7.31 estiveram fechadas por um longo tempo. Em $t = 0$, a chave 1 é aberta. Então, 35 ms mais tarde, a chave 2 é aberta.

a) Determine $i_L(t)$ para $0 \leq t \leq 35$ ms.

b) Determine i_L para $t \geq 35$ ms.

c) Qual porcentagem da energia inicial armazenada no indutor de 150 mH é dissipada no resistor de 18 Ω?

d) Repita (c) para o resistor de 3 Ω.

e) Repita (c) para o resistor de 6 Ω.

Solução

a) Em $t < 0$, ambas as chaves estão fechadas, o que significa que o indutor de 150 mH está curto-circuitando o resistor de 18 Ω. O circuito equivalente é mostrado na Figura 7.32. Determinamos a corrente inicial no indutor calculando $i_L(0^-)$ no circuito mostrado na Figura 7.32. Após várias transformações de fonte, determinamos que $i_L(0^-)$ é 6 A. Para $0 \leq t \leq 35$ ms, a chave 1 está aberta (chave 2 está fechada), o que desliga do circuito a fonte de tensão de 60 V e os resistores de 4 Ω e 12 Ω. O indutor não está mais se comportando como um curto-circuito (porque a fonte cc não está mais no circuito), portanto o resistor de 18 Ω não está mais em curto-circuito. O circuito equivalente é mostrado na Figura 7.33. Observe que a resistência equivalente ligada aos terminais do indutor é a combinação em paralelo de 9 Ω e 18 Ω, ou seja, 6 Ω. A constante de tempo do circuito é $(150/6) \times 10^{-3}$, ou 25 ms. Portanto, a expressão para i_L é

$$i_L = 6e^{-40t}\ \text{A}, \qquad 0 \leq t \leq 35\ \text{ms}.$$

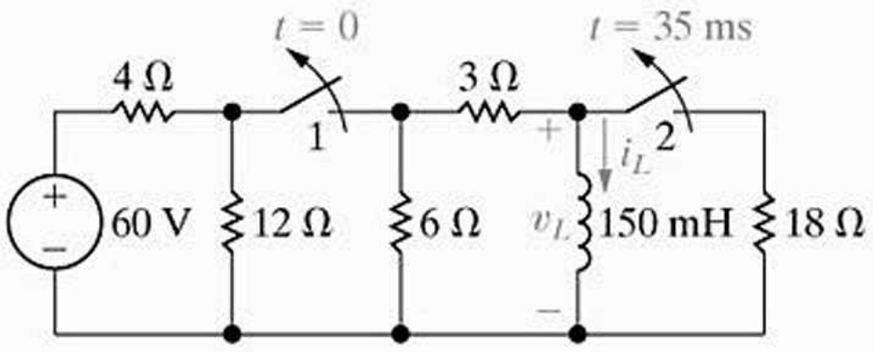


Figura 7.31 ▲ Circuito para o Exemplo 7.11.

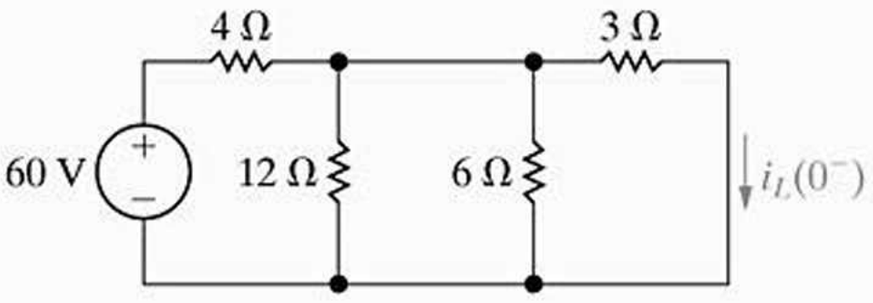


Figura 7.32 ▲ Circuito mostrado na Figura 7.31, para $t < 0$.

b) Quando $t = 35$ ms, o valor da corrente no indutor é

$$i_L = 6e^{-1,4} = 1,48\ \text{A}.$$

Assim, quando a chave 2 é aberta, o circuito se reduz ao mostrado na Figura 7.34 e a constante de tempo muda para $(150/9) \times 10^{-3}$, ou seja, 16,67 ms. A expressão para i_L torna-se

$$i_L = 1,48e^{-60(t-0,035)}\ \text{A}, \quad t \geq 35\ \text{ms}.$$

Observe que a função exponencial é deslocada de 35 ms no tempo.

c) O resistor de 18 Ω está no circuito somente durante os primeiros 35 ms da seqüência de chaveamentos. Durante esse intervalo, a tensão no resistor é

$$\begin{aligned} v_L &= 0,15\frac{d}{dt}(6e^{-40t}) \\ &= -36e^{-40t}\ \text{V}, \qquad 0 < t < 35\ \text{ms}. \end{aligned}$$

A potência dissipada no resistor de 18 Ω é

$$p = \frac{v_L^2}{18} = 72e^{-80t}\ \text{W}, \qquad 0 < t < 35\ \text{ms}.$$

Por conseguinte, a energia dissipada é

$$\begin{aligned} w &= \int_0^{0,035} 72e^{-80t}\,dt \\ &= \frac{72}{-80}e^{-80t}\Big|_0^{0,035} \\ &= 0,9(1 - e^{-2,8}) = 845,27\ \text{mJ}. \end{aligned}$$

A energia inicial armazenada no indutor de 150 mH é

$$w_i = \frac{1}{2}(0,15)(36) = 2,7\ \text{J} = 2.700\ \text{mJ}.$$

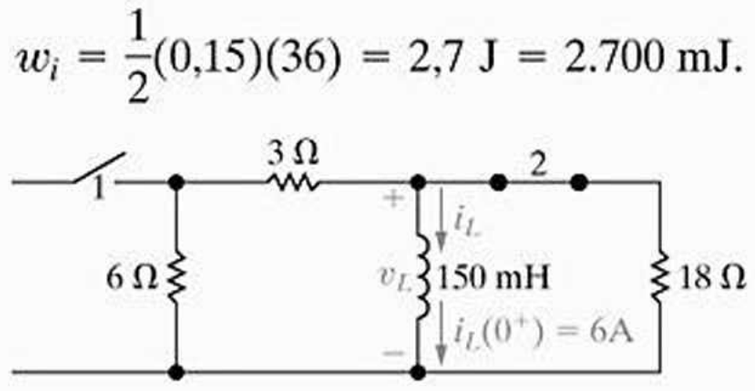


Figura 7.33 ▲ Circuito mostrado na Figura 7.31, para $0 \leq t \leq 35$ ms.

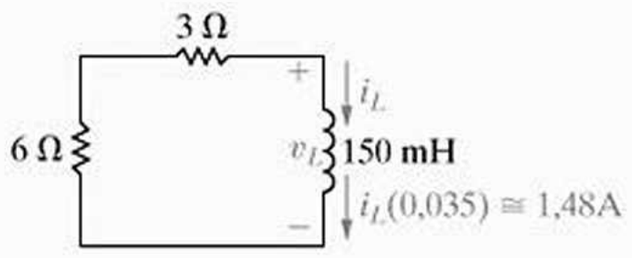


Figura 7.34 ▲ Circuito mostrado na Figura 7.31, para $t \geq 35$ ms.

Portanto, (845,27/2.700) × 100, ou 31,31% da energia inicial armazenada no indutor de 150 mH é dissipada no resistor de 18 Ω.

d) Para $0 < t < 35$ ms, a tensão no resistor de 3 Ω é

$$v_{3\Omega} = \left(\frac{v_L}{9}\right)(3) = \frac{1}{3}v_L = -12e^{-40t}\ \text{V}.$$

Portanto, a energia dissipada no resistor de 3 Ω nos primeiros 35 ms é

$$w_{3\Omega} = \int_0^{0,035} \frac{144e^{-80t}}{3}\,dt$$

$$= 0,6(1 - e^{-2,8}) = 563,51\ \text{mJ}.$$

Para $t > 35$ ms, a corrente no resistor de 3 Ω é

$$i_{3\Omega} = i_L = (6e^{-1,4})e^{-60(t-0,035)}\ \text{A}$$

A energia dissipada no resistor de 3 Ω para $t > 35$ ms é

$$w_{3\Omega} = \int_{0,035}^{\infty} i_{3\Omega}^2 \times 3\,dt$$

$$= \int_{0,035}^{\infty} 3(36)e^{-2,8}e^{-120(t-0,035)}\,dt$$

$$= 108e^{-2,8} \times \left.\frac{e^{-120(t-0,035)}}{-120}\right|_{0,035}^{\infty}$$

$$= \frac{108}{120}e^{-2,8} = 54,73\ \text{mJ}.$$

A energia total dissipada no resistor de 3 Ω é

$$w_{3\Omega}(\text{total}) = 563,51 + 54,73$$

$$= 618,24\ \text{mJ}.$$

A porcentagem da energia inicial armazenada é

$$\frac{618,24}{2700} \times 100 = 22,90\%.$$

e) Como o resistor de 6 Ω está em série com o resistor de 3 Ω, a energia dissipada e a porcentagem da energia inicial armazenada serão duas vezes a do resistor de 3 Ω:

$$w_{6\Omega}(\text{total}) = 1.236,48\ \text{mJ},$$

e a porcentagem da energia inicial armazenada é 45,80%. Verificamos esses cálculos observando que

$$1.236,48 + 618,24 + 845,27 = 2.699,99\ \text{mJ}$$

e

$$31,31 + 22,90 + 45,80 = 100,01\%.$$

As pequenas discrepâncias nas somas são resultado de erros de arredondamento.

Exemplo 7.12 Análise de um circuito *RC* em que ocorre um chaveamento seqüencial

O capacitor descarregado do circuito mostrado na Figura 7.35 está inicialmente ligado ao terminal *a* da chave de três posições. Em $t = 0$, a chave é colocada na posição *b*, na qual permanece durante 15 ms. Depois de 15 ms, a chave é colocada na posição *c*, na qual permanece indefinidamente.

a) Calcule a expressão numérica para a tensão no capacitor.

b) Faça um gráfico da tensão no capacitor em relação ao tempo.

c) Quando a tensão no capacitor será igual a 200 V?

Solução

a) No instante em que a chave é colocada na posição *b*, a tensão inicial no capacitor é zero. Se a chave permanecesse nessa posição, o capacitor se carregaria até 400 V. A constante de tempo do circuito, quando a chave está na posição *b*, é 10 ms. Portanto, podemos usar a Equação 7.59 com $t_0 = 0$ para escrever a expressão para a tensão no capacitor:

$$v = 400 + (0 - 400)e^{-100t}$$

$$= (400 - 400e^{-100t})\ \text{V}, \quad 0 \leq t \leq 15\ \text{ms}.$$

Observe que, como a chave permanece na posição *b* por apenas 15 ms, essa expressão só é válida para o intervalo de tempo de 0 a 15 ms. Depois de a chave ter permanecido nessa posição durante 15 ms, a tensão no capacitor será

$$v(15\ \text{ms}) = 400 - 400e^{-1,5} = 310,75\ \text{V}.$$

Portanto, quando a chave é colocada na posição *c*, a tensão inicial no capacitor é 310,75 V. Com a chave na posição *c*, o valor final da tensão no capacitor é zero e a constante de tempo é 5 ms. Mais uma vez, usamos a Equação 7.59 para escrever a expressão para a tensão no capacitor:

$$v = 0 + (310,75 - 0)e^{-200(t-0,015)}$$

$$= 310,75e^{-200(t-0,015)}\ \text{V}, \quad 15\ \text{ms} \leq t.$$

Quando escrevemos a expressão para v, reconhecemos que $t_0 = 15$ ms e que essa expressão é válida somente para $t \geq 15$ ms.

b) A Figura 7.36 mostra o gráfico de v em função de t.

c) O gráfico da Figura 7.36 revela que a tensão no capacitor é igual a 200 V em dois tempos diferentes: uma vez no intervalo entre 0 e 15 ms e uma vez após 15 ms. Determinamos o primeiro instante resolvendo a equação

$$200 = 400 - 400e^{-100t_1},$$

que resulta em $t_1 = 6,93$ ms. Determinamos o segundo instante resolvendo a equação

$$200 = 310,75e^{-200(t_2-0,015)}.$$

Nesse caso, $t_2 = 17,20$ ms.

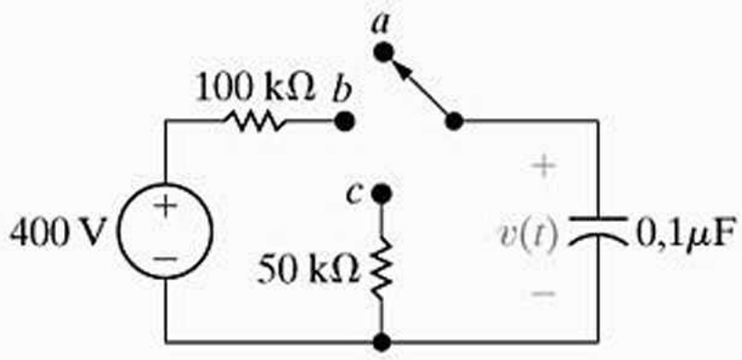


Figura 7.35 ▲ Circuito para o Exemplo 7.12.

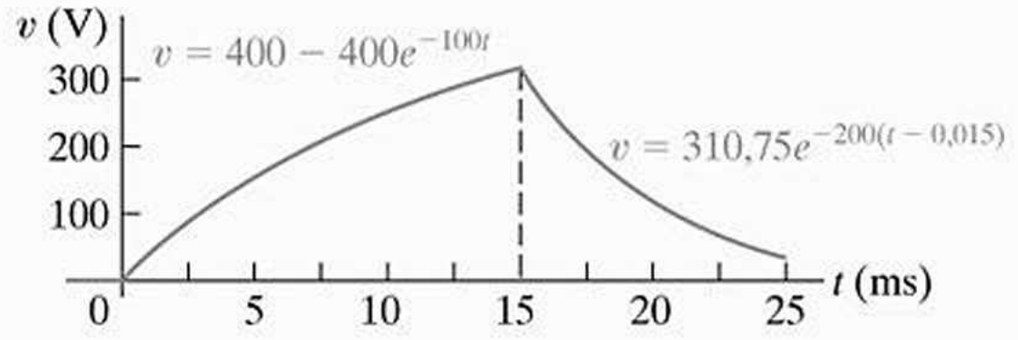


Figura 7.36 ▲ Tensão no capacitor para o Exemplo 7.12.

✔ PROBLEMAS PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 3 — Saber analisar circuitos com chaveamento seqüencial

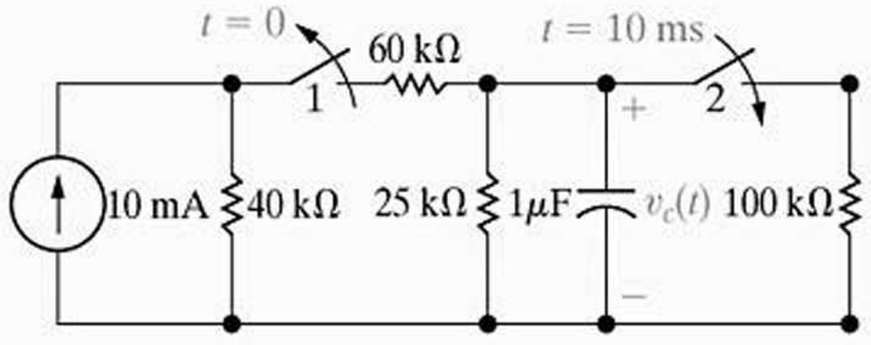
7.7 No circuito mostrado, a chave 1 esteve fechada e a chave 2 esteve aberta por um longo tempo. Em $t = 0$, a chave 1 é aberta. Então, 10 ms mais tarde, a chave 2 é fechada. Determine

a) $v_c(t)$ para $0 \leq t \leq 0{,}01$ s,

b) $v_c(t)$ para $t \geq 0{,}01$ s,

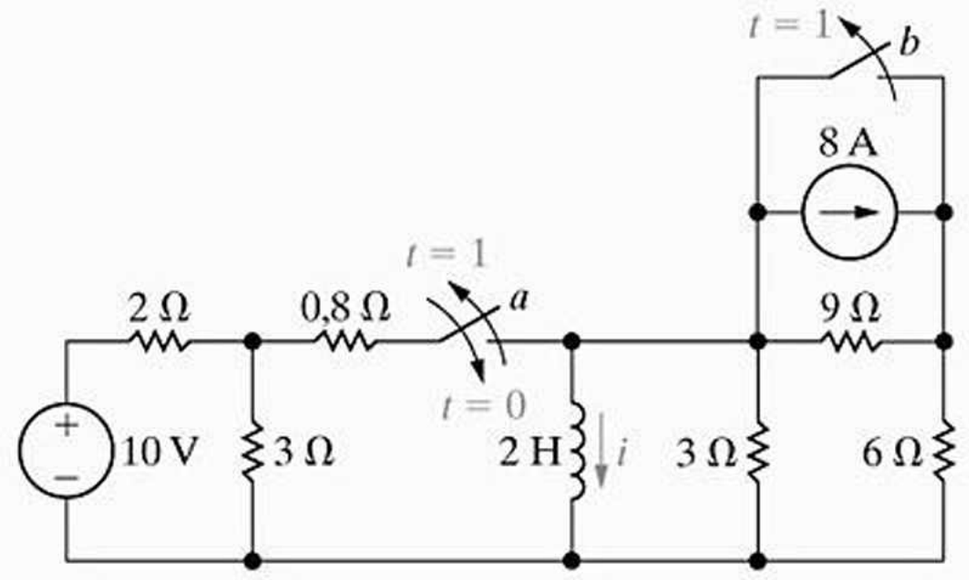
c) a energia total dissipada no resistor de 25 kΩ e

d) a energia total dissipada no resistor de 100 kΩ.



Resposta: (a) $80e^{-40t}$ V; (c) 2,91 mJ;
(b) $53{,}63e^{-50(t-0{,}01)}$ V; (d) 0,29 mJ.

7.8 A chave *a* do circuito mostrado esteve aberta por um longo tempo e a chave *b* esteve fechada por um longo tempo. A chave *a* é fechada em $t = 0$ e, após permanecer fechada durante 1 s, é aberta novamente. A chave *b* é aberta simultaneamente à chave *a* e ambas as chaves permanecem, então, abertas indefinidamente. Determine a expressão para a corrente *i* no indutor que seja válida para (a) $0 \leq t \leq 1$ s e (b) $t \geq 1$ s.



Resposta: (a) $(3 - 3e^{-0{,}5t})$ A, $0 \leq t \leq 1$ s;
(b) $(-4{,}8 + 5{,}98e^{-1{,}25(t-1)})$ A, $t \geq 1$ s.

NOTA: Tente resolver também os problemas 7.72 e 7.76, apresentados no final deste capítulo.

7.6 Resposta indefinidamente crescente

A resposta de um circuito pode crescer indefinida, em vez de decrescer, e exponencialmente com o tempo. Esse tipo de resposta, denominada *resposta indefinidamente crescente*, é possível se o circuito contiver fontes dependentes. Nesse caso, a resistência equivalente de Thévenin vista dos terminais do indutor ou do capacitor pode ser negativa. Essa resistência negativa gera uma constante de tempo negativa e as correntes e tensões resultantes aumentam indefinidamente. No caso de um circuito real, a certa altura a resposta alcança um valor-limite quando um componente é destruído ou entra em um estado de saturação, o que impede qualquer aumento adicional de tensão ou corrente.

Quando consideramos respostas indefinidamente crescentes, o conceito de valor final perde o sentido. Conseqüentemente, em vez de usar a solução para a resposta a um degrau dada na Equação 7.59, derivamos a equação diferencial que descreve o circuito que contém a resistência negativa e, então, a resolvemos usando a técnica da separação de variáveis. O Exemplo 7.13 ilustra o caso de uma resposta que cresce exponencialmente em termos da tensão nos terminais de um capacitor.

Exemplo 7.13 Determinação da resposta indefinidamente crescente em um circuito *RC*

a) Quando a chave está fechada no circuito mostrado na Figura 7.37, a tensão no capacitor é 10 V. Determine a expressão para v_o para $t \geq 0$.

b) Admita que o capacitor entre em curto-circuito interno quando sua tensão terminal alcança 150 V. Quantos milissegundos transcorrem antes de o capacitor entrar em curto-circuito?

Solução

a) Para determinar a resistência equivalente de Thévenin vista dos terminais do capacitor, usamos o método da fonte auxiliar descrito no Capítulo 4. A Figura 7.38 mostra o circuito resultante, onde v_T é a tensão auxiliar e i_T é a corrente auxiliar. Para v_T expressa em volts, obtemos

$$i_T = \frac{v_T}{10} - 7\left(\frac{v_T}{20}\right) + \frac{v_T}{20}\,\text{mA}.$$

Resolvendo para a razão v_T/i_T, obtemos a resistência de Thévenin:

$$R_{\text{Th}} = \frac{v_T}{i_T} = -5\ \text{k}\Omega.$$

Com essa resistência de Thévenin, podemos simplificar o circuito da Figura 7.37 para o mostrado na Figura 7.39.

Para $t \geq 0$, a equação diferencial que descreve o circuito mostrado na Figura 7.39 é

$$(5 \times 10^{-6})\frac{dv_o}{dt} - \frac{v_o}{5} \times 10^{-3} = 0.$$

Dividindo ambos os membros pelo coeficiente da derivada, obtemos

$$\frac{dv_o}{dt} - 40v_o = 0.$$

Agora, usamos a técnica da separação de variáveis para determinar $v_o(t)$:

$$v_o(t) = 10e^{40t}\ \text{V}, \qquad t \geq 0.$$

b) $v_o = 150$ V quando $e^{40t} = 15$. Portanto, $40t = \ln 15$ e $t = 67{,}70$ ms.

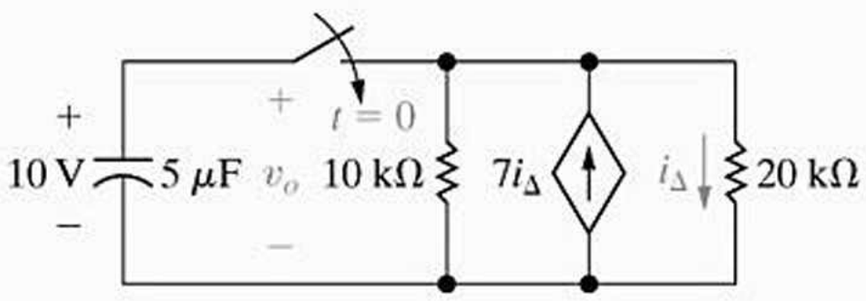


Figura 7.37 ▲ Circuito para o Exemplo 7.13.

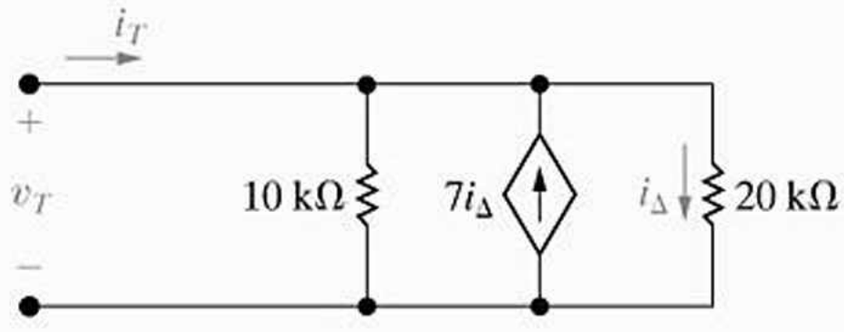


Figura 7.38 ▲ Método da fonte auxiliar usada para determinar R_{Th}.

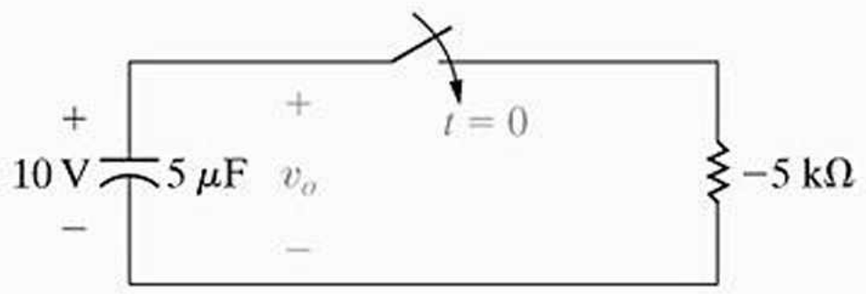


Figura 7.39 ▲ Simplificação do circuito mostrado na Figura 7.37.

NOTA: Avalie o que entendeu desse material tentando resolver os problemas 7.86 e 7.87, apresentados no final deste capítulo.

O fato de que elementos de circuitos interligados podem resultar em correntes e tensões sempre crescentes é importante para os engenheiros. Se tais interligações não forem intencionais, o circuito resultante pode apresentar falhas de componentes inesperadas e potencialmente perigosas.

7.7 Amplificador-integrador

Lembra-se de que na introdução do Capítulo 5 dissemos que uma razão para nosso interesse no amplificador operacional é sua utilização como um amplificador-integrador? Agora estamos prontos para analisar o circuito amplificador-integrador mostrado na Figura 7.40. A finalidade de tal circuito é gerar uma tensão de saída proporcional à integral da tensão de entrada. Na Figura 7.40, acrescentamos as correntes de ramo i_f e i_s, com as tensões de nó v_n e v_p, para auxiliar nossa análise.

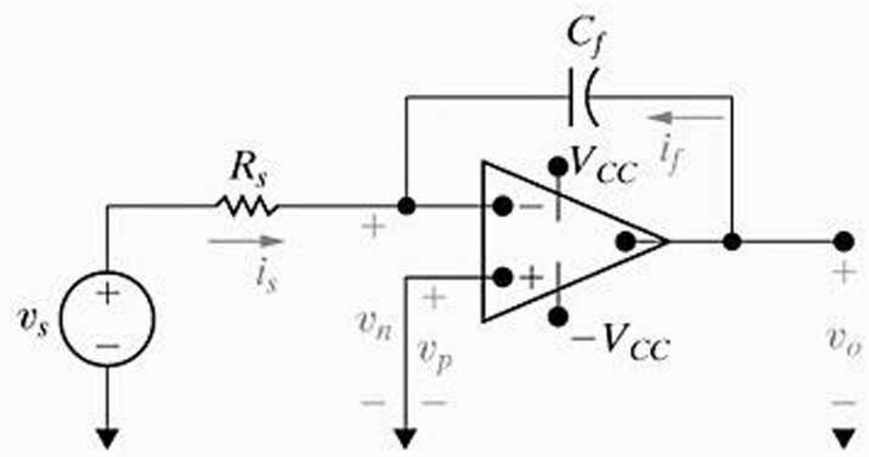


Figura 7.40 ▲ Amplificador-integrador.

Admitamos que o amplificador operacional seja ideal. Assim, aproveitamos a vantagem das restrições

$$i_f + i_s = 0, \tag{7.61}$$

$$v_n = v_p. \tag{7.62}$$

Como $v_p = 0$,

$$i_s = \frac{v_s}{R_s}, \tag{7.63}$$

$$i_f = C_f \frac{dv_o}{dt}. \tag{7.64}$$

Assim, pelas equações 7.61, 7.63 e 7.64,

$$\frac{dv_o}{dt} = -\frac{1}{R_s C_f} v_s. \tag{7.65}$$

Multiplicando ambos os lados da Equação 7.65 por um tempo diferencial dt e, então, integrando de t_0 a t, obtemos a equação

$$v_o(t) = -\frac{1}{R_s C_f} \int_{t_0}^{t} v_s \, dy + v_o(t_0). \tag{7.66}$$

Na Equação 7.66, t_0 representa o instante de tempo em que começamos a integração. Assim, $v_o(t_0)$ é o valor da tensão de saída naquele instante. Além disso, como $v_n = v_p = 0$, $v_o(t_0)$ é idêntica à tensão inicial nos terminais do capacitor de realimentação C_f.

De acordo com a Equação 7.66, a tensão de saída de um amplificador-integrador é igual ao valor inicial da tensão nos terminais do capacitor mais uma réplica invertida (sinal negativo), multiplicada por um fator de escala ($1/R_s C_f$), da integral da tensão de entrada. Se nenhuma energia estiver armazenada no capacitor quando a integração começar, a Equação 7.66 se reduzirá a

$$v_o(t) = -\frac{1}{R_s C_f} \int_{t_0}^{t} v_s \, dy. \tag{7.67}$$

Se v_s for um degrau de tensão, a tensão de saída variará linearmente com o tempo. Por exemplo, suponha que a tensão de entrada seja o pulso retangular mostrado na Figura 7.41. Suponha também que o valor inicial de $v_o(t)$ seja zero no instante em que v_s passa de 0 a V_m. Uma aplicação direta da Equação 7.66 resulta em

$$v_o = -\frac{1}{R_s C_f} V_m t + 0 \qquad 0 \leq t \leq t_1. \tag{7.68}$$

Quando t encontra-se entre t_1 e $2t_1$,

$$v_o = -\frac{1}{R_s C_f} \int_{t_1}^{t} (-V_m) \, dy - \frac{1}{R_s C_f} V_m t_1$$

$$= \frac{V_m}{R_s C_f} t - \frac{2V_m}{R_s C_f} t_1 \qquad t_1 \leq t \leq 2t_1. \tag{7.69}$$

A Figura 7.42 mostra um gráfico de $v_o(t)$ em função de t. Fica assim claro que a tensão de saída é uma réplica invertida, multiplicada por um fator de escala, da integral da tensão de entrada.

A tensão de saída é proporcional à integral da tensão de entrada apenas se o amp op funcionar dentro de sua faixa linear, isto é, se não se saturar. Os exemplos 7.14 e 7.15 ilustram ainda mais a análise do amplificador-integrador.

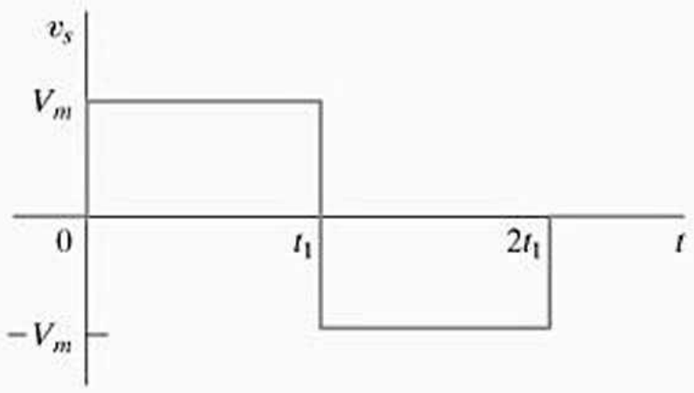


Figura 7.41 ▲ Sinal de tensão de entrada.

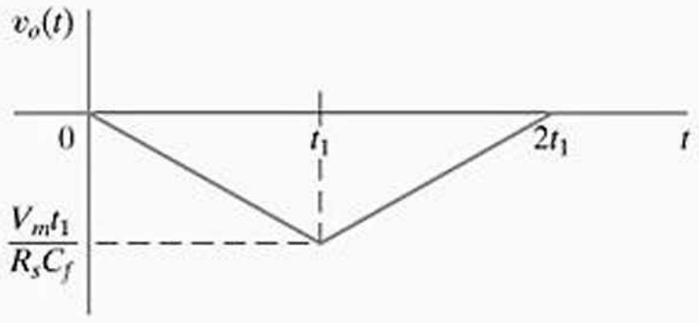


Figura 7.42 ▲ Tensão de saída de um amplificador-integrador.

Exemplo 7.14 Análise de um amplificador-integrador

Admita que os valores numéricos para o sinal de tensão mostrado na Figura 7.41 sejam $V_m = 50$ mV e $t_1 = 1$ s. Esse sinal de tensão é aplicado ao circuito amplificador-integrador mostrado na Figura 7.40. Os parâmetros de circuito do amplificador são $R_s = 100$ kΩ, $C_f = 0{,}1$ μF e $V_{CC} = 6$ V.

A tensão inicial no capacitor é zero.

a) Calcule $v_o(t)$.

b) Faça um gráfico de $v_o(t)$ em função de t.

Solução

a) Para $0 \leq t \leq 1$ s,

$$v_o = \frac{-1}{(100 \times 10^3)(0{,}1 \times 10^{-6})} 50 \times 10^{-3} t + 0$$

$$= -5t \text{ V}, \qquad 0 \leq t \leq 1 \text{ s}.$$

Para $1 \leq t \leq 2$ s,

$$v_o = (5t - 10) \text{ V}.$$

b) A Figura 7.43 mostra o gráfico de $v_o(t)$ em função de t.

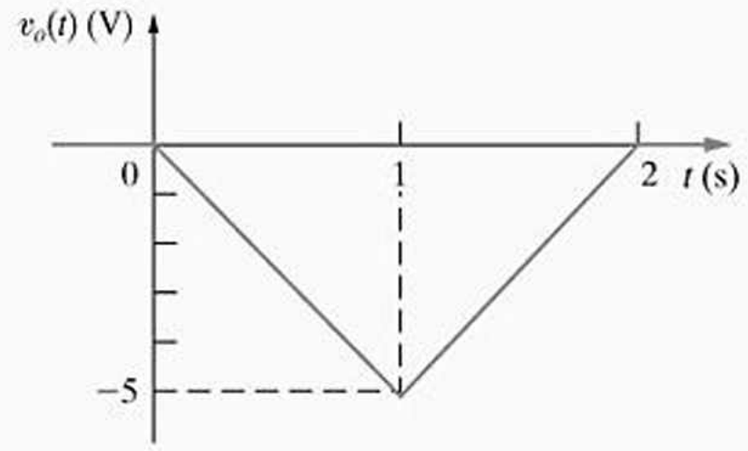


Figura 7.43 ▲ Tensão de saída para o Exemplo 7.14.

Exemplo 7.15 Análise de um amplificador-integrador submetido a um chaveamento seqüencial

No instante em que a chave faz contato com o terminal *a* no circuito mostrado na Figura 7.44, a tensão nos terminais do capacitor de 0,1 μF é 5 V. A chave permanece no terminal *a* durante 9 ms e, então, passa instantaneamente para o terminal *b*. Quantos milissegundos depois do contato com o terminal *b* o amplificador operacional fica saturado?

Solução

A expressão para a tensão de saída durante o tempo em que a chave está na posição *a* é

$$v_o = -5 - \frac{1}{10^{-2}}\int_0^t (-10)\,dy$$
$$= (-5 + 1.000t)\ \text{V}.$$

Assim, 9 ms depois de a chave ter feito contato com o terminal *a*, a tensão de saída é $-5 + 9$, ou 4 V.

A expressão para a tensão de saída depois que a chave foi colocada na posição *b* é

$$v_o = 4 - \frac{1}{10^{-2}}\int_{9\times10^{-3}}^t 8\,dy$$
$$= 4 - 800(t - 9 \times 10^{-3})$$
$$= (11{,}2 - 800t)\ \text{V}.$$

Durante esse intervalo de tempo a tensão é decrescente e, a certa altura, o amplificador operacional fica saturado em -6 V. Portanto, igualamos a expressão para v_o a –6 V para obter o tempo de saturação t_s:

$$11{,}2 - 800t_s = -6,$$

ou

$$t_s = 21{,}5\ \text{ms}.$$

Assim, o amplificador-integrador fica saturado 21,5 ms depois de a chave ter sido colocada na posição *b*.

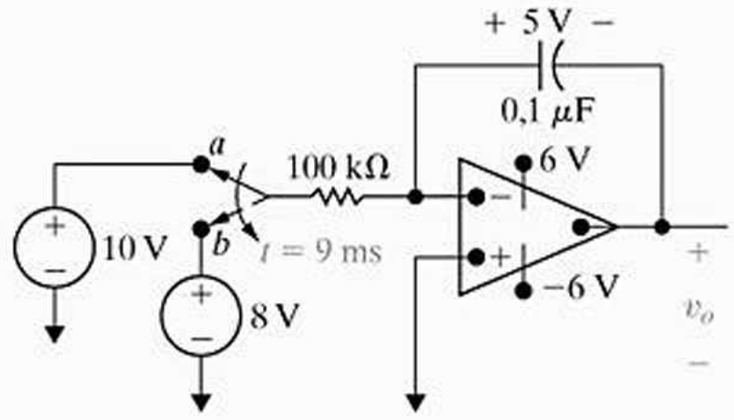


Figura 7.44 ▲ Circuito para o Exemplo 7.15.

Pelos exemplos, vemos que o amplificador-integrador pode executar muito bem a função de integração, mas apenas dentro de limites especificados que impeçam sua saturação. O amp op fica saturado por causa do acúmulo de carga no capacitor de realimentação. Podemos evitar que ele fique saturado, colocando um resistor em paralelo com o capacitor de realimentação. Examinamos tal circuito no Capítulo 8.

Observe que podemos converter o amplificador-integrador em um amplificador-diferenciador fazendo uma permuta entre a resistência de entrada R_s e o capacitor de realimentação C_f. Então,

$$v_o = -R_s C_f \frac{dv_s}{dt}. \tag{7.70}$$

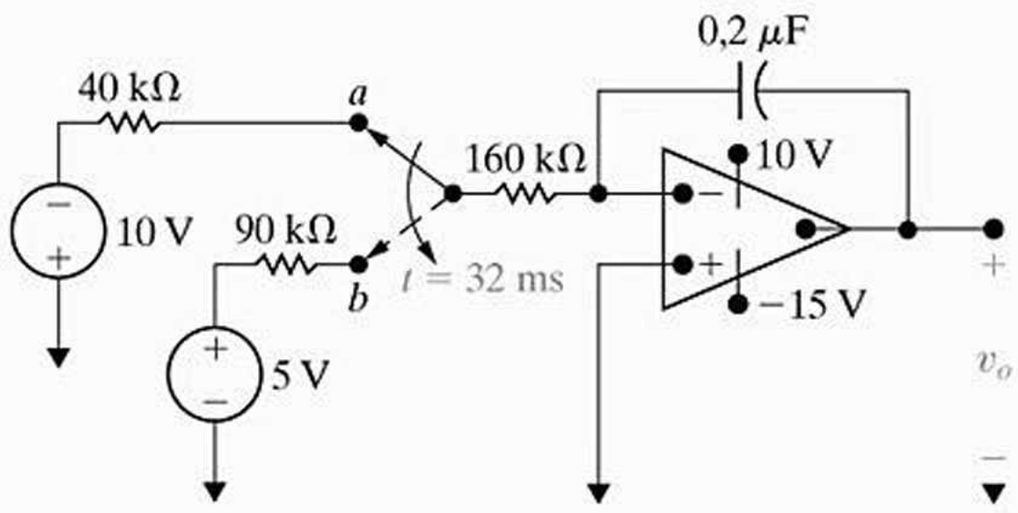
Deixamos a dedução da Equação 7.70 como um exercício para você. O amplificador-diferenciador é raramente usado porque, na prática, ele é uma fonte de sinais indesejáveis ou ruídos.

Por fim, podemos projetar circuitos amplificadores-integradores, bem como diferenciadores, usando um indutor em vez de um capacitor. Contudo, fabricar capacitores para dispositivos de circuito integrado é muito mais fácil e, assim, indutores são raramente usados em amplificadores-integradores.

✔ PROBLEMAS PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 4 — Saber analisar circuitos com amplificadores operacionais que contenham resistores e um único capacitor

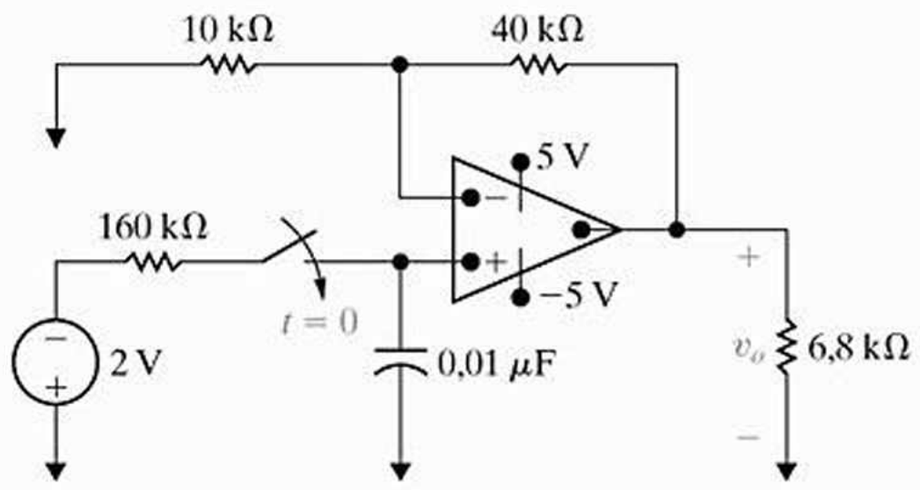
7.9 Não há nenhuma energia armazenada no capacitor no instante em que a chave do circuito faz contato com o terminal *a*. A chave permanece na posição *a* durante 32 ms e, então, passa instantaneamente para a posição *b*. Quantos milissegundos depois de a chave fazer contato com o terminal *a* o amp op fica saturado?



Resposta: 262 ms.

7.10 a) Quando a chave fecha no circuito mostrado, não há nenhuma energia armazenada no capacitor. Quanto tempo leva para o amp op se saturar?

b) Repita o item (a) com uma tensão inicial no capacitor de 1 V, positiva no terminal superior.



Resposta: (a) 1,11 ms;
(b) 1,76 ms.

NOTA: Tente resolver também os problemas 7.92 e 7.93, apresentados no final deste capítulo.

Perspectiva prática

Circuito de luz intermitente

Agora estamos prontos para analisar o circuito de luz intermitente apresentado no início deste capítulo e mostrado na Figura 7.45. A lâmpada nesse circuito começa a conduzir sempre que sua tensão alcança um valor V_{max}. Durante o tempo em que a lâmpada conduz, ela pode ser modelada como um resistor cuja resistência é R_L. A lâmpada continuará a conduzir até que sua tensão caia abaixo de um valor V_{min}. Quando não está conduzindo, a lâmpada se comporta como um circuito aberto.

Antes de desenvolver as expressões analíticas que descrevem o comportamento do circuito, vamos desenvolver uma idéia de como o circuito funciona observando o seguinte. Em primeiro lugar, quando a lâmpada comporta-se como um circuito aberto, a fonte de tensão cc tenderá a carregar o capacitor, por meio do resistor R, até um valor de V_s volts. Contudo, assim que a tensão da lâmpada atinge V_{max}, ela começa a conduzir e o capacitor começará a se descarregar sobre o equivalente de Thévenin visto de seus terminais. No entanto, tão logo a tensão no capacitor alcance a tensão de corte da lâmpada (V_{min}), ela agirá como um circuito aberto e o capacitor começará a se recarregar novamente. Esse ciclo de carga e descarga do capacitor é resumido no esquema mostrado na Figura 7.46.

Ao desenhar a Figura 7.46, escolhemos $t = 0$ como o instante em que o capacitor começa a se carregar. O tempo t_o representa o instante em que a lâmpada começa a conduzir e t_c é o final de um ciclo completo. Devemos mencionar também que para construir a Figura 7.46 admitimos que o circuito tenha alcançado o estágio repetitivo de sua operação. Nosso projeto do circuito de luz intermitente requer que expressemos a equação para $v_L(t)$ em função de V_{max}, V_{min}, V_s, R, C e R_L para os intervalos de 0 a t_o e de t_o a t_c.

Para começar a análise, admitimos que o circuito esteve em operação por um longo tempo. Seja $t = 0$ o instante em que a lâmpada pára de conduzir. Assim, em $t = 0$, a lâmpada é modelada como um circuito aberto e a queda de tensão em seus terminais é V_{min}, como mostra a Figura 7.47.

Pelo circuito, determinamos

$$v_L(\infty) = V_s,$$

$$v_L(0) = V_{min},$$

$$\tau = RC.$$

Assim, quando a lâmpada não está conduzindo,

$$v_L(t) = V_s + (V_{min} - V_s)e^{-t/RC}.$$

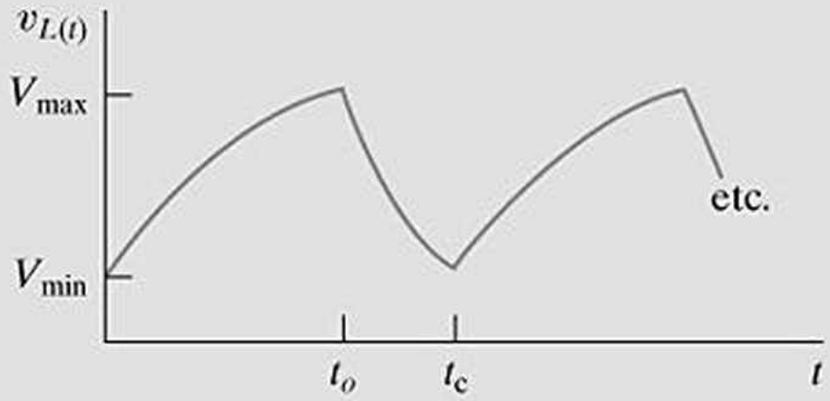


Figura 7.46 ▲ Tensão na lâmpada em relação ao tempo para o circuito da Figura 7.45.

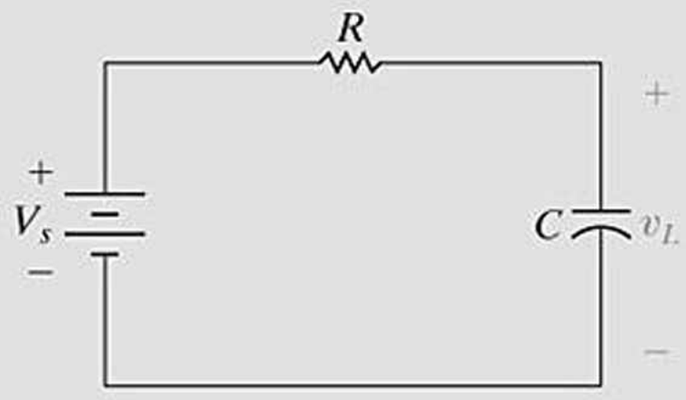


Figura 7.47 ▲ Circuito de luz intermitente no instante $t = 0$, quando a lâmpada não está conduzindo.

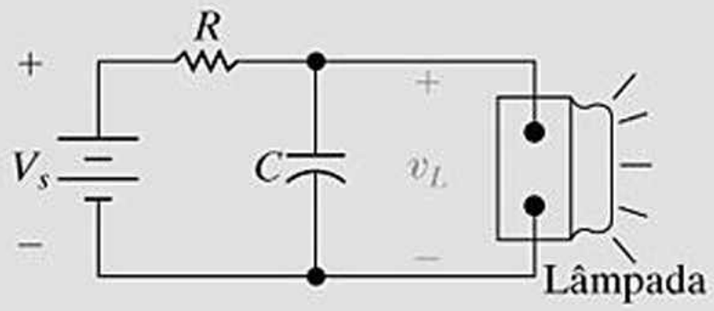


Figura 7.45 ▲ Circuito de luz intermitente.

Quanto tempo transcorre antes de a lâmpada estar pronta para conduzir? Podemos determinar esse tempo igualando a expressão de $v_L(t)$ a V_{max} e obtendo t. Se chamamos esse valor de t_o, então

$$t_o = RC \ln \frac{V_{min} - V_s}{V_{max} - V_s}$$

Quando a lâmpada começa a conduzir, ela pode ser modelada como uma resistência, como visto na Figura 7.48. Para determinar a expressão para a queda de tensão no capacitor, precisamos determinar o equivalente de Thévenin como visto pelo capacitor. Deixamos para você mostrar, no Problema 7.106, que, quando a lâmpada está conduzindo,

$$v_L(t) = V_{Th} + (V_{max} - V_{Th})e^{-(t-t_o)/\tau},$$

onde

$$V_{Th} = \frac{R_L}{R + R_L} V_s$$

e

$$\tau = \frac{RR_LC}{R + R_L}.$$

Podemos determinar por quanto tempo a lâmpada conduz, igualando a expressão $V_L(t)$ a V_{min} e determinando $(t_c - t_o)$, o que resulta em

$$(t_c - t_o) = \frac{RR_LC}{R + R_L} \ln \frac{V_{max} - V_{Th}}{V_{min} - V_{Th}}.$$

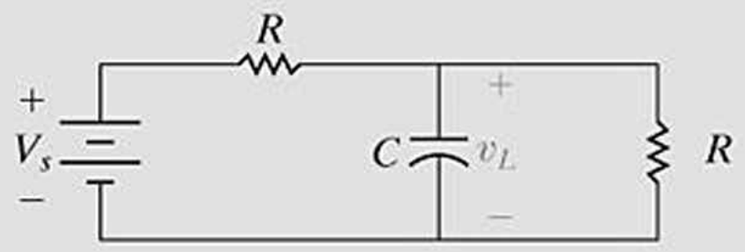


Figura 7.48 ▲ Circuito de luz intermitente no instante $t = t_o$, quando a lâmpada está conduzindo.

NOTA: Avalie o que entendeu desta "Perspectiva prática" tentando resolver os problemas 7.103–7.105, apresentados no final deste capítulo.

Resumo

- Um circuito de primeira ordem pode ser reduzido a um equivalente de Thévenin (ou de Norton) ligado a um único indutor ou capacitor equivalente.
- A *resposta natural* de um circuito são as correntes e tensões que nele se estabelecem quando a energia nele armazenada é liberada, contanto que não haja nele fontes independentes.
- A *constante de tempo* de um circuito *RL* é igual à indutância equivalente dividida pela resistência de Thévenin vista dos terminais do indutor equivalente.
- A *constante de tempo* de um circuito *RC* é igual à capacitância equivalente vezes a resistência de Thévenin vista dos terminais do capacitor equivalente.
- A *resposta a um degrau* de um circuito são as correntes e tensões que nele se estabelecem a partir de variações abruptas em fontes cc a ele ligadas. Pode existir ou não energia armazenada no circuito no instante em que a variação abrupta ocorre.
- A solução para a resposta natural ou para a resposta a um degrau de circuitos *RL* e *RC* envolve determinar o valor inicial e o valor final da corrente ou tensão de interesse e a constante de tempo do circuito. As equações 7.59 e 7.60 resumem essa abordagem.
- Para analisar circuitos de primeira ordem submetidos a um *chaveamento seqüencial*, divide-se a análise em intervalos de tempos correspondentes a posições específicas da chave. Valores iniciais para um intervalo particular são determinados pela solução correspondente ao intervalo imediatamente anterior.
- Uma *resposta indefinidamente crescente* ocorre quando a resistência de Thévenin é negativa, o que é possível quando o circuito de primeira ordem contém fontes dependentes.
- Um amplificador-integrador consiste em um amp op ideal, um capacitor no ramo de realimentação negativa e um resistor em série com a fonte de sinal. A saída do amplificador-integrador é a integral da fonte de sinal, dentro de limites especificados que evitam a saturação do amp op.

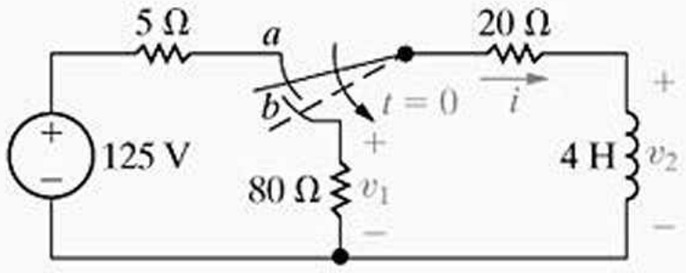
Problemas

Seção 7.1

7.1* No circuito mostrado na Figura P7.1, a chave se conecta com a posição *b* imediatamente antes de se desconectar da posição *a*. Como já mencionamos, esse tipo de chave é conhecido como liga-antes-interrompe-depois e é projetado de modo a não interromper a corrente em um circuito indutivo. Admite-se que o intervalo de tempo entre 'ligar' e 'desligar' é desprezível. A chave esteve na posição *a* por um longo tempo. Em $t = 0$ ela muda da posição *a* para a posição *b*.

a) Determine a corrente inicial no indutor.
b) Determine a constante de tempo do circuito para $t > 0$.
c) Determine i, v_1 e v_2 para $t \geq 0$.
d) Qual porcentagem da energia inicial armazenada no indutor é dissipada no resistor de 20 Ω 12 ms depois de a chave ser mudada da posição a para a posição b?

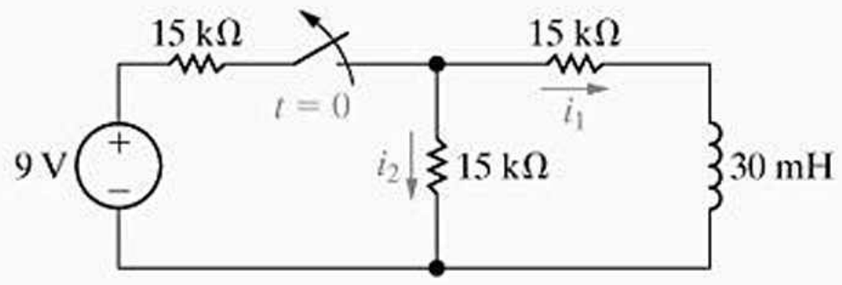
Figura P7.1



7.2* PSPICE A chave no circuito da Figura P7.2 esteve fechada por um longo tempo, antes de ser aberta em $t = 0$.

a) Determine $i_1(0^-)$ e $i_2(0^-)$.
b) Determine $i_1(0^+)$ e $i_2(0^+)$.
c) Determine $i_1(t)$ para $t \geq 0$.
d) Determine $i_2(t)$ para $t \geq 0^+$.
e) Explique por que $i_2(0^-) \neq i_2(0^+)$.

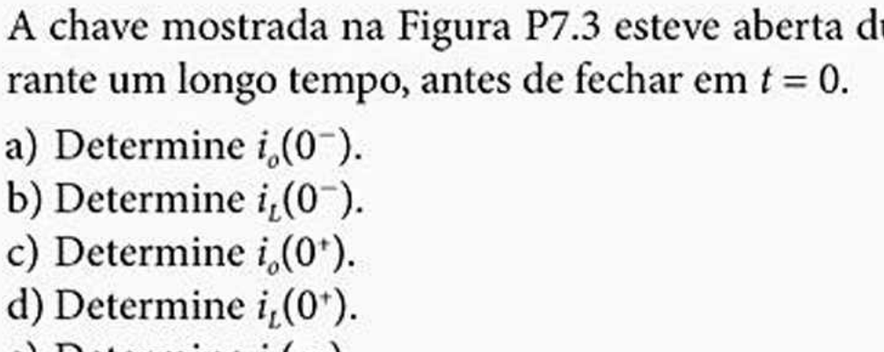
Figura P7.2



7.3* A chave mostrada na Figura P7.3 esteve aberta durante um longo tempo, antes de fechar em $t = 0$.

a) Determine $i_o(0^-)$.
b) Determine $i_L(0^-)$.
c) Determine $i_o(0^+)$.
d) Determine $i_L(0^+)$.
e) Determine $i_o(\infty)$.
f) Determine $i_L(\infty)$.
g) Escreva a expressão de $i_L(t)$ para $t \geq 0$.
h) Determine $v_L(0^-)$.
i) Determine $v_L(0^+)$.
j) Determine $v_L(\infty)$.
k) Escreva a expressão de $v_L(t)$ para $t \geq 0^+$.
l) Escreva a expressão de $i_o(t)$ para $t \geq 0^+$.

Figura P7.3



7.4 No circuito da Figura P7.4, as expressões para tensão e corrente são

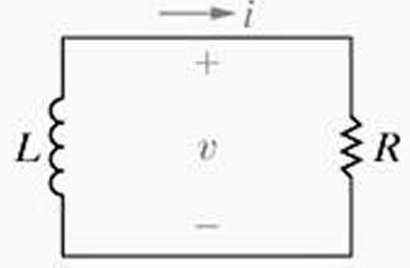
$$v = 100e^{-80t}\ \text{V}, \quad t \geq 0^+$$

$$i = 4e^{-80t}\ \text{A}, \quad t \geq 0$$

Determine

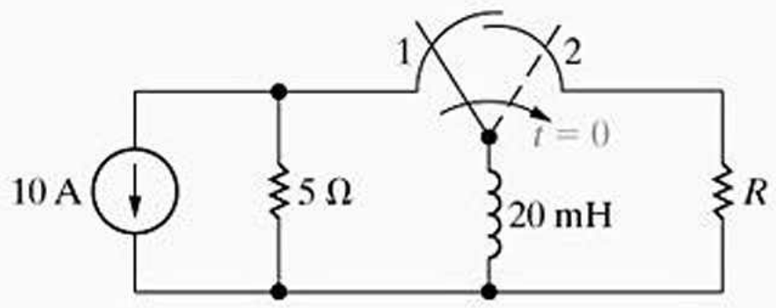
a) R.
b) τ (em milissegundos).
c) L.
d) A energia inicial armazenada no indutor.
e) O tempo (em milissegundos) necessário para dissipar 80% da energia inicial armazenada.

Figura P7.4



7.5 A chave no circuito da Figura P7.5 esteve na posição 1 por um longo tempo. Em $t = 0$, ela passa instantaneamente para a posição 2. Determine o valor de R de modo que 50% da energia inicial armazenada no indutor de 20 mH seja dissipada em R em 10 μs.

Figura P7.5



7.6 No circuito da Figura P7.5, I_g representa a fonte de corrente cc, σ representa a fração da energia inicial armazenada no indutor que é dissipada em t_o segundos e L representa a indutância.

a) Mostre que

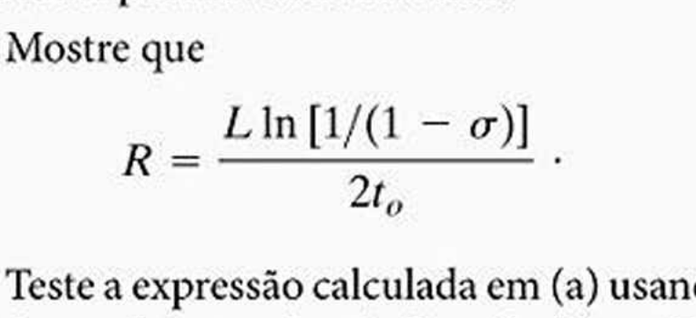
$$R = \frac{L \ln [1/(1 - \sigma)]}{2t_o}.$$

b) Teste a expressão calculada em (a) usando-a para determinar o valor de R no Problema 7.5.

7.7 PSPICE A chave no circuito da Figura P7.7 esteve aberta por um longo tempo. Em $t = 0$, ela é fechada.

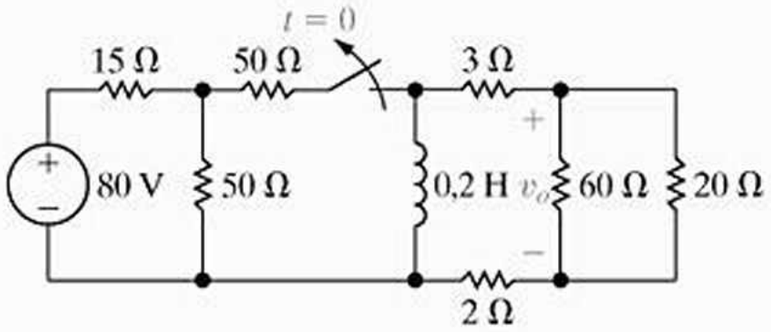
a) Determine $i_o(0^+)$ e $i_o(\infty)$.
b) Determine $i_o(t)$ para $t \geq 0^+$.
c) Quantos milissegundos após a chave ter sido fechada a corrente nela atingirá 3,8 A?

Figura P7.7



7.8 PSPICE A chave no circuito da Figura P7.8 esteve fechada durante um longo tempo. Em $t = 0$, ela foi aberta. Determine $v_o(t)$ para $t \geq 0$.

Figura P7.8

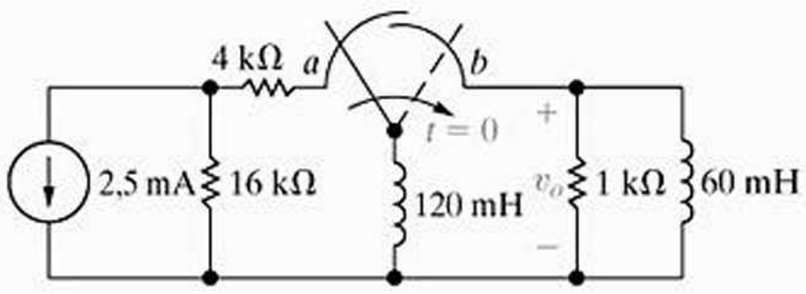


7.9 Suponha que a chave no circuito da Figura P7.8 esteve aberta por um tempo equivalente a uma constante de tempo. Ao final desse intervalo de tempo, qual porcentagem da energia total armazenada no indutor de 0,2 H foi dissipada no resistor de 20 Ω?

7.10 PSPICE No circuito mostrado na Figura P7.10, a chave esteve na posição *a* por um longo tempo. Em $t = 0$, ela passa instantaneamente de *a* para *b*.

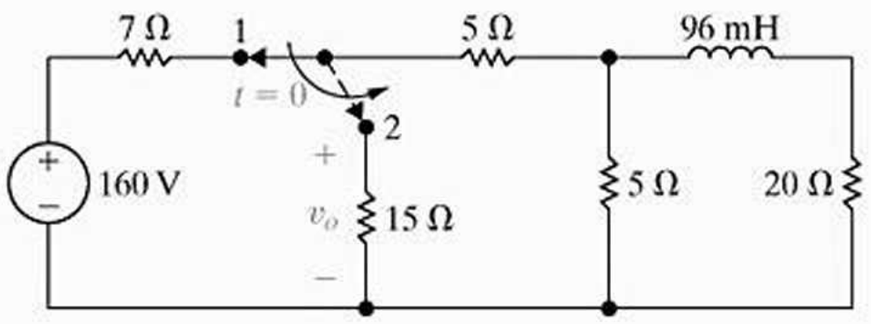
a) Determine $v_o(t)$ para $t \geq 0$.
b) Qual é a energia total fornecida ao resistor de 1 kΩ?
c) Quantas constantes de tempo são necessárias para atingir 95% da energia determinada em (b)?

Figura P7.10



7.11 PSPICE A chave no circuito da Figura P7.11 esteve na posição 1 por um longo tempo. Em $t = 0$, ela passa instantaneamente para a posição 2. Determine $v_o(t)$ para $t \geq 0^+$.

Figura P7.11

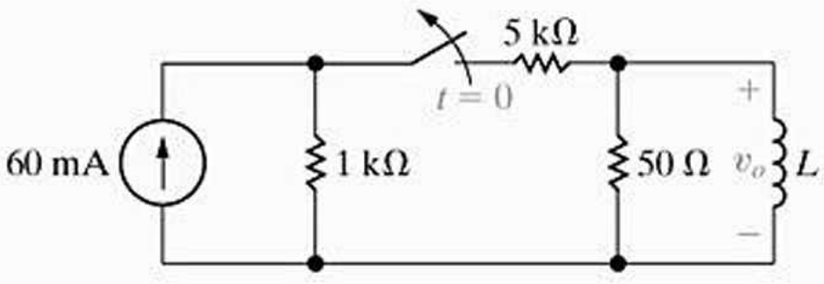


7.12 Para o circuito da Figura P7.11, qual porcentagem da energia inicial armazenada no indutor será dissipada no resistor de 20 Ω?

7.13 No circuito da Figura P7.13, a chave esteve fechada por um longo tempo antes de abrir em $t = 0$.

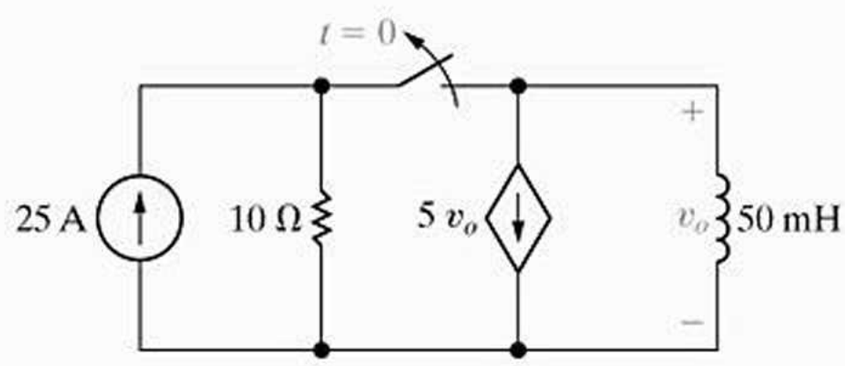
a) Determine o valor de *L* de modo que $v_o(t)$ seja igual a $0{,}25\ v_o(0^+)$ quando $t = 5$ ms.
b) Determine a porcentagem de energia armazenada que foi dissipada no resistor de 50 Ω até $t = 5$ ms.

Figura P7.13



7.14 PSPICE A chave no circuito da Figura P7.14 esteve fechada por um longo tempo antes de abrir em $t = 0$. Determine $v_o(t)$ para $t \geq 0^+$.

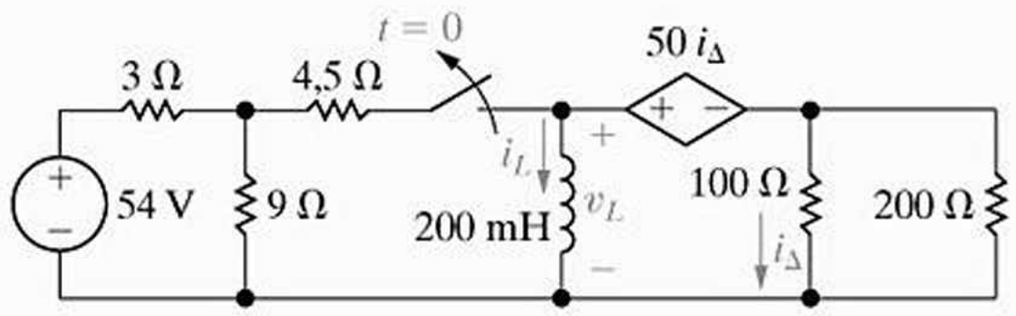
Figura P7.14



7.15 A chave da Figura P7.15 esteve fechada por um longo tempo antes de abrir em $t = 0$. Determine

a) $i_L(t)$, $t \geq 0$.
b) $v_L(t)$, $t \geq 0^+$.
c) $i_\Delta(t)$, $t \geq 0^+$.

Figura P7.15

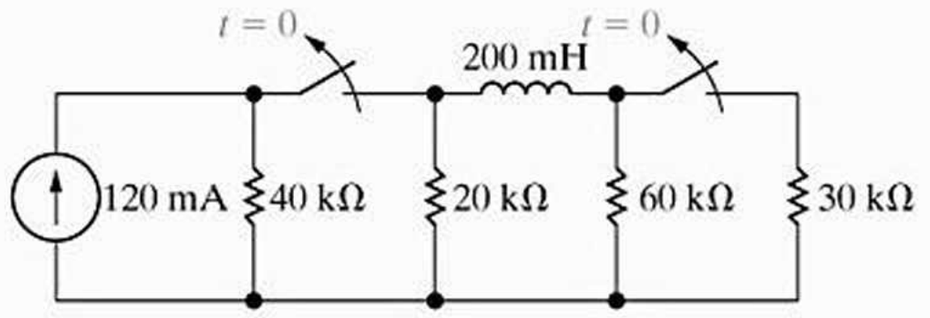


7.16 Qual porcentagem da energia inicial armazenada no indutor do circuito da Figura P7.15 é dissipada pela fonte de tensão controlada por corrente?

7.17 As duas chaves no circuito visto na Figura P7.17 são sincronizadas. Elas estiveram fechadas por um longo tempo antes de se abrirem em $t = 0$.

a) Quantos microssegundos depois da abertura das chaves a energia dissipada no resistor de 60 kΩ é 25% da energia inicial armazenada no indutor de 200 mH?
b) No tempo calculado em (a), qual porcentagem da energia total armazenada no indutor foi dissipada?

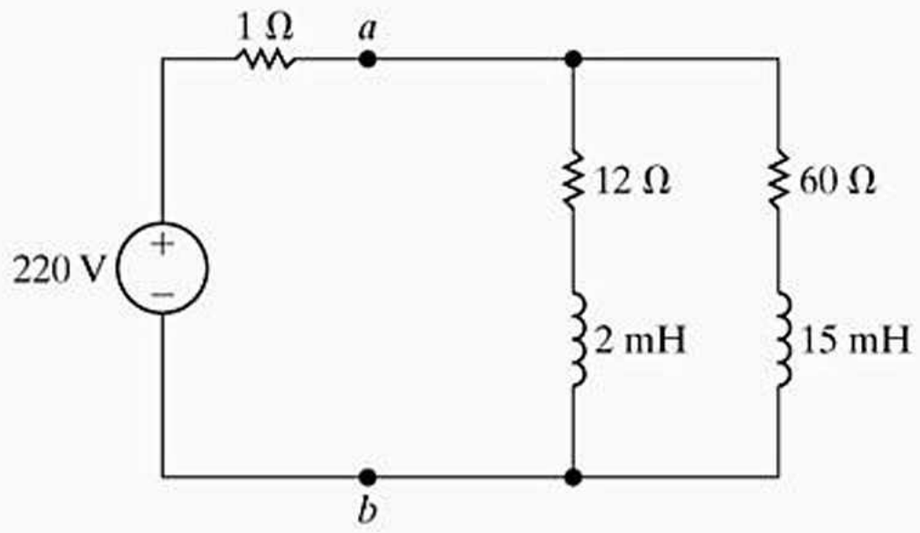
Figura P7.17



7.18 PSPICE A fonte de 220 V e resistência interna de 1 Ω no circuito da Figura P7.18 sofre inadvertidamente um curto-circuito em seus terminais *a*,*b*. No instante em que a falha ocorre, o circuito estava em funcionamento havia um longo tempo.

a) Qual é o valor inicial da corrente i_{ab} de curto-circuito entre os terminais *a*,*b*?
b) Qual é o valor final da corrente i_{ab}?
c) Quantos microssegundos depois de o curto-circuito ter ocorrido a corrente de curto atinge 210 A?

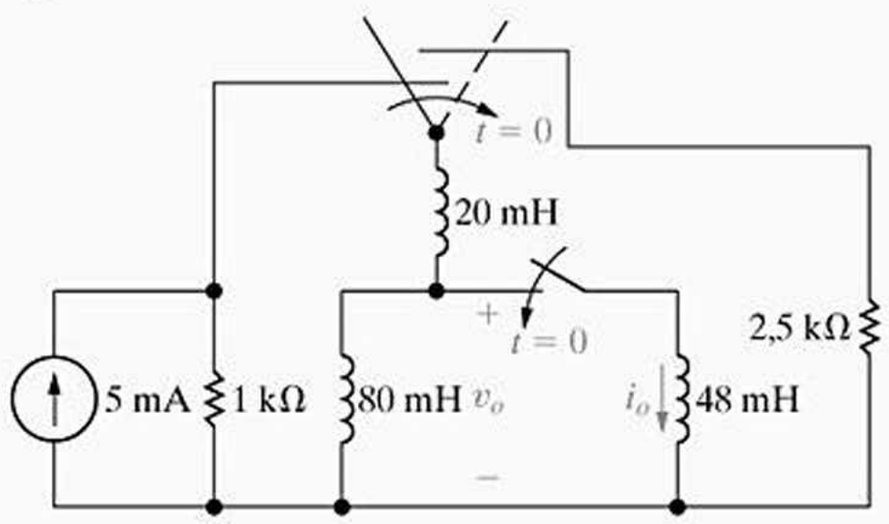
Figura P7.18



7.19 PSPICE As duas chaves mostradas no circuito da Figura P7.19 funcionam simultaneamente. Antes de $t = 0$, cada chave estava na posição indicada por um longo tempo. Em $t = 0$, elas passam instantaneamente para suas novas posições. Determine

a) $v_o(t)$, $t \geq 0^+$.
b) $i_o(t)$, $t \geq 0$.

Figura P7.19



7.20 Para o circuito visto na Figura P7.19, determine

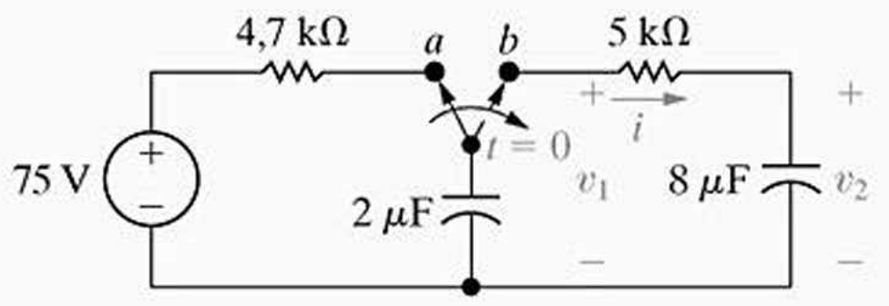
a) a energia total dissipada no resistor de 2,5 kΩ.
b) a energia final armazenada nos indutores ideais.

Seção 7.2

7.21* A chave no circuito da Figura P7.21 esteve na posição *a* por um longo tempo e $v_2 = 0$ V. Em $t = 0$, a chave é colocada na posição *b*. Calcule

a) i, v_1 e v_2 para $t \geq 0^+$.
b) a energia armazenada no capacitor em $t = 0$.
c) a energia final armazenada no circuito e a energia total dissipada no resistor de 5 kΩ se a chave permanecer na posição *b* indefinidamente.

Figura P7.21



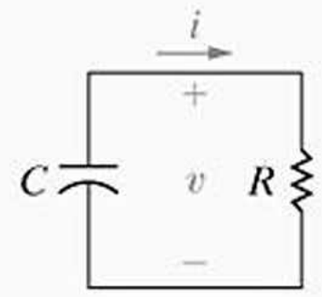
7.22 No circuito da Figura P7.22 as expressões para a tensão e a corrente são

$$v = 100e^{-1.000t}\ \text{V}, \quad t \geq 0;$$
$$i = 5e^{-1.000t}\ \text{mA}, \quad t \geq 0^+.$$

Determine

a) R.
b) C.
c) τ (em milissegundos).
d) a energia inicial armazenada no capacitor.
e) em quantos microssegundos 80% da energia inicial armazenada no capacitor é dissipada.

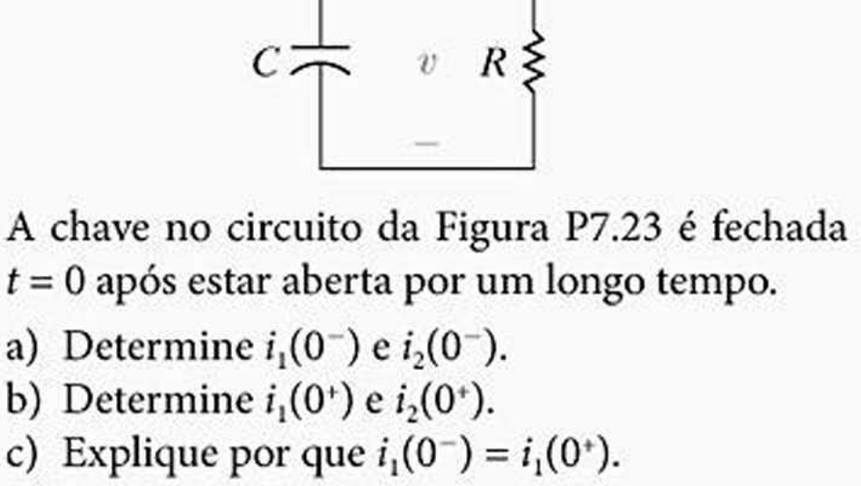
Figura P7.22



7.23 PSPICE A chave no circuito da Figura P7.23 é fechada em $t = 0$ após estar aberta por um longo tempo.

a) Determine $i_1(0^-)$ e $i_2(0^-)$.
b) Determine $i_1(0^+)$ e $i_2(0^+)$.
c) Explique por que $i_1(0^-) = i_1(0^+)$.
d) Explique por que $i_2(0^-) \neq i_2(0^+)$.
e) Determine $i_1(t)$ para $t \geq 0$.
f) Determine $i_2(t)$ para $t \geq 0^+$.

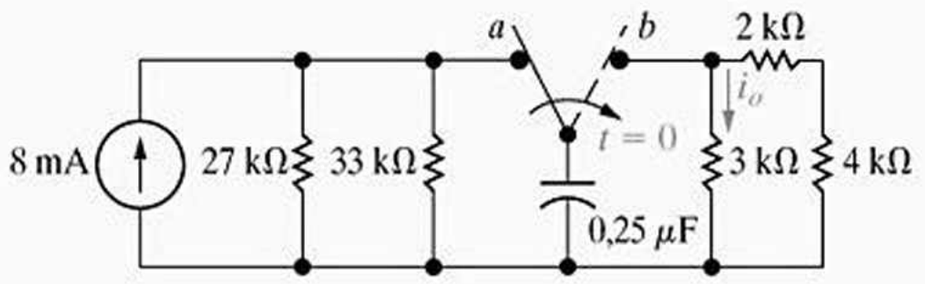
Figura P7.23



7.24* A chave no circuito da Figura P7.24 esteve na posição *a* por um longo tempo. Em $t = 0$, ela é colocada na posição *b*.

a) Determine $i_o(t)$ para $t \geq 0^+$.
b) Qual porcentagem da energia inicial armazenada no capacitor é dissipada no resistor de 4 kΩ 250 μs após a chave ter sido mudada de posição?

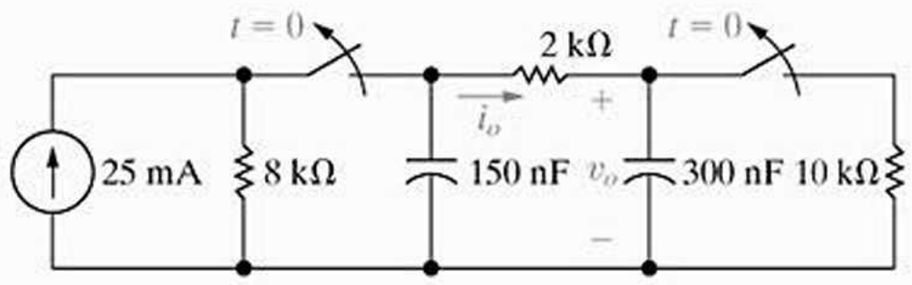
Figura P7.24



7.25 PSPICE Ambas as chaves no circuito da Figura P7.25 estiveram fechadas por um longo tempo. Em $t = 0$, ambas se abrem simultaneamente.

a) Determine $i_o(t)$ para $t \geq 0^+$.
b) Determine $v_o(t)$ para $t \geq 0$.
c) Calcule a energia final (em microjoules) no circuito.

Figura P7.25

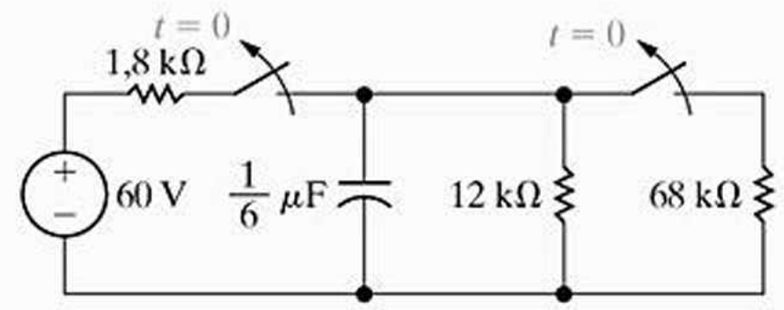


7.26 No circuito mostrado na Figura P7.26, ambas as chaves funcionam em conjunto; isto é, abrem ou fecham ao mesmo tempo. Elas estiveram fechadas por um longo tempo antes de se abrirem em $t = 0$.

a) Quantos microjoules de energia foram dissipados no resistor de 12 kΩ 2 ms depois da abertura das chaves?

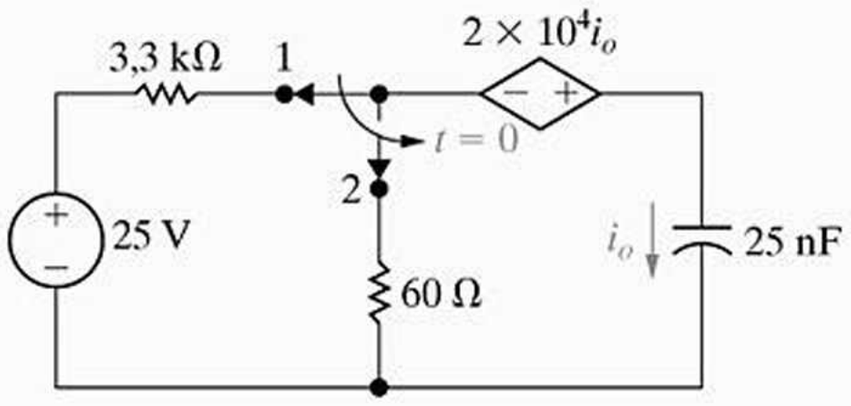
b) Quanto tempo leva para dissipar 95% da energia inicialmente armazenada?

Figura P7.26



7.27 PSPICE A chave no circuito da Figura P7.27 esteve na posição 1 por um longo tempo antes de passar para a posição 2, em $t = 0$. Determine $i_o(t)$ para $t \geq 0^+$.

Figura P7.27

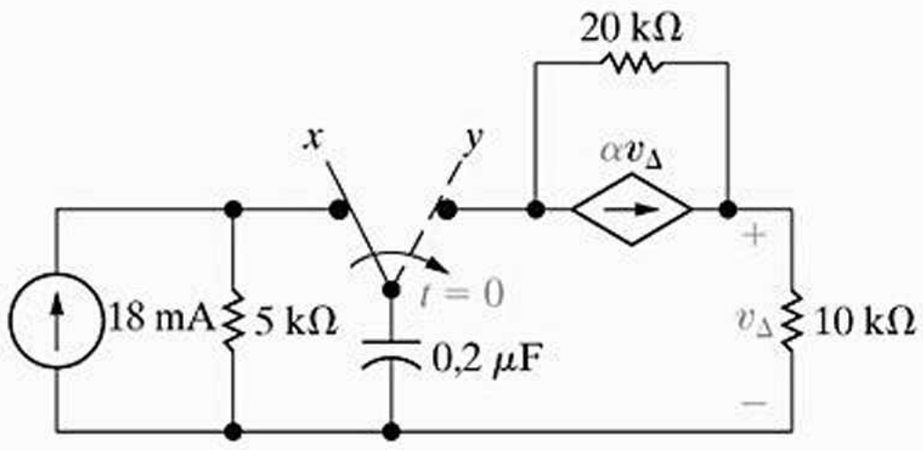


7.28 A chave no circuito visto na Figura P7.28 esteve na posição x por um longo tempo. Em $t = 0$, ela passa instantaneamente para a posição y.

a) Determine α de modo que a constante de tempo para $t > 0$ seja 1 ms.

b) Para α encontrada em (a), determine v_Δ.

Figura P7.28



7.29 a) No Problema 7.28, quantos microjoules de energia são gerados pela fonte de corrente dependente durante o tempo em que o capacitor se descarrega totalmente?

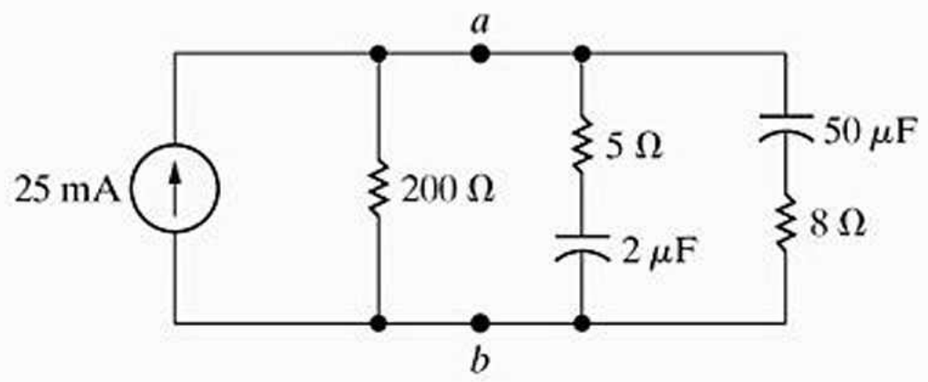
b) Mostre que, para $t \geq 0$, a energia total armazenada e gerada no circuito capacitivo é igual à energia total dissipada.

7.30 PSPICE Depois de o circuito da Figura P7.30 estar em funcionamento por um longo tempo, uma chave de fenda é inadvertidamente colocada entre os terminais a,b. Suponha que a resistência da chave de fenda seja desprezível.

a) Determine a corrente na chave de fenda em $t = 0^+$ e $t = \infty$.

b) Determine a expressão para a corrente na chave de fenda para $t \geq 0^+$.

Figura P7.30



7.31 No momento em que a chave do circuito visto na Figura P7.31 é fechada, os capacitores estão carregados como mostrado.

a) Determine $v_o(t)$ para $t \geq 0^+$.

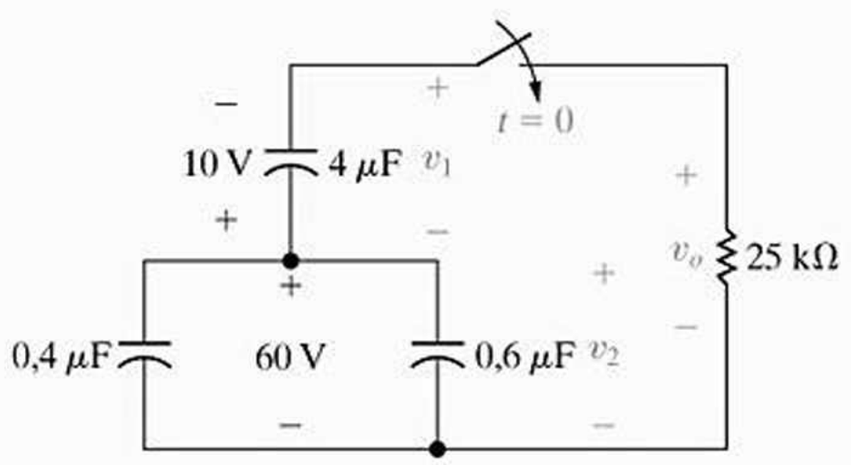
b) Qual porcentagem da energia total inicialmente armazenada nos três capacitores é dissipada no resistor de 25 kΩ?

c) Determine $v_1(t)$ para $t \geq 0$.

d) Determine $v_2(t)$ para $t \geq 0$.

e) Determine a energia final (em milijoules) armazenada nos capacitores ideais.

Figura P7.31



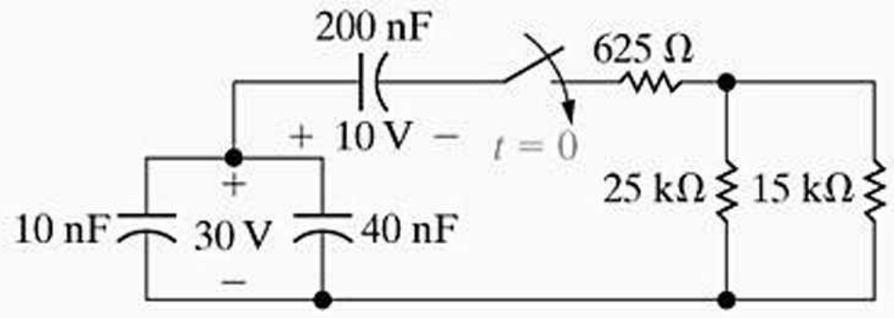
7.32 No momento em que a chave no circuito da Figura P7.32 é fechada, a tensão nos capacitores em paralelo é 30 V e a tensão no capacitor de 200 nF é 10 V.

a) Qual porcentagem da energia inicial armazenada nos três capacitores é dissipada no resistor de 25 kΩ?

b) Repita (a) para os resistores de 625 Ω e 15 kΩ.

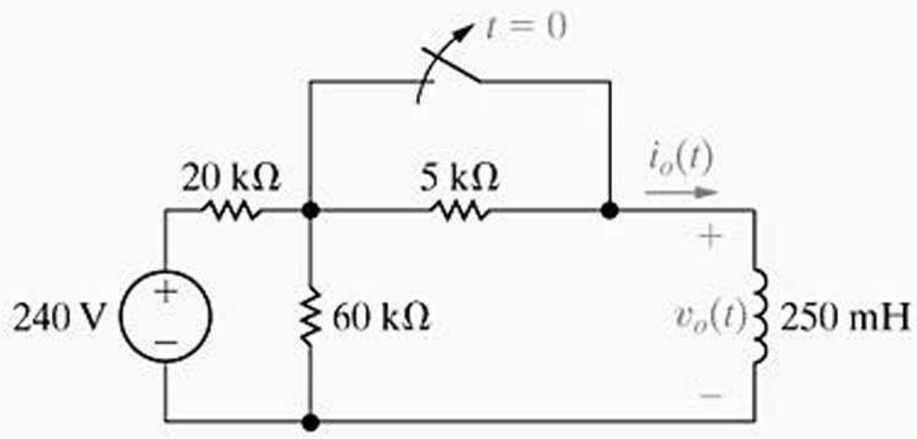
c) Qual porcentagem da energia inicial se mantém armazenada nos capacitores?

Figura P7.32



7.33* PSPICE A chave do circuito visto na Figura P7.33 esteve fechada por um longo tempo. Ela se abre em $t = 0$. Determine as expressões numéricas para $i_o(t)$ e $v_o(t)$ quando $t \geq 0^+$.

Figura P7.33

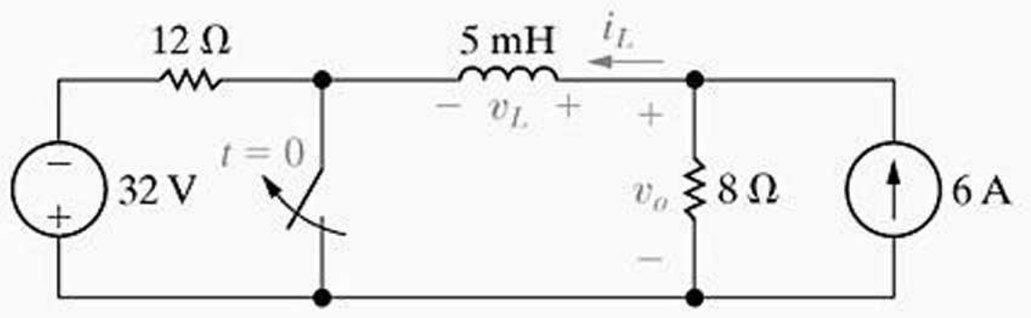


Seção 7.3

7.34* PSPICE A chave do circuito mostrado na Figura P7.34 esteve fechada por um longo tempo antes de se abrir em $t = 0$.

a) Determine as expressões numéricas para $i_L(t)$ e $v_o(t)$ para $t \geq 0$.
b) Determine os valores numéricos de $v_L(0^+)$ e $v_o(0^+)$.

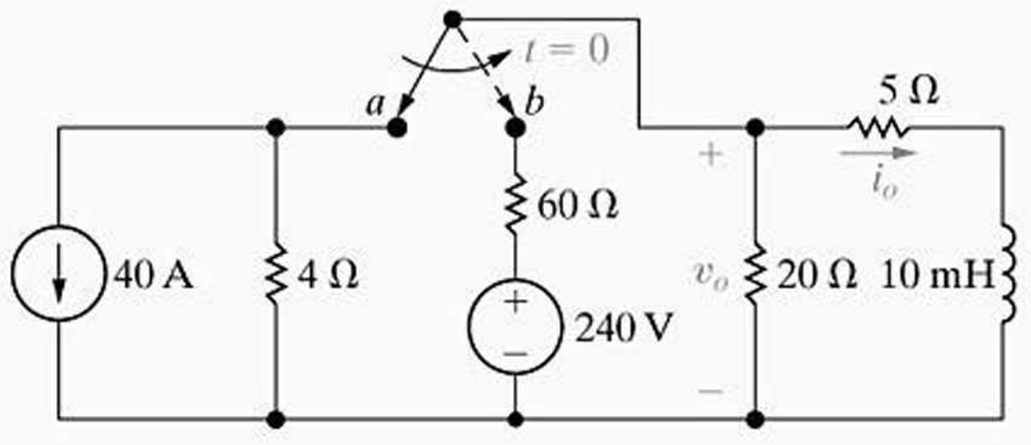
Figura P7.34



7.35* PSPICE A chave do circuito mostrado na Figura P7.35 esteve na posição *a* por um longo tempo. Em $t = 0$, ela passa instantaneamente para a posição *b*.

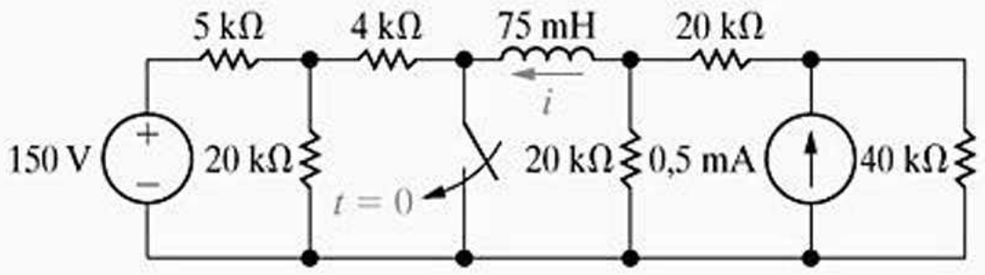
a) Determine a expressão numérica para $i_o(t)$ quando $t \geq 0$.
b) Determine a expressão numérica para $v_o(t)$ para $t \geq 0^+$.

Figura P7.35



7.36 Depois de a chave no circuito da Figura P7.36 estar aberta por um longo tempo, ela é fechada em $t = 0$. Calcule (a) o valor inicial de i; (b) o valor final de i; (c) a constante de tempo para $t \geq 0$ e (d) a expressão numérica para $i(t)$ quando $t \geq 0$.

Figura P7.36



7.37 A corrente e a tensão nos terminais do indutor no circuito da Figura 7.16 são

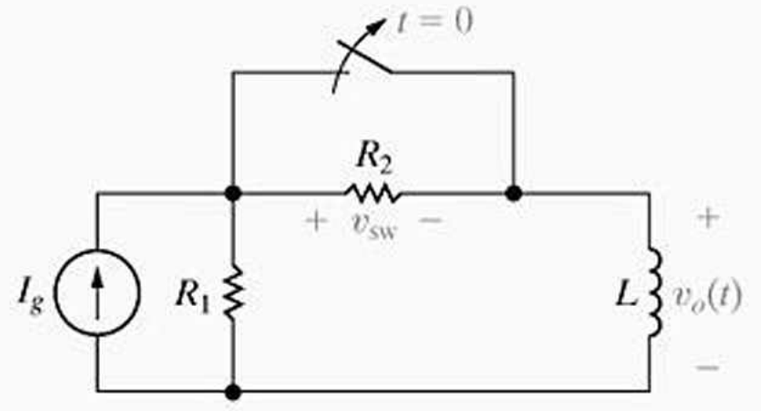
$$i(t) = (10 - 10e^{-500t})\ \text{A}, \qquad t \geq 0;$$
$$v(t) = 200e^{-500t}\ \text{V}, \qquad t \geq 0^+.$$

a) Especifique os valores numéricos de V_s, R, I_o e L.
b) Quantos milissegundos depois do fechamento da chave a energia armazenada no indutor alcança 25% de seu valor final?

7.38 A chave do circuito mostrado na Figura P7.38 esteve fechada por um longo tempo. Ela se abre em $t = 0$. Para $t \geq 0^+$:

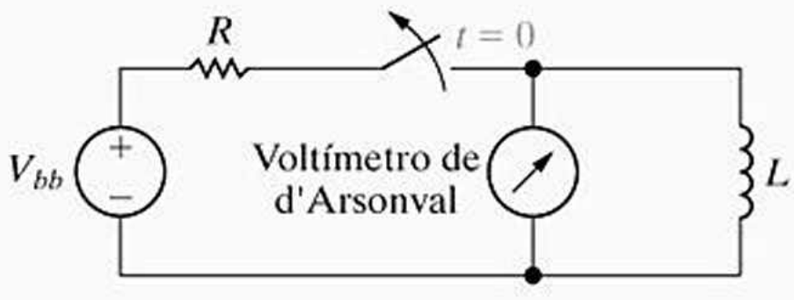
a) Determine $v_o(t)$ em função de I_g, R_1, R_2 e L.
b) Explique o que acontece com $v_o(t)$ quando R_2 aumenta indefinidamente.
c) Determine v_{sw} em função de I_g, R_1, R_2 e L.
d) Explique o que acontece com v_{sw} quando R_2 aumenta indefinidamente.

Figura P7.38



7.39 A chave no circuito da Figura P7.39 esteve fechada por um longo tempo. Uma aluna abre abruptamente a chave e relata a seu instrutor que, quando a chave abriu, estabeleceu-se um arco elétrico de notável persistência na chave e, ao mesmo tempo, o voltímetro ligado nos terminais do enrolamento foi danificado. Tendo como base sua análise do circuito do Problema 7.38, você pode explicar à aluna por que isso aconteceu?

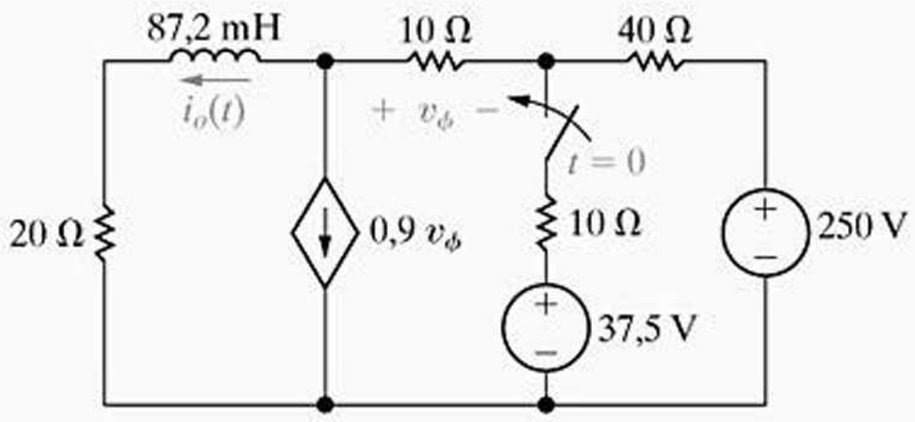
Figura P7.39



7.40 a) Deduza a Equação 7.47 convertendo, em primeiro lugar, o equivalente de Thévenin da Figura 7.16 em um equivalente de Norton e, depois, somando as correntes que saem do nó superior, usando a tensão v no indutor como a variável de interesse.
b) Use a técnica da separação de variáveis para determinar a solução para a Equação 7.47. Verifique se sua solução está de acordo com a solução dada na Equação 7.42.

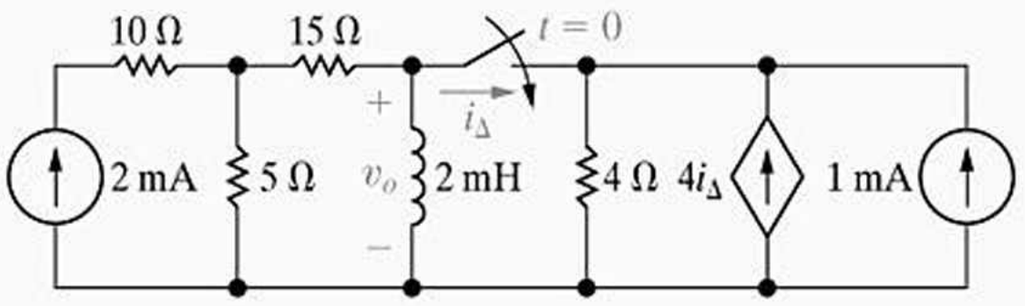
7.41 PSPICE A chave no circuito da Figura P7.41 esteve aberta por um longo tempo, antes de fechar em $t = 0$. Determine $i_o(t)$ para $t \geq 0$.

Figura P7.41



7.42 PSPICE A chave no circuito da Figura P7.42 esteve aberta por um longo tempo, antes de fechar em $t = 0$. Determine $v_o(t)$ para $t \geq 0^+$.

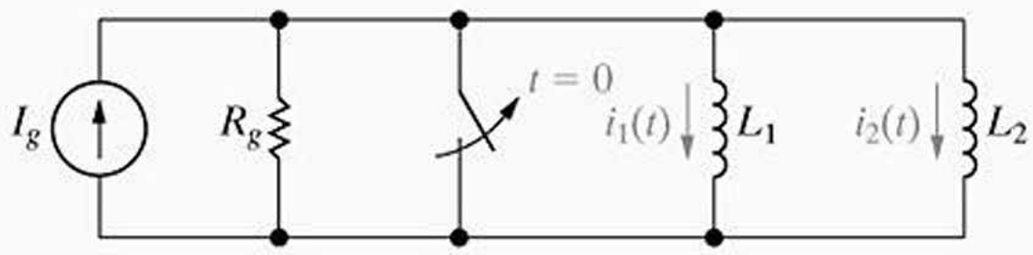
Figura P7.42



7.43 Não há nenhuma energia armazenada nos indutores L_1 e L_2 no instante em que a chave é aberta, no circuito mostrado na Figura P7.43.

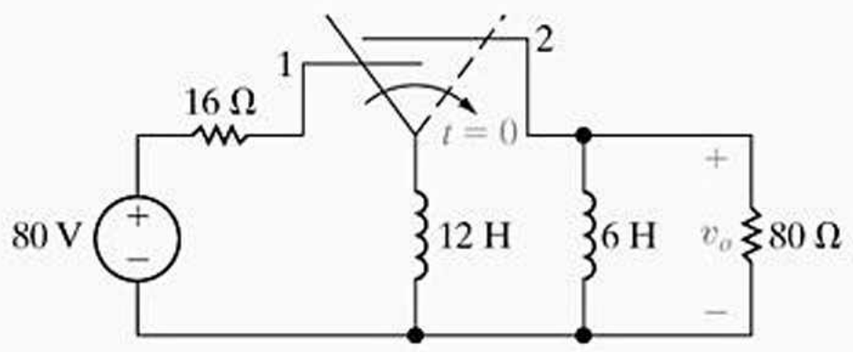
a) Determine as expressões para as correntes $i_1(t)$ e $i_2(t)$ para $t \geq 0$.
b) Use as expressões derivadas em (a) para determinar $i_1(\infty)$ e $i_2(\infty)$.

Figura P7.43



7.44 PSPICE A chave no circuito da Figura P7.44 esteve na posição 1 por um longo tempo. Em $t = 0$, ela passa instantaneamente para a posição 2. Quantos milissegundos depois do acionamento da chave v_o atinge -80 V?

Figura P7.44



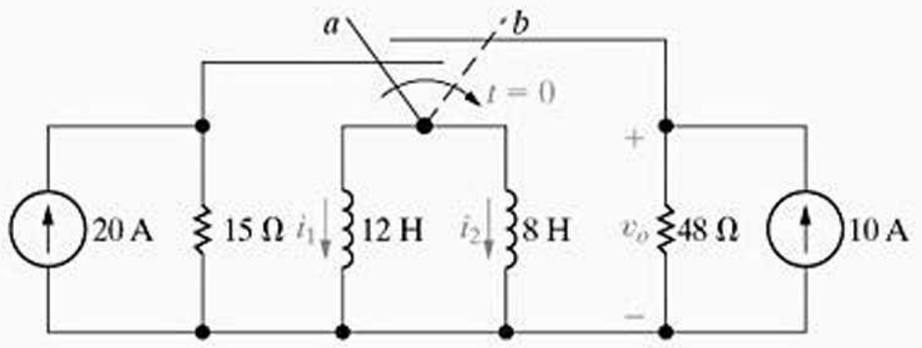
7.45 Para o circuito da Figura P7.44, determine (em joules):

a) a energia total dissipada no resistor de 80 Ω;
b) a energia final armazenada nos indutores;
c) a energia inicial armazenada nos indutores.

7.46 PSPICE A chave liga-antes-interrompe-depois do circuito da Figura P7.46 esteve na posição a por um longo tempo. Em $t = 0$, ela passa instantaneamente para a posição b. Determine

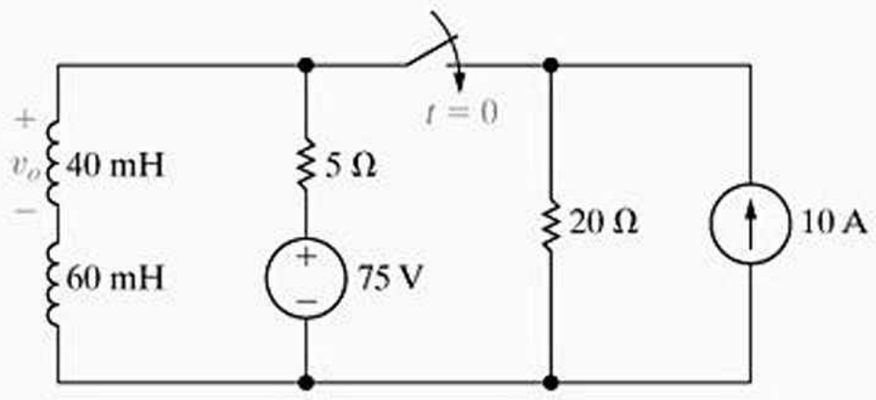
a) $v_o(t), t \geq 0^+$.
b) $i_1(t), t \geq 0$.
c) $i_2(t), t \geq 0$.

Figura P7.46



7.47 PSPICE A chave no circuito da Figura P7.47 esteve aberta por um longo tempo, antes de fechar em $t = 0$. Determine $v_o(t)$ para $t \geq 0^+$.

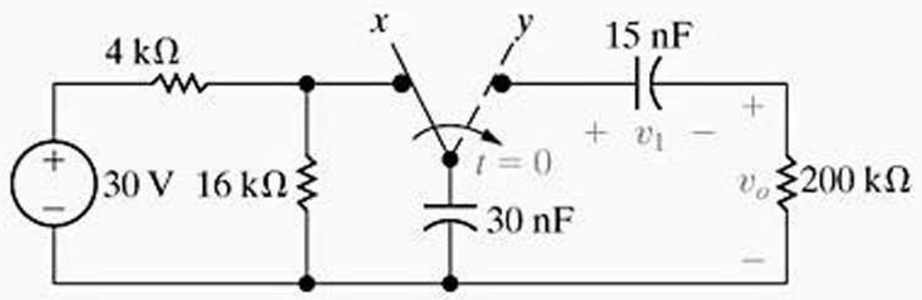
Figura P7.47



7.48 PSPICE A chave no circuito da Figura P7.48 esteve na posição x por um longo tempo. A carga inicial no capacitor de 15 nF é zero. Em $t = 0$, a chave passa instantaneamente para a posição y.

a) Determine $v_o(t)$ para $t \geq 0^+$.
b) Determine $v_1(t)$ para $t \geq 0$.

Figura P7.48



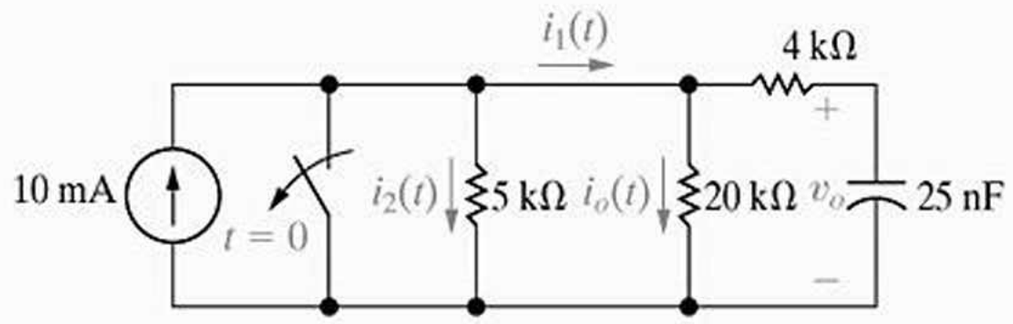
7.49 Para o circuito da Figura P7.48, determine (em microjoules)

a) a energia fornecida ao resistor de 200 kΩ;
b) a energia final armazenada nos capacitores;
c) a energia inicial armazenada nos capacitores.

7.50* PSPICE A chave do circuito mostrado na Figura P7.50 esteve fechada por um longo tempo, antes de abrir em $t = 0$. Para $t \geq 0^+$, determine

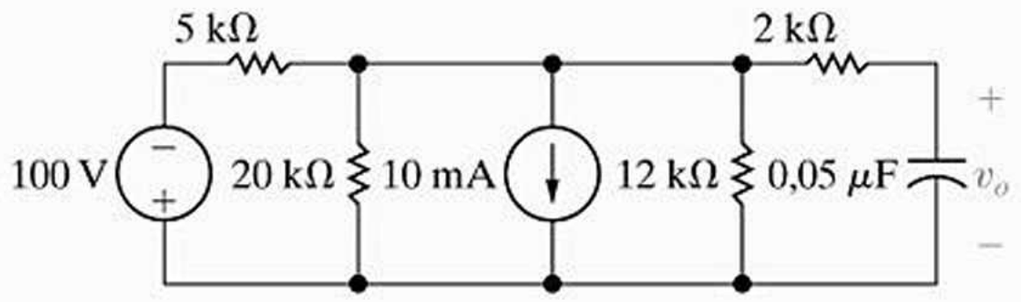
a) $v_o(t)$.
b) $i_o(t)$.
c) $i_1(t)$.
d) $i_2(t)$.
e) $i_1(0^+)$.

Figura P7.50



7.51* PSPICE O circuito da Figura P7.51 esteve em funcionamento por um longo tempo. Em $t = 0$, a fonte de tensão cai de 100 V para 25 V e a fonte de corrente inverte a direção. Determine $v_o(t)$ para $t \geq 0$.

Figura P7.51



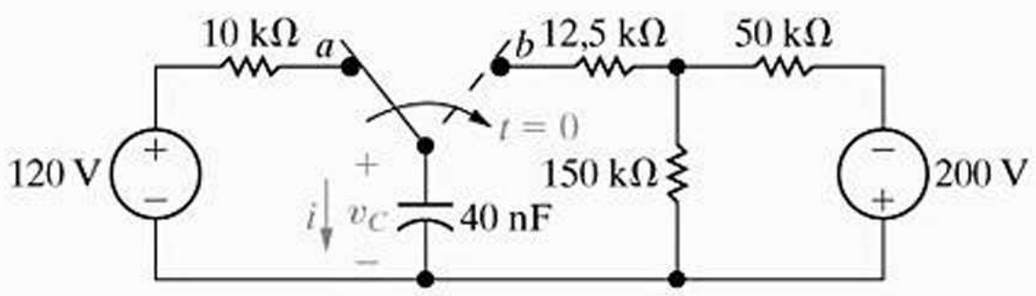
7.52 A corrente e a tensão nos terminais do capacitor no circuito da Figura 7.21 são

$$i(t) = 50e^{-2.500t}\ \text{mA}, \qquad t \geq 0^+;$$
$$v(t) = (80 - 80e^{-2.500t})\ \text{V}, \qquad t \geq 0.$$

a) Especifique os valores numéricos de I_s, V_o, R, C e τ.
b) Quantos microssegundos depois de a chave estar fechada a energia armazenada no capacitor alcança 64% de seu valor final?

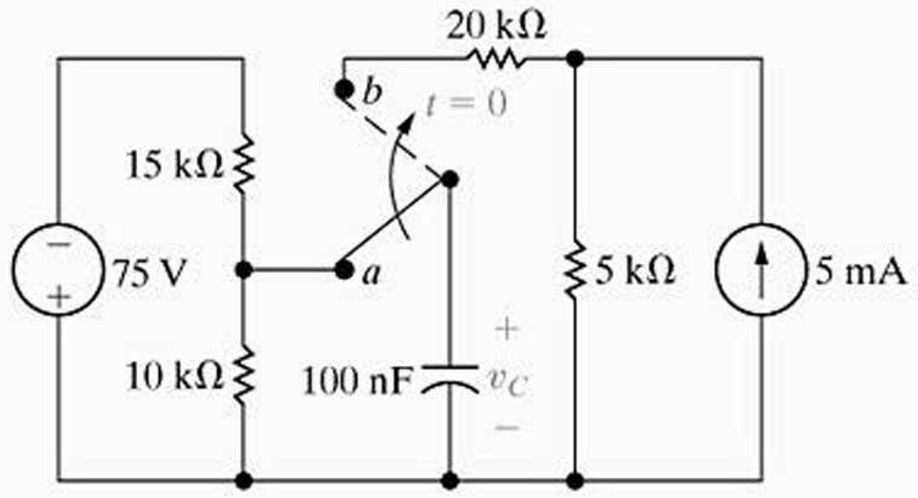
7.53* Suponha que a chave no circuito da Figura P7.53 esteve na posição a por um longo tempo e que em $t = 0$ ela é colocada na posição b. Determine (a) $v_c(0^+)$; (b) $v_C(\infty)$; (c) τ para $t > 0$; (d) $i(0^+)$; (e) v_C, $t \geq 0$ e (f) i, $t \geq 0^+$.

Figura P7.53



7.54* A chave no circuito da Figura P7.54 esteve na posição a por um longo tempo. Em $t = 0$, ela é colocada na posição b. Calcule (a) a tensão inicial no capacitor; (b) a tensão final no capacitor; (c) a constante de tempo (em microssegundos) para $t > 0$ e (d) o tempo (em microssegundos) necessário para a tensão no capacitor se anular, depois de a chave ser colocada na posição b.

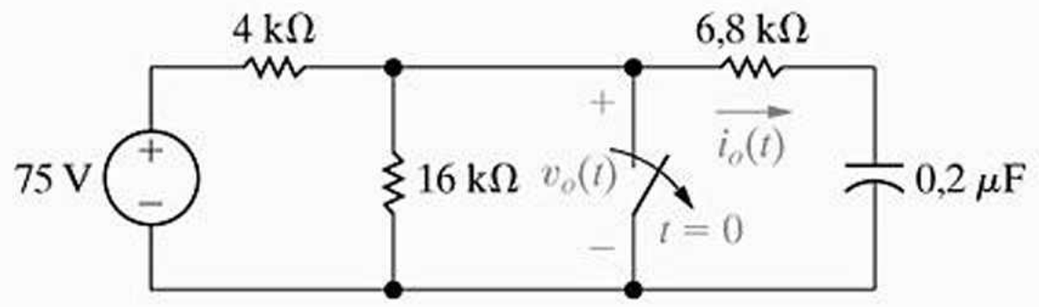
Figura P7.54



7.55 PSPICE A chave do circuito mostrado na Figura P7.55 esteve fechada por um longo tempo, antes de abrir em $t = 0$.

a) Qual é o valor inicial de $i_o(t)$?
b) Qual é o valor final de $i_o(t)$?
c) Qual é a constante de tempo do circuito para $t \geq 0$?
d) Qual é a expressão numérica para $i_o(t)$ quando $t \geq 0^+$?
e) Qual é a expressão numérica para $v_o(t)$ quando $t \geq 0^+$?

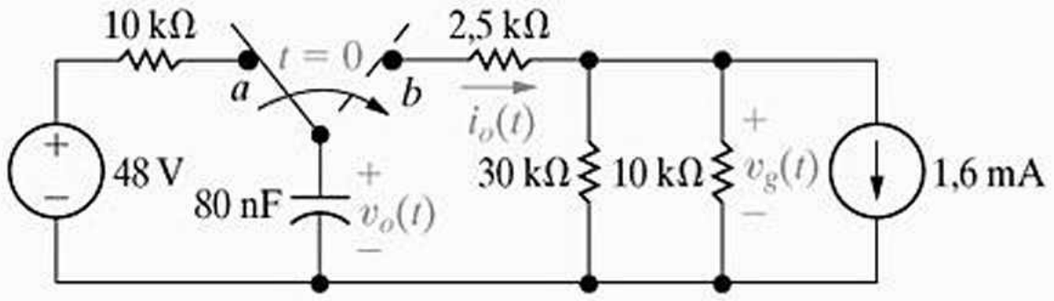
Figura P7.55



7.56 PSPICE A chave do circuito visto na Figura P7.56 esteve na posição a por um longo tempo. Em $t = 0$, ela passa instantaneamente para a posição b. Para $t \geq 0^+$, determine

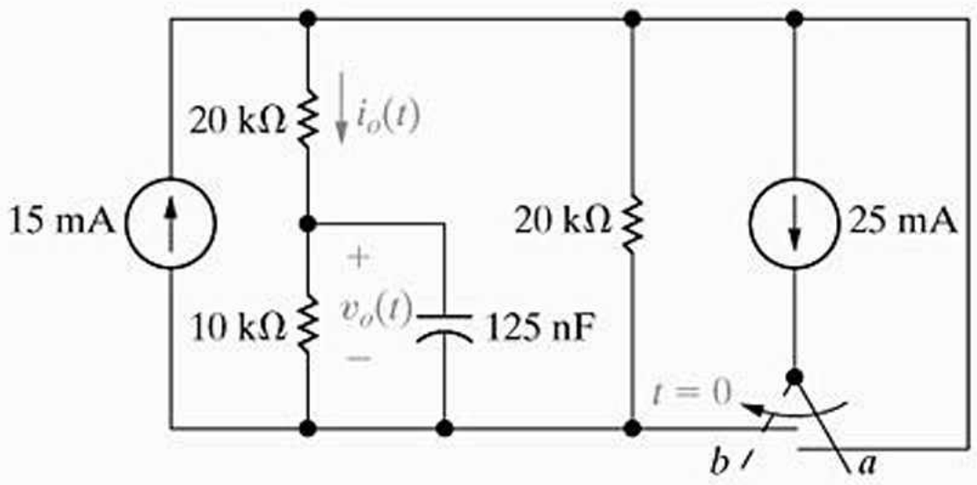
a) $v_o(t)$.
b) $i_o(t)$.
c) $v_g(t)$.
d) $v_g(0^+)$.

Figura P7.56



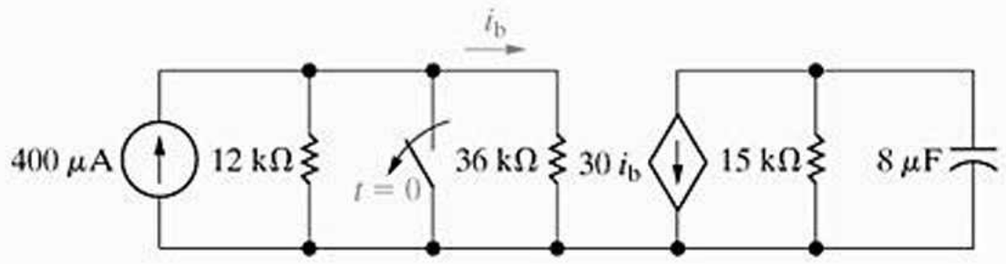
7.57 PSPICE A chave do circuito visto na Figura P7.57 esteve na posição a por um longo tempo. Em $t = 0$, ela passa instantaneamente para a posição b. Determine $v_o(t)$ e $i_o(t)$ para $t \geq 0^+$.

Figura P7.57



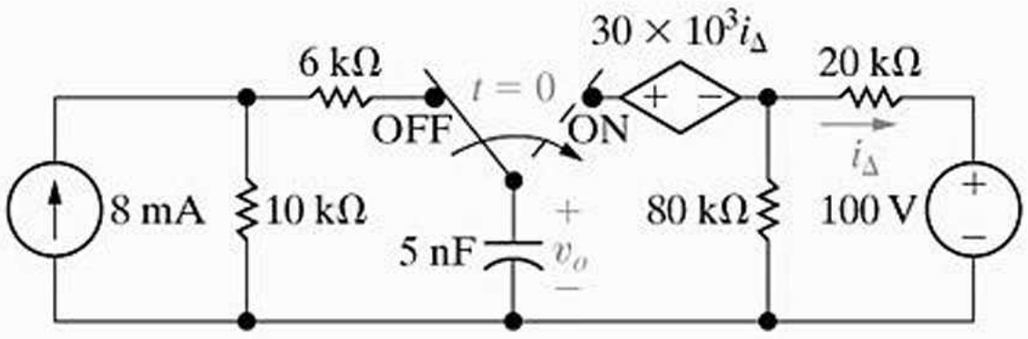
7.58 PSPICE A chave do circuito mostrado na Figura P7.58 se abre em $t = 0$ depois de estar fechada por um longo tempo. Quantos milissegundos depois de a chave se abrir a energia armazenada no capacitor atinge 90% de seu valor final?

Figura P7.58



7.59 PSPICE A chave do circuito mostrado na Figura P7.59 esteve na posição OFF (DESLIGADO) por um longo tempo. Em $t = 0$, ela passa instantaneamente para a posição ON (LIGADO). Determine $v_o(t)$ para $t \geq 0$.

Figura P7.59



7.60 PSPICE Suponha que a chave no circuito da Figura P7.59 esteve na posição ON por um longo tempo, antes de ser colocada instantaneamente na posição OFF em $t = 0$. Determine $v_o(t)$ para $t \geq 0$.

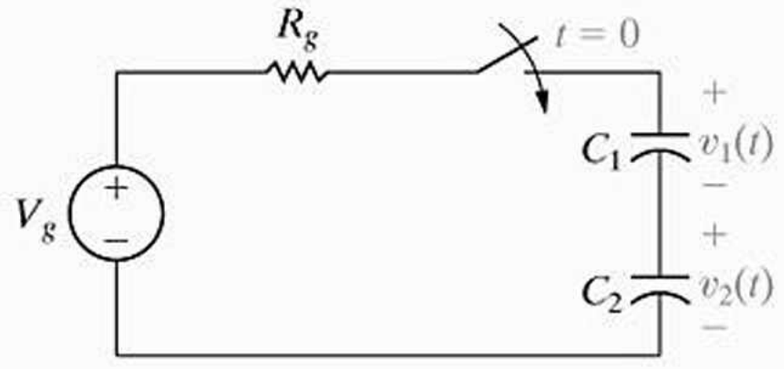
7.61 a) Deduza a Equação 7.52 convertendo, em primeiro lugar, o circuito equivalente de Norton mostrado na Figura 7.21 para um equivalente de Thévenin e, então, somando as tensões ao longo do laço fechado, usando a corrente i no capacitor como a variável relevante.

b) Use a técnica de separação de variáveis para determinar a solução para a Equação 7.52. Verifique se sua solução está de acordo com a da Equação 7.53.

7.62 Não há nenhuma energia armazenada nos capacitores C_1 e C_2 no instante em que a chave é fechada no circuito visto na Figura P7.62.

a) Deduza as expressões para $v_1(t)$ e $v_2(t)$ para $t \geq 0$.
b) Use as expressões deduzidas em (a) para determinar $v_1(\infty)$ e $v_2(\infty)$.

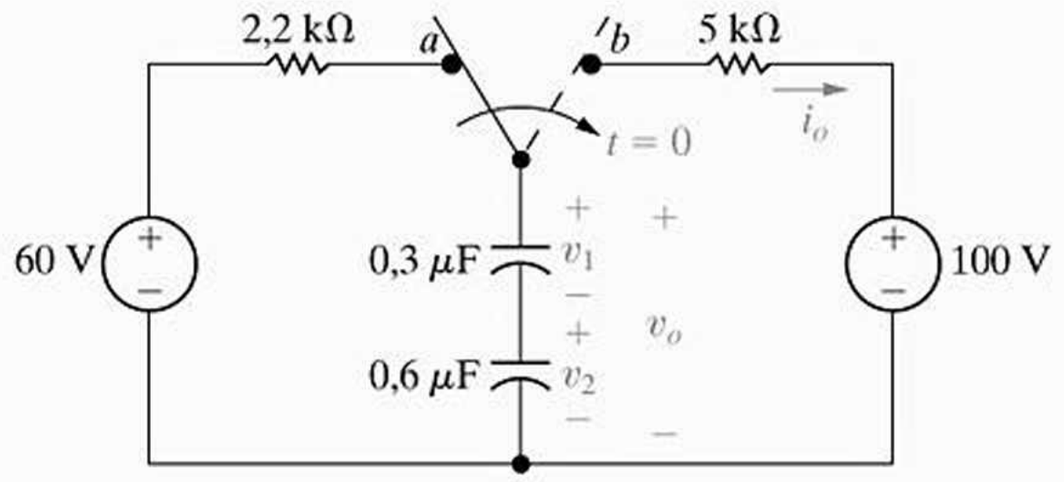
Figura P7.62



7.63 PSPICE A chave no circuito da Figura P7.63 esteve na posição a por um longo tempo. Em $t = 0$, ela passa instantaneamente para a posição b. Para $t \geq 0^+$, determine

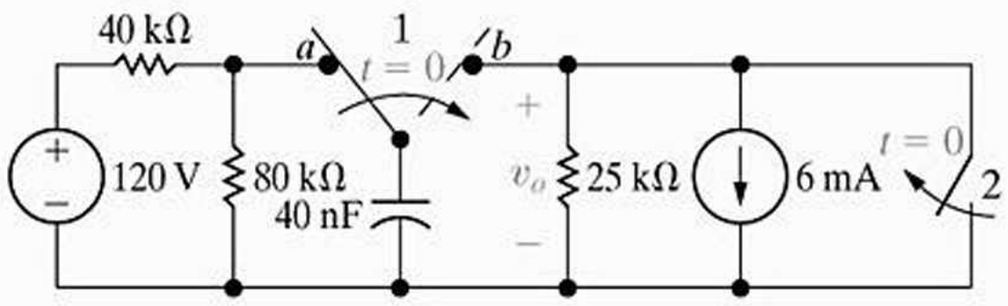
a) $v_o(t)$.
b) $i_o(t)$.
c) $v_1(t)$.
d) $v_2(t)$.
e) a energia final armazenada nos capacitores quando $t \to \infty$.

Figura P7.63



7.64 PSPICE A chave no circuito da Figura P7.64 esteve na posição a por um longo tempo. Em $t = 0$, ela passa instantaneamente para a posição b. No instante em que ela faz contato com o terminal b, a chave 2 se abre. Determine $v_o(t)$ para $t \geq 0$.

Figura P7.64

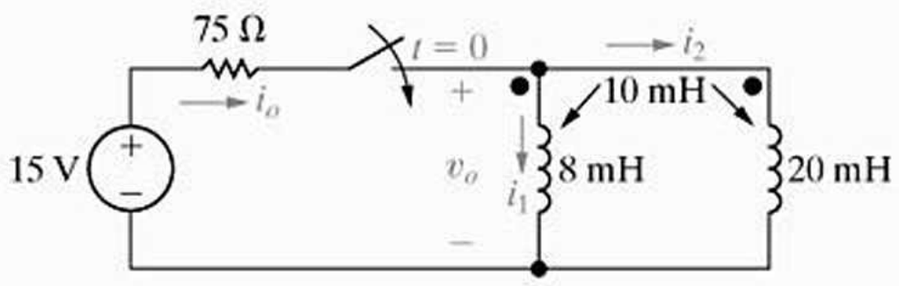


Seção 7.4

7.65* Não há nenhuma energia armazenada no circuito da Figura P7.65 no instante em que a chave é fechada.

a) Determine $i_o(t)$ para $t \geq 0$.
b) Determine $v_o(t)$ para $t \geq 0^+$.
c) Determine $i_1(t)$ para $t \geq 0$.
d) Determine $i_2(t)$ para $t \geq 0$.
e) Suas respostas fazem sentido em termos do comportamento conhecido do circuito?

Figura P7.65

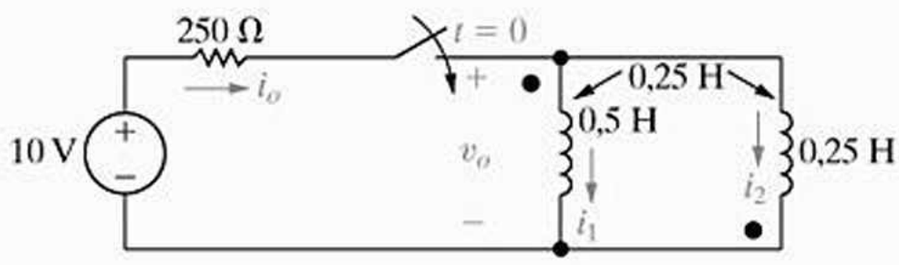


7.66 Repita (a) e (b) do Exemplo 7.10 com a indutância mútua reduzida a zero.

7.67* PSPICE Não há nenhuma energia armazenada no circuito da Figura P7.67 no instante em que a chave é fechada.

a) Determine $i_o(t)$ para $t \geq 0$.
b) Determine $v_o(t)$ para $t \geq 0^+$.
c) Determine $i_1(t)$ para $t \geq 0$.
d) Determine $i_2(t)$ para $t \geq 0$.
e) Suas respostas fazem sentido em termos do comportamento conhecido do circuito?

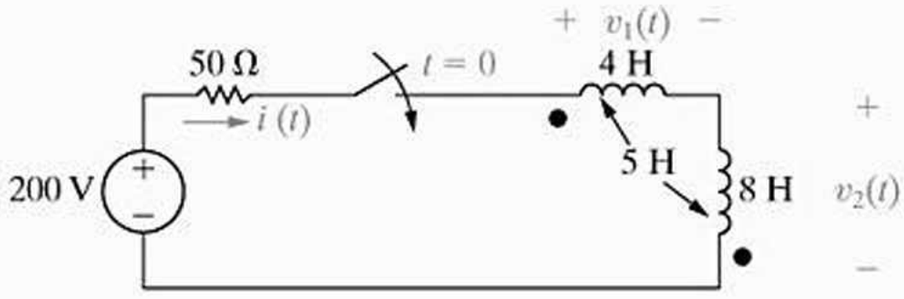
Figura P7.67



7.68 PSPICE Não há nenhuma energia armazenada no circuito da Figura P7.68 no instante em que a chave é fechada.

a) Determine $i(t)$ para $t \geq 0$.
b) Determine $v_1(t)$ para $t \geq 0^+$.
c) Determine $v_2(t)$ para $t \geq 0$.
d) Suas respostas fazem sentido em termos do comportamento conhecido do circuito?

Figura P7.68

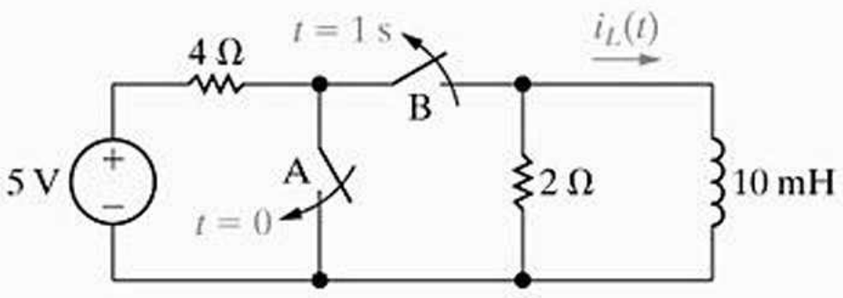


7.69 PSPICE Repita o Problema 7.68 colocando o ponto no enrolamento de 8 H em sua parte superior.

Seção 7.5

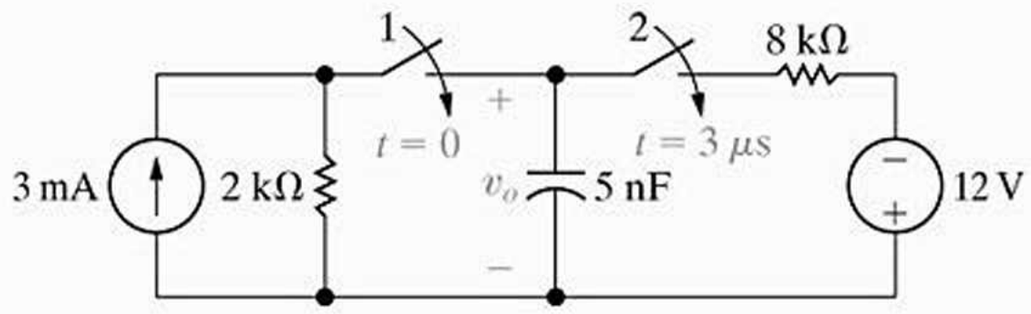
7.70 PSPICE No circuito da Figura P7.70, a chave A esteve aberta e a chave B fechada por um longo tempo. Em $t = 0$, a chave A se fecha. Um segundo depois, a chave B se abre. Determine $i_L(t)$ para $t \geq 0$.

Figura P7.70



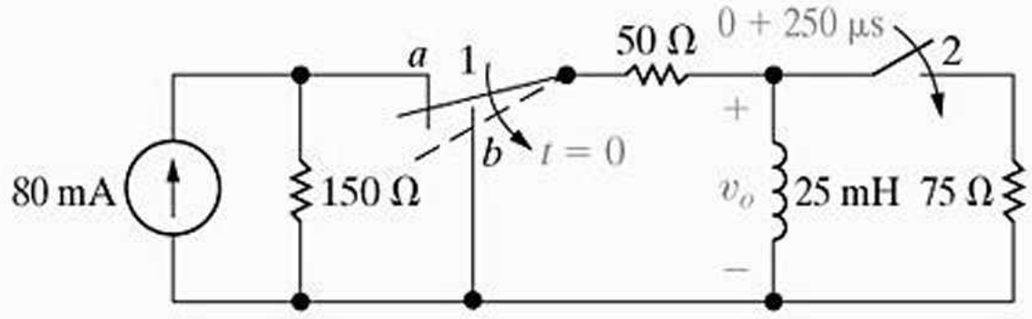
7.71 PSPICE Não há nenhuma energia armazenada no capacitor do circuito da Figura P7.71 quando a chave 1 se fecha em $t = 0$. Três microssegundos mais tarde, a chave 2 se fecha. Determine $v_o(t)$ para $t \geq 0$.

Figura P7.71



7.72* PSPICE A ação das duas chaves no circuito da Figura P7.72 é a seguinte: para $t < 0$, a chave 1 está na posição a e a chave 2 está aberta. Esse estado perdurou por um longo tempo. Em $t = 0$, a chave 1 passa instantaneamente da posição a para a posição b, enquanto a chave 2 permanece aberta. Duzentos e cinqüenta microssegundos depois, a chave 2 se fecha, permanece fechada por 400 μs e, então, se abre. Determine $v_o(t)$ 1 ms depois de a chave 1 passar para a posição b.

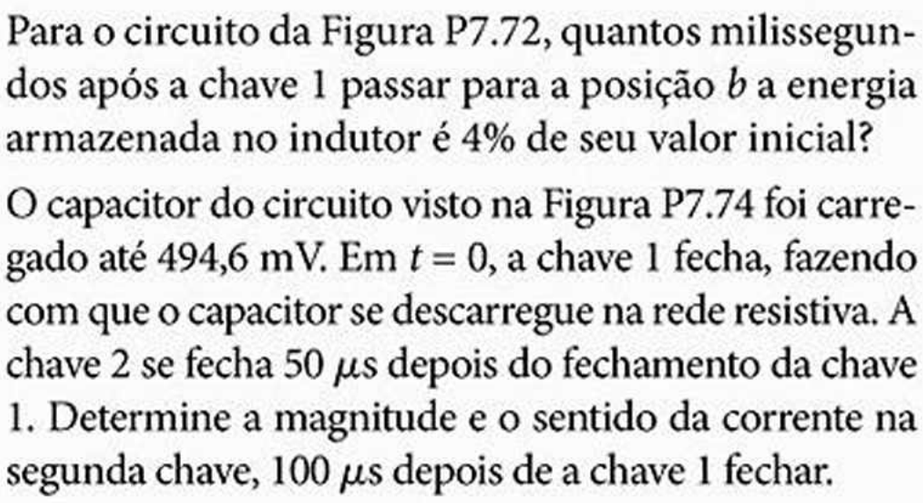
Figura P7.72



7.73 Para o circuito da Figura P7.72, quantos milissegundos após a chave 1 passar para a posição b a energia armazenada no indutor é 4% de seu valor inicial?

7.74 PSPICE O capacitor do circuito visto na Figura P7.74 foi carregado até 494,6 mV. Em $t = 0$, a chave 1 fecha, fazendo com que o capacitor se descarregue na rede resistiva. A chave 2 se fecha 50 μs depois do fechamento da chave 1. Determine a magnitude e o sentido da corrente na segunda chave, 100 μs depois de a chave 1 fechar.

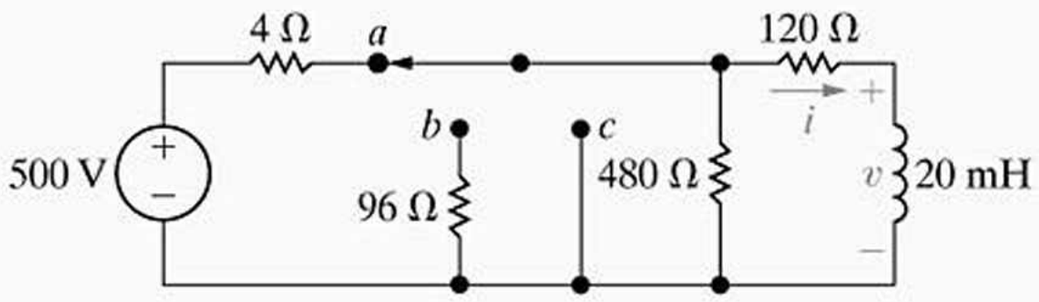
Figura P7.74



7.75 PSPICE A chave do circuito mostrado na Figura P7.75 esteve na posição a por um longo tempo. Em $t = 0$, ela passa para a posição b, onde permanece por 100 μs. Então, a chave passa para a posição c, onde permanece indefinidamente. Determine

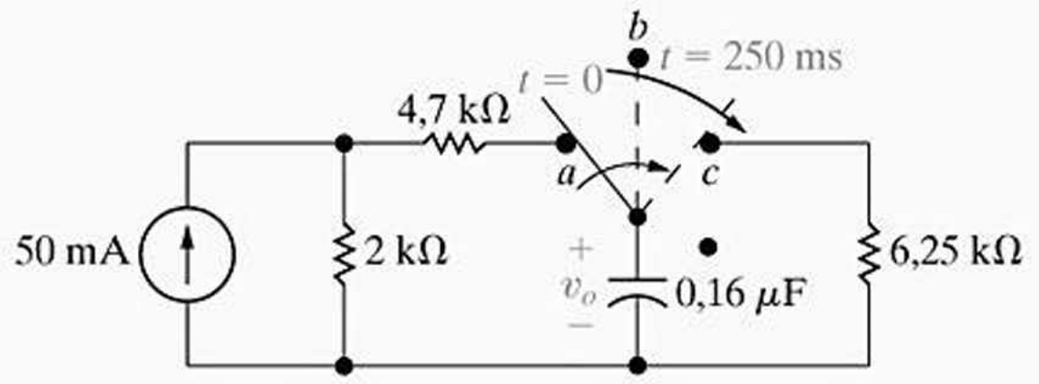
a) $i(0^+)$.
b) $i(25\ \mu s)$.
c) $i(200\ \mu s)$.
d) $v(100^-\ \mu s)$.
e) $v(100^+\ \mu s)$.

Figura P7.75



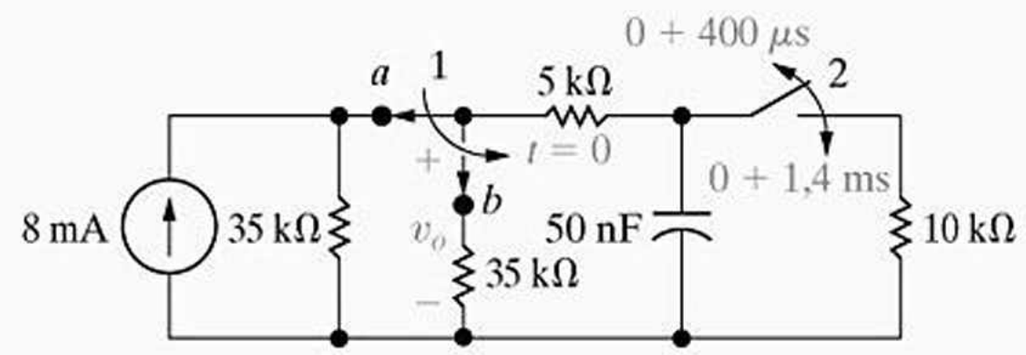
7.76* PSPICE A chave no circuito da Figura P7.76 esteve na posição *a* por um longo tempo. Em $t = 0$, ela passa instantaneamente para a posição *b*, onde permanece por 250 ms antes de passar instantaneamente para a posição c. Determine v_o para $t \geq 0$.

Figura P7.76



7.77 PSPICE No circuito da Figura P7.77, a chave 1 esteve na posição *a* e a chave 2 esteve fechada por um longo tempo. Em $t = 0$, a chave 1 passa instantaneamente para a posição *b*. Quatrocentos microssegundos mais tarde, a chave 2 se abre, permanece aberta durante 1 ms e, então, se fecha novamente. Determine v_o 1,6 ms depois de a chave 1 fazer contato com o terminal *b*.

Figura P7.77

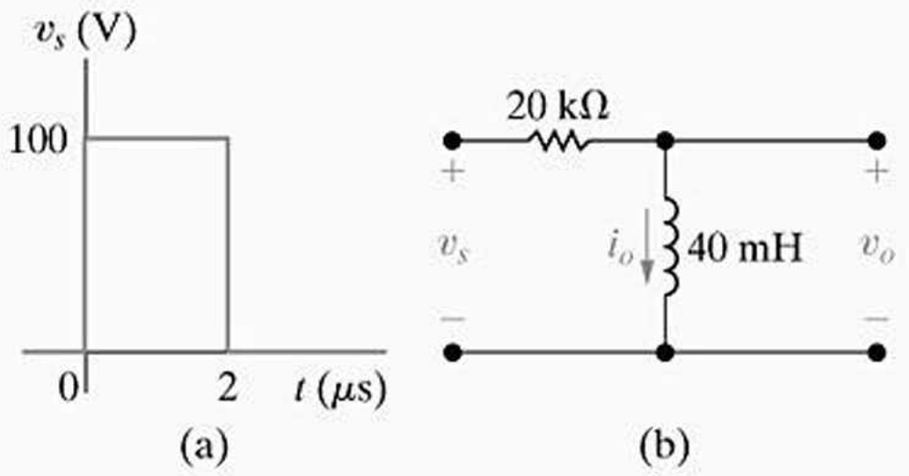


7.78 Para o circuito da Figura P7.77, qual porcentagem da energia inicial armazenada no capacitor de 50 nF é dissipada no resistor de 10 kΩ?

7.79 PSPICE A forma de onda de tensão mostrada na Figura P7.79(a) é aplicada ao circuito da Figura P7.79(b). A corrente inicial no indutor é zero.

a) Calcule $v_o(t)$.
b) Faça um gráfico de $v_o t$ em função de t.
c) Determine i_o em $t = 4\ \mu s$.

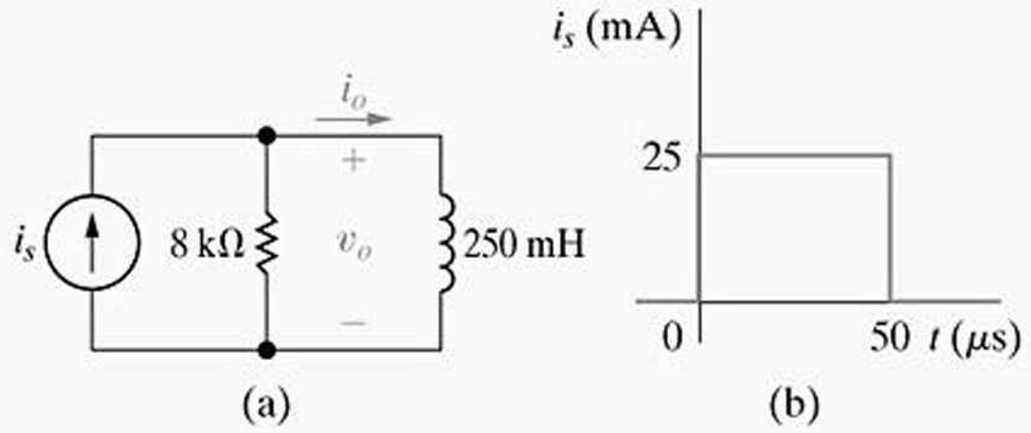
Figura P7.79



7.80 PSPICE A fonte de corrente no circuito da Figura P7.80(a) gera o pulso de corrente mostrado na Figura P7.80(b). Não há nenhuma energia armazenada em $t = 0$.

a) Determine as expressões numéricas para $v_o(t)$ para os intervalos de tempo $t < 0$, $0 < t < 50\ \mu s$ e $50\ \mu s < t < \infty$.
b) Calcule $v_o(50^-\ \mu s)$ e $v_o(50^+\ \mu s)$.
c) Calcule $i_o(50^-\ \mu s)$ e $i_o(50^+\ \mu s)$.

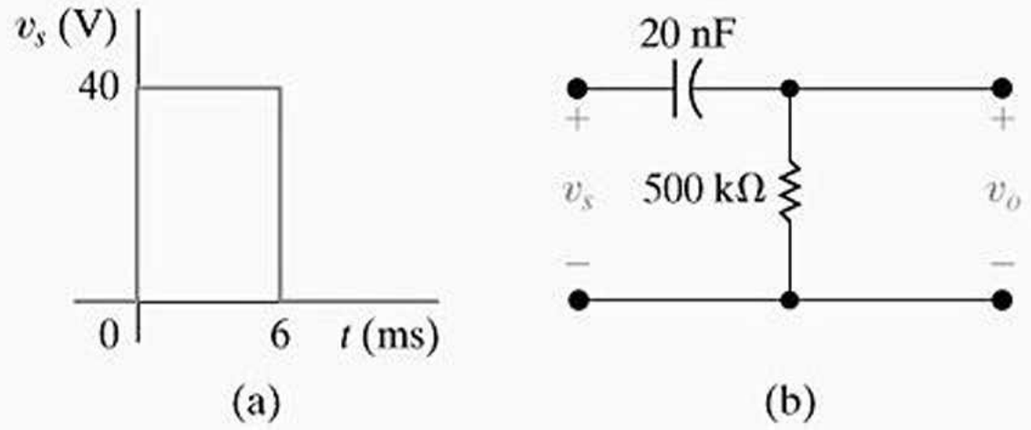
Figura P7.80



7.81 PSPICE A forma de onda de tensão mostrada na Figura P7.81(a) é aplicada ao circuito da Figura P7.81(b). A tensão inicial no capacitor é zero.

a) Calcule $v_o(t)$.
b) Faça um gráfico de $v_o(t)$ em função de t.

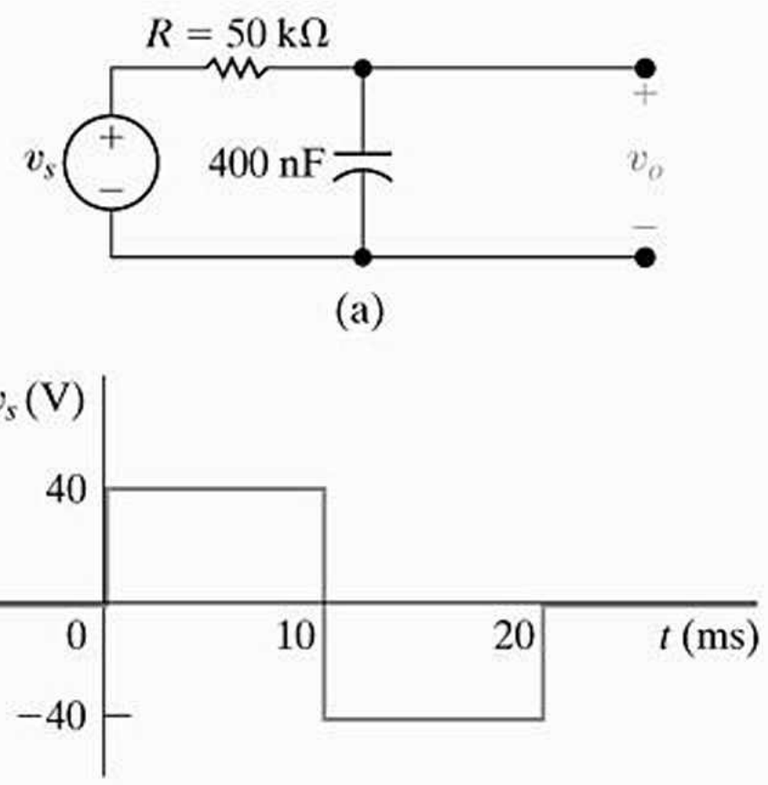
Figura P7.81



7.82 PSPICE A fonte de tensão no circuito da Figura P7.82(a) está gerando o sinal mostrado na Figura P7.82(b). Não há nenhuma energia armazenada em $t = 0$.

a) Determine as expressões para $v_o(t)$ que sejam válidas para os intervalos $t < 0$; $0 \leq t \leq 10$ ms; 10 ms $\leq t \leq$ 20 ms e 20 ms $\leq t < \infty$.
b) Faça um gráfico de v_o e v_s nos mesmos eixos coordenados.
c) Repita (a) e (b) com R reduzido a 10 kΩ.

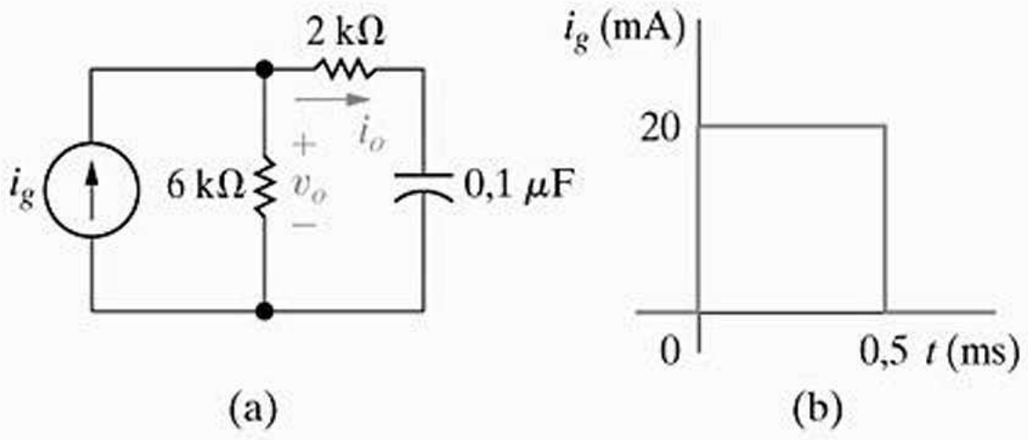
Figura P7.82



7.83 PSPICE A fonte de corrente no circuito da Figura P7.83(a) gera o pulso de corrente mostrado na Figura P7.83(b). Não há nenhuma energia armazenada em $t = 0$.

a) Determine as expressões para $i_o(t)$ e $v_o(t)$ para os intervalos de tempo $t < 0$; $0 < t < 0{,}5$ ms e $0{,}5 \text{ ms} < t < \infty$.
b) Calcule $i_o(0^-)$; $i_o(0^+)$; $i_o(0{,}0005^-)$e $i_o(0{,}0005^+)$.
c) Calcule $v_o(0^-)$; $v_o(0^+)$; $v_o(0{,}0005^-)$ e $v_o(0{,}0005^+)$.
d) Faça um gráfico de i_o em função de t para o intervalo $-2 \text{ ms} < t < 2 \text{ ms}$.
e) Faça um gráfico de v_o em função de t para o intervalo $-2 \text{ ms} < t < 2 \text{ ms}$.

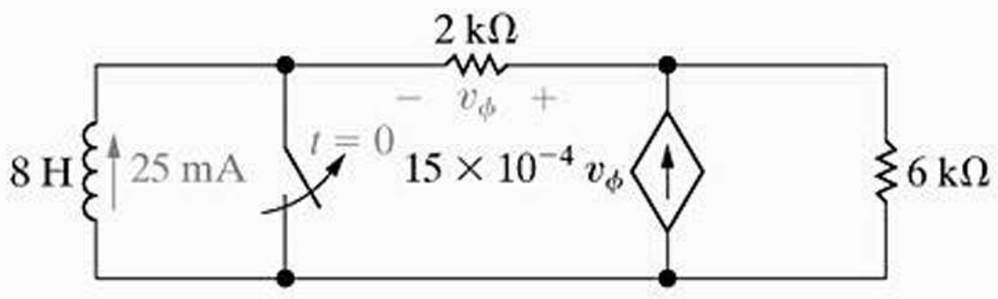
Figura P7.83



Seção 7.6

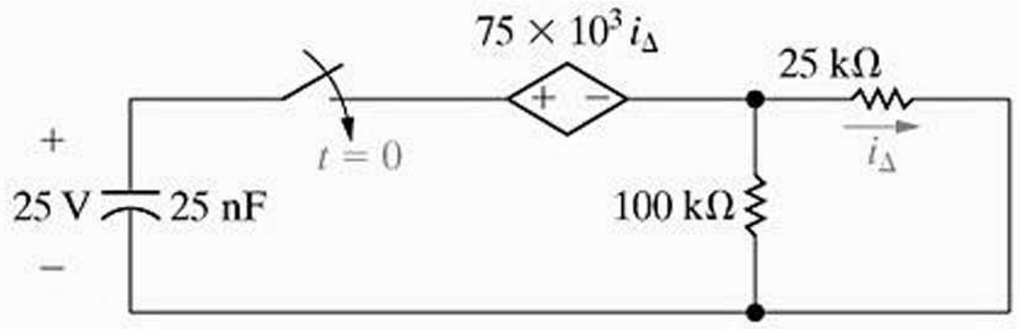
7.84 PSPICE A corrente no indutor do circuito da Figura P7.84 é 25 mA no instante em que a chave é aberta. O indutor será danificado sempre que a magnitude de sua corrente for igual ou superior a 12 A. Quanto tempo depois de a chave ser aberta o indutor se danificará?

Figura P7.84



7.85 PSPICE O capacitor no circuito mostrado na Figura P7.85 está carregado com 25 V no instante em que a chave é fechada. Se o capacitor for danificado quando a tensão em seus terminais for igual ou superior a 50 kV, quanto tempo demorará para o capacitor se danificar?

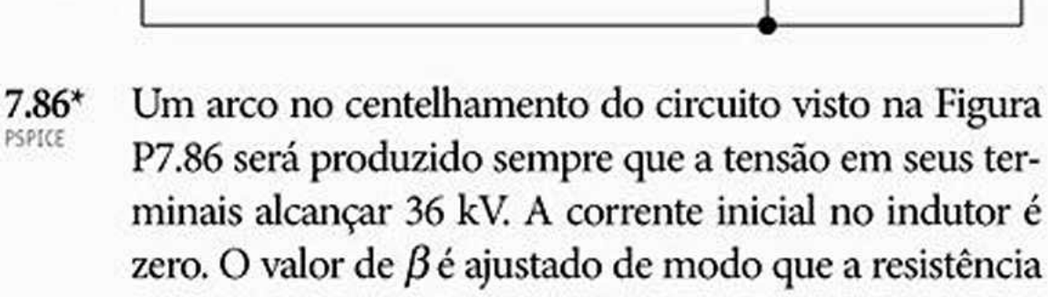
Figura P7.85



7.86* PSPICE Um arco no centelhamento do circuito visto na Figura P7.86 será produzido sempre que a tensão em seus terminais alcançar 36 kV. A corrente inicial no indutor é zero. O valor de β é ajustado de modo que a resistência de Thévenin vista dos terminais do indutor seja -3 kΩ.

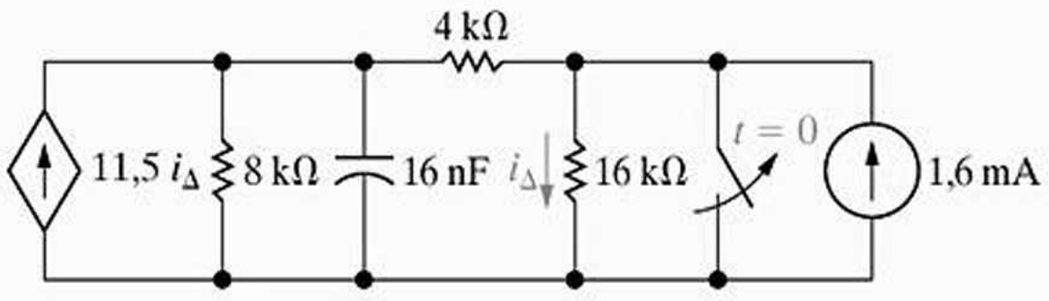
a) Qual é o valor de β?
b) Quantos microssegundos depois de a chave ter sido fechada ocorrerá o arco no centelhamento?

Figura P7.86



7.87* PSPICE A chave no circuito da Figura P7.87 esteve fechada por um longo tempo. A tensão nominal do capacitor de 16 nF é 930 V. Quanto tempo depois de a chave abrir a tensão no capacitor alcança a tensão nominal?

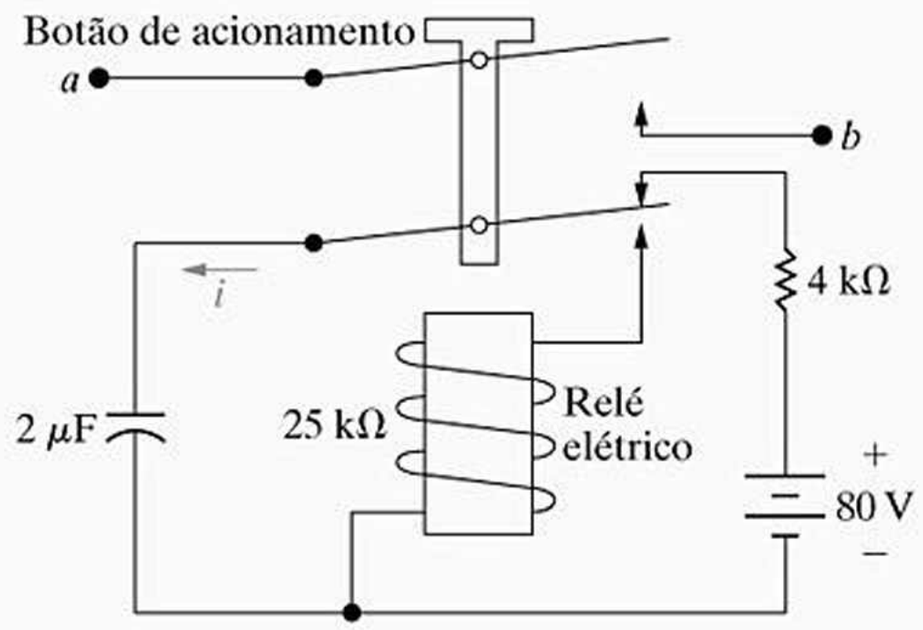
Figura P7.87



7.88 O circuito mostrado na Figura P7.88 é usado para fechar a chave entre a e b por um intervalo de tempo predeterminado. O relé mantém seus contatos na posição inferior enquanto a tensão no enrolamento estiver acima de 5 V. Quando essa tensão no enrolamento for igual a 5 V, os contatos do relé voltarão à sua posição inicial, pela ação de uma mola mecânica. A chave entre a e b está inicialmente fechada porque o botão de acionamento foi momentaneamente pressionado. Suponha que o capacitor esteja totalmente carregado quando o botão for acionado pela primeira vez. A resistência do enrolamento do relé é 25 kΩ, e sua indutância é desprezível.

a) Por quanto tempo a chave permanece fechada?
b) Escreva a expressão numérica para i desde o instante em que os contatos do relé são abertos pela primeira vez até o instante em que o capacitor está totalmente carregado.
c) Quantos milissegundos (depois que o circuito entre a e b é interrompido) são necessários para a tensão do capacitor alcançar 85% de seu valor final?

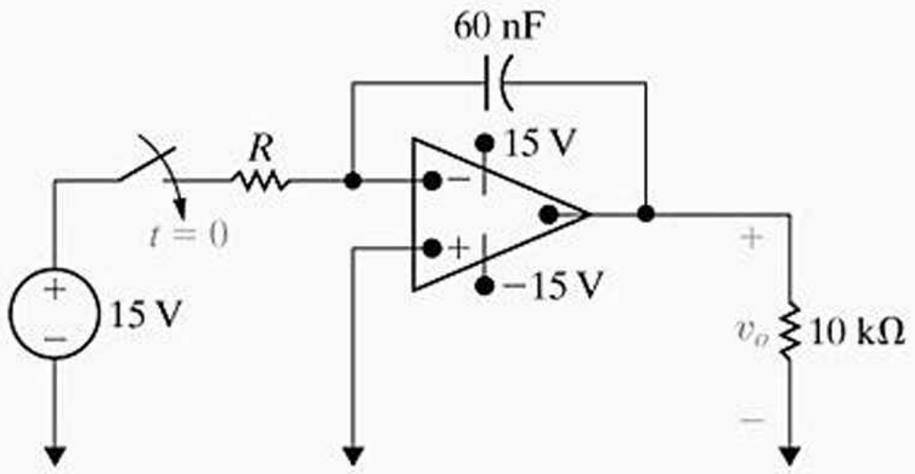
Figura P7.88



Seção 7.7

7.89 PSPICE A energia armazenada no capacitor do circuito mostrado na Figura P7.89 é zero no instante em que a chave é fechada. O amplificador operacional ideal chega à saturação em 3 ms. Qual é o valor numérico de R em kohms?

Figura P7.89

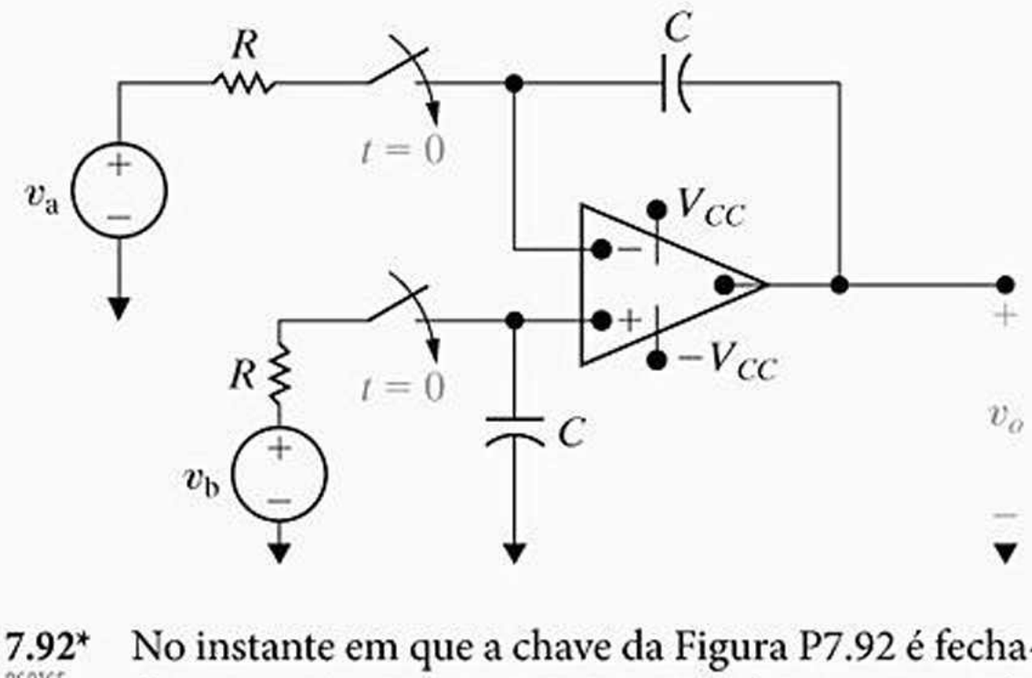


7.90 No instante em que a chave é fechada no circuito da Figura P7.89, o capacitor é carregado até 5 V, positivo no terminal da direita. Se o amplificador operacional ideal saturar em 8 ms, qual será o valor de R?

7.91 PSPICE Não há nenhuma energia armazenada nos capacitores do circuito mostrado na Figura P7.91 no instante em que as duas chaves se fecham.

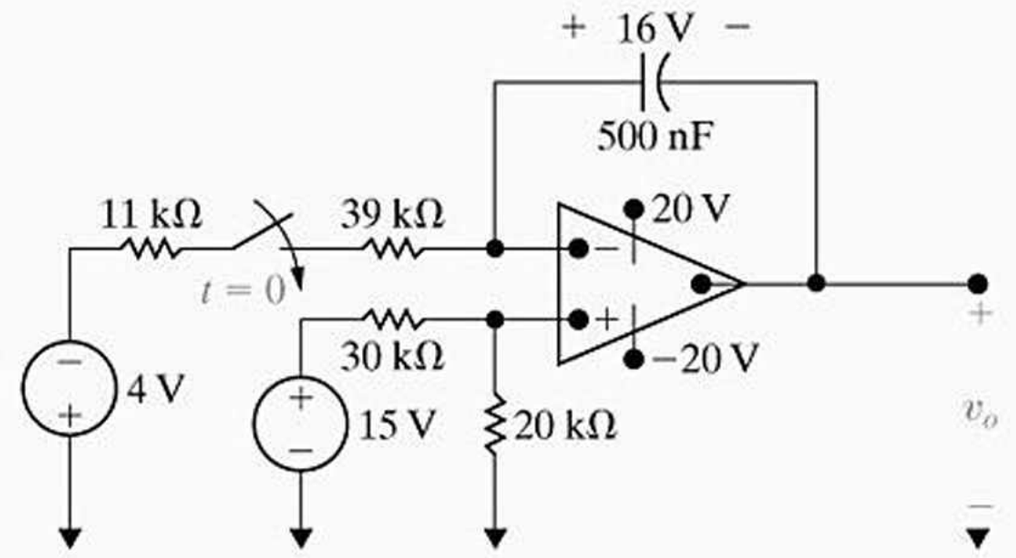
a) Determine v_o em função de v_a, v_b, R e C.
b) Com base no resultado obtido em (a), descreva o funcionamento do circuito.
c) Quanto tempo levará para o amplificador se saturar se $v_a = 10$ mV; $v_b = 60$ mV; $R = 40$ kΩ; $C = 25$ nF e $V_{CC} = 12$ V?

Figura P7.91



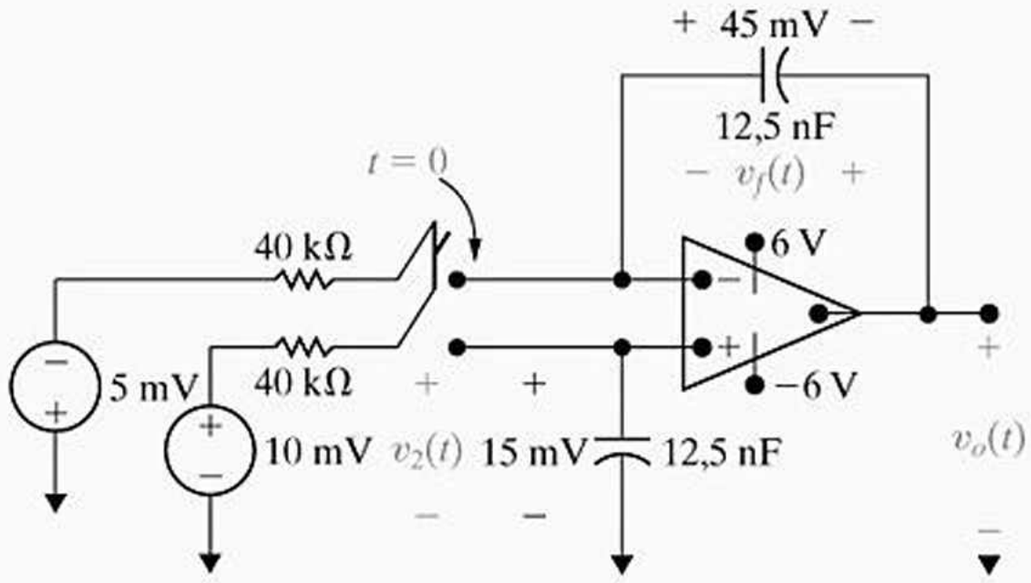
7.92* PSPICE No instante em que a chave da Figura P7.92 é fechada, a tensão no capacitor é 16 V. Admita um amplificador operacional ideal. Quantos milissegundos depois de a chave fechar a tensão de saída v_o será igual a zero?

Figura P7.92



7.93* PSPICE No instante em que a chave bipolar do circuito mostrado na Figura P7.93 é fechada, as tensões iniciais nos capacitores são 45 mV e 15 mV, como mostrado. Determine as expressões numéricas para $v_o(t)$, $v_2(t)$ e $v_f(t)$, supondo que o amp op ideal funcione dentro de sua faixa linear.

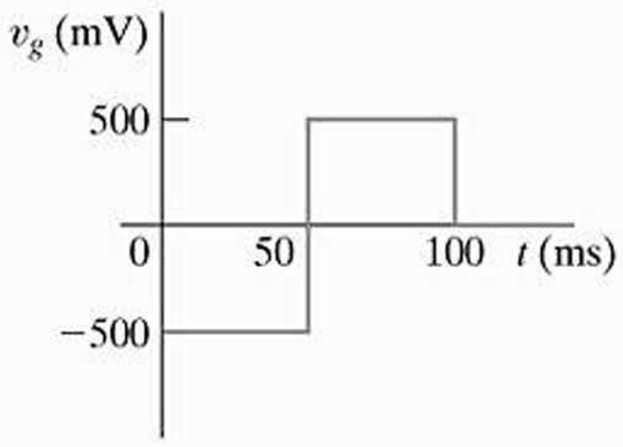
Figura P7.93



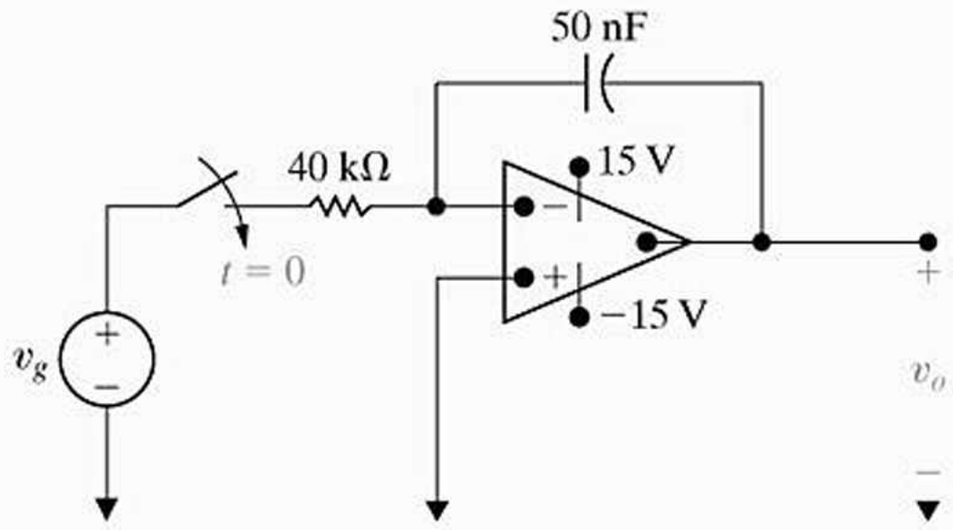
7.94 PSPICE O pulso de tensão mostrado na Figura P7.94(a) é aplicado ao amplificador-integrador ideal da Figura P7.94(b). Escreva as expressões numéricas para $v_o(t)$, supondo $v_o(0) = 0$, para os intervalos de tempo

a) $t < 0$.
b) $0 \leq t \leq 50$ ms.
c) 50 ms $\leq t \leq 100$ ms.
d) 100 ms $\leq t < \infty$.

Figura P7.94



(a)



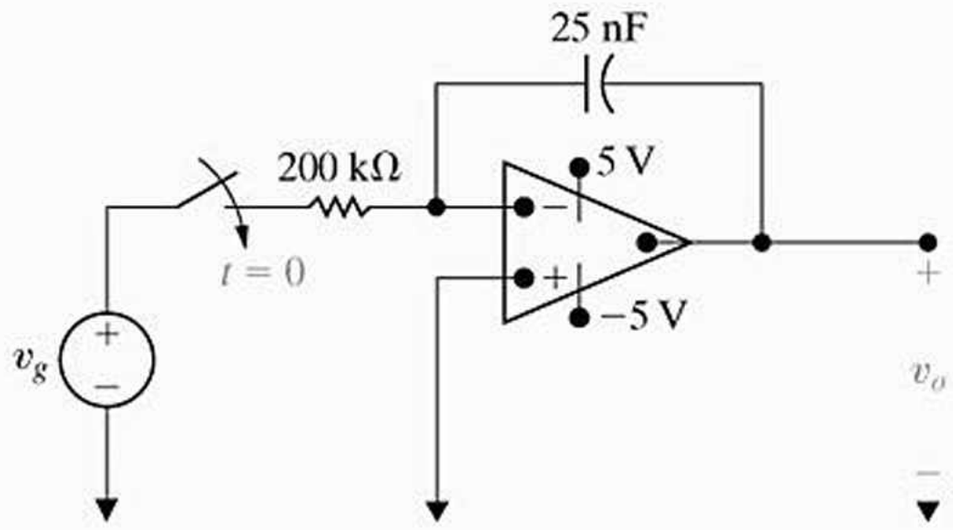
(b)

7.95 PSPICE Repita o Problema 7.94 com um resistor de 4 MΩ colocado em paralelo com o capacitor de realimentação de 50 nF.

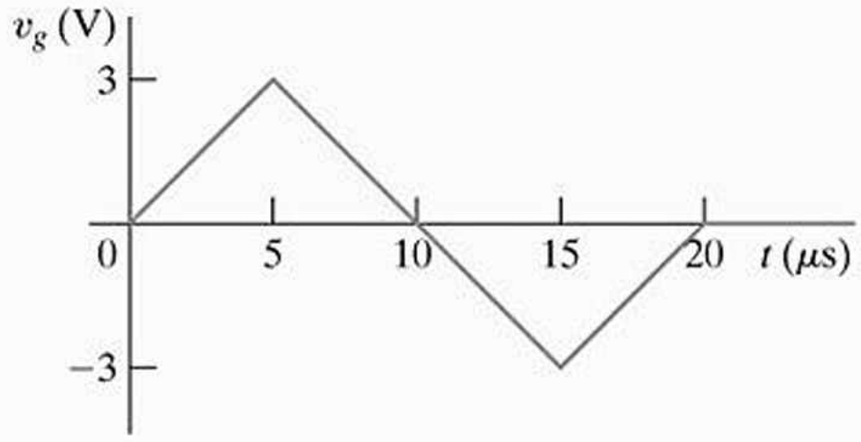
7.96 PSPICE A fonte de tensão no circuito da Figura P7.96(a) está gerando a forma de onda triangular mostrada na Figura P7.96(b). Suponha que a energia armazenada no capacitor seja zero em $t = 0$.

a) Escreva as expressões numéricas para $v_o(t)$ para os seguintes intervalos de tempo: $0 \leq t \leq 5\ \mu s$; $5\ \mu s \leq t \leq 15\ \mu s$ e $15\ \mu s \leq t \leq 20\ \mu s$.
b) Esboce a forma de onda de saída entre 0 e 20 μs.
c) Se a tensão de entrada triangular continuar a se repetir para $t > 20\ \mu s$, qual valor de tensão de saída você esperaria? Explique.

Figura P7.96



(a)



(b)

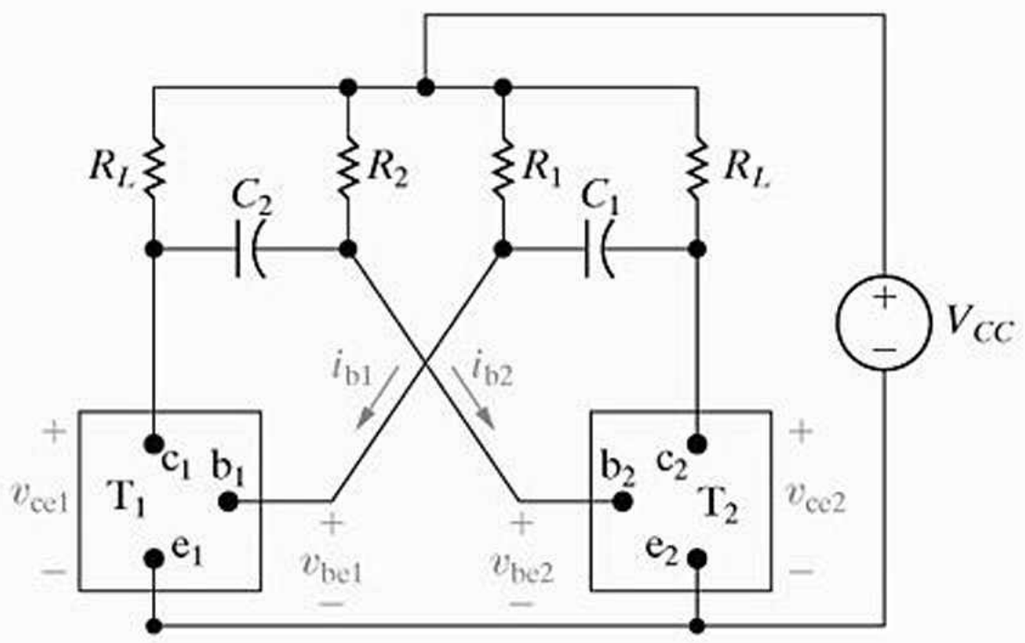
Seções 7.1–7.7

7.97 O circuito mostrado na Figura P7.97 é conhecido como um multivibrador astável e encontra ampla aplicação em circuitos de pulso. A finalidade deste problema é relacionar a carga e descarga dos capacitores com o funcionamento do circuito. O segredo para analisar o circuito é entender o comportamento das chaves transistorizadas ideais T_1 e T_2. O circuito é projetado de modo que as chaves se alternem automaticamente entre o estado LIGADO (ON) e o estado DESLIGADO (OFF). Quando T_1 está no estado OFF, T_2 está no estado ON e vice-versa. Assim, na análise desse circuito, supomos que uma chave esteja ou no estado ON ou no estado OFF. Também admitimos que uma chave transistorizada ideal possa mudar de estado instantaneamente. Em outras palavras, ela pode passar repentinamente do estado OFF para o estado ON e vice-versa. Quando uma chave transistorizada está no estado ON, (1) a corrente de base i_b é maior do que zero, (2) a tensão terminal v_{be} é zero e (3) a tensão terminal v_{ce} é zero. Portanto, quando uma chave transistorizada está no estado ON, existe um curto-circuito entre os terminais *b*,*e* e *c*,*e*. Quando uma chave transistorizada está no estado OFF, (1) a tensão terminal v_{be} é negativa, (2) a corrente de base é zero, e (3) há um circuito aberto entre os terminais *c*,*e*. Sendo assim, quando uma chave transistorizada está no estado OFF, existe um circuito aberto entre os terminais *b*,*e* e *c*,*e*. Suponha que T_2 estivesse ligada e acabou de passar abruptamente para o estado OFF, enquanto T_1 estava no estado OFF e acabou de passar repentinamente para o estado ON. Você pode supor que, nessa circunstância, C_2 esteja carregado com tensão de alimentação V_{CC} e a carga em C_1 seja zero. Admita também que $C_1 = C_2$ e $R_1 = R_2 = 10R_L$.

a) Determine a expressão para v_{be2} durante o intervalo em que T_2 esteja no estado OFF.
b) Determine a expressão para v_{ce2} durante o intervalo em que T_2 esteja no estado OFF.
c) Determine o tempo em que T_2 permanece no estado OFF.

d) Determine o valor de v_{ce2} ao final do intervalo em que T_2 está no estado OFF.
e) Determine a expressão para i_{b1} durante o intervalo em que T_2 está no estado OFF.
f) Determine o valor de i_{b1} ao final do intervalo em que T_2 está no estado OFF.
g) Faça um gráfico de v_{ce2} em função de t durante o intervalo em que T_2 está no estado OFF.
h) Faça um gráfico de i_{b1} em função de t durante o intervalo em que T_2 está no estado OFF.

Figura P7.97



7.98 Os valores dos componentes do circuito da Figura P7.97 são $V_{CC} = 9$ V; $R_L = 3$ kΩ; $C_1 = C_2 = 2$ nF e $R_1 = R_2 = 18$ kΩ.

a) Por quanto tempo T_2 permanece no estado OFF durante um ciclo de funcionamento?
b) Por quanto tempo T_2 permanece no estado ON durante um ciclo de funcionamento?
c) Repita (a) para T_1.
d) Repita (b) para T_1.
e) No primeiro instante após T_1 passar para o estado ON, qual é o valor de i_{b1}?
f) No instante imediatamente anterior a T_1 passar para o estado OFF, qual é o valor de i_{b1}?
g) Qual é o valor de v_{ce2} no instante imediatamente antes de T_2 passar para o estado ON?

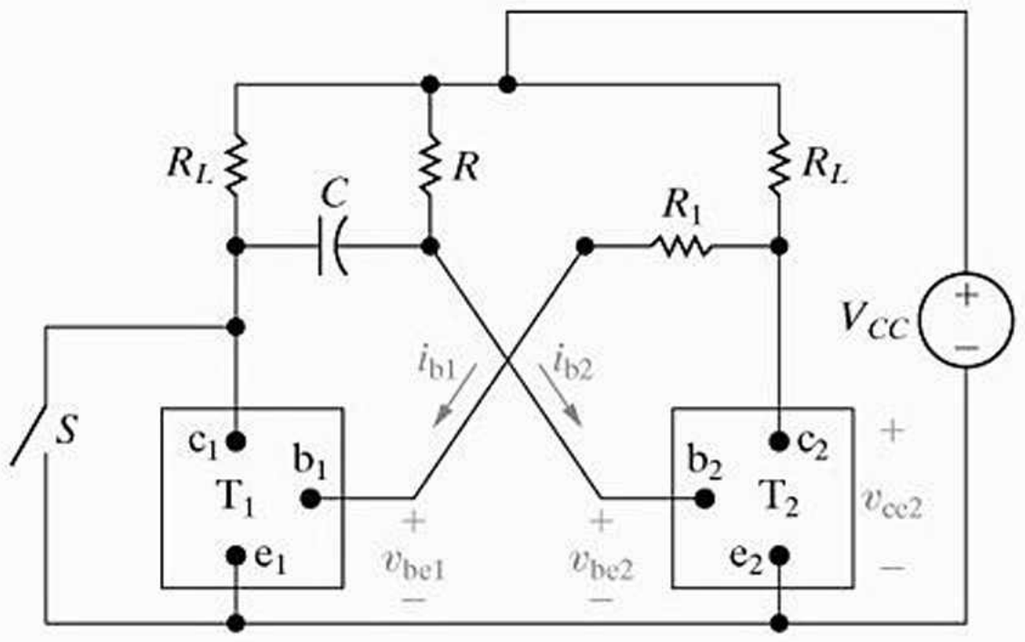
7.99 Repita o Problema 7.98 com $C_1 = 3$ nF e $C_2 = 2{,}8$ nF. Os valores de todos os outros componentes permanecem inalterados.

7.100 O multivibrador astável da Figura P7.97 deve satisfazer os seguintes critérios: (1) Uma chave transistorizada deve estar no estado ON durante 48 μs e no estado OFF durante 36 μs para cada ciclo; (2) $R_L = 2$ kΩ; (3) $V_{CC} = 5$ V; (4) $R_1 = R_2$ e (5) $6R_L \leq R_1 \leq 50R_L$. Quais são os valores-limite para os capacitores C_1 e C_2?

7.101 O circuito mostrado na Figura P7.101 é conhecido como um multivibrador monoestável. O adjetivo *monoestável* é usado para descrever o fato de o circuito ter somente um regime permanente. Isto é, se nada interferir, a chave eletrônica T_2 estará no estado ON e T_1 estará no estado OFF. (O funcionamento da chave transistorizada ideal é descrito no Problema 7.97.) T_2 pode ser desligada fechando momentaneamente a chave *S*. Após *S* retornar à sua posição aberta, T_2 retornará a seu estado ON.

a) Mostre que, se T_2 estiver no estado ON, T_1 estará no estado OFF e continuará assim.
b) Explique por que T_2 é desligada quando *S* é momentaneamente fechada.
c) Mostre que T_2 permanecerá desligada durante o intervalo $RC \ln 2$ s.

Figura P7.101



7.102 Os valores dos parâmetros no circuito da Figura P7.101 são $V_{CC} = 6$ V; $R_1 = 5{,}0$ kΩ; $R_L = 20$ kΩ; $C = 250$ pF e $R = 23.083$ Ω.

a) Faça um gráfico de v_{ce2} em função de t, admitindo que depois que *S* é momentaneamente fechada, ela permanece aberta até que o circuito atinja seu regime permanente. Admita que *S* seja fechada em $t = 0$. Faça o gráfico para o intervalo $-5 \leq t \leq 10$ μs.
b) Repita (a) para i_{b2} em função de t.

7.103* PERSPECTIVA PRÁTICA Suponha que o circuito da Figura 7.45 seja o modelo de um circuito de luz intermitente portátil. Suponha que quatro baterias de 1,5 V alimentem o circuito e que o valor do capacitor seja 10 μF. Admita que a lâmpada conduza quando sua tensão alcança 4 V e pare de conduzir quando sua tensão cai abaixo de 1 V. A lâmpada tem uma resistência de 20 kΩ quando está conduzindo e uma resistência infinita quando não está conduzindo.

a) Suponha que não queiramos esperar mais do que 10 s entre flashes de luz. Qual é o valor de resistência R necessário para que esse intervalo de tempo seja obedecido?
b) Para o valor de resistência de (a), quanto tempo dura o flash de luz?

7.104* PERSPECTIVA PRÁTICA PSPICE No circuito de Figura 7.45, a lâmpada começa a conduzir sempre que a tensão em seus terminais alcança 15 V. Durante o tempo em que a lâmpada conduz, ela pode ser modelada como um resistor de 10 kΩ. Tão logo a lâmpada conduza, a tensão na lâmpada cairá a 5 V. Quando a lâmpada não está conduzindo, ela se comporta como um circuito aberto. $V_s = 40$ V; $R = 800$ kΩ e $C = 25$ μF.

a) Quantas vezes por minuto a lâmpada se acende?
b) O resistor de 800 kΩ é substituído por um resistor variável R. A resistência é ajustada até que a lâmpada pisque 12 vezes por minuto. Qual é o valor de R?

7.105* PERSPECTIVA PRÁTICA PSPICE No circuito de luz intermitente mostrado na Figura 7.45, a lâmpada pode ser modelada como um resistor de 1,3 kΩ quando está conduzindo. A lâmpada é ligada em 900 V e desligada em 300 V.

a) Se $V_s = 1.000$ V, $R = 3{,}7$ kΩ e $C = 250\ \mu$F, quantas vezes por minuto a lâmpada pisca?
b) Qual é a corrente média em miliampères fornecida pela fonte?
c) Suponha que a luz intermitente funcione 24 horas por dia. Se o custo da energia elétrica fornecida for 5 centavos por quilowatt-hora, qual será o custo final durante um ano?

7.106 PERSPECTIVA PRÁTICA a) Mostre que a expressão para a queda de tensão no capacitor, enquanto a lâmpada está conduzindo no circuito de luz intermitente da Figura 7.48, é dada por

$$v_L(t) = V_{\text{Th}} + (V_{\text{max}} - V_{\text{Th}})e^{-(t-t_0)/\tau}$$

onde

$$V_{\text{Th}} = \frac{R_L}{R + R_L}V_s$$

$$\tau = \frac{RR_LC}{R + R_L}.$$

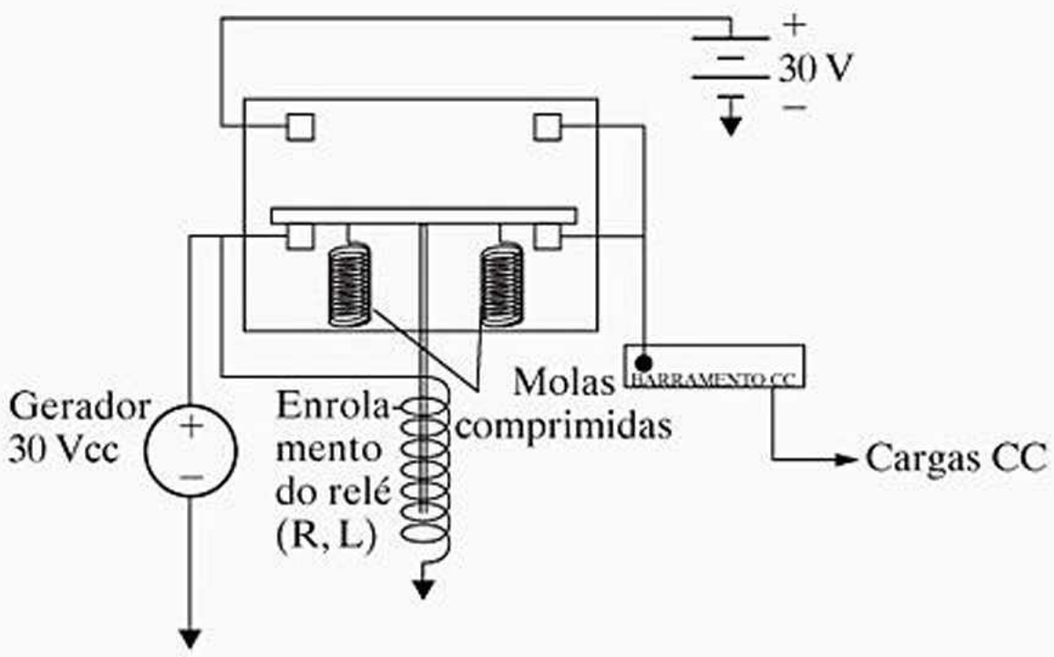
b) Mostre que a expressão para o tempo em que a lâmpada conduz, no circuito de luz intermitente da Figura 7.48, é dada por

$$(t_c - t_o) = \frac{RR_LC}{R + R_L}\ln\frac{V_{\text{max}} - V_{\text{Th}}}{V_{\text{min}} - V_{\text{Th}}}.$$

7.107 PERSPECTIVA PRÁTICA O relé mostrado na Figura P7.107 mantém um gerador de 30 V cc ligado ao barramento cc desde que a corrente no relé seja maior do que 0,4 A. Se a corrente no relé cair para 0,4 A ou menos, o relé acionado por mola liga imediatamente o barramento cc a uma bateria de 30 V. A resistência do enrolamento do relé é 60 Ω e a indutância desse enrolamento deve ser determinada.

a) Admita que o motor que aciona o gerador de 30 Vcc desacelere abruptamente, fazendo com que a tensão gerada caia repentinamente para 21 V. Qual é o valor de L que garantirá que a bateria será ligada ao barramento cc em 0,5 segundo?
b) Usando o valor de L determinado em (a), calcule quanto tempo o relé levará para ser acionado se a tensão gerada cair repentinamente a zero.

Figura P7.107



CAPÍTULO

8

Respostas natural e a um degrau de circuitos *RLC*

SUMÁRIO DO CAPÍTULO

8.1 **Introdução à resposta natural de um circuito *RLC* em paralelo**

8.2 **Formas de resposta natural de um circuito *RLC* em paralelo**

8.3 **Resposta a um degrau de um circuito *RLC* em paralelo**

8.4 **Respostas natural e a um degrau de um circuito *RLC* em série**

8.5 **Circuitos com dois amplificadores-integradores**

✔ OBJETIVOS DO CAPÍTULO

1 Saber determinar a resposta natural e a resposta a um degrau de circuitos *RLC* em paralelo.

2 Saber determinar a resposta natural e a resposta a um degrau de circuitos *RLC* em série.

Neste capítulo, a discussão da resposta natural e da resposta a um degrau de circuitos que contêm indutores, bem como capacitores, está limitada a duas estruturas simples: o circuito *RLC* em paralelo e o circuito *RLC* em série. Determinar a resposta natural de um circuito *RLC* em paralelo consiste em determinar a tensão criada nos ramos em paralelo pelo fornecimento de energia armazenada no indutor ou no capacitor ou em ambos. A tarefa é definida em termos do circuito mostrado na Figura 8.1. A tensão inicial no **capacitor**, V_0, representa a energia inicial armazenada no **capacitor**. A corrente inicial que passa pelo indutor, I_0, representa a energia inicial armazenada no indutor. Se as correntes de ramo individuais forem de interesse, você pode determiná-las após determinar a tensão terminal.

Derivamos a resposta a um degrau de um circuito *RLC* em paralelo usando a Figura 8.2. Estamos interessados na tensão que aparece nos ramos paralelos como resultado da aplicação repentina de uma fonte de corrente cc. Pode haver ou não energia armazenada no circuito quando a fonte de corrente é aplicada.

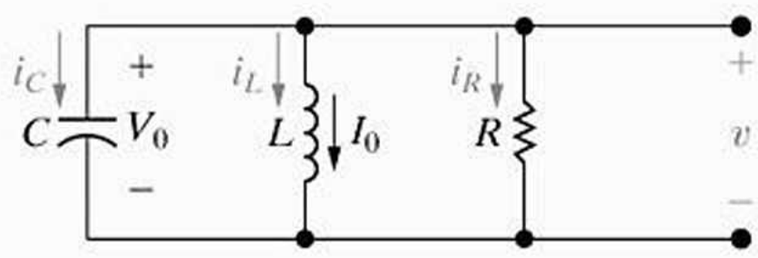


Figura 8.1 ▲ Circuito usado para ilustrar a resposta natural de um circuito *RLC* em paralelo.

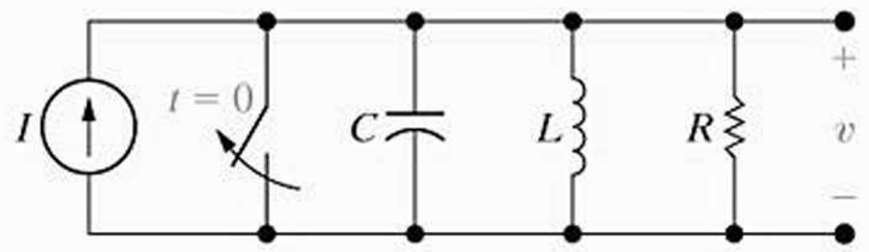


Figura 8.2 ▲ Circuito usado para ilustrar a resposta a um degrau de um circuito *RLC* em paralelo.

Determinar a resposta natural de um circuito *RLC* em série consiste em determinar a corrente gerada nos elementos ligados em série pelo fornecimento da energia inicialmente armazenada no indutor, no capacitor ou em ambos. A tarefa é definida pelo circuito mostrado na Figura 8.3. Como antes, a corrente inicial no indutor, I_0, e a tensão inicial no capacitor, V_0, representam a energia inicialmente armazenada. Se qualquer das tensões nos elementos individuais for de interesse, você pode determiná-la após determinar a corrente.

Descrevemos a resposta a um degrau de um circuito *RLC* em série em termos do circuito mostrado na Figura 8.4. Estamos interessados na corrente resultante da aplicação repentina da fonte de tensão cc. Pode haver ou não energia armazenada no circuito quando a chave é fechada.

Se você não estudou equações diferenciais ordinárias, a determinação das respostas natural e a um degrau de circuitos *RLC* em paralelo e em série pode ser um pouco difícil de entender. Contudo, os resultados são importantes o suficiente para justificar a apresentação nesta altura do livro. Começamos com a resposta natural de um circuito *RLC* em paralelo e abordamos esse material em duas seções: uma para discutir

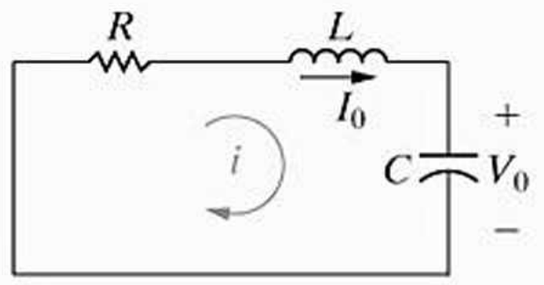


Figura 8.3 ▲ Circuito usado para ilustrar a resposta natural de um circuito *RLC* em série.

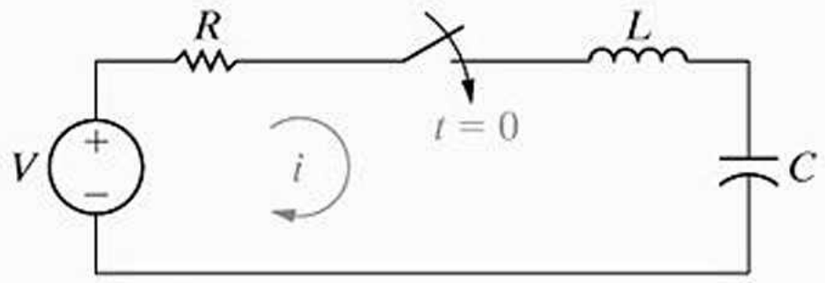


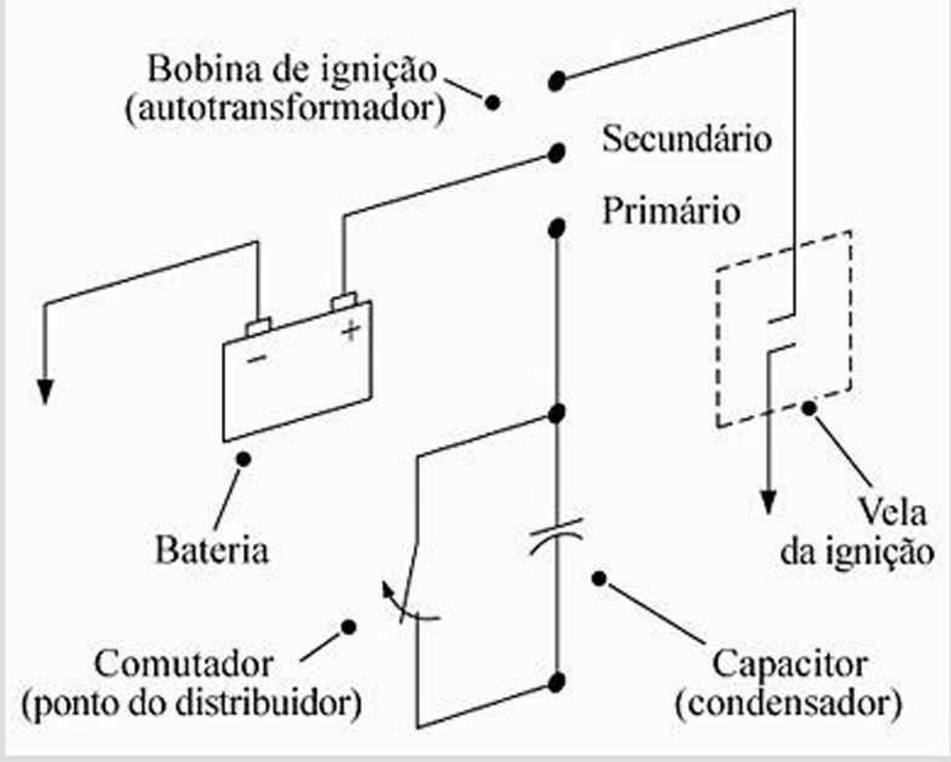
Figura 8.4 ▲ Circuito usado para ilustrar a resposta a um degrau de um circuito *RLC* em série.

Perspectiva prática

Um circuito de ignição

Neste capítulo apresentamos a resposta a um degrau de um circuito *RLC*. Um circuito de ignição de um automóvel é baseado na resposta transitória de um circuito *RLC*. Em tal circuito, uma operação de chaveamento provoca uma rápida variação na corrente em um enrolamento indutivo conhecido como bobina de ignição. A bobina de ignição consiste em dois enrolamentos em série magneticamente acoplados. Essa ligação em série é também conhecida como um autotransformador. A bobina ligada à bateria é denominada enrolamento primário e a bobina ligada à vela de ignição é denominada enrolamento secundário. A rápida variação da corrente no enrolamento primário induz, via acoplamento magnético (indutância mútua), uma tensão muito alta no enrolamento secundário. Essa tensão, cujo pico se encontra entre 20 e 40 kV, é usada para provocar um centelhamento na vela de ignição. O centelhamento inflama a mistura combustível–ar no cilindro.

Um diagrama esquemático que apresenta os componentes básicos de um sistema de ignição é mostrado na figura que aparece ao lado. Hoje em dia, usa-se a ignição eletrônica (em vez de mecânica) nos automóveis para provocar a rápida variação na corrente do enrolamento primário. O entendimento do circuito de ignição eletrônica exige o conhecimento dos componentes eletrônicos, o que está fora do escopo deste livro. Contudo, uma análise do circuito de ignição convencional, mais antigo, servirá como introdução para os tipos de problemas encontrados no projeto de um circuito útil.



a solução da equação diferencial que descreve o circuito e uma para apresentar as três formas distintas que a solução pode tomar. Após apresentarmos essas três formas, mostramos que as mesmas formas se aplicam à resposta a um degrau de um circuito RLC em paralelo, bem como às respostas natural e a um degrau de circuitos RLC em série.

8.1 Introdução à resposta natural de um circuito *RLC* em paralelo

A primeira etapa para obter a resposta natural do circuito mostrado na Figura 8.1 é obter a equação diferencial que a tensão v deve satisfazer. Preferimos determinar a tensão em primeiro lugar, porque ela é a mesma para cada componente. Depois disso, pode-se determinar uma corrente de ramo usando a relação corrente-tensão para o componente do ramo. Podemos obter facilmente a equação diferencial para a tensão somando as correntes que saem do nó superior, no qual cada corrente é expressa como uma função da tensão desconhecida v:

$$\frac{v}{R} + \frac{1}{L}\int_0^t v\,d\tau + I_0 + C\frac{dv}{dt} = 0. \tag{8.1}$$

Eliminamos a integral da Equação 8.1 diferenciando uma vez em relação a t e, como I_0 é uma constante, obtemos

$$\frac{1}{R}\frac{dv}{dt} + \frac{v}{L} + C\frac{d^2v}{dt^2} = 0. \tag{8.2}$$

Agora, dividimos todos os termos da Equação 8.2 pela capacitância C e arranjamos as derivadas em ordem decrescente:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = 0. \tag{8.3}$$

A comparação da Equação 8.3 com as equações diferenciais determinadas no Capítulo 7 revela que a diferença entre elas é a presença do termo que envolve a derivada de segunda ordem. A Equação 8.3 é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, com coeficientes constantes. Como os circuitos neste capítulo contêm indutores, bem como capacitores, a equação diferencial que descreve seus comportamentos é de segunda ordem. Assim, costumamos denominar esses circuitos de *circuitos de segunda ordem*.

Solução geral da equação diferencial de segunda ordem

Não podemos resolver a Equação 8.3 por separação de variáveis como fizemos com as equações de primeira ordem no Capítulo 7. A abordagem clássica para resolver a Equação 8.3 é admitir que a solução seja da forma exponencial, isto é, admitir que a tensão seja da forma

$$v = Ae^{st}, \tag{8.4}$$

onde A e s são constantes desconhecidas.

Antes de mostrar como essa premissa leva à solução da Equação 8.3, precisamos mostrar que ela é racional. O argumento mais forte que podemos propor em favor da Equação 8.4 é observar, pela Equação 8.3, que a derivada de segunda ordem da solução, mais uma constante vezes a derivada de primeira ordem, mais uma constante vezes a própria solução deve ser zero para todos os valores de t. Isso só pode ocorrer se derivadas de ordens mais altas da solução tiverem a mesma forma da solução. A função exponencial satisfaz esse critério. Um segundo argumento em favor da Equação 8.4 é que as soluções de todas as equações de primeira ordem que derivamos no Capítulo 7 eram exponenciais. Parece razoável admitir que a solução da equação de segunda ordem também envolva a função exponencial.

Se a Equação 8.4 for uma solução da Equação 8.3, ela deve satisfazer a Equação 8.3 para todos os valores de t. Substituir a Equação 8.4 na Equação 8.3 gera a expressão

$$As^2e^{st} + \frac{As}{RC}e^{st} + \frac{Ae^{st}}{LC} = 0,$$

ou

$$Ae^{st}\left(s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}\right) = 0, \tag{8.5}$$

que só pode ser satisfeita para todos os valores de t se A for zero ou o termo entre parênteses for zero porque $e^{st} \neq 0$ para valores finitos de st. Não podemos usar $A = 0$ como uma solução geral porque isso implica que a tensão seja zero o tempo todo — uma impossibilidade física se alguma energia estiver armazenada no indutor ou no capacitor. Assim, para que a Equação 8.4 seja uma solução da Equação 8.3, o termo entre parênteses da Equação 8.5 deve ser zero, ou

$$s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC} = 0. \tag{8.6}$$

(Equação característica, circuito *RLC* em paralelo)

A Equação 8.6 é denominada *equação característica* da equação diferencial porque as raízes dessa equação quadrática determinam o caráter matemático de $v(t)$.

As duas raízes da Equação 8.6 são

$$s_1 = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}, \tag{8.7}$$

$$s_2 = -\frac{1}{2RC} - \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}. \tag{8.8}$$

Se qualquer das raízes for substituída na Equação 8.4, a solução admitida satisfaz a equação diferencial dada, isto é, a Equação 8.3. Observe, pela Equação 8.5, que esse resultado se mantém independentemente do valor de A. Assim, ambas,

$$v = A_1e^{s_1t}$$

e

$$v = A_2e^{s_2t}$$

satisfazem a Equação 8.3. Chamando essas duas soluções v_1 e v_2, respectivamente, podemos mostrar que a soma delas também é uma solução. Especificamente, se fizermos

$$v = v_1 + v_2 = A_1e^{s_1t} + A_2e^{s_2t}, \tag{8.9}$$

então

$$\frac{dv}{dt} = A_1s_1e^{s_1t} + A_2s_2e^{s_2t}, \tag{8.10}$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} = A_1s_1^2e^{s_1t} + A_2s_2^2e^{s_2t}. \tag{8.11}$$

Substituindo as equações 8.9–8.11 na Equação 8.3, temos

$$A_1e^{s_1t}\left(s_1^2 + \frac{1}{RC}s_1 + \frac{1}{LC}\right) + A_2e^{s_2t}\left(s_2^2 + \frac{1}{RC}s_2 + \frac{1}{LC}\right) = 0. \tag{8.12}$$

No entanto, cada termo entre parênteses é zero porque, por definição, s_1 e s_2 são raízes da equação característica. Daí, a resposta natural do circuito *RLC* em paralelo mostrado na Figura 8.1 é da forma

$$v = A_1e^{s_1t} + A_2e^{s_2t}. \tag{8.13}$$

A Equação 8.13 é uma repetição da premissa adotada para a Equação 8.9. Mostramos que v_1 é uma solução, v_2 é uma solução e $v_1 + v_2$ é uma solução. Assim, a solução geral da Equação 8.3 tem a forma dada na Equação 8.13. As raízes da equação característica (s_1 e s_2) são determinadas pelos parâmetros de circuito R, L e C. As condições iniciais determinam os valores das constantes A_1 e A_2. Observe que a forma da Equação 8.13 deve ser modificada se as duas raízes s_1 e s_2 forem iguais. Discutiremos essa modificação quando abordarmos a resposta criticamente amortecida na Seção 8.2.

O comportamento de $v(t)$ depende dos valores de s_1 e s_2. Assim, a primeira etapa para se determinar a resposta natural é determinar as raízes da equação característica. Voltemos às equações 8.7 e 8.8 e as escrevamos novamente usando uma notação de ampla utilização na literatura:

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}, \tag{8.14}$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}, \tag{8.15}$$

onde

$$\alpha = \frac{1}{2RC}, \tag{8.16}$$

(Freqüência de Neper, circuito *RLC* em paralelo)

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{8.17}$$

(Freqüência angular de ressonância, circuito *RLC* em paralelo)

Esses resultados estão resumidos na Tabela 8.1.

O expoente de e deve ser adimensional e, portanto, ambas, s_1 e s_2 (e, por conseqüência, α e ω_0), devem ter a dimensão do recíproco do tempo, ou freqüência. Para distinguir entre as freqüências s_1, s_2, α e ω_0, usamos a seguinte terminologia: s_1 e s_2 são denominadas freqüências complexas, α é denominada freqüência de Neper e ω_0 é a freqüência angular de ressonância. O significado dessa terminologia se tornará mais claro à medida que formos progredindo pelos capítulos restantes deste livro. Todas essas freqüências têm a dimensão de freqüência angular. A freqüência complexa, a freqüência de Neper e a freqüência angular de ressonância têm como unidade o radiano por segundo (rad/s). A natureza das raízes s_1 e s_2 depende dos valores de α e ω_0. Há três resultados possíveis. Primeiro, se $\omega_0^2 < \alpha^2$, ambas as raízes serão reais e distintas. Por razões que discutiremos mais adiante, diz-se que, nesse caso, a resposta de tensão é *superamortecida*. Em segundo lugar, se $\omega_0^2 > \alpha^2$, ambas, s_1 e s_2, serão complexas e, além disso, serão conjugadas uma da outra. Nessa situação, diz-se que a resposta de tensão é *subamortecida*. O terceiro resultado possível é se $\omega_0^2 = \alpha^2$. Nesse caso, s_1 e s_2 serão reais e iguais e diz-se que a resposta de tensão é *criticamente amortecida*. Como veremos, o amortecimento afeta o modo como a resposta de tensão atinge seu valor final (ou de regime permanente). Discutiremos cada caso separadamente na Seção 8.2.

O Exemplo 8.1 ilustra como os valores numéricos de s_1 e s_2 são determinados a partir dos valores de R, L e C.

TABELA 8.1 Parâmetros da resposta natural do circuito *RLC* em paralelo

Parâmetro	Terminologia	Valor em resposta natural
s_1, s_2	Raízes características	$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ $s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$
α	Freqüência de Neper	$\alpha = \dfrac{1}{2RC}$
ω_0	Freqüência angular de ressonância	$\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

Exemplo 8.1 Determinação das raízes da equação característica de um circuito *RLC* em paralelo

a) Determine as raízes da equação característica que descreve o comportamento transitório da tensão mostrado na Figura 8.5 se $R = 200\ \Omega$, $L = 50$ mH e $C = 0{,}2\ \mu$F.

b) A resposta será superamortecida, subamortecida ou criticamente amortecida?

c) Repita (a) e (b) para $R = 312{,}5\ \Omega$.

d) Qual é o valor de R que faz com que a resposta seja criticamente amortecida?

Solução

a) Para os valores dados de R, L e C,

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{10^6}{(400)(0{,}2)} = 1{,}25 \times 10^4 \text{ rad/s},$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} = \frac{(10^3)(10^6)}{(50)(0{,}2)} = 10^8 \text{ rad}^2/\text{s}^2$$

Pelas equações 8.14 e 8.15,

$$s_1 = -1{,}25 \times 10^4 + \sqrt{1{,}5625 \times 10^8 - 10^8}$$
$$= -12.500 + 7.500 = -5.000 \text{ rad/s},$$
$$s_2 = -1{,}25 \times 10^4 - \sqrt{1{,}5625 \times 10^8 - 10^8}$$
$$= -12.500 - 7.500 = -20.000 \text{ rad/s}.$$

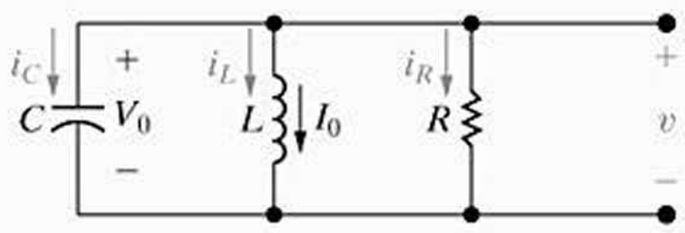


Figura 8.5 ▲ Circuito usado para ilustrar a resposta natural de um circuito *RLC* em paralelo.

b) A resposta é superamortecida porque $\omega_0^2 < \alpha^2$.

c) Para $R = 312{,}5\ \Omega$,

$$\alpha = \frac{10^6}{(625)(0{,}2)} = 8.000 \text{ rad/s},$$
$$\alpha^2 = 64 \times 10^6 = 0{,}64 \times 10^8 \text{ rad}^2/\text{s}^2.$$

Como ω_0^2 permanece em 10^8 rad^2/s^2,

$$s_1 = -8.000 + \text{j}6.000 \text{ rad/s},$$

$$s_2 = -8.000 - \text{j}6.000 \text{ rad/s},$$

(Em engenharia elétrica, o número imaginário $\sqrt{-1}$ é representado pela letra j, porque a letra i representa corrente.)

Nesse caso, a resposta é subamortecida, visto que $\omega_0^2 > \alpha^2$.

d) Para amortecimento crítico, $\alpha^2 = \omega_0^2$, e então

$$\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 = \frac{1}{LC} = 10^8,$$

ou

$$\frac{1}{2RC} = 10^4,$$

e

$$R = \frac{10^6}{(2 \times 10^4)(0{,}2)} = 250\ \Omega.$$

✔ PROBLEMA PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 1 — Saber determinar a resposta natural e a resposta a um degrau de circuitos *RLC* em paralelo

8.1 A resistência e a indutância do circuito na Figura 8.5 são 100 Ω e 20 mH, respectivamente.

a) Determine o valor de C que torna a resposta de tensão criticamente amortecida.
b) Se C for ajustada para dar uma freqüência de Neper de 5 krad/s, determine o valor de C e as raízes da equação característica.
c) Se C for ajustada para dar uma freqüência de ressonância de 20 krad/s, determine o valor de C e as raízes da equação característica.

Resposta: (a)500 nF;

(b) $C = 1\ \mu$F,
$s_1 = -5.000 + j5.000$ rad/s,
$s_2 = -5.000 - j5.000$ rad/s;

(c) $C = 125$ nF,
$s_1 = -5.359$ rad/s,
$s_2 = -74.641$ rad/s.

NOTA: Tente resolver também o Problema 8.1, apresentado no final deste capítulo.

8.2 Formas de resposta natural de um circuito *RLC* em paralelo

Até aqui vimos que o comportamento de um circuito *RLC* de segunda ordem depende dos valores de s_1 e s_2 que, por sua vez, dependem dos parâmetros de circuito R, L e C. Por conseguinte, a primeira etapa para determinar a resposta natural é calcular esses valores e determinar se a resposta é superamortecida, subamortecida ou criticamente amortecida.

Para completar a descrição da resposta natural é necessário determinar dois coeficientes desconhecidos, tais como A_1 e A_2 na Equação 8.13. Para isso, o método usado é compatibilizar a solução para a resposta natural e as condições iniciais impostas pelo circuito, que são o valor inicial da corrente (ou tensão) e o valor inicial da derivada de primeira ordem da corrente (ou tensão). Observe que essas mesmas condições iniciais mais o valor final da variável, também serão necessários para determinar a resposta a um degrau de um circuito de segunda ordem.

Nesta seção, analisaremos a forma da resposta natural para cada um dos três tipos de amortecimento, começando com a resposta superamortecida. Como veremos, as equações das respostas, bem como as equações para o cálculo dos coeficientes desconhecidos, são ligeiramente diferentes para cada uma das três configurações de amortecimento. É por isso que queremos determinar, logo no início do problema, se a resposta é superamortecida, subamortecida ou criticamente amortecida.

A resposta superamortecida

Quando as raízes da equação característica são reais e distintas, diz-se que a resposta de tensão de um circuito *RLC* em paralelo é superamortecida. A solução para a tensão tem a forma

$$v = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}, \tag{8.18}$$

(Resposta natural de tensão — circuito *RLC* em paralelo superamortecido)

onde s_1 e s_2 são as raízes da equação característica. As constantes A_1 e A_2 são determinadas pelas condições iniciais, especificamente pelos valores de $v(0^+)$ e $dv(0^+)/dt$ que, por sua vez, são determinados pela tensão inicial no capacitor, V_0, e pela corrente inicial no indutor, I_0.

A seguir, mostramos como usar a tensão inicial no capacitor e a corrente inicial no indutor para determinar A_1 e A_2. Em primeiro lugar, observamos pela Equação 8.18 que

$$v(0^+) = A_1 + A_2, \tag{8.19}$$

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = s_1 A_1 + s_2 A_2. \tag{8.20}$$

Se conhecermos s_1 e s_2, a tarefa de determinar A_1 e A_2 se reduz a determinar $v(0^+)$ e $dv(0^+)/dt$. O valor de $v(0^+)$ é a tensão inicial no capacitor, V_0. Obtemos o valor inicial de dv/dt determinando, em primeiro lugar, a corrente no ramo do capacitor em $t = 0^+$. Então,

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{i_C(0^+)}{C}. \tag{8.21}$$

Usamos a lei das correntes de Kirchhoff para determinar a corrente inicial no ramo do capacitor. Sabemos que a soma das três correntes de ramo em $t = 0^+$ deve ser zero. A corrente no ramo resistivo em $t = 0^+$ é a tensão inicial V_0 dividida pela resistência, e a corrente no ramo indutivo é I_0. Usando o sistema de referência apresentado na Figura 8.5, obtemos

$$i_C(0^+) = \frac{-V_0}{R} - I_0. \tag{8.22}$$

Depois de determinar o valor numérico de $i_C(0^+)$, usamos a Equação 8.21 para determinar o valor inicial de dv/dt.

Podemos resumir o processo para determinar a resposta superamortecida da seguinte forma:

1. Determine as raízes da equação característica, s_1 e s_2, usando os valores de R, L e C.
2. Determine $v(0^+)$ e $dv(0^+)/dt$ usando a análise de circuitos.
3. Determine os valores de A_1 e A_2 resolvendo as equações 8.23 e 8.24 simultaneamente:

$$v(0^+) = A_1 + A_2, \tag{8.23}$$

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{i_C(0^+)}{C} = s_1 A_1 + s_2 A_2. \tag{8.24}$$

4. Substitua os valores de s_1 e s_2, A_1 e A_2 na Equação 8.18 para determinar a expressão para $v(t)$ para $t \geq 0$.

Os exemplos 8.2 e 8.3 ilustram como determinar a resposta superamortecida de um circuito *RLC* em paralelo.

Exemplo 8.2 Determinação da resposta natural superamortecida de um circuito *RLC* em paralelo

Para o circuito na Figura 8.6, $v(0^+) = 12$ V e $i_L(0^+) = 30$ mA.

a) Determine a corrente inicial em cada ramo do circuito.
b) Determine o valor inicial de dv/dt.
c) Determine a expressão para $v(t)$.
d) Faça um gráfico de $v(t)$ no intervalo $0 \leq t \leq 250\ \mu s$.

Solução

a) Como o indutor impede uma variação instantânea em sua corrente, o valor inicial da corrente no indutor é 30 mA:

$$i_L(0^-) = i_L(0) = i_L(0^+) = 30\text{ mA}.$$

O capacitor mantém a tensão inicial nos elementos em paralelo em 12 V. Assim, a corrente inicial no ramo resistivo, $i_R(0^+)$, é 12/200 ou 60 mA. Pela lei das correntes de Kirchhoff, a soma das correntes que saem do nó superior é igual a zero em todo instante. Daí,

$$\begin{aligned} i_C(0^+) &= -i_L(0^+) - i_R(0^+) \\ &= -90\text{ mA}. \end{aligned}$$

Observe que, se admitíssemos que a corrente no indutor e a tensão no capacitor atingem seus valores cc no instante em que a energia começa a ser fornecida, $i_C(0^-) = 0$. Em outras palavras, há uma variação instantânea na corrente do capacitor em $t = 0$.

b) Como $i_C = C(dv/dt)$,

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{-90 \times 10^{-3}}{0{,}2 \times 10^{-6}} = -450\text{ kV/s}.$$

c) As raízes da equação característica são determinadas pelos valores de R, L e C. Para os valores especificados e pelas equações 8.14 e 8.15, juntamente com 8.16 e 8.17,

$$\begin{aligned} s_1 &= -1{,}25 \times 10^4 + \sqrt{1{,}5625 \times 10^8 - 10^8} \\ &= -12.500 + 7500 = -5000\text{ rad/s}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_2 &= -1{,}25 \times 10^4 - \sqrt{1{,}5625 \times 10^8 - 10^8} \\ &= -12.500 - 7500 = -20.000\text{ rad/s}. \end{aligned}$$

Como as raízes são reais e distintas, sabemos que a resposta é superamortecida e, portanto, tem a forma da Equação 8.18. Determinamos os coeficientes A_1 e A_2 pelas equações 8.23 e 8.24. Já determinamos s_1, s_2, $v(0^+)$ e $dv(0^+)/dt$, assim,

$$12 = A_1 + A_2,$$

$$-450 \times 10^3 = -5.000A_1 - 20.000A_2.$$

Resolvemos as duas equações para A_1 e A_2 para obter $A_1 = -14$ V e $A_2 = 26$ V. Substituindo esses valores na Equação 8.18 temos a resposta de tensão superamortecida:

$$v(t) = (-14e^{-5.000t} + 26e^{-20.000t})\ V,\ t \geq 0.$$

Para verificar esses cálculos, observamos que, de acordo com a solução, $v(0) = 12$ V e $dv(0^+)/dt = -450.000$ V/s.

d) A Figura 8.7 mostra o gráfico de $v(t)$ em relação a t no intervalo $0 \geq t \geq 250\ \mu s$.

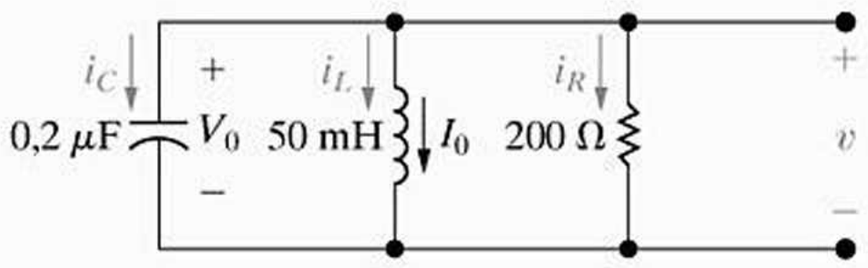


Figura 8.6 ▲ Circuito para o Exemplo 8.2.

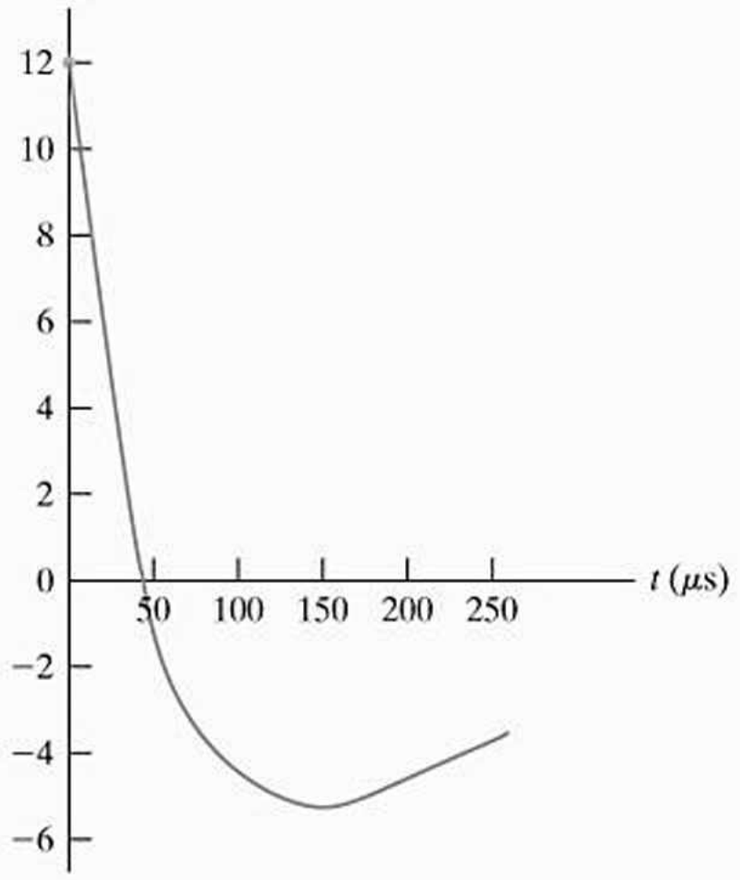


Figura 8.7 ▲ Resposta de tensão para o Exemplo 8.2.

Exemplo 8.3 Cálculo das correntes de ramo na resposta natural de um circuito *RLC* em paralelo

Determine as expressões que descrevem as três correntes de ramo i_R, i_L e i_C no Exemplo 8.2 (Figura 8.6) durante o tempo em que a energia armazenada está sendo fornecida.

Solução

Sabemos qual é a tensão nos três ramos pela solução do Exemplo 8.2, ou seja,

$$v(t) = (-14e^{-5.000t} + 26e^{-20.000t})\ \text{V}, \quad t \geq 0.$$

Então, a corrente no ramo resistivo é

$$i_R(t) = \frac{v(t)}{200} = (-70e^{-5.000t} + 130e^{-20.000t})\ \text{mA}, \quad t \geq 0.$$

Há dois modos para determinar a corrente no ramo indutivo. Um deles é usando a relação integral que existe

entre a corrente e a tensão nos terminais de um indutor:

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v_L(x)\,dx + I_0.$$

Uma segunda abordagem consiste em determinar a corrente no ramo capacitivo em primeiro lugar e, então, usar o fato de que $i_R + i_L + i_C = 0$. Vamos usar essa abordagem. A corrente no ramo capacitivo é

$$\begin{aligned} i_C(t) &= C\frac{dv}{dt} \\ &= 0{,}2 \times 10^{-6}(70.000e^{-5.000t} - 520.000e^{-20.000t}) \\ &= (14e^{-5.000t} - 104e^{-20.000t})\ \text{mA},\ t \geq 0^+. \end{aligned}$$

Observe que $i_C(0^+) = -90$ mA, o que está de acordo com o resultado no Exemplo 8.2.

Agora, obtemos a corrente no ramo indutivo pela relação

$$\begin{aligned} i_L(t) &= -i_R(t) - i_C(t) \\ &= (56e^{-5.000t} - 26e^{-20.000t})\ \text{mA}, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Deixamos para você mostrar, no Problema para avaliação 8.2, que a relação integral a que aludimos leva ao mesmo resultado. Observe que a expressão para i_L está, como deve, de acordo com a corrente inicial no indutor.

✔ PROBLEMAS PARA AVALIAÇÃO

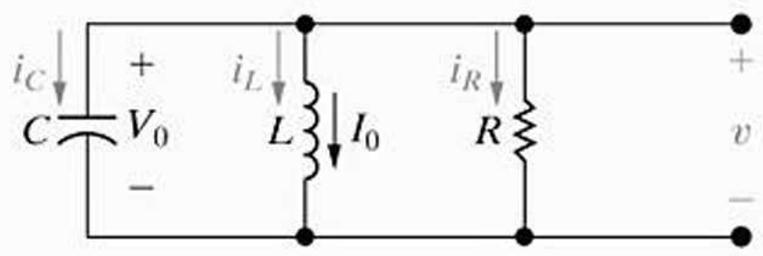
Objetivo 1 — Saber determinar a resposta natural e a resposta a um degrau de circuitos *RLC* em paralelo

8.2 Use a relação integral entre i_L e v para determinar a expressão para i_L na Figura 8.6.

Resposta:

$$i_L(t) = (56e^{-5.000t} - 26e^{-20.000t})\ \text{mA},\ t \geq 0.$$

8.3 Os valores dos elementos no circuito mostrado são $R = 2$ kΩ, $L = 250$ mH e $C = 10$ nF. A corrente inicial I_0 no indutor é -4 A e a tensão inicial no capacitor é 0 V. O sinal de saída é a tensão v. Determine (a) $i_R(0^+)$; (b) $i_C(0^+)$; (c) $dv(0^+)/dt$; (d) A_1; (e) A_2 e (f) $v(t)$ quando $t \geq 0$.



Resposta: (a) 0; (b) 4 A; (c) 4×10^8 V/s; (d) 13.333 V; (e) −13.333 V; (f) $13.333(e^{-10.000t} - e^{-40.000t})$ V.

NOTA: Tente resolver também os problemas 8.2, 8.5 e 8.19, apresentados no final deste capítulo.

A resposta subamortecida

Quando $\omega_0^2 > \alpha^2$, as raízes da equação característica são complexas e a resposta é subamortecida. Por conveniência, expressamos as raízes s_1 e s_2 como

$$\begin{aligned} s_1 &= -\alpha + \sqrt{-(\omega_0^2 - \alpha^2)} \\ &= -\alpha + j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \\ &= -\alpha + j\omega_d \qquad (8.25) \\ s_2 &= -\alpha - j\omega_d, \qquad (8.26) \end{aligned}$$

onde

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}. \qquad (8.27)$$

(Freqüência angular amortecida)

O termo ω_d é denominado *freqüência angular amortecida*. Explicaremos mais adiante a razão dessa terminologia.

A resposta de tensão subamortecida de um circuito *RLC* em paralelo é

$$v(t) = B_1e^{-\alpha t}\cos\omega_d t + B_2e^{-\alpha t}\,\text{sen}\,\omega_d t, \qquad (8.28)$$

(Resposta natural de tensão — circuitos *RLC* em paralelo subamortecidos)

que decorre da Equação 8.18. Na transição da Equação 8.18 para a Equação 8.28 usamos a identidade de Euler:

$$e^{\pm j\theta} = \cos\theta \pm j\,\text{sen}\,\theta. \qquad (8.29)$$

Assim,

$$\begin{aligned} v(t) &= A_1e^{(-\alpha+j\omega_d)t} + A_2e^{-(\alpha+j\omega_d)t} \\ &= A_1e^{-\alpha t}e^{j\omega_d t} + A_2e^{-\alpha t}e^{-j\omega_d t} \\ &= e^{-\alpha t}(A_1\cos\omega_d t + jA_1\,\text{sen}\,\omega_d t + A_2\cos\omega_d t - jA_2\,\text{sen}\,\omega_d t) \\ &= e^{-\alpha t}[(A_1 + A_2)\cos\omega_d t + j(A_1 - A_2)\,\text{sen}\,\omega_d t]. \end{aligned}$$

Nesse ponto da transição da Equação 8.18 para a Equação 8.28, substitua as constantes arbitrárias $A_1 + A_2$ e $j(A_1 - A_2)$ por novas constantes arbitrárias denotadas B_1 e B_2 para obter

$$\begin{aligned} v &= e^{-\alpha t}(B_1\cos\omega_d t + B_2\,\text{sen}\,\omega_d t) \\ &= B_1e^{-\alpha t}\cos\omega_d t + B_2e^{-\alpha t}\,\text{sen}\,\omega_d t. \end{aligned}$$

As constantes B_1 e B_2 são reais, não complexas, porque a tensão é uma função real. Não se deixe enganar pelo fato de que $B_2 = j(A_1 - A_2)$. Neste caso subamortecido, A_1 e A_2 são conjugadas complexas e, por isso, B_1 e B_2 são reais. (Veja os problemas 8.13 e 8.14.) A razão para se definir a resposta subamortecida em termos dos coeficientes B_1 e B_2 é que isso resulta em uma

expressão mais simples para a tensão v. Determinamos B_1 e B_2 pela energia inicial armazenada no circuito, do mesmo modo que determinamos A_1 e A_2 para a resposta superamortecida: avaliando v e sua derivada em $t = 0^+$. Assim como s_1 e s_2, α e ω_d são fixadas pelos parâmetros de circuito R, L e C.

Para a resposta subamortecida, as duas equações simultâneas que determinam B_1 e B_2 são

$$v(0^+) = V_0 = B_1, \tag{8.30}$$

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{i_c(0^+)}{C} = -\alpha B_1 + \omega_d B_2. \tag{8.31}$$

Vamos investigar a natureza geral da resposta subamortecida. Em primeiro lugar, as funções trigonométricas indicam que essa resposta é oscilatória; isto é, a tensão se alterna entre valores positivos e negativos. A freqüência de oscilação da tensão é fixada por ω_d. Em segundo lugar, a amplitude da oscilação diminui exponencialmente. A rapidez com que as oscilações diminuem é determinada por α. Por isso, α é também denominada *fator de amortecimento* ou *coeficiente de amortecimento*. Isso explica por que ω_d é denominada freqüência angular amortecida. Se não houver nenhum amortecimento, $\alpha = 0$ e a freqüência de oscilação será ω_0. Sempre que houver um elemento dissipativo, R, no circuito, α não é zero e a freqüência de oscilação, ω_d, é menor do que ω_0. Assim, quando α não é zero, diz-se que a freqüência de oscilação é amortecida.

O comportamento oscilatório é possível por causa dos dois tipos de elementos armazenadores de energia no circuito: o indutor e o capacitor. (Uma analogia mecânica desse circuito elétrico é uma massa suspensa por uma mola, em que a oscilação é possível porque a energia pode ser armazenada tanto na mola quanto na massa em movimento.) Falaremos mais sobre as características da resposta subamortecida depois da análise do Exemplo 8.4, que examina um circuito cuja resposta é subamortecida. Em suma, observe que o processo global para determinar a resposta subamortecida é o mesmo que para a resposta superamortecida, embora as equações da resposta e as equações simultâneas usadas para determinar as constantes sejam ligeiramente diferentes.

Exemplo 8.4 Determinação da resposta natural subamortecida de um circuito *RLC* em paralelo

No circuito mostrado na Figura 8.8, $V_0 = 0$ e $I_0 = -12{,}25$ mA.

a) Calcule as raízes da equação característica.
b) Calcule v e dv/dt em $t = 0^+$.
c) Calcule a resposta de tensão para $t \geq 0$.
d) Faça um gráfico de v (t) para o intervalo de tempo $0 \leq t \leq 11$ ms.

Solução

a) Como

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{10^6}{2(20)10^3(0{,}125)} = 200 \text{ rad/s},$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\frac{10^6}{(8)(0{,}125)}} = 10^3 \text{ rad/s},$$

temos

$$\omega_0^2 > \alpha^2.$$

Por conseqüência, a resposta é subamortecida. Agora,

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{10^6 - 4 \times 10^4} = 100\sqrt{96} = 979{,}80 \text{ rad/s}$$

$$s_1 = -\alpha + j\omega_d = -200 + j979{,}80 \text{ rad/s},$$

$$s_2 = -\alpha - j\omega_d = -200 - j979{,}80 \text{ rad/s}.$$

Para o caso subamortecido, em geral não calculamos s_1 e s_2 porque não as usamos explicitamente. Contudo, esse exemplo enfatiza por que s_1 e s_2 são conhecidas como freqüências complexas.

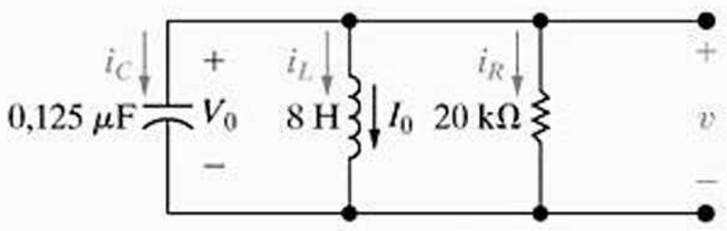


Figura 8.8 ▲ Circuito para o Exemplo 8.4.

b) Como v é a tensão nos terminais de um capacitor, temos

$$v(0) = v(0^+) = V_0 = 0.$$

Como $v(0^+) = 0$, a corrente no ramo resistivo é zero em $t = 0^+$. Daí, a corrente no capacitor em $t = 0^+$ é o negativo da corrente no indutor:

$$i_C(0^+) = -(-12{,}25) = 12{,}25 \text{ mA}.$$

Assim, o valor inicial da derivada é

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{(12{,}25)(10^{-3})}{(0{,}125)(10^{-6})} = 98.000 \text{ V/s}.$$

c) Pelas equações 8.30 e 8.31, $B_1 = 0$ e

$$B_2 = \frac{98{,}000}{\omega_d} \approx 100 \text{ V}.$$

Substituindo os valores numéricos de α, ω_d, B_1 e B_2 na expressão para $v(t)$, temos

$$v(t) = 100e^{-200t} \text{ sen } 979{,}80t \text{ V}, \quad t \geq 0.$$

d) A Figura 8.9 mostra o gráfico de $v(t)$ para os primeiros 11 ms depois que a energia armazenada é liberada. O gráfico indica claramente a natureza oscilatória amortecida da resposta subamortecida. A tensão $v(t)$ se aproxima de seu valor final, alternando-se entre valores que são maiores e menores do que o valor final. Além disso, essas flutuações em torno do valor final diminuem exponencialmente com o tempo.

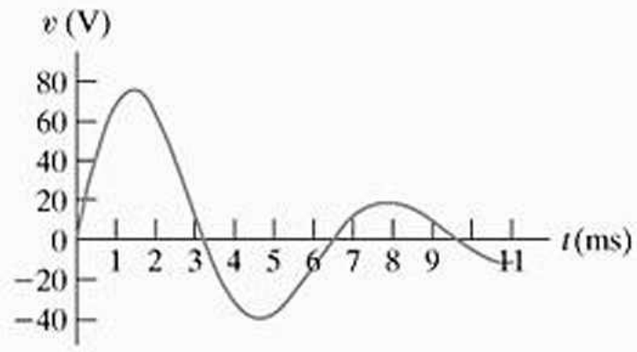


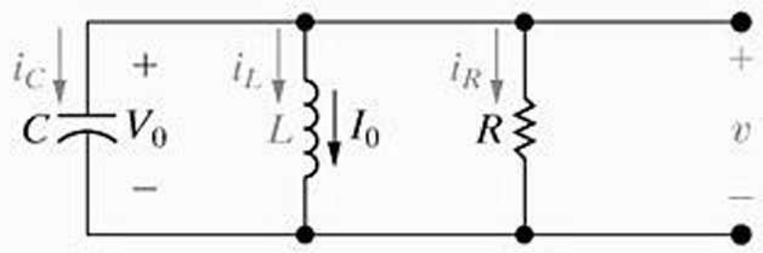
Figura 8.9 ◀ Resposta de tensão para o Exemplo 8.4.

✔ PROBLEMA PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 1 — Saber determinar a resposta natural e a resposta a um degrau de circuitos *RLC* em paralelo

8.4 Um indutor de 10 mH, um capacitor de 1 μF e um resistor variável estão ligados em paralelo no circuito mostrado. O resistor é ajustado de modo que as raízes da equação característica sejam $-8.000 \pm j6.000$ rad/s. A tensão inicial no capacitor é 10 V e a corrente inicial no indutor é 80 mA. Determine

a) R;
b) $dv(0^+)/dt$;
c) B_1 e B_2 na solução para v;
d) $i_L(t)$.



Resposta: (a) 62,5 Ω;
(b) −240.000 V/s;
(c) $B_1 = 10$ V, $B_2 = -80/3$ V;
(d) $i_L(t) = 10e^{-8.000t}[8 \cos 6.000t + (82/3) \text{ sen } 6.000t]$ mA quando $t \geq 0$.

NOTA: Tente resolver também os problemas 8.3 e 8.20, apresentados no final deste capítulo.

Características da resposta subamortecida

A resposta subamortecida tem várias características importantes. A primeira é que, à medida que as perdas dissipativas no circuito diminuem, a persistência das oscilações aumenta e a freqüência das oscilações aproxima-se de ω_0. Em outras palavras, à medida que $R \to \infty$, a dissipação no circuito da Figura 8.8 aproxima-se de zero porque $p = v^2/R$. Quando $R \to \infty$, $\alpha \to 0$, o que nos informa que $\omega_d \to \omega_0$. Quando $\alpha = 0$, a amplitude máxima da tensão permanece constante; assim, a oscilação com freqüência ω_0 é sustentada. No Exemplo 8.4, se R aumentasse até infinito, a solução para $v(t)$ se tornaria

$$v(t) = 98 \text{ sen } 1.000t \text{ V}, \quad t \geq 0.$$

Assim, nesse caso a oscilação é sustentada, a amplitude máxima da tensão é 98 V e a freqüência de oscilação é 1.000 rad/s.

Podemos agora descrever qualitativamente a diferença entre uma resposta subamortecida e uma resposta superamortecida. Em um sistema subamortecido, a resposta oscila, ou 'ricocheteia', em torno de seu valor final. Essa oscilação também é denominada *ringing*[1]. Em um sistema superamortecido, a resposta aproxima-se de seu valor final sem *ringing*, ou de um modo que às vezes é descrito como 'lerdo'. Ao especificar a resposta desejada de um sistema de segunda ordem, pode ser que você queira que o sistema alcance seu valor final no tempo mais curto possível e talvez nem esteja preocupado com pequenas oscilações em torno daquele valor final. Se for isso que você quer, então deve projetar os componentes do sistema para alcançar uma resposta subamortecida. Por outro lado, pode ser que você esteja preocupado em assegurar que a resposta não passe de seu valor final, talvez para garantir que os componentes não sejam danificados. Nesse caso, você projetaria os componentes do sistema para obter uma resposta superamortecida e teria de aceitar um crescimento relativamente lento até o valor final.

A resposta criticamente amortecida

O circuito de segunda ordem na Figura 8.8 é criticamente amortecido quando $\omega_0^2 = \alpha^2$ ou $\omega_0 = \alpha$. Quando um circuito é criticamente amortecido, a resposta está prestes a oscilar. Ademais, as duas raízes da equação característica são reais e iguais; isto é,

$$s_1 = s_2 = -\alpha = -\frac{1}{2RC}. \tag{8.32}$$

Quando isso ocorre, a solução para a tensão não assume mais a forma da Equação 8.18. Essa equação não mais se aplica se $s_1 = s_2 = -\alpha$, pois ela prevê que

$$v = (A_1 + A_2)e^{-\alpha t} = A_0 e^{-\alpha t}, \tag{8.33}$$

onde A_0 é uma constante arbitrária. A Equação 8.33 não pode satisfazer duas condições iniciais independentes (V_0, I_0) com apenas uma constante arbitrária, A_0. Lembre-se de que os parâmetros de circuito R e C determinam α.

A origem desse dilema é a premissa de que a solução toma a forma da Equação 8.18. Quando as raízes da equação característica são iguais, a solução para a equação diferencial toma uma forma diferente, a saber,

$$v(t) = D_1 te^{-\alpha t} + D_2 e^{-\alpha t}. \tag{8.34}$$

(Resposta natural de tensão — circuito *RLC* em paralelo criticamente amortecido)

Assim, no caso de uma raiz repetida, a solução envolve um termo exponencial simples mais o produto entre um termo linear e um termo exponencial. Deixamos a justificativa da Equação 8.34 para um curso introdutório de equações diferenciais. Determinar a solução significa obter D_1 e D_2, seguindo o mesmo processo dos casos superamortecido e subamortecido: usamos os valores iniciais da tensão e a derivada da tensão em relação ao tempo para escrever duas equações envolvendo D_1 e/ou D_2.

[1] *Ringing* aqui se refere ao toque de campainha, que é produzido pela oscilação de uma haste metálica entre duas peças também metálicas. Ao tocar ora em uma, ora em outra peça, a haste produz o som da campainha. N.RT.

Pela Equação 8.34, as duas equações simultâneas necessárias para determinar D_1 e D_2 são

$$v(0^+) = V_0 = D_2, \tag{8.35}$$

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{i_C(0^+)}{C} = D_1 - \alpha D_2. \tag{8.36}$$

Como podemos ver, no caso de uma resposta criticamente amortecida, a equação para $v(t)$, bem como as equações simultâneas para as constantes D_1 e D_2 são diferentes das equações para respostas superamortecidas e subamortecidas, mas a abordagem geral é a mesma. Raramente você encontrará sistemas criticamente amortecidos na prática, em grande parte porque ω_0 deve ser exatamente igual a α. Essas duas quantidades dependem de parâmetros de circuito e, em um circuito real, é muito difícil escolher valores de componentes que satisfaçam uma relação de igualdade exata.

O Exemplo 8.5 ilustra a abordagem para determinar a resposta criticamente amortecida de um circuito *RLC* em paralelo.

Um resumo dos resultados

Concluímos nossa discussão da resposta natural do circuito *RLC* em paralelo com um breve resumo dos resultados. A primeira etapa para determinar a resposta natural é calcular as raízes da equação característica. Então, você saberá imediatamente se a resposta é superamortecida, subamortecida ou criticamente amortecida.

Se as raízes forem reais e distintas ($\omega_0^2 < \alpha^2$), a resposta será superamortecida e a tensão será

$$v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t},$$

onde

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2},$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2},$$

$$\alpha = \frac{1}{2RC},$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

Exemplo 8.5 Determinação da resposta natural criticamente amortecida de um circuito *RLC* em paralelo

a) Para o circuito do Exemplo 8.4 (Figura 8.8), determine o valor de R que resulta em uma resposta de tensão criticamente amortecida.

b) Calcule $v(t)$ para $t \geq 0$.

c) Faça um gráfico de $v(t)$ para $0 \leq t \leq 7$ ms.

Solução

a) Pelo Exemplo 8.4, sabemos que $\omega_0^2 = 10^6$. Assim, para o amortecimento crítico,

$$\alpha = 10^3 = \frac{1}{2RC},$$

ou

$$R = \frac{10^6}{(2.000)(0{,}125)} = 4.000\,\Omega.$$

b) Pela solução do Exemplo 8.4, sabemos que $v(0^+) = 0$ e $dv(0^+)/dt = 98.000$ V/s. Pelas equações 8.35 e 8.36, $D_2 = 0$ e $D_1 = 98.000$ V/s. Substituindo esses valores para α, D_1 e D_2 na Equação 8.34, temos

$$v(t) = 98.000te^{-1.000t}\ \text{V}, \quad t \geq 0.$$

c) A Figura 8.10 mostra um gráfico de $v(t)$ no intervalo $0 \leq t \leq 7$ ms.

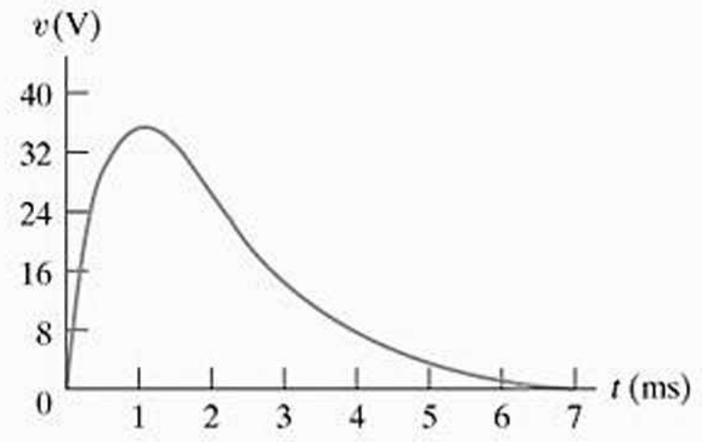


Figura 8.10 ▲ Resposta de tensão para o Exemplo 8.5.

✔ PROBLEMA PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 1 — Saber determinar a resposta natural e a resposta a um degrau de circuitos *RLC* em paralelo

8.5 O resistor no circuito do Problema para Avaliação 8.4 é ajustado para amortecimento crítico. Os valores da indutância e da capacitância são 0,4 H e 10 μF, respectivamente. A energia inicial armazenada no circuito é 25 mJ e se distribui igualmente entre o indutor e o capacitor. Determine (a) R; (b) V_0; (c) I_0; (d) D_1 e D_2 na solução para v; e (e) i_R, $t \geq 0^+$.

Resposta: (a) 100 Ω;
(b) 50 V;
(c) 250 mA;
(d) −50.000 V/s, 50 V;
(e) $i_R(t) = (-500te^{-500t} + 0{,}50e^{-500t})$ A, $t \geq 0^+$.

NOTA: Tente resolver também os problemas 8.4 e 8.21, apresentados no final deste capítulo.

Os valores de A_1 e A_2 são determinados resolvendo as seguintes equações simultâneas:

$$v(0^+) = A_1 + A_2,$$

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{i_C(0^+)}{C} = s_1 A_1 + s_2 A_2.$$

Se as raízes forem complexas e $\omega_0^2 > \alpha^2$, a resposta será subamortecida e a tensão será

$$v(t) = B_1 e^{-\alpha t} \cos \omega_d t + B_2 e^{-\alpha t} \operatorname{sen} \omega_d t,$$

onde

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}.$$

Os valores de B_1 e B_2 são determinados resolvendo as seguintes equações simultâneas:

$$v(0^+) = V_0 = B_1,$$

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{i_C(0^+)}{C} = -\alpha B_1 + \omega_d B_2.$$

Se as raízes da equação característica forem reais e iguais ($\omega_0^2 = \alpha^2$), a resposta de tensão será

$$v(t) = D_1 t e^{-\alpha t} + D_2 e^{-\alpha t},$$

onde α é como nas outras formas de solução. Para determinar valores para as constantes D_1 e D_2, resolva as seguintes equações simultâneas:

$$v(0^+) = V_0 = D_2,$$

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{i_C(0^+)}{C} = D_1 - \alpha D_2.$$

8.3 Resposta a um degrau de um circuito *RLC* em paralelo

Determinar a resposta a um degrau de um circuito *RLC* em paralelo significa determinar a tensão nos ramos paralelos ou a corrente nos ramos individuais, como resultado da aplicação repentina de uma fonte de corrente cc. Pode haver ou não energia armazenada no circuito quando a fonte de corrente é aplicada. A situação é representada pelo circuito mostrado na Figura 8.11. Para desenvolver uma abordagem geral para a determinação da resposta a um degrau de um circuito de segunda ordem, calculamos a corrente no ramo indutivo (i_L). Essa corrente é de particular interesse porque ela não se aproxima de zero à medida que t aumenta. Mais exatamente, depois de a chave ficar aberta por um longo tempo, a corrente no indutor se torna igual à corrente da fonte cc, I. Como queremos desenvolver a técnica para determinar a resposta a um degrau, admitimos que a energia inicial armazenada no circuito seja zero. Essa premissa simplifica os cálculos e não altera o processo básico envolvido. No Exemplo 8.10 veremos como a presença de energia inicialmente armazenada pode ser considerada no procedimento geral.

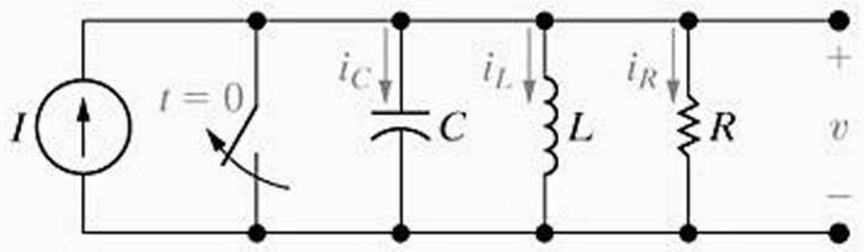


Figura 8.11 ▲ Circuito usado para descrever a resposta a um degrau de um circuito *RLC* em paralelo.

Para determinar a corrente no indutor, i_L, devemos resolver uma equação diferencial de segunda ordem com uma função forçante I, que é deduzida como explicamos a seguir. Pela lei das correntes de Kirchhoff temos

$$i_L + i_R + i_C = I,$$

ou

$$i_L + \frac{v}{R} + C\frac{dv}{dt} = I. \tag{8.37}$$

Como

$$v = L\frac{di_L}{dt}, \tag{8.38}$$

obtemos

$$\frac{dv}{dt} = L\frac{d^2 i_L}{dt^2}. \tag{8.39}$$

Substituindo as equações 8.38 e 8.39 na Equação 8.37, temos

$$i_L + \frac{L}{R}\frac{di_L}{dt} + LC\frac{d^2 i_L}{dt^2} = I. \tag{8.40}$$

Por conveniência, dividimos tudo por LC e rearranjamos os termos:

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{di_L}{dt} + \frac{i_L}{LC} = \frac{I}{LC}. \tag{8.41}$$

Comparando a Equação 8.41 com a Equação 8.3, notamos que a presença de um termo não-zero do lado direito da equação altera o processo. Antes de mostrar como resolver a Equação 8.41 diretamente, obteremos a solução indiretamente. Quando conhecermos a solução da Equação 8.41, será mais fácil explicar a abordagem direta.

A abordagem indireta

Podemos calcular i_L indiretamente, determinando em primeiro lugar a tensão v. Fazemos isso com as técnicas apresentadas na Seção 8.2, pois a equação diferencial que v deve satisfazer é idêntica à Equação 8.3. Para mostrar isso, simplesmente voltamos à Equação 8.37 e expressamos i_L em função de v; assim,

$$\frac{1}{L}\int_0^t v\,d\tau + \frac{v}{R} + C\frac{dv}{dt} = I. \tag{8.42}$$

Ao diferenciar a Equação 8.42 uma vez em relação a t, seu lado direito se anula, pois I é uma constante. Assim,

$$\frac{v}{L} + \frac{1}{R}\frac{dv}{dt} + C\frac{d^2v}{dt^2} = 0,$$

ou

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = 0. \tag{8.43}$$

Como discutimos na Seção 8.2, a solução para v depende das raízes da equação característica. Assim, as três soluções possíveis são

$$v = A_1e^{s_1t} + A_2e^{s_2t}, \tag{8.44}$$

$$v = B_1e^{-\alpha t}\cos\omega_d t + B_2e^{-\alpha t}\operatorname{sen}\omega_d t, \tag{8.45}$$

$$v = D_1te^{-\alpha t} + D_2e^{-\alpha t}. \tag{8.46}$$

Uma palavra de advertência: como há uma fonte no circuito para $t > 0$, você deve levar em conta o valor da corrente da fonte em $t = 0^+$ quando avaliar os coeficientes das equações 8.44–8.46.

Para determinar as três soluções possíveis para i_L, substituímos as equações 8.44–8.46 na Equação 8.37. Depois disso, será possível verificar que as três soluções para i_L serão

$$i_L = I + A_1'e^{s_1t} + A_2'e^{s_2t}, \tag{8.47}$$

$$i_L = I + B_1'e^{-\alpha t}\cos\omega_d t + B_2'e^{-\alpha t}\operatorname{sen}\omega_d t, \tag{8.48}$$

$$i_L = I + D_1'te^{-\alpha t} + D_2'e^{-\alpha t}. \tag{8.49}$$

onde A_1', A_2', B_1', B_2', D_1' e D_2' são constantes arbitrárias.

Em cada caso, as constantes 'com linha' podem ser determinadas indiretamente em termos das constantes arbitrárias associadas à solução da tensão. Contudo, essa abordagem é incômoda.

A abordagem direta

É muito mais fácil determinar as constantes 'com linha' diretamente em termos dos valores iniciais da função resposta. Para o circuito que estamos discutindo, determinaríamos as constantes 'com linha' a partir de $i_L(0)$e $di_L(0)/dt$.

A solução para uma equação diferencial de segunda ordem com uma função forçante constante é igual à resposta forçada mais uma função resposta cuja forma é idêntica à da resposta natural. Assim, sempre podemos escrever a solução para a resposta a um degrau na forma

$$i = I_f + \left\{\begin{array}{c}\text{função da mesma forma}\\ \text{que a resposta natural}\end{array}\right\}, \tag{8.50}$$

ou

$$v = V_f + \left\{\begin{array}{c}\text{função da mesma forma}\\ \text{que a resposta natural}\end{array}\right\}, \tag{8.51}$$

onde I_f e V_f representam o valor final da função resposta. O valor final pode ser zero como foi, por exemplo, o caso da tensão no circuito na Figura 8.8.

Os exemplos 8.6–8.10 ilustram a técnica de determinação da resposta a um degrau de um circuito *RLC* em paralelo usando a abordagem direta.

Exemplo 8.6 Determinação da resposta a um degrau superamortecida de um circuito *RLC* em paralelo

A energia inicial armazenada no circuito da Figura 8.12 é zero. Em $t = 0$, uma fonte de corrente cc de 24 mA é aplicada ao circuito. O valor do resistor é 400 Ω.

a) Qual é o valor inicial de i_L?

b) Qual é o valor inicial de di_L/dt?

c) Quais são as raízes da equação característica?

d) Qual é a expressão numérica para $i_L(t)$ quando $t \geq 0$?

Solução

a) Como não há nenhuma energia armazenada no circuito antes da aplicação da fonte de corrente cc, a corrente inicial no indutor é zero. O indutor impede uma variação instantânea na corrente que o percorre; assim, $i_L(0) = 0$ imediatamente após a abertura da chave.

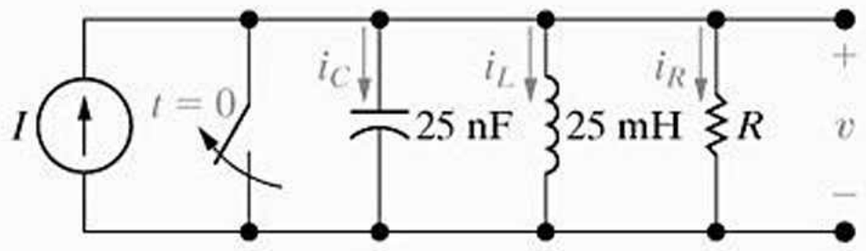


Figura 8.12 ▲ Circuito para o Exemplo 8.6.

b) A tensão inicial no capacitor é zero antes da abertura da chave; assim, será zero imediatamente depois. Agora, como $v = Ldi_L/dt$,

$$\frac{di_L}{dt}(0^+) = 0.$$

c) Pelos elementos do circuito obtemos

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} = \frac{10^{12}}{(25)(25)} = 16 \times 10^8,$$

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{10^9}{(2)(400)(25)} = 5 \times 10^4 \text{ rad/s},$$

ou

$$\alpha^2 = 25 \times 10^8.$$

Como $\omega_0^2 < \alpha^2$, as raízes da equação característica são reais e distintas. Assim,

$$s_1 = -5 \times 10^4 + 3 \times 10^4 = -20.000 \text{ rad/s},$$

$$s_2 = -5 \times 10^4 - 3 \times 10^4 = -80.000 \text{ rad/s}.$$

d) Como as raízes da equação característica são reais e distintas, a resposta será superamortecida. Assim, $i_L(t)$ toma a forma da Equação 8.47, ou seja,

$$i_L = I_f + A_1' e^{s_1 t} + A_2' e^{s_2 t}.$$

(Corrente no indutor de um circuito *RLC* em paralelo, resposta a um degrau superamortecida)

Portanto, a partir dessa solução, as duas equações simultâneas que determinam A_1' e A_2' são

$$i_L(0) = I_f + A_1' + A_2' = 0,$$

$$\frac{di_L}{dt}(0) = s_1 A_1' + s_2 A_2' = 0.$$

Calculando A_1' e A_2' temos

$$A_1' = -32 \text{ mA e } A_2' = 8 \text{ mA}.$$

A solução numérica para $i_L(t)$ é

$$i_L(t) = (24 - 32e^{-20.000t} + 8e^{-80.000t}) \text{ mA}, \; t \geq 0.$$

Exemplo 8.7 Determinação da resposta a um degrau criticamente amortecida de um circuito *RLC* em paralelo

O resistor no circuito do Exemplo 8.6 (Figura 8.12) é aumentado para 625 Ω. Determine $i_L(t)$ para $t \geq 0$.

Solução

Como L e C permanecem fixas, ω_0^2 tem o mesmo valor que tinha no Exemplo 8.6; isto é, $\omega_0^2 = 16 \times 10^8$. O aumento de R para 625 Ω diminui α para $3{,}2 \times 10^4$ rad/s. Com $\omega_0^2 > \alpha^2$, as raízes da equação característica são complexas. Daí,

$$s_1 = -3{,}2 \times 10^4 + j2{,}4 \times 10^4 \text{ rad/s},$$
$$s_2 = -3{,}2 \times 10^4 - j2{,}4 \times 10^4 \text{ rad/s}.$$

Agora, a resposta de corrente é subamortecida e é dada pela Equação 8.48:

$$i_L(t) = I_f + B_1' e^{-\alpha t} \cos \omega_d t + B_2' e^{-\alpha t} \operatorname{sen} \omega_d t.$$

(Corrente no indutor de um circuito *RLC* em paralelo, resposta a um degrau subamortecida)

Aqui, α é 32.000 rad/s, ω_d é 24.000 rad/s e I_f é 24 mA.

Como no Exemplo 8.6, B_1' e B_2' são determinadas pelas condições iniciais. Assim, as duas equações simultâneas são

$$i_L(0) = I_f + B_1' = 0,$$

$$\frac{di_L}{dt}(0) = \omega_d B_2' - \alpha B_1' = 0.$$

Então,

$$B_1' = -24 \text{ mA}$$

e

$$B_2' = -32 \text{ mA}.$$

A solução numérica para $i_L(t)$ é

$$i_L(t) = (24 - 24e^{-32.000t} \cos 24.000t$$
$$- 32e^{-32.000t} \operatorname{sen} 24.000t) \text{ mA}, \qquad t \geq 0.$$

Exemplo 8.8 Determinação da resposta a um degrau criticamente amortecida de um circuito *RLC* em paralelo

O resistor no circuito do Exemplo 8.6 (Figura 8.12) está ajustado para 500 Ω. Determine i_L para $t \geq 0$.

Solução

Sabemos que ω_0^2 permanece em 16×10^8. Com R ajustado para 500 Ω, α torna-se 4×10^4 s^{-1}, que corresponde a amortecimento crítico. Portanto, a solução para $i_L(t)$ toma a forma da Equação 8.49:

$$i_L(t) = I_f + D_1' t e^{-\alpha t} + D_2' e^{-\alpha t}.$$

(Corrente no indutor de um circuito *RLC* em paralelo, resposta a um degrau criticamente amortecida)

Novamente, D_1' e D_2' são calculadas a partir das condições iniciais, ou

$$i_L(0) = I_f + D_2' = 0,$$

$$\frac{di_L}{dt}(0) = D_1' - \alpha D_2' = 0.$$

Assim,

$$D_1' = -960.000 \text{ mA/s e } D_2' = -24 \text{ mA}.$$

A expressão numérica para $i_L(t)$ é

$$i_L(t) = (24 - 960.000te^{-40.000t} - 24e^{-40.000t}) \text{ mA}, \; t \geq 0.$$

Exemplo 8.9 Comparação entre as três formas de resposta a um degrau

a) Plote em um único gráfico, usando uma faixa de 0 a 220 μs, as respostas superamortecida, subamortecida e criticamente amortecida calculadas nos exemplos 8.6–8.8.
b) Use os gráficos de (a) para determinar o tempo que i_L leva para alcançar 90% de seu valor final.
c) Com base nos resultados obtidos em (b), qual resposta você especificaria em um projeto que oferecesse alguma vantagem em se alcançar 90% do valor final no menor tempo possível?
d) Qual resposta você especificaria em um projeto que tenha de garantir que o valor final da corrente nunca seja ultrapassado?

Solução

a) Veja a Figura 8.13.
b) Como o valor final de i_L é 24 mA, podemos ler diretamente no gráfico os tempos correspondentes a $i_L = 21{,}6$ mA. Assim, $t_{sup} = 130\ \mu$s, $t_{cri} = 97\ \mu$s e $t_{sub} = 74\ \mu$s.
c) Como a resposta subamortecida alcança 90% do valor final no tempo mais rápido, ela é o tipo da resposta desejada quando a velocidade é a especificação de projeto mais importante.
d) Pelo gráfico você pode ver que a resposta subamortecida ultrapassa o valor final da corrente, ao passo que nem a resposta criticamente amortecida, nem a resposta superamortecida apresentam correntes acima de 24 mA. Embora qualquer das duas últimas respostas atenda às especificações de projeto, é melhor usar a resposta superamortecida. Não seria prático especificar, em um projeto, valores exatos de componentes que garantam uma resposta criticamente amortecida.

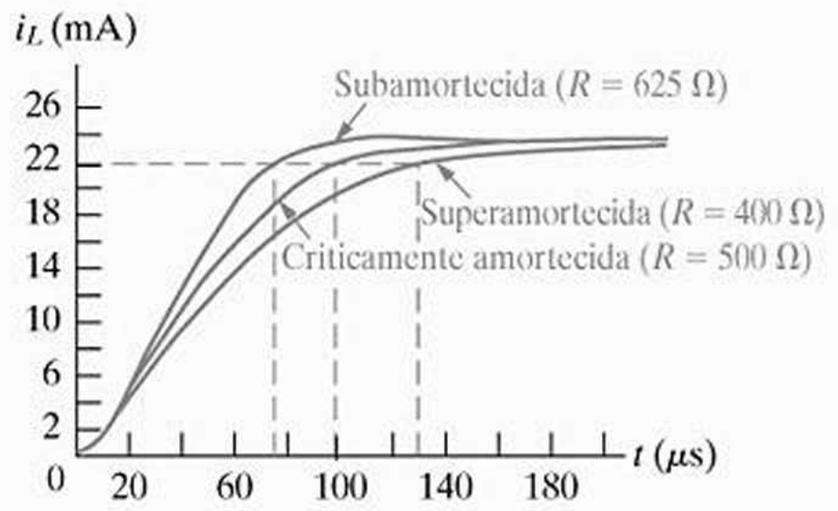


Figura 8.13 ▲ Gráficos das correntes para o Exemplo 8.9.

Exemplo 8.10 Determinação da resposta a um degrau de um circuito *RLC* em paralelo com energia inicial armazenada

Há energia armazenada no circuito do Exemplo 8.8 (Figura 8.12, com $R = 500\ \Omega$) no instante em que a fonte de corrente cc é aplicada. A corrente inicial no indutor é 29 mA e a tensão inicial no capacitor é 50 V. Determine (a) $i_L(0)$; (b) $di_L(0)/dt$; (c) $i_L(t)$ para $t \geq 0$; (d) $v(t)$ para $t \geq 0$.

Solução

a) Como não pode haver uma variação instantânea de corrente em um indutor, o valor inicial de i_L, no primeiro instante após a aplicação da fonte de corrente cc, deve ser 29 mA.
b) O capacitor mantém a tensão inicial no indutor em 50 V. Assim,

$$L\frac{di_L}{dt}(0^+) = 50,$$

$$\frac{di_L}{dt}(0^+) = \frac{50}{25} \times 10^3 = 2000\ \text{A/s}.$$

c) Pela solução do Exemplo 8.8, sabemos que a resposta de corrente é criticamente amortecida. Por isso,

$$i_L(t) = I_f + D_1' te^{-\alpha t} + D_2' e^{-\alpha t},$$

onde

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = 40.000\ \text{rad/s} \quad \text{e} \quad I_f = 24\ \text{mA}.$$

Observe que o efeito da energia armazenada não-zero está no cálculo das constantes D_1' e D_2', que obtemos das condições iniciais. Em primeiro lugar, usamos o valor inicial da corrente no indutor:

$$i_L(0) = I_f + D_2' = 29\ \text{mA},$$

do qual obtemos

$$D_2' = 29 - 24 = 5\ \text{mA}.$$

A solução para D_1' é

$$\frac{di_L}{dt}(0^+) = D_1' - \alpha D_2' = 2.000,$$

ou

$$\begin{aligned} D_1' &= 2.000 + \alpha D_2' \\ &= 2.000 + (40.000)(5 \times 10^{-3}) \\ &= 2.200\ \text{A/s} = 2{,}2 \times 10^6\ \text{mA/s}. \end{aligned}$$

Assim, a expressão numérica para $i_L(t)$ é

$$i_L(t) = (24 + 2{,}2 \times 10^6 te^{-40.000t} + 5e^{-40.000t})\ \text{mA}, \qquad t \geq 0.$$

d) Podemos obter a expressão para $v(t)$ para $t \geq 0$ usando a relação entre a tensão e a corrente em um indutor:

$$\begin{aligned} v(t) &= L\frac{di_L}{dt} \\ &= (25 \times 10^{-3})[(2{,}2 \times 10^6)(-40.000)\, te^{-40.000t} \\ &\quad + 2{,}2 \times 10^6 e^{-40.000t} \\ &\quad + (5)(-40.000)e^{-40.000t}] \times 10^{-3} \\ &= -2{,}2 \times 10^6 te^{-40.000t} + 50e^{-40.000t}\ \text{V}, \qquad t \geq 0. \end{aligned}$$

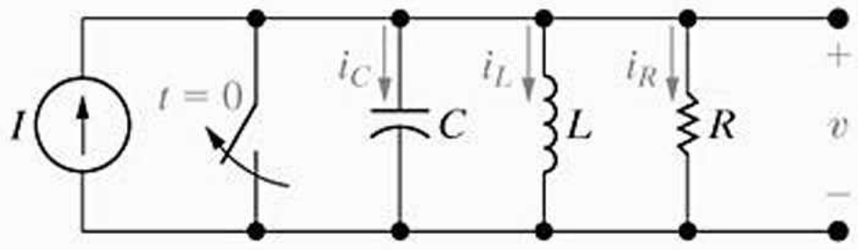
Para confirmar esse resultado, verifiquemos se a tensão inicial no indutor é 50 V:

$$v(0) = -2{,}2 \times 10^6(0)(1) + 50(1) = 50\ \text{V}.$$

✔ PROBLEMA PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 1 — Saber determinar a resposta natural e a resposta a um degrau de circuitos *RLC* em paralelo

8.6 No circuito mostrado, $R = 500\ \Omega$, $L = 0{,}64$ H, $C = 1\ \mu$F e $I = -1$ A. A queda da tensão inicial no capacitor é 40 V e a corrente inicial no indutor é 0,5 A. Determine (a) $i_R(0^+)$; (b) $i_C(0^+)$; (c) $di_L(0^+)/dt$; (d) s_1, s_2; (e) $i_L(t)$ para $t \geq 0$ e (f) $v(t)$ para $t \geq 0^+$.



Resposta: (a) 80 mA;

(b) –1,58 A;

(c) 62,5 A/s;

(d) $(-1.000 + j\,750)$ rad/s, $(-1.000 - j\,750)$ rad/s;

(e) $[-1 + e^{-1.000t}[1{,}5 \cos 750t + 2{,}0833 \operatorname{sen} 750t]$ A, para $t \geq 0$;

(f) $e^{-1.000t}(40 \cos 750t - 2.053{,}33 \operatorname{sen} 750t)$ V, para $t \geq 0^+$.

NOTA: Tente resolver também os problemas 8.25–8.27, apresentados no final deste capítulo.

8.4 Respostas natural e a um degrau de um circuito *RLC* em série

Os procedimentos para determinar a resposta natural ou a um degrau de um circuito *RLC* em série são os mesmos usados para determinar a resposta natural ou a um degrau de um circuito *RLC* em paralelo, pois ambos os circuitos são descritos por equações diferenciais que têm a mesma forma. Começamos somando as tensões ao longo do caminho fechado no circuito mostrado na Figura 8.14. Assim,

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i\,d\tau + V_0 = 0. \tag{8.52}$$

Agora, diferenciamos a Equação 8.52 uma vez em relação a t para obter

$$R\frac{di}{dt} + L\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{i}{C} = 0, \tag{8.53}$$

que podemos rearranjar como

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0\,. \tag{8.54}$$

Uma comparação entre a Equação 8.54 e a Equação 8.3 revela que elas têm a mesma forma. Portanto, para determinar a solução da Equação 8.54, seguimos o mesmo processo que nos levou à solução da Equação 8.3.

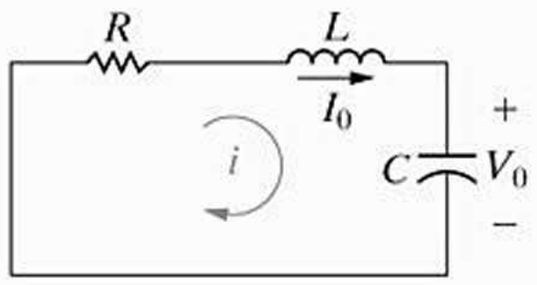


Figura 8.14 ▲ Circuito usado para ilustrar a resposta natural de um circuito *RLC* em série.

Pela Equação 8.54, a equação característica para o circuito *RLC* em série é

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0. \tag{8.55}$$

(Equação característica — circuito *RLC* em série)

As raízes da equação característica são

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}\,, \tag{8.56}$$

ou

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}\,. \tag{8.57}$$

A freqüência de Neper (α) para o circuito *RLC* em série é

$$\alpha = \frac{R}{2L}\ \text{rad/s}, \tag{8.58}$$

(Freqüência de Neper — circuito *RLC* em série)

e a expressão para a freqüência angular de ressonância é

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\ \text{rad/s}. \tag{8.59}$$

(Freqüência angular de ressonância — circuito *RLC* em série)

Observe que a freqüência de Neper do circuito *RLC* em série é diferente da do circuito *RLC* em paralelo, mas as freqüências angulares de ressonância são as mesmas.

A resposta de corrente será superamortecida, subamortecida ou criticamente amortecida conforme $\omega_0^2 < \alpha^2$; $\omega_0^2 > \alpha^2$ ou $\omega_0^2 = \alpha^2$, respectivamente. Assim, as três soluções possíveis para a corrente são as seguintes:

$$i(t) = A_1e^{s_1t} + A_2e^{s_2t}\ \text{(superamortecida)}, \tag{8.60}$$

$$i(t) = B_1e^{-\alpha t}\cos\omega_d t + B_2e^{-\alpha t}\operatorname{sen}\omega_d t\ \text{(subamortecida)}, \tag{8.61}$$

$$i(t) = D_1te^{-\alpha t} + D_2e^{-\alpha t}\ \text{(criticamente amortecida)}. \tag{8.62}$$

(Formas de resposta natural de corrente em circuitos *RLC* em série)

Depois de se obter a resposta natural de corrente, pode-se determinar a resposta natural de tensão em qualquer elemento do circuito.

Para verificar que o procedimento para se determinar a resposta a um degrau de um circuito *RLC* em série é o mesmo que para um circuito *RLC* em paralelo, mostramos que a equação diferencial que descreve a tensão no capacitor da Figura 8.15 tem a mesma forma da equação diferencial que descreve a corrente no indutor da Figura 8.11. Por conveniência, admitimos que a energia armazenada no circuito no instante em que a chave é fechada seja zero.

Aplicando a lei das tensões de Kirchhoff ao circuito mostrado na Figura 8.15, obtemos

$$V = Ri + L\frac{di}{dt} + v_C. \tag{8.63}$$

A corrente (i) está relacionada com a tensão no capacitor (v_C) pela expressão

$$i = C\frac{dv_C}{dt}, \tag{8.64}$$

da qual

$$\frac{di}{dt} = C\frac{d^2v_C}{dt^2}. \tag{8.65}$$

Substitua as equações 8.64 e 8.65 na Equação 8.63 e escreva a expressão resultante como

$$\frac{d^2v_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{LC} = \frac{V}{LC}. \tag{8.66}$$

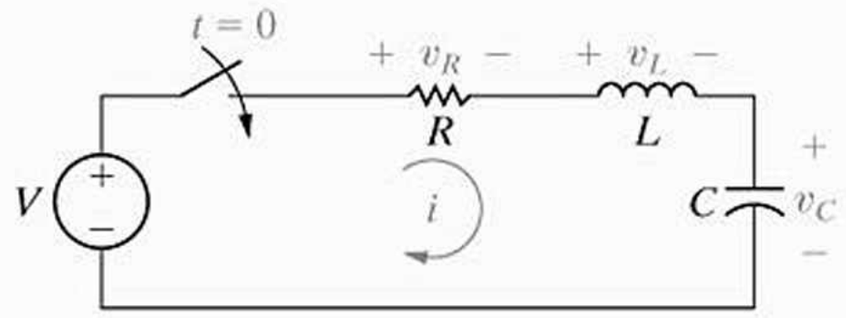


Figura 8.15 ▲ Circuito usado para ilustrar a resposta a um degrau de um circuito *RLC* em série.

A Equação 8.66 tem a mesma forma da Equação 8.41; assim, o procedimento para determinar v_C é o mesmo que para determinar i_L. As três soluções possíveis para v_C são as seguintes:

$$v_C = V_f + A_1'e^{s_1t} + A_2'e^{s_2t} \text{ (superamortecida)}, \tag{8.67}$$

$$v_C = V_f + B_1'e^{-\alpha t}\cos\omega_d t + B_2'e^{-\alpha t}\operatorname{sen}\omega_d t \text{ (subamortecida)}, \tag{8.68}$$

$$v_C = V_f + D_1'te^{-\alpha t} + D_2'e^{-\alpha t} \text{ (criticamente amortecida)}, \tag{8.69}$$

(Formas de resposta a um degrau da tensão no capacitor em circuitos *RLC* em série)

onde V_f é o valor final de v_C. Portanto, pelo circuito mostrado na Figura 8.15, o valor final de v_C é a tensão V da fonte cc.

Os exemplos 8.11 e 8.12 ilustram a mecânica para determinar a resposta natural e a resposta a um degrau de um circuito *RLC* em série.

Exemplo 8.11 Determinação da resposta natural subamortecida de um circuito *RLC* em série

O capacitor de 0,1 μF no circuito mostrado na Figura 8.16 é carregado até 100 V. Em $t = 0$, o capacitor é descarregado por meio de uma combinação em série de um indutor de 100 mH e um resistor de 560 Ω.

a) Determine $i(t)$ para $t \geq 0$.

b) Determine $v_C(t)$ para $t \geq 0$.

Solução

a) A primeira etapa para determinar $i(t)$ é calcular as raízes da equação característica. Pelos valores dos elementos dados,

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} = \frac{(10^3)(10^6)}{(100)(0{,}1)} = 10^8,$$

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{560}{2(100)} \times 10^3 = 2.800 \text{ rad/s}.$$

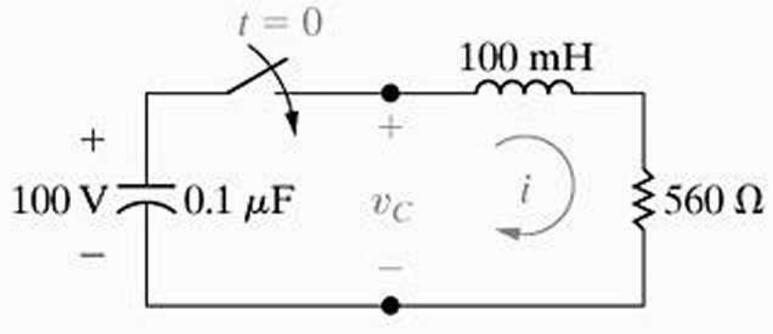


Figura 8.16 ▲ Circuito para o Exemplo 8.11.

Em seguida, comparamos ω_0^2 e α^2 e observamos que $\omega_0^2 > \alpha^2$, pois

$$\alpha^2 = 7{,}84 \times 10^6$$
$$= 0{,}0784 \times 10^8$$

Neste ponto, sabemos que a resposta é subamortecida e que a solução para i(t) é da forma

$$i(t) = B_1e^{-\alpha t}\cos\omega_d t + B_2e^{-\alpha t}\operatorname{sen}\omega_d t$$

onde α = 2.800 rad/s e ω_d = 9.600 rad/s. Os valores numéricos de B_1 e B_2 vêm das condições iniciais. A corrente no indutor é zero antes que a chave feche e é, portanto, zero imediatamente após. Assim,

$$i(0) = 0 = B_1$$

Para determinar B_2, avaliamos $di(0^+)/dt$. Pelo circuito, observamos que, como $i(0) = 0$ imediatamente após o fechamento da chave, não haverá nenhuma queda de tensão no resistor. Por isso, a tensão inicial no capacitor aparece nos terminais do indutor, o que resulta na expressão

$$L\frac{di(0^+)}{dt} = V_0,$$

ou

$$\frac{di(0^+)}{dt} = \frac{V_0}{L} = \frac{100}{100} \times 10^3 = 1.000 \text{ A/s}.$$

Como $B_1 = 0$,

$$\frac{di}{dt} = 400B_2e^{-2.800t}(24\cos 9.600t - 7\operatorname{sen} 9.600t).$$

Assim,

$$\frac{di(0^+)}{dt} = 9.600B_2,$$

$$B_2 = \frac{1.000}{9.600} \approx 0{,}1042 \text{ A}.$$

A solução para $i(t)$ é

$$i(t) = 0{,}1042e^{-2.800t} \operatorname{sen} 9.600t \text{ A}, \quad t \geq 0.$$

b) Para determinar $v_C(t)$ podemos usar qualquer das seguintes relações:

$$v_C = -\frac{1}{C}\int_0^t i\,d\tau + 100$$

ou

$$v_C = iR + L\frac{di}{dt}.$$

Qualquer que seja a expressão usada (recomendamos a segunda), o resultado é

$$v_C(t) = (100\cos 9.600t + 29{,}17 \operatorname{sen} 9.600t)e^{-2.800t} \text{ V}, \; t \geq 0.$$

Exemplo 8.12 Determinação da resposta a um degrau subamortecida de um circuito *RLC* em série

Não há energia armazenada no indutor de 100 mH nem no capacitor de 0,4 μF quando a chave no circuito mostrado na Figura 8.17 está fechada. Determine $v_C(t)$ para $t \geq 0$.

Solução

As raízes da equação característica são

$$s_1 = -\frac{280}{0{,}2} + \sqrt{\left(\frac{280}{0{,}2}\right)^2 - \frac{10^6}{(0{,}1)(0{,}4)}}$$

$$= (-1.400 + j4.800) \text{ rad/s},$$

$$s_2 = (-1.400 - j4.800) \text{ rad} > \text{s}.$$

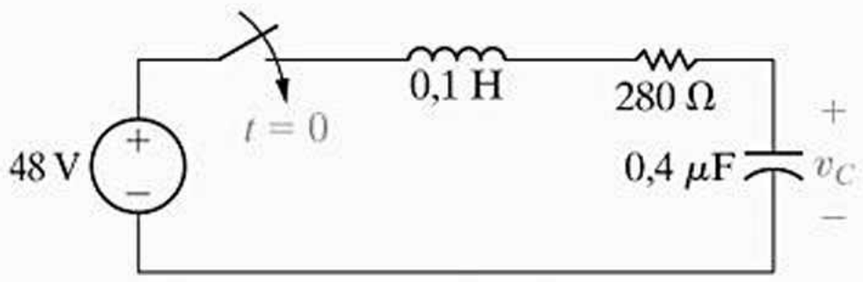


Figura 8.17 ▲ Circuito para o Exemplo 8.12.

Como as raízes são complexas, a resposta de tensão é subamortecida. Assim,

$$v_C(t) = 48 + B_1'e^{-1.400t}\cos 4.800t + B_2'e^{-1.400t}\operatorname{sen} 4.800t, \qquad t \geq 0.$$

Como inicialmente não há nenhuma energia armazenada no circuito, $v_C(0)$ e $dv_C(0^+)/dt$ são zero. Então,

$$v_C(0) = 0 = 48 + B_1'$$

$$\frac{dv_C(0^+)}{dt} = 0 = 4.800B_2' - 1.400B_1'.$$

Calculando B_1' e B_2', temos

$$B_1' = -48 \text{ V},$$

$$B_2' = -14 \text{ V}.$$

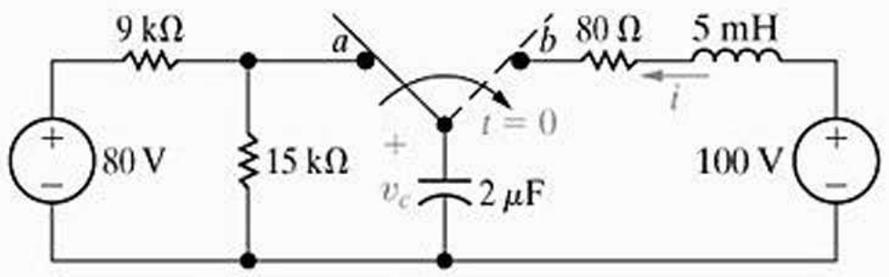
Portanto, a solução para $v_C(t)$ é

$$v_C(t) = (48 - 48e^{-1.400t}\cos 4.800t - 14e^{-1.400t}\operatorname{sen} 4.800t) \text{ V}, \qquad t \geq 0.$$

✔ PROBLEMAS PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 2 — Saber determinar a resposta natural e a um degrau de circuitos *RLC* em série

8.7 A chave no circuito mostrado esteve na posição *a* por um longo tempo. Em $t = 0$, ela passa para a posição *b*. Determine (a) $i(0^+)$; (b) $v_C(0^+)$; (c) $di(0^+)/dt$; (d) s_1, s_2; (e) $i(t)$ para $t \geq 0$.



Resposta: (a) 0;

(b) 50 V;

(c) 10.000A/s;

(d) $(-8.000 + j6.000)$ rad/s,
$(-8.000 - j6.000)$ rad/s;

(e) $(1{,}67e^{-8.000t}\operatorname{sen} 6.000t)$ A para $t \geq 0$.

8.8 Determine $v_C(t)$ para $t \geq 0$ para o circuito do Problema para Avaliação 8.7.

Resposta:

$[100 - e^{-8.000t}(50\cos 6.000t + 66{,}67\operatorname{sen} 6.000t)]$ V para $t \geq 0$.

NOTA: Tente resolver também os problemas 8.45–8.47, apresentados no final deste capítulo.

8.5 Circuitos com dois amplificadores-integradores

Um circuito que contém dois amplificadores-integradores ligados em cascata[2] também é um circuito de segunda ordem; isto é, a tensão de saída do segundo integrador está relacionada com a tensão de entrada do primeiro por uma equação diferencial de segunda ordem. Começamos nossa análise de um circuito que contém dois amplificadores em cascata com o circuito mostrado na Figura 8.18.

Admitimos que os amp ops são ideais. A tarefa é obter a equação diferencial que descreva a relação entre v_o e v_g. Começamos por somar as correntes nmo terminal inversor do primeiro integrador. Como o amp op é ideal,

$$\frac{0 - v_g}{R_1} + C_1\frac{d}{dt}(0 - v_{o1}) = 0. \tag{8.70}$$

Pela Equação 8.70,

$$\frac{dv_{o1}}{dt} = -\frac{1}{R_1C_1}v_g. \tag{8.71}$$

Agora, somamos as correntes que saem do terminal inversor do segundo amplificador–integrador:

$$\frac{0 - v_{o1}}{R_2} + C_2\frac{d}{dt}(0 - v_o) = 0, \tag{8.72}$$

ou

$$\frac{dv_o}{dt} = -\frac{1}{R_2C_2}v_{o1}. \tag{8.73}$$

Diferenciando a Equação 8.73, obtemos

$$\frac{d^2v_o}{dt^2} = -\frac{1}{R_2C_2}\frac{dv_{o1}}{dt}. \tag{8.74}$$

Determinamos a equação diferencial que comanda a relação entre v_o e v_g substituindo a Equação 8.71 na Equação 8.74:

$$\frac{d^2v_o}{dt^2} = \frac{1}{R_1C_1}\frac{1}{R_2C_2}v_g. \tag{8.75}$$

O Exemplo 8.13 ilustra a resposta a um degrau de um circuito que contém dois amplificadores–integradores em cascata.

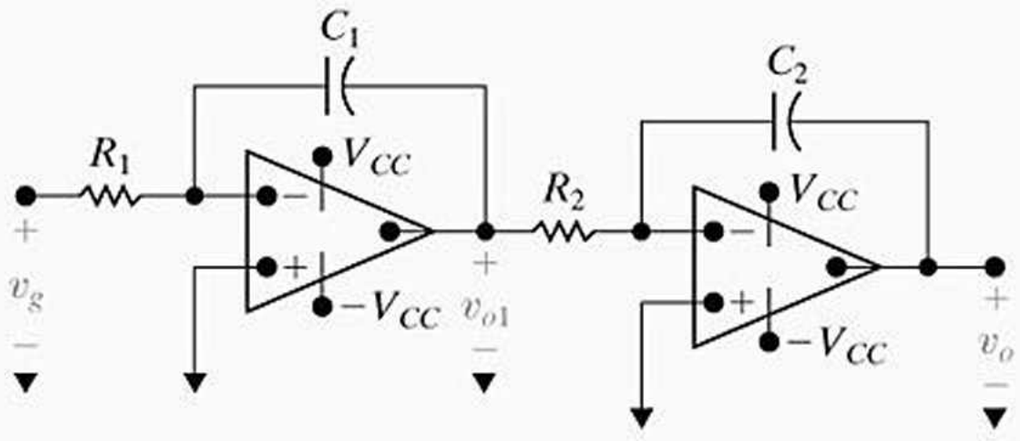


Figura 8.18 ▲ Dois amplificadores–integradores ligados em cascata.

Exemplo 8.13 Análise de dois amplificadores-integradores em cascata

Não há nenhuma energia armazenada no circuito mostrado na Figura 8.19 quando a tensão de entrada v_g varia instantaneamente de 0 para 25 mV.

a) Determine a expressão para $v_o(t)$ para $0 \leq t \leq t_{sat}$.
b) Quanto tempo leva o circuito para saturar?

Solução

a) A Figura 8.19 indica que os fatores de escala do amplificador são

$$\frac{1}{R_1C_1} = \frac{1.000}{(250)(0{,}1)} = 40,$$

$$\frac{1}{R_2C_2} = \frac{1.000}{(500)(1)} = 2.$$

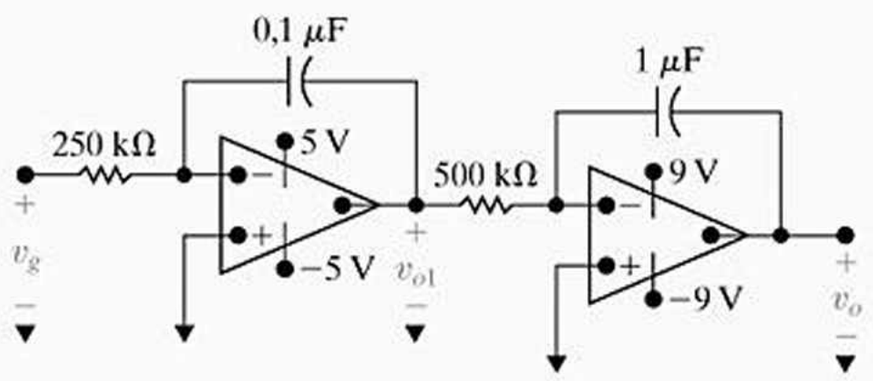


Figura 8.19 ▲ Circuito para o Exemplo 8.13.

Agora, como $v_g = 25$ mV para $t > 0$, a Equação 8.75 torna-se

$$\frac{d^2v_o}{dt^2} = (40)(2)(25 \times 10^{-3}) = 2.$$

Para calcular v_o, fazemos

$$g(t) = \frac{dv_o}{dt},$$

então

$$\frac{dg(t)}{dt} = 2 \quad \text{e} \quad dg(t) = 2dt.$$

Daí

$$\int_{g(0)}^{g(t)} dy = 2\int_0^t dx,$$

e então,

$$g(t) - g(0) = 2t.$$

Contudo,

$$g(0) = \frac{dv_o(0)}{dt} = 0,$$

[2] Em uma ligação em cascata, o sinal de saída do primeiro amplificador (v_{o1} na Figura 8.18) é o sinal de entrada do segundo amplificador.

pois a energia armazenada no circuito é inicialmente zero e os amp ops são ideais. (Veja o Problema 8.53.). Então,

$$\frac{dv_o}{dt} = 2t \quad \text{e} \quad v_o = t^2 + v_o(0).$$

Porém, $v_o(0) = 0$ e, portanto, a expressão para v_o torna-se

$$v_o = t^2,\ 0 \leq t \leq t_{sat}.$$

b) O segundo amplificador-integrador fica saturado quando v_o alcança 9 V ou em $t = 3$ s. No entanto, é possível que o primeiro amplificador-integrador fique saturado antes de $t = 3$ s. Para explorar essa possibilidade, use a Equação 8.71 para determinar dv_{o1}/dt:

$$\frac{dv_{o1}}{dt} = -40(25) \times 10^{-3} = -1\,.$$

Calculando v_{o1}, temos

$$v_{o1} = -t.$$

Assim, em $t = 3$ s, $v_{o1} = -3$ V e, como a fonte de alimentação de tensão no primeiro amplificador-integrador é ±5 V, o circuito atinge a saturação quando o segundo amplificador fica saturado. Quando um dos amp ops fica saturado, não podemos mais usar o modelo linear para prever o comportamento do circuito.

NOTA: Avalie o que entendeu desse material tentando resolver o Problema 8.58, apresentado no final deste capítulo.

Dois amplificadores-integradores com resistores de realimentação

A Figura 8.20 mostra uma variante do circuito da Figura 8.18. Lembre-se de que na Seção 7.7 dissemos que a razão pela qual o amp op em um amplificador-integrador se satura é o acúmulo de carga no capacitor de realimentação. Aqui, um resistor é colocado em paralelo com cada capacitor de realimentação (C_1 e C_2) para resolver esse problema. Derivamos novamente a equação para a tensão de saída, v_o, e determinamos o impacto causado por esses resistores de realimentação nos amplificadores-integradores do Exemplo 8.13.

Começamos o estabelecimento da equação diferencial de segunda ordem que relaciona v_{o1} com v_g somando as correntes no nó da entrada inversora do primeiro integrador:

$$\frac{0 - v_g}{R_a} + \frac{0 - v_{o1}}{R_1} + C_1\frac{d}{dt}(0 - v_{o1}) = 0\,. \quad (8.76)$$

Simplificando a Equação 8.76, temos

$$\frac{dv_{o1}}{dt} + \frac{1}{R_1C_1}v_{o1} = \frac{-v_g}{R_aC_1}\,. \quad (8.77)$$

Por conveniência, fazemos $\tau_1 = R_1C_1$ e escrevemos a Equação 8.77 como

$$\frac{dv_{o1}}{dt} + \frac{v_{o1}}{\tau_1} = \frac{-v_g}{R_aC_1}\,. \quad (8.78)$$

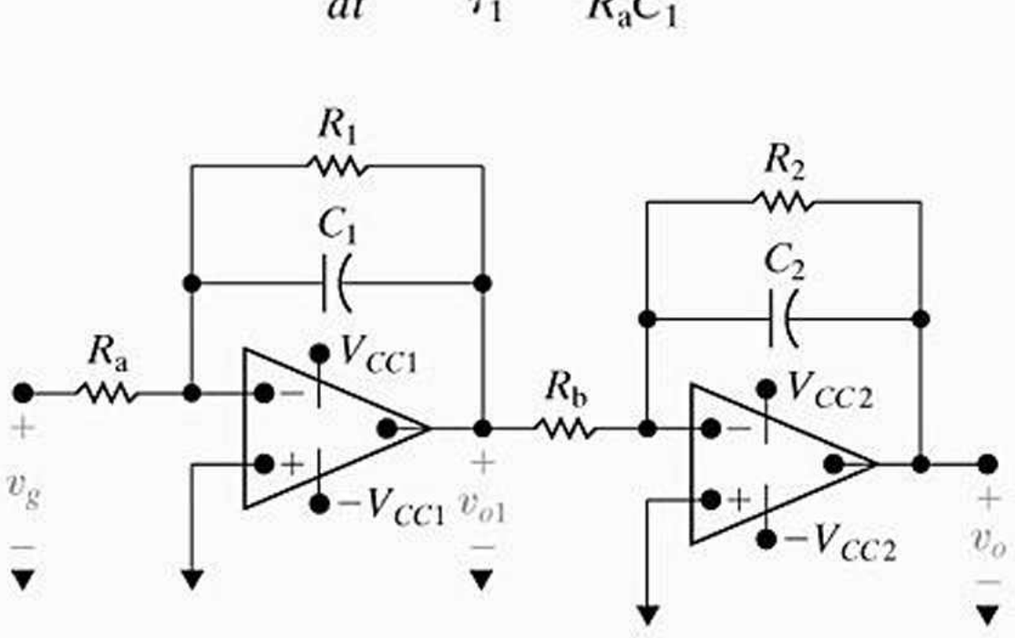


Figura 8.20 ▲ Amplificadores-integradores em cascata com resistores de realimentação.

A próxima etapa é somar as correntes no terminal inversor do segundo integrador:

$$\frac{0 - v_{o1}}{R_b} + \frac{0 - v_o}{R_2} + C_2\frac{d}{dt}(0 - v_o) = 0\,. \quad (8.79)$$

Escrevemos novamente a Equação 8.79 como

$$\frac{dv_o}{dt} + \frac{v_o}{\tau_2} = \frac{-v_{o1}}{R_bC_2}, \quad (8.80)$$

onde $\tau_2 = R_2C_2$. Diferenciando a Equação 8.80 obtemos

$$\frac{d^2v_o}{dt^2} + \frac{1}{\tau_2}\frac{dv_o}{dt} = -\frac{1}{R_bC_2}\frac{dv_{o1}}{dt}. \quad (8.81)$$

Pela Equação 8.78,

$$\frac{dv_{o1}}{dt} = \frac{-v_{o1}}{\tau_1} - \frac{v_g}{R_aC_1}, \quad (8.82)$$

e pela Equação 8.80,

$$v_{o1} = -R_bC_2\frac{dv_o}{dt} - \frac{R_bC_2}{\tau_2}v_o. \quad (8.83)$$

Usamos as equações 8.82 e 8.83 para eliminar dv_{o1}/dt da Equação 8.81 e obter a relação desejada:

$$\frac{d^2v_o}{dt^2} + \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right)\frac{dv_o}{dt} + \left(\frac{1}{\tau_1\tau_2}\right)v_o = \frac{v_g}{R_aC_1R_bC_2}\,. \quad (8.84)$$

Pela Equação 8.84, a equação característica é

$$s^2 + \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right)s + \frac{1}{\tau_1\tau_2} = 0. \quad (8.85)$$

As raízes da equação característica são reais, a saber,

$$s_1 = \frac{-1}{\tau_1}, \quad (8.86)$$

$$s_2 = \frac{-1}{\tau_2}. \quad (8.87)$$

O Exemplo 8.14 ilustra a análise da resposta a um degrau de dois amplificadores-integradores em cascata, quando os capacitores de realimentação são colocados em paralelo com resistores de realimentação.

Exemplo 8.14 Análise de dois amplificadores-integradores em cascata com resistores de realimentação

Os parâmetros para o circuito mostrado na Figura 8.20 são $R_a = 100$ kΩ, $R_1 = 500$ kΩ, $C_1 = 0{,}1$ μF, $R_b = 25$ kΩ, $R_2 = 100$ kΩ e $C_2 = 1$ μF. As tensões de alimentação para cada amp op são ±6 V. A tensão de entrada (v_g) para os amplificadores-integradores em cascata passa de 0 para 250 mV em $t = 0$. Não há nenhuma energia armazenada nos capacitores de realimentação no instante em que o sinal é aplicado.

a) Determine a equação diferencial obedecida por v_o.
b) Determine $v_o(t)$ para $t \geq 0$.
c) Determine a equação diferencial obedecida por v_{o1}.
d) Determine $v_{o1}(t)$ para $t \geq 0$.

Solução

a) Pelos valores numéricos dos parâmetros de circuito, temos $\tau_1 = R_1C_1 = 0{,}05$ s; $\tau_2 = R_2C_2 = 0{,}10$ s e $v_g/R_aC_1R_bC_2 = 1.000$ V/s². Substituindo esses valores na Equação 8.84, temos

$$\frac{d^2v_o}{dt^2} + 30\frac{dv_o}{dt} + 200v_o = 1.000$$

b) As raízes da equação característica são $s_1 = -20$ rad/s e $s_2 = -10$ rad/s. O valor final de v_o é a tensão de entrada vezes o ganho de cada estágio, pois os capacitores comportam-se como circuitos abertos quando $t \to \infty$. Portanto,

$$v_o(\infty) = (250 \times 10^{-3})\frac{(-500)}{100}\frac{(-100)}{25} = 5 \text{ V}.$$

Assim, a solução para v_o assume a forma:

$$v_o = 5 + A_1'e^{-10t} + A_2'e^{-20t}.$$

Com $v_o(0) = 0$ e $dv_o(0)/dt = 0$, os valores de A_1' e A_2' são $A_1' = -10$ V e $A_2' = 5$ V. Portanto, a solução para v_o é

$$v_o(t) = (5 - 10e^{-10t} + 5e^{-20t}) \text{ V}, \quad t \geq 0.$$

A solução pressupõe que nenhum amp op fica saturado. Já observamos que o valor final de v_o é 5 V, valor menor que 6 V; dessa forma, o segundo amp op não fica saturado. O valor final de v_{o1} é $(250 \times 10^{-3})(-500/100)$, ou −1,25 V. Assim, o primeiro amp op não fica saturado e nossas premissa e solução estão corretas.

c) Substituindo os valores numéricos dos parâmetros na Equação 8.78, obtemos a equação diferencial desejada:

$$\frac{dv_{o1}}{dt} + 20v_{o1} = -25.$$

d) Já conhecemos os valores inicial e final de v_{o_1}, juntamente com a constante de tempo τ_1. Assim, escrevemos a solução de acordo com a técnica desenvolvida na Seção 7.4:

$$v_{o1} = -1{,}25 + [0 - (-1{,}25)]e^{-20t}$$
$$= -1{,}25 + 1{,}25e^{-20t} \text{ V}, \quad t \geq 0.$$

NOTA: Avalie o que entendeu desse material tentando resolver o Problema 8.59, apresentado no final deste capítulo.

Perspectiva prática

Um circuito de ignição

Agora, vamos voltar ao sistema de ignição convencional apresentado no início deste capítulo. Um diagrama de circuito do sistema é mostrado na Figura 8.21. Considere as características do circuito que fornece a energia para inflamar a mistura combustível–ar no cilindro. Primeiro, a tensão máxima disponível na vela de ignição, v_{vt}, deve ser alta o suficiente para inflamar o combustível. Em segundo lugar, a tensão no capacitor deve estar limitada para evitar formação de arco elétrico no platinado ou em pontos do distribuidor. Em terceiro lugar, a energia armazenada no sistema, devido à corrente no enrolamento primário do autotransformador, deve ser suficiente para inflamar a mistura combustível–ar no cilindro. Lembre-se de que a energia armazenada no circuito no instante do chaveamento é proporcional ao quadrado da corrente primária, isto é, $\omega_0 = \frac{1}{2}Li^2(0)$.

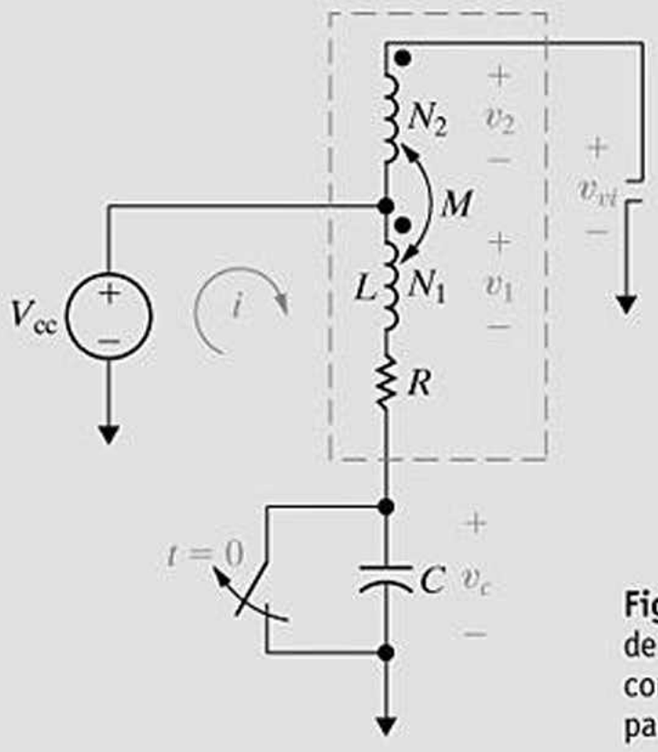


Figura 8.21 ◀ Diagrama de circuito do sistema convencional de ignição para automóveis.

EXEMPLO

a) Determine a tensão máxima na vela de ignição, admitindo os seguintes valores no circuito da Figura 8.21: V_{cc} = 12 V, R = 4 Ω, L = 3 mH, C = 0,4 μF e a = 100.
b) Qual é a distância que deve separar os contatos do platinado para evitar a formação de arco elétrico no instante em que a tensão na vela de ignição é máxima?

Solução

a) Analisamos o circuito da Figura 8.21 para determinar uma expressão para a tensão na vela de ignição, v_{vi}. Limitamos nossa análise ao estudo das tensões no circuito antes do acionamento da vela de ignição. Admitimos que a corrente no enrolamento primário no instante do chaveamento tem seu máximo valor possível, V_{cc}/R, onde R é a resistência total do circuito primário. Admitimos também que a razão entre a tensão secundária (v_2) e a tensão primária (v_1) seja igual à razão entre espiras N_2/N_1. Podemos justificar essa premissa da seguinte forma: com o circuito secundário aberto, a tensão induzida no enrolamento secundário é

$$v_2 = M\frac{di}{dt}, \tag{8.88}$$

e a tensão induzida no enrolamento primário é

$$v_1 = L\frac{di}{dt}. \tag{8.89}$$

Decorre das equações 8.88 e 8.89 que

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{M}{L}, \tag{8.90}$$

É razoável admitir que a permeância é a mesma para os fluxos ϕ_{11} e ϕ_{21} no autotransformador de núcleo de ferro; daí a Equação 8.90 se reduz a

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{N_1N_2\mathcal{P}}{N_1^2\mathcal{P}} = \frac{N_2}{N_1} = a. \tag{8.91}$$

Agora, estamos prontos para analisar as tensões no circuito de ignição. Os valores de R, L e C são tais que, quando a chave é aberta, a resposta de corrente do enrolamento primário é subamortecida. Usando as técnicas desenvolvidas na Seção 8.4 e admitindo que t = 0 no instante em que a chave é aberta, constatamos que a expressão para a corrente no enrolamento primário é

$$i = \frac{V_{cc}}{R}e^{-\alpha t}\left[\cos\omega_d t + \left(\frac{\alpha}{\omega_d}\right)\operatorname{sen}\omega_d t\right], \tag{8.92}$$

onde

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$

$$\omega_d = \sqrt{\frac{1}{LC} - \alpha^2}\,.$$

[Veja o Problema 8.62(a).] A tensão induzida no enrolamento primário do autotransformador é

$$v_1 = L\frac{di}{dt} = \frac{-V_{cc}}{\omega_d RC}e^{-\alpha t}\operatorname{sen}\omega_d t. \tag{8.93}$$

[Veja o Problema 8.62(b).] Decorre da Equação 8.91 que

$$v_2 = \frac{-aV_{cc}}{\omega_d RC}e^{-\alpha t}\operatorname{sen}\omega_d t. \tag{8.94}$$

A tensão no capacitor pode ser calculada usando a relação

$$v_c = \frac{1}{C}\int_0^t i\,dx + v_c(0) \tag{8.95}$$

ou somando as tensões ao longo da malha que contém o enrolamento primário:

$$v_c = V_{cc} - iR - L\frac{di}{dt}. \tag{8.96}$$

Em qualquer dos casos, determinamos

$$v_c = V_{cc}[1 - e^{-\alpha t}\cos\omega_d t + Ke^{-\alpha t}\operatorname{sen}\omega_d t], \tag{8.97}$$

onde

$$K = \frac{1}{\omega_d}\left(\frac{1}{RC} - \alpha\right).$$

[Veja o Problema 8.62(c).] Como podemos ver pela Figura 8.21, a tensão na vela de ignição é

$$\begin{aligned} v_{vi} &= V_{cc} + v_2 \\ &= V_{cc} - \frac{aV_{cc}}{\omega_d RC}e^{-\alpha t}\operatorname{sen}\omega_d t \\ &= V_{cc}\left[1 - \frac{a}{\omega_d RC}e^{-\alpha t}\operatorname{sen}\omega_d t\right]. \end{aligned} \tag{8.98}$$

Para determinar o máximo valor de v_{vi}, determinamos o menor valor positivo possível do tempo para o qual dv_{vi}/dt seja zero e, então, avaliamos v_{vi} nesse instante. A expressão para t_{max} é

$$t_{max} = \frac{1}{\omega_d}\tan^{-1}\left(\frac{\omega_d}{\alpha}\right). \tag{8.99}$$

(Veja o Problema 8.63.) Para os valores dos componentes apresentados no enunciado do problema, temos

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{4\times10^3}{6} = 666{,}67\ \text{rad/s},$$

e

$$\omega_d = \sqrt{\frac{10^9}{1{,}2} - (666{,}67)^2} = 28.859{,}81\ \text{rad/s}.$$

Substituindo esses valores na Equação 8.99 temos

$$t_{max} = 53{,}63\ \mu\text{s}.$$

Agora, usamos a Equação 8.98 para determinar a máxima tensão na vela de ignição, $v_{vi}(t_{max})$:

$$v_{vi}(t_{max}) = -25.975{,}69\ \text{V}.$$

b) A tensão no capacitor em t_{max} é obtida pela Equação 8.97 como

$$v_c(t_{max}) = 262{,}15 \text{ V}.$$

Como a rigidez dielétrica do ar é aproximadamente 3×10^6 V/m, esse resultado nos mostra que os contatos do platinado devem estar separados por pelo menos $262{,}15/3 \times 10^6$ ou 87,38 μm para evitar a formação de arco elétrico nos pontos em t_{max}.

No projeto e teste de sistemas de ignição é preciso considerar misturas combustível–ar que não são uniformes; o aumento progressivo da distância entre os eletrodos da vela de ignição ao longo do tempo pela erosão dos eletrodos; a relação entre tensão aplicada à vela e a velocidade do motor; o tempo que leva para a corrente primária chegar a seu valor final após a chave ter sido fechada e a manutenção necessária para assegurar uma operação confiável.

Podemos usar a análise precedente de um sistema de ignição convencional para explicar por que a ignição eletrônica substituiu a ignição mecânica nos automóveis modernos. Em primeiro lugar, a ênfase atual na economia de combustível e na redução da emissão de gases poluentes exige uma vela de ignição com uma distância maior entre os eletrodos, o que, por sua vez, exige uma tensão mais alta na vela de ignição. Essas tensões mais altas (até 40 kV) não podem ser conseguidas com a ignição mecânica. A ignição eletrônica também permite correntes iniciais mais altas no enrolamento primário do autotransformador. Isso significa que a energia inicial armazenada no sistema é maior e, por conseguinte, pode-se aceitar uma faixa mais ampla de misturas combustível–ar e condições de funcionamento. Por fim, o circuito da ignição eletrônica elimina a necessidade do platinado, o que significa a abolição dos efeitos prejudiciais da formação de arco elétrico no platinado.

NOTA: Avalie o que entendeu da "Perspectiva prática" tentando resolver os problemas 8.64 e 8.65, apresentados no final deste capítulo.

Resumo

- A *equação característica* para circuitos *RLC* em paralelo e em série tem a forma

$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0,$$

onde $\alpha = 1/2RC$ para o circuito em paralelo, $\alpha = R/2L$ para o circuito em série e $\omega_0^2 = 1/LC$ para ambos os circuitos, em paralelo e em série.

- As raízes da equação característica são

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}.$$

- A forma das respostas natural e a um degrau de circuitos *RLC* em série e em paralelo depende dos valores de α^2 e ω_0^2; tais respostas podem ser *superamortecidas*, *subamortecidas* ou *criticamente amortecidas*. Esses termos descrevem o impacto do elemento dissipador (R) sobre a resposta. A *freqüência de Neper*, α, reflete o efeito de R.
- A resposta de um circuito de segunda ordem é superamortecida, subamortecida ou criticamente amortecida, como mostra a Tabela 8.2.
- Ao determinar a *resposta natural* de um circuito de segunda ordem, em primeiro lugar determinamos se ele é superamortecido, subamortecido ou criticamente amortecido e, em seguida, resolvemos as equações adequadas, como mostra a Tabela 8.3.
- Ao determinar a *resposta a um degrau* de um circuito de segunda ordem, aplicamos as equações adequadas dependendo do amortecimento, como mostra a Tabela 8.4.
- Para cada uma das três formas de resposta, os coeficientes desconhecidos (isto é, A, B e D) são obtidos avaliando o circuito para determinar o valor inicial da resposta, $x(0)$, e o valor inicial da derivada de primeira ordem da resposta, $dx(0)/dt$.
- Quando dois amplificadores-integradores com amp ops ideais são ligados em cascata, a tensão de saída do segundo integrador está relacionada com a tensão de entrada do primeiro por uma equação diferencial ordinária de segunda ordem. Assim, as técnicas desenvolvidas neste capítulo podem ser usadas para analisar o comportamento de um integrador em cascata.
- Podemos superar a limitação de um amplificador-integrador simples — a saturação do amp op devida ao acúmulo de carga no capacitor de realimentação — colocando um resistor em paralelo com o capacitor de realimentação.

TABELA 8.2 A resposta de um circuito de segunda ordem é superamortecida, subamortecida ou criticamente amortecida

O circuito é	Quando	Natureza qualitativa da resposta
Superamortecido	$\alpha^2 > \omega_0^2$	A tensão ou corrente se aproxima de seu valor final sem oscilação
Subamortecido	$\alpha^2 < \omega_0^2$	A tensão ou corrente oscila em torno de seu valor final
Criticamente amortecido	$\alpha^2 = \omega_0^2$	A tensão ou corrente está prestes a oscilar em torno de seu valor final

TABELA 8.3 Ao determinar a resposta natural de um circuito de segunda ordem, em primeiro lugar determinamos se ele é superamortecido, subamortecido ou criticamente amortecido e, então, resolvemos as equações adequadas

Amortecimento	Equações de resposta natural	Coeficiente das equações
Superamortecido	$x(t) = A_1 e^{s1t} + A_2 e^{s2t}$	$x(0) = A_1 + A_2$; $dx/dt(0) = A_1 s_1 + A_2 s_2$
Subamortecido	$x(t) = (B_1 \cos \omega_d t + B_2 \operatorname{sen} \omega_d t)e^{-\alpha t}$	$x(0) = B_1$; $dx/dt(0) = -\alpha B_1 + \omega_d B_2$, onde $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$
Criticamente amortecido	$x(t) = (D_1 t + D_2)e^{-\alpha t}$	$x(0) = D_2$, $dx/dt(0) = D_1 - \alpha D_2$

TABELA 8.4 Ao determinar a resposta a um degrau de um circuito de segunda ordem, aplicamos as equações adequadas dependendo do amortecimento

Amortecimento	Equações de resposta a um degrau[a]	Coeficientes de equações
Superamortecido	$x(t) = X_f + A_1' e^{s1t} + A_2' e^{s2t}$	$x(0) = X_f + A_1' + A_2'$; $dx/dt(0) = A_1' s_1 + A_2' s_2$
Subamortecido	$x(t) = X_f + (B_1' \cos \omega_d t + B_2' \operatorname{sen} \omega_d t)e^{-\alpha t}$	$x(0) = X_f + B_1'$ $dx/dt(0) = -\alpha B_1' + \omega_d B_2'$
Criticamente amortecido	$x(t) = X_f + D_1' te^{-\alpha t} + D_2' e^{-\alpha t}$	$x(0) = X_f + D_2'$; $dx/dt(0) = D_1' - \alpha D_2'$

[a] onde X_f é o valor final de $x(t)$.

Problemas

Seções 8.1–8.2

8.1* A resistência, indutância e capacitância de um circuito *RLC* em paralelo são 5.000 Ω, 1,25 H e 8 nF, respectivamente.

a) Calcule as raízes da equação característica que descreve a resposta do circuito.
b) A resposta será superamortecida, subamortecida ou criticamente amortecida?
c) Qual é o valor de R que resultará em uma freqüência amortecida de 6 krads/s?
d) Quais são as raízes da equação característica para o valor de R determinado em (c)?
e) Qual é o valor de R que resultará em uma resposta criticamente amortecida?

8.2* Suponha que o capacitor, no circuito mostrado na Figura 8.1, tenha um valor de 0,05 μF e uma tensão inicial de 15 V. A corrente inicial no indutor é zero. A tensão para $t \geq 0$ é

$$v(t) = -5e^{-5.000t} + 20e^{-20.000t}\ \text{V}.$$

a) Determine os valores numéricos de R, L, α e ω_0.
b) Calcule $i_R(t)$, $i_L(t)$ e $i_C(t)$ para $t \geq 0^+$.

8.3* A resposta natural do circuito na Figura 8.1 é

$$v(t) = 125e^{-4.000t}(\cos 3.000t - 2 \operatorname{sen} 3.000t)\text{V}, \quad t \geq 0.$$

quando o capacitor é de 50 nF. Determine (a) L; (b) R; (c) V_0; (d) I_0 e (e) $i_L(t)$.

8.4* Sabe-se que a resposta para o circuito da Figura 8.1 é

$$v(t) = D_1 te^{-4.000t} + D_2 e^{-4.000t}, \quad t \geq 0.$$

A corrente inicial no indutor (I_0) é 5 mA e a tensão inicial no capacitor (V_0) é 25 V. O indutor tem uma indutância de 5 H.

a) Determine o valor de R, C, D_1 e D_2.
b) Determine $i_C(t)$ para $t \geq 0^+$.

8.5* O valor inicial da tensão v no circuito da Figura 8.1 é zero e o valor inicial da corrente no capacitor, $i_c(0^+)$, é 15 mA. Sabe-se que a expressão para a corrente no capacitor é

$$i_c(t) = A_1 e^{-160t} + A_2 e^{-40t}, \ t \geq 0^+,$$

quando R é 200 Ω. Determine

a) o valor de α, ω_0, L, C, A_1 e A_2

$$\left(\textit{Sugestão: } \frac{di_C(0)}{dt} = -\frac{di_L(0)}{dt} - \frac{di_R(0)}{dt} = \frac{v(0)}{L} - \frac{1}{R}\frac{i_C(0^+)}{C}\right)$$

b) a expressão para $v(t)$, $t \geq 0$,
c) a expressão para $i_R(t) \geq 0$,
d) a expressão para $i_L(t) \geq 0$.

8.6 PSPICE Os elementos de circuito no circuito da Figura 8.1 são $R = 2\ \text{k}\Omega$, $C = 10\ \text{nF}$ e $L = 250\ \text{mH}$. A corrente inicial no indutor é $-30\ \text{mA}$ e a tensão inicial no capacitor é 90 V.

a) Calcule a corrente inicial em cada ramo do circuito.
b) Determine $v(t)$ para $t \geq 0$.
c) Determine $i_L(t)$ para $t \geq 0$.

8.7 PSPICE A resistência no Problema 8.6 é aumentada para 2,5 kΩ. Determine a expressão para $v(t)$ para $t \geq 0$.

8.8 PSPICE A resistência no Problema 8.6 é aumentada para $12.500/3\Omega$. Determine a expressão para $v(t)$ para $t \geq 0$.

8.9 Sabe-se que a resposta natural para o circuito mostrado na Figura 8.1 é

$$v(t) = -12(e^{-200t} + e^{-1.800t})\ \text{V}, \quad t \geq 0.$$

Se $C = 18\ \mu\text{F}$, determine $i_L(0^+)$ em miliampères.

8.10 PSPICE No circuito mostrado na Figura 8.1, um indutor de 5 H tem uma derivação para um capacitor de 8 nF, o resistor R está ajustado para amortecimento crítico, $V_0 = -25$ V e $I_0 = -1$ mA.

a) Calcule o valor de R.
b) Calcule $v(t)$ para $t \geq 0$.
c) Determine $v(t)$ quando $i_C(t) = 0$.
d) Qual é a porcentagem da energia inicialmente armazenada que permanece armazenada no circuito no instante em que $i_C(t)$ é 0?

8.11 PSPICE No circuito da Figura 8.1, $R = 2\ \Omega$, $L = 0{,}4$ H, $C = 0{,}25$ F, $V_0 = 0$ V e $I_0 = -3$ A.

a) Determine $v(t)$ para $t \geq 0$.
b) Determine os primeiros três valores de t para os quais dv/dt é zero. Sejam esses valores t_1, t_2 e t_3.
c) Mostre que $t_3 - t_1 = T_d$.
d) Mostre que $t_2 - t_1 = T_d/2$.
e) Calcule $v(t_1)$, $v(t_2)$ e $v(t_3)$.
f) Faça um gráfico de $v(t)$ para $0 \leq t \leq t_2$.

8.12 PSPICE a) Determine $v(t)$ para $t \geq 0$ no circuito do Problema 8.11 se o resistor de 2 Ω for retirado do circuito.
b) Calcule a freqüência de $v(t)$ em hertz.
c) Calcule a amplitude máxima de $v(t)$ em volts.

8.13 Suponha que a resposta subamortecida no circuito da Figura 8.1 seja expressa como

$$v(t) = (A_1 + A_2)e^{-\alpha t}\cos\omega_d t + j(A_1 - A_2)e^{-\alpha t}\,\text{sen}\,\omega_d t$$

O valor inicial da corrente no indutor é I_0 e o valor inicial da tensão no capacitor é V_0. Mostre que A_2 é o complexo conjugado de A_1. (*Sugestão*: Use o mesmo processo descrito no texto para determinar A_1 e A_2.)

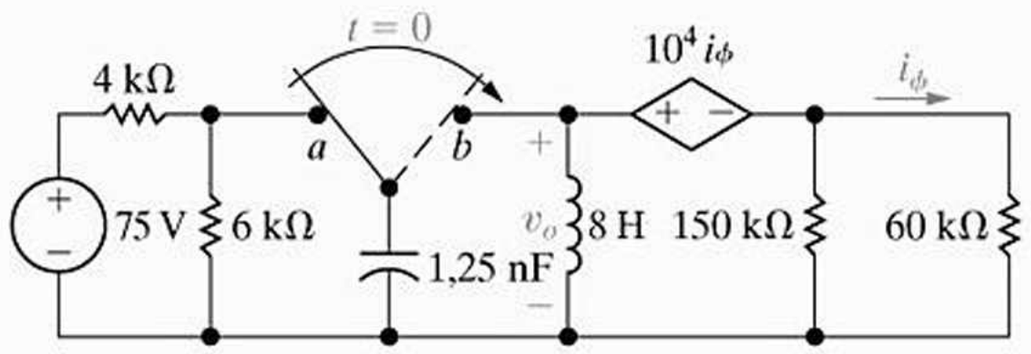
8.14 Mostre que os resultados obtidos no Problema 8.13 — isto é, as expressões para A_1 e A_2 — são consistentes com as equações 8.30 e 8.31 do texto.

8.15 PSPICE O resistor no circuito do Exemplo 8.4 é trocado para $4.000/\sqrt{2}\ \Omega$.

a) Determine a expressão numérica para $v(t)$ quando $t \geq 0$.
b) Desenhe um gráfico de $v(t)$ em relação a t para o intervalo de tempo $0 \leq t \leq 7$ ms. Compare essa resposta com a do Exemplo 8.4 ($R = 20\ \text{k}\Omega$) e Exemplo 8.5 ($R = 4\ \text{k}\Omega$). Em particular, compare os valores de pico de $v(t)$ e os tempos em que esses valores ocorrem.

8.16 PSPICE A chave no circuito da Figura P8.16 esteve na posição a por um longo tempo. Em $t = 0$, ela passa instantaneamente para a posição b. Determine $v_o(t)$ para $t \geq 0$.

Figura P8.16

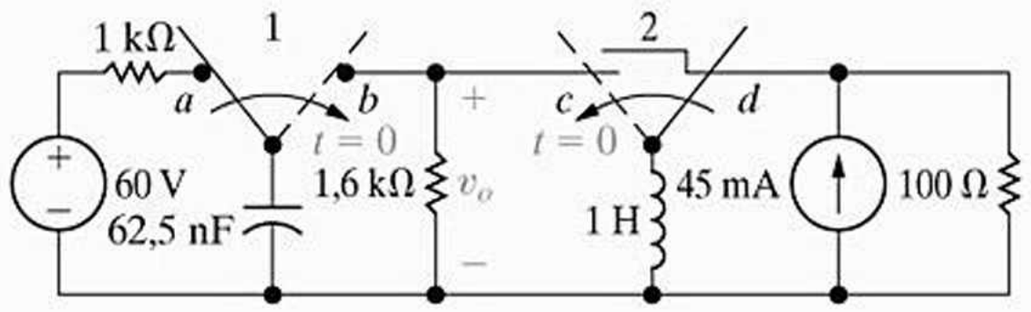


8.17 O capacitor no circuito da Figura P8.16 é reduzido para 1 nF e o indutor é aumentado para 10 H. Determine $v_o(t)$ para $t \geq 0$.

8.18 O capacitor no circuito da Figura P8.16 é reduzido para 800 pF e o indutor é aumentado para 12,5 H. Determine $v_o(t)$ para $t \geq 0$.

8.19* PSPICE As duas chaves no circuito visto na Figura P8.19 funcionam sincronizadamente. Quando a chave 1 está na posição a, a chave 2 está na posição d. Quando a chave 1 passa para a posição b, a chave 2 passa para a posição c. A chave 1 esteve na posição a por um longo tempo. Em $t = 0$, as chaves passam para suas posições alternadas. Determine $v_o(t)$ para $t \geq 0$.

Figura P8.19



8.20* PSPICE O resistor no circuito da Figura P8.19 é aumentado de 1,6 kΩ para 2 kΩ e o indutor é diminuído de 1 H para 640 mH. Determine $v_o(t)$ para $t > 0$.

8.21* PSPICE O resistor no circuito da Figura P8.19 é reduzido de 1,6 kΩ para 800 Ω e o indutor é reduzido de 1 H para 160 mH. Determine $v_o(t)$ para $t \geq 0$.

Seção 8.3

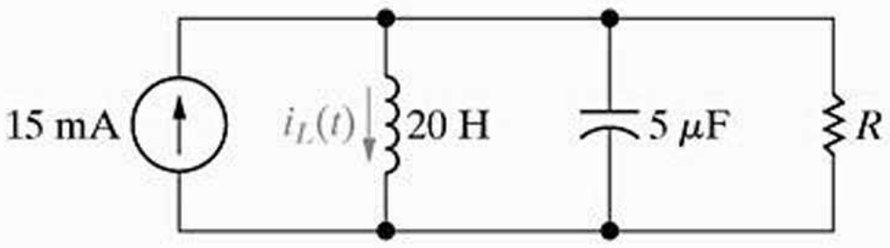
8.22 PSPICE Para o circuito do Exemplo 8.6, determine, para $t \geq 0$, (a) $v(t)$; (b) $i_R(t)$ e (c) $i_C(t)$.

8.23 PSPICE Para o circuito do Exemplo 8.7, determine, para $t \geq 0$, (a) $v(t)$ e (b) $i_C(t)$.

8.24 PSPICE Para o circuito do Exemplo 8.8, determine $v(t)$ para $t \geq 0$.

8.25* PSPICE Admita que, no instante em que a fonte de corrente cc de 15 mA é aplicada ao circuito da Figura P8.25, a corrente inicial no indutor de 20 H seja –30 mA e a tensão inicial no capacitor seja 60 V (positiva no terminal superior). Determine a expressão para $i_L(t)$ para $t \geq 0$ se R for igual a 800 Ω.

Figura P8.25

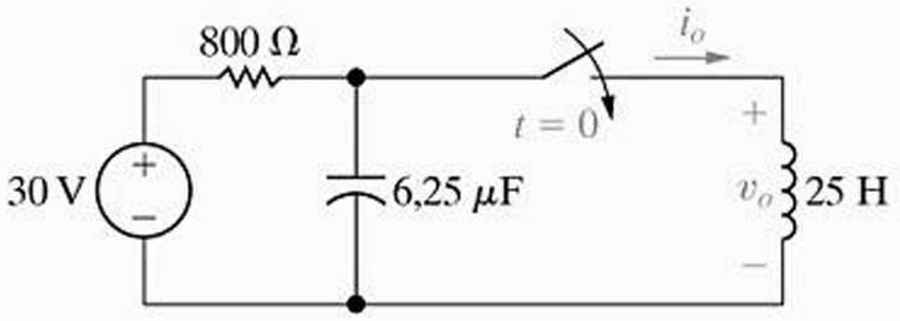


8.26* PSPICE A resistência no circuito da Figura P8.25 é alterada para 1.250 Ω. Determine $i_L(t)$ para $t \geq 0$.

8.27* PSPICE A resistência no circuito da Figura P8.25 é alterada para 1.000 Ω. Determine $i_L(t)$ para $t \geq 0$.

8.28 PSPICE A chave no circuito da Figura P8.28 esteve aberta por um longo tempo antes de fechar em $t = 0$. Determine $v_o(t)$ para $t \geq 0$.

Figura P8.28

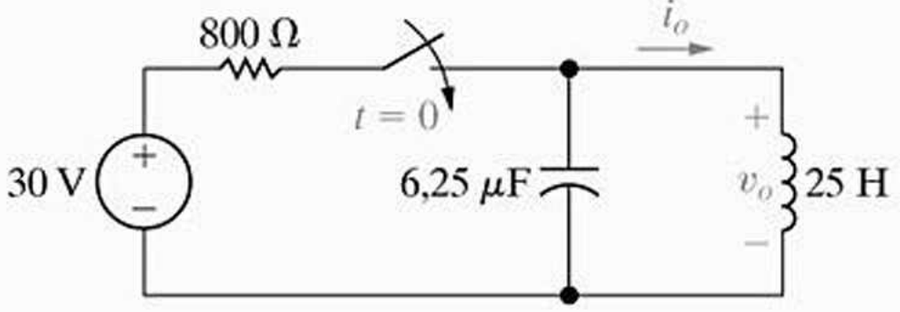


8.29 PSPICE a) Para o circuito da Figura P8.28, determine i_o para $t \geq 0$.

b) Mostre que sua solução para i_o é consistente com a solução para v_o no Problema 8.28.

8.30 PSPICE Não há nenhuma energia armazenada no circuito da Figura P8.30 quando a chave é fechada em $t = 0$. Determine $v_o(t)$ para $t \geq 0$.

Figura P8.30

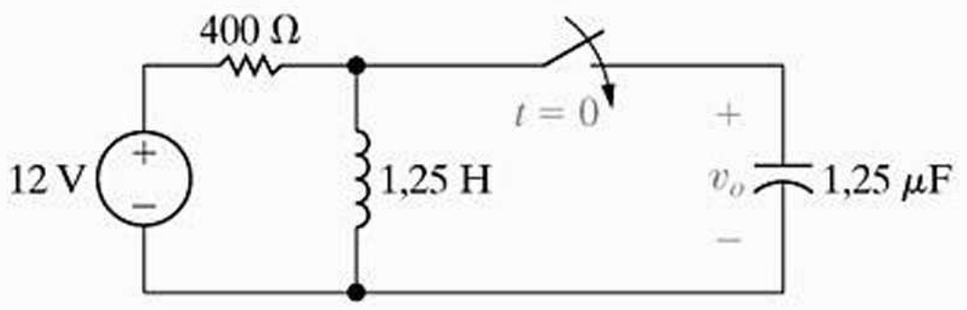


8.31 PSPICE a) Para o circuito na Figura P8.30, determine i_o para $t \geq 0$.

b) Mostre que sua solução para i_o é consistente com a solução para v_o no Problema 8.30.

8.32 PSPICE A chave no circuito da Figura P8.32 esteve aberta por um longo tempo antes de fechar em $t = 0$. No instante em que ela fecha, o capacitor não tem nenhuma energia armazenada. Determine $v_o(t)$ para $t \geq 0$.

Figura P8.32

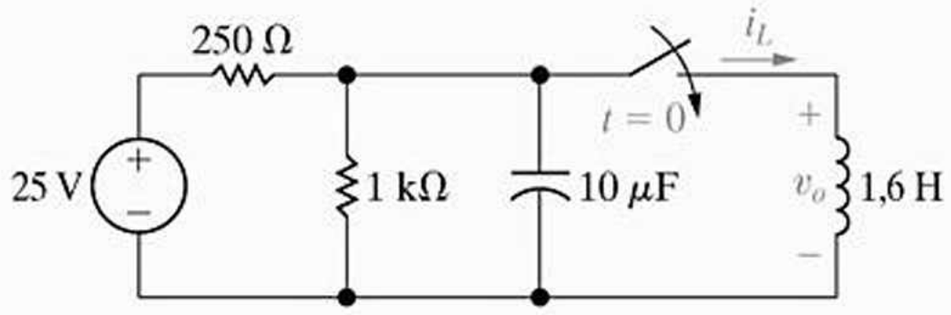


8.33 PSPICE A chave no circuito da Figura P8.33 esteve aberta por um longo tempo antes de fechar em $t = 0$. Determine

a) $v_o(t)$ para $t \geq 0^+$,

b) $i_L(t)$ para $t \geq 0$.

Figura P8.33



8.34 PSPICE Considere o circuito da Figura P8.33.

a) Determine a energia total fornecida ao indutor.

b) Determine a energia total fornecida ao resistor equivalente.

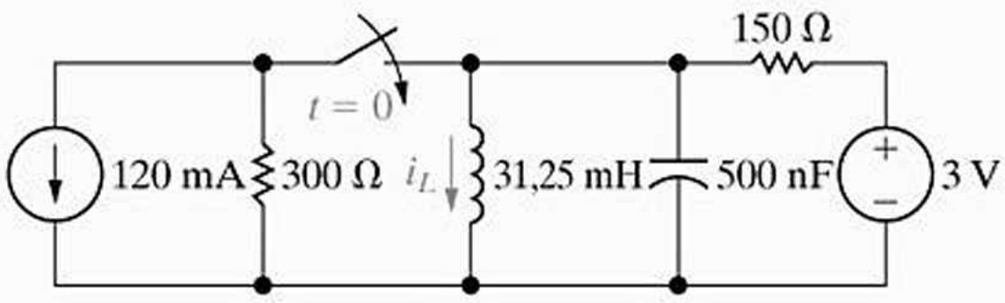
c) Determine a energia total fornecida ao capacitor.

d) Determine a energia total fornecida pela fonte de corrente equivalente.

e) Verifique os resultados das partes (a) a (d) em relação ao princípio da conservação de energia.

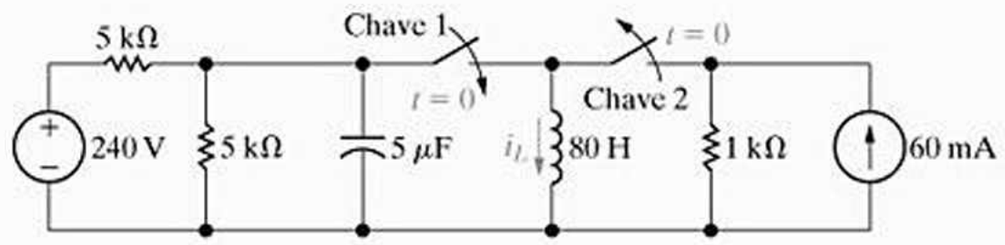
8.35 PSPICE A chave no circuito da Figura P8.35 esteve aberta por um longo tempo antes de fechar em $t = 0$. Determine $i_L(t)$ para $t \geq 0$.

Figura P8.35



8.36 PSPICE As chaves 1 e 2 no circuito da Figura P8.36 são sincronizadas. Quando a chave 1 abre, a chave 2 fecha e vice-versa. A chave 1 esteve aberta por um longo tempo antes de fechar em $t = 0$. Determine $i_L(t)$ para $t \geq 0$.

Figura P8.36



Seção 8.4

8.37 A energia inicial armazenada no capacitor de 50 nF no circuito da Figura P8.37 é 90 μJ . A energia inicial armazenada no indutor é zero. As raízes da equação característica que descreve a resposta natural da corrente i são $-1.000\ s^{-1}$ e $-4.000\ s^{-1}$.

a) Determine os valores de R e L.

b) Determine os valores de $i(0)$ e $di(0)/dt$ imediatamente após o fechamento da chave.

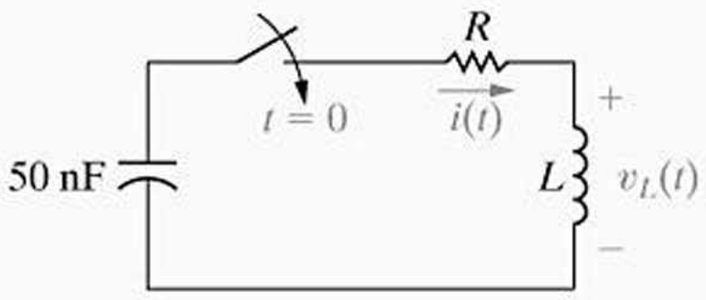
c) Determine $i(t)$ para $t \geq 0$.

d) Quantos microssegundos depois que a chave é fechada a corrente alcança seu valor máximo?

e) Qual é o valor máximo de i em miliampères?

f) Determine $v_L(t)$ para $t \geq 0$.

Figura P8.37



8.38 Sabe-se que a corrente no circuito da Figura 8.3 é

$$i = B_1e^{-800t}\cos 600t + B_2e^{-800t}\operatorname{sen} 600t,\ t \geq 0$$

O capacitor tem um valor de 500 μF; o valor inicial da corrente é zero e a tensão inicial no capacitor é 12 V. Determine os valores de R, L, B_1 e B_2.

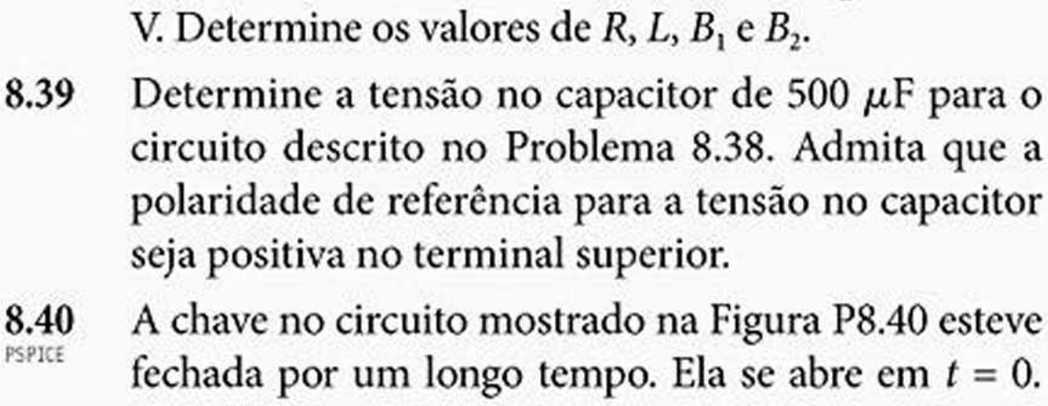
8.39 Determine a tensão no capacitor de 500 μF para o circuito descrito no Problema 8.38. Admita que a polaridade de referência para a tensão no capacitor seja positiva no terminal superior.

8.40 PSPICE A chave no circuito mostrado na Figura P8.40 esteve fechada por um longo tempo. Ela se abre em $t = 0$. Determine

a) $i_o(t)$ para $t \geq 0$.

b) $v_o(t)$ para $t \geq 0$.

Figura P8.40



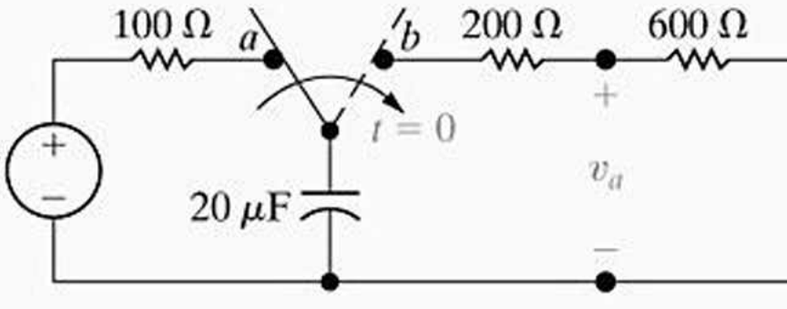
8.41 PSPICE No circuito da Figura P8.41, o resistor é ajustado para amortecimento crítico. A tensão inicial no capacitor é 90 V e a corrente inicial no indutor é 24 mA.

a) Determine o valor de R.

b) Determine os valores de i e de di/dt imediatamente após o fechamento da chave.

c) Determine $v_C(t)$ para $t \geq 0$.

Figura P8.41



8.42 PSPICE A chave no circuito da Figura P8.42 esteve na posição a por um longo tempo. Em $t = 0$, ela passa instantaneamente para a posição b.

a) Qual é o valor inicial de v_a?

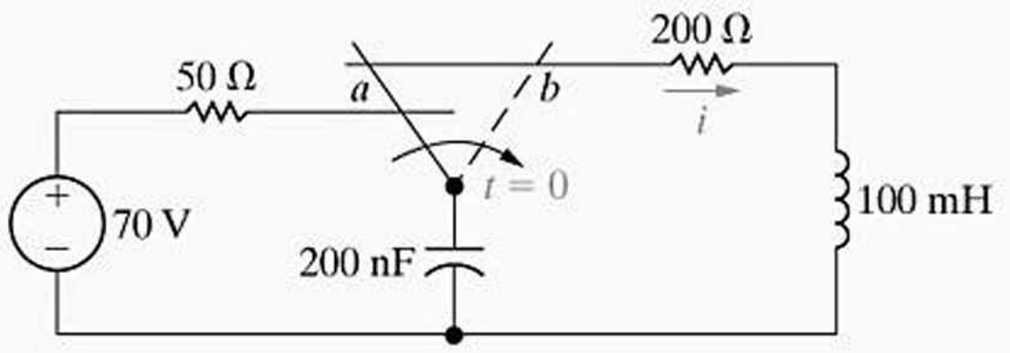
b) Qual é o valor inicial de dv_a/dt?

c) Qual é a expressão de $v_a(t)$ para $t \geq 0$?

Figura P8.42

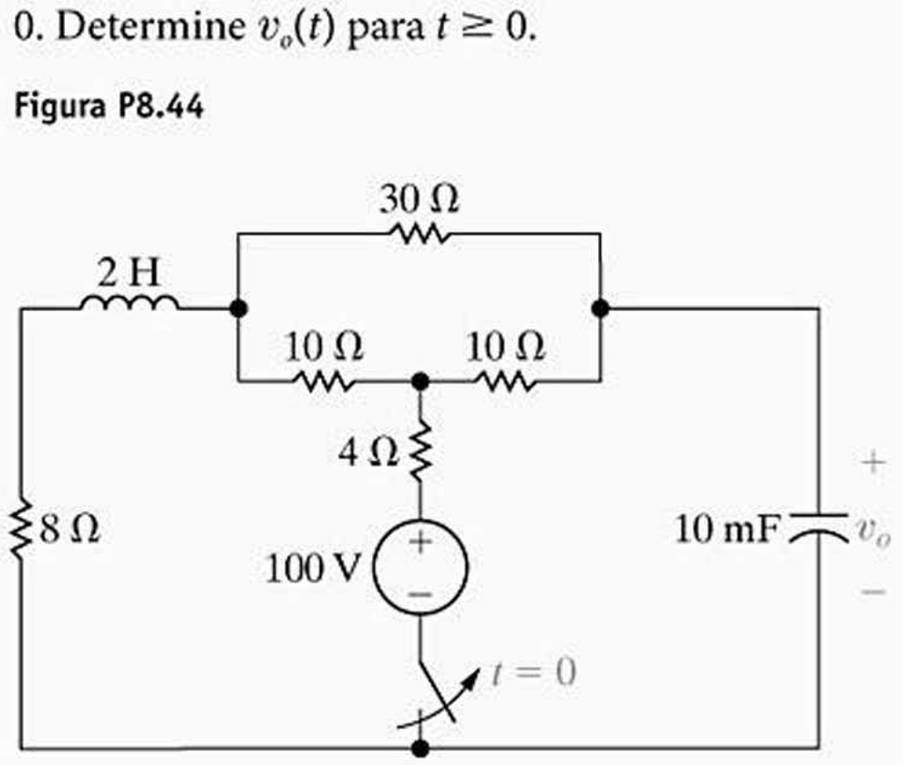
8.43 PSPICE A chave do tipo liga-antes-interrompe-depois do circuito mostrado na Figura P8.43 esteve na posição a por um longo tempo. Em $t = 0$, ela passa instantaneamente para a posição b. Determine $i(t)$ para $t \geq 0$.

Figura P8.43



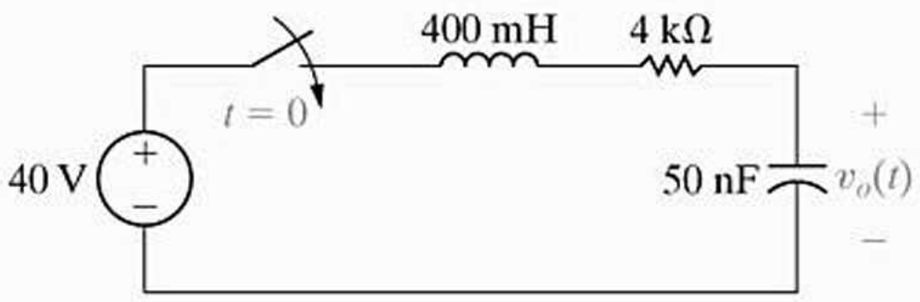
8.44 PSPICE A chave do circuito mostrado na Figura P8.44 esteve fechada por um longo tempo. Ela se abre em $t = 0$. Determine $v_o(t)$ para $t \geq 0$.

Figura P8.44



8.45* PSPICE A energia inicial armazenada no circuito da Figura P8.45 é zero. Determine $v_o(t)$ para $t \geq 0$.

Figura P8.45



8.46* O capacitor do circuito mostrado na Figura P8.45 é trocado para 100 nF. A energia inicial armazenada é ainda zero. Determine $v_o(t)$ para $t \geq 0$.

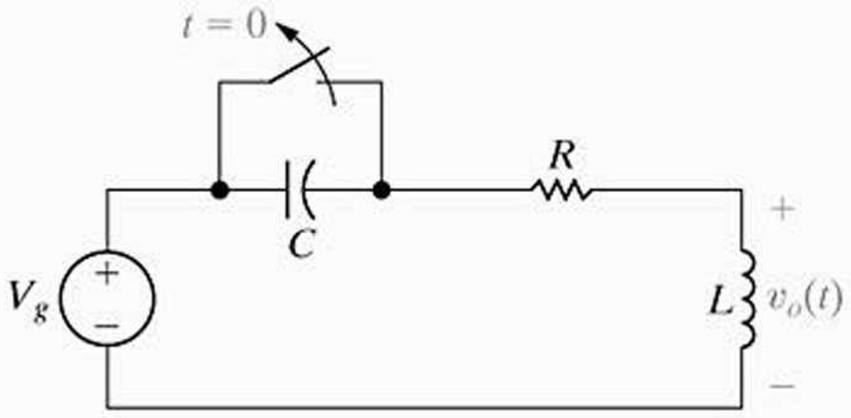
8.47* O capacitor do circuito mostrado na Figura P8.45 é trocado para 156,25 nF. A energia inicial armazenada é ainda zero. Determine $v_o(t)$ para $t \geq 0$.

8.48 A chave do circuito mostrado na Figura P8.48 esteve fechada por um longo tempo antes de ser aberta em $t = 0$. Admita que os parâmetros de circuito sejam tais que a resposta é subamortecida.

a) Calcule a expressão para $v_o(t)$ em função de v_g, α, ω_d, C e R para $t \geq 0$.

b) Calcule a expressão para o valor de t quando a amplitude de v_o é máxima.

Figura P8.48



8.49 PSPICE Os parâmetros de circuito no circuito da Figura P8.48 são $R = 120\ \Omega$, $L = 5$ mH, $C = 500$ nF e $v_g = -600$ V.

a) Determine $v_o(t)$ para $t \geq 0$.

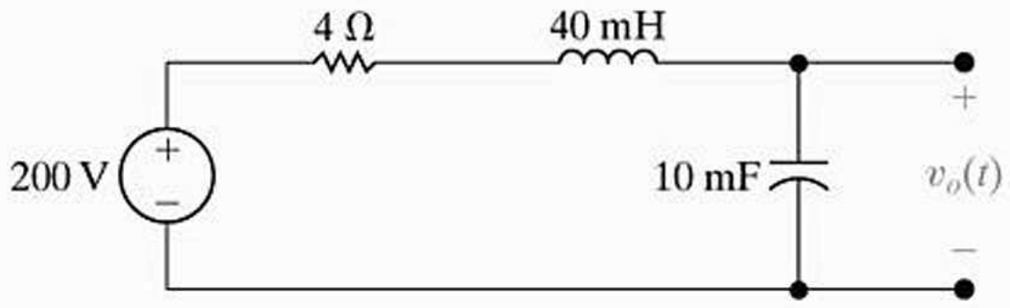
b) Quantos microssegundos depois da abertura da chave a tensão no indutor é máxima?

c) Qual é o valor máximo da tensão no indutor?

d) Repita (a)–(c) com R reduzido para 12 Ω.

8.50 PSPICE O circuito mostrado na Figura P8.50 esteve em funcionamento por um longo tempo. Em $t = 0$, a tensão da fonte se reduz repentinamente para 100 V. Determine $v_o(t)$ para $t \geq 0$.

Figura P8.50



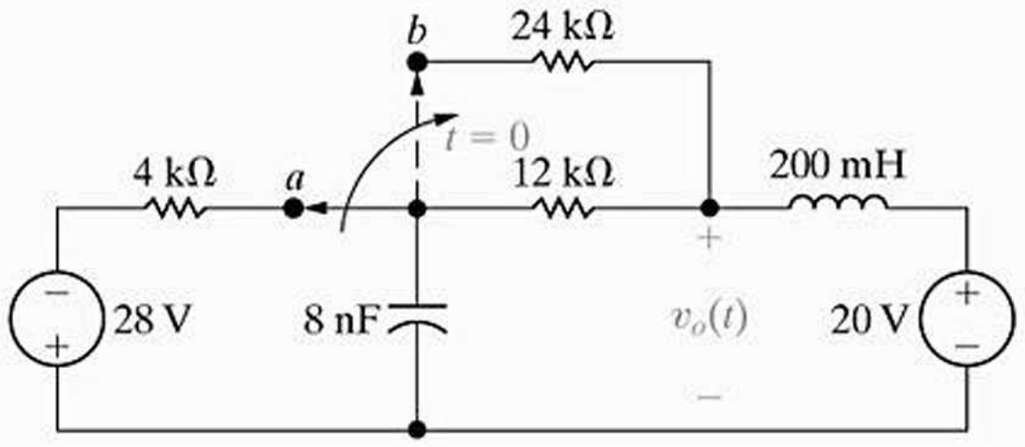
8.51 PSPICE A chave no circuito da Figura P8.51 esteve na posição *a* por um longo tempo. Em $t = 0$, ela passa instantaneamente para a posição *b*. Determine

a) $v_o(0^+)$

b) $dv_o(0^+)/dt$

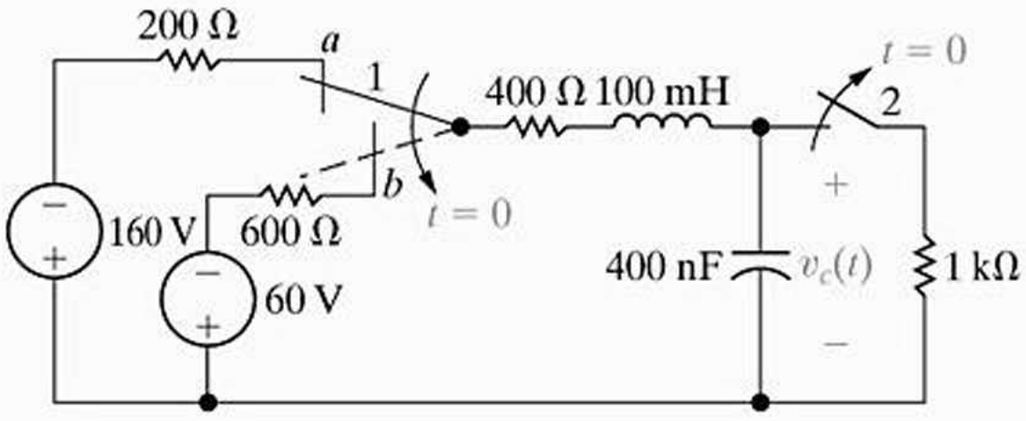
c) $v_o(t)$ para $t \geq 0$.

Figura P8.51



8.52 PSPICE As duas chaves no circuito visto na Figura P8.52 funcionam sincronizadas. Quando a chave 1 está na posição *a*, a chave 2 está fechada. Quando a chave 1 está na posição *b*, a chave 2 está aberta. A chave 1 esteve na posição a por um longo tempo. Em $t = 0$, ela passa instantaneamente para a posição *b*. Determine $v_c(t)$ para $t \geq 0$.

Figura P8.52



8.53 Suponha que a tensão no capacitor no circuito da Figura 8.15 seja do tipo subamortecido. Suponha também que não haja nenhuma energia armazenada nos elementos de circuito quando a chave é fechada.

a) Mostre que $dv_C/dt = (\omega_0^2/\omega_d)Ve^{-\alpha t}$ sen $\omega_d t$

b) Mostre que $dv_C/dt = 0$ quando $t = n\pi/\omega_d$, onde $n = 0, 1, 2,...$

c) Se $t_n = n\pi/\omega_d$, mostre que $v_C(t_n) = V - V(-1)^n e^{-\alpha n\pi/\omega_d}$.

d) Mostre que $\alpha = \dfrac{1}{T_d} \ln \dfrac{v_C(t_1) - V}{v_C(t_3) - V}$,

onde $T_d = t_3 - t_1$.

8.54 A tensão em um capacitor de 200 nF no circuito da Figura 8.15 é descrita da seguinte forma: depois que a chave esteve fechada durante vários segundos, a tensão é constante em 50 V. Na primeira vez que a tensão passa de 50 V, ela alcança um pico de 63,505 V. Isso ocorre $\pi/12$ ms depois do fechamento da chave. Na segunda vez que a tensão passa de 50 V, ela alcança um pico de 50,985 V. Este segundo pico ocorre $\pi/4$ ms depois do fechamento da chave. No instante em que a chave é fechada, não há nenhuma energia armazenada no capacitor, nem no indutor. Determine os valores de R e L. (*Sugestão*: Resolva primeiro o Problema 8.53.)

8.55 Mostre que, se não houver nenhuma energia armazenada no circuito da Figura 8.19 no instante em que v_g muda de valor, então dv_o/dt é igual a zero em $t = 0$.

8.56 a) Determine a equação de $v_o(t)$ para $0 \leq t \leq t_{sat}$ no circuito mostrado na Figura 8.19 se $v_{o1}(0) = 5$ V e $v_o(0) = 8$ V.

b) Quanto tempo leva para o circuito atingir saturação?

8.57 a) Resolva novamente o Exemplo 8.14 sem os resistores de realimentação R_1 e R_2.

b) Resolva novamente o Exemplo 8.14 com $v_{o1}(0) = -2$ V e $v_o(0) = 4$ V.

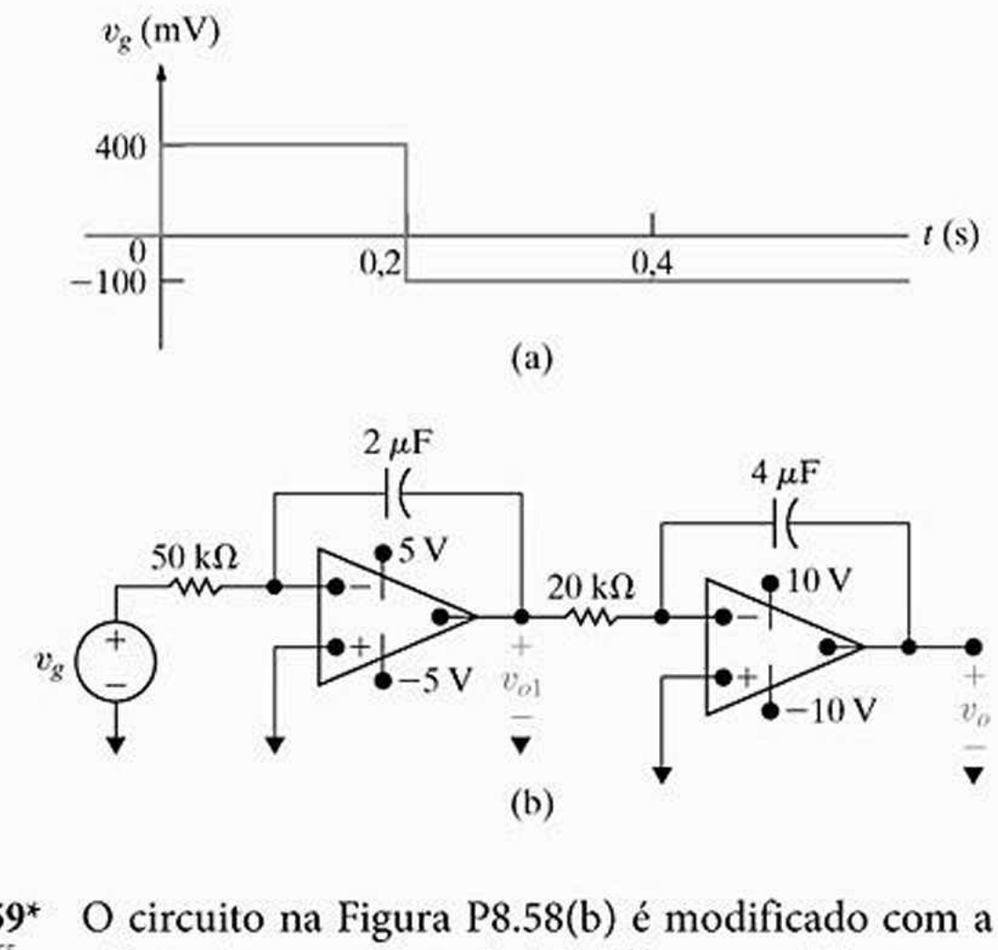
Seção 8.5

8.58* PSPICE O sinal de tensão da Figura P8.58(a) é aplicado aos amplificadores-integradores em cascata mostrados na Figura P8.58(b). Não há nenhuma energia armazenada nos capacitores no instante em que o sinal é aplicado.

a) Determine as expressões numéricas para $v_o(t)$ e $v_{o1}(t)$ para os intervalos de tempo $0 \leq t \leq 0{,}2$ s e $0{,}2 \text{ s} \leq t \leq t_{sat}$.

b) Calcule o valor de t_{sat}.

Figura P8.58



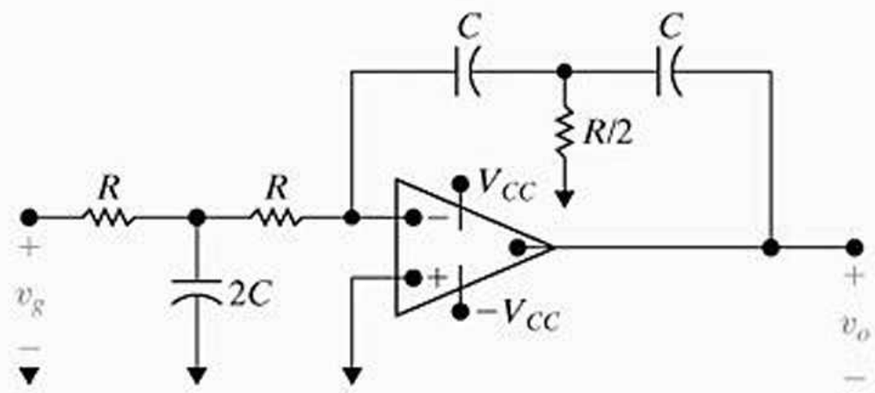
8.59* PSPICE O circuito na Figura P8.58(b) é modificado com a adição de um resistor de 250 kΩ em paralelo com o capacitor de 2 μF e um resistor de 250 kΩ em paralelo com o capacitor de 4 μF. Como no Problema 8.58, não há nenhuma energia armazenada nos capacitores no instante em que o sinal é aplicado. Calcule as expressões de $v_o(t)$ e de $v_{o1}(t)$ para os intervalos de tempo $0 \leq t \leq 0{,}2$ s e $t \geq 0{,}2$ s.

8.60 a) Deduza a equação diferencial que relaciona a tensão de saída com a tensão de entrada para o circuito mostrado na Figura P8.60.

b) Compare o resultado com a Equação 8.75 quando $R_1C_1 = R_2C_2 = RC$ na Figura 8.18.

c) Qual é a vantagem do circuito mostrado na Figura P8.60?

Figura P8.60



8.61 Agora, queremos ilustrar como vários circuitos amp op podem ser interligados para resolver uma equação diferencial.

a) Deduza a equação diferencial para o sistema mola-massa mostrado na Figura P8.61(a), página 229. Admita que a força exercida pela mola seja diretamente proporcional ao deslocamento da mola, que a massa é constante e que a força de atrito é diretamente proporcional à velocidade da massa.

b) Reescreva a equação diferencial deduzida em (a) de modo que a derivada de ordem mais alta seja expressa como uma função de todos os outros termos da equação. Agora, admita que uma tensão igual a d^2x/dt^2 esteja disponível e, por integrações sucessivas, gere dx/dt e x. Podemos obter os coeficientes nas equações a partir dos fatores de escala dos amplificadores e combinar os termos necessários para gerar d^2x/dt^2 usando um amplificador somador. Com essas idéias em mente, analise a interligação mostrada na Figura P8.61(b), página 229. Em particular, descreva a função de cada área sombreada no circuito e o sinal nos pontos rotulados B, C, D, E e F, admitindo que o sinal em A represente d^2x/dt^2. Discuta também os parâmetros R; R_1, C_1; R_2, C_2; R_3, R_4; R_5, R_6 e R_7, R_8 em termos dos coeficientes da equação diferencial.

Seções 8.1–8.5

8.62 PERSPECTIVA PRÁTICA a) Deduza a Equação 8.92.

b) Deduza a Equação 8.93.

c) Deduza a Equação 8.97.

8.63 PERSPECTIVA PRÁTICA Deduza a Equação 8.99.

8.64* PERSPECTIVA PRÁTICA a) Usando os mesmos valores do exemplo Perspectiva Prática no texto, determine o instante de tempo em que a tensão no capacitor é máxima.

b) Determine o valor máximo de v_c.

c) Compare os valores obtidos em (a) e (b) com t_{max} e $v_c(t_{max})$.

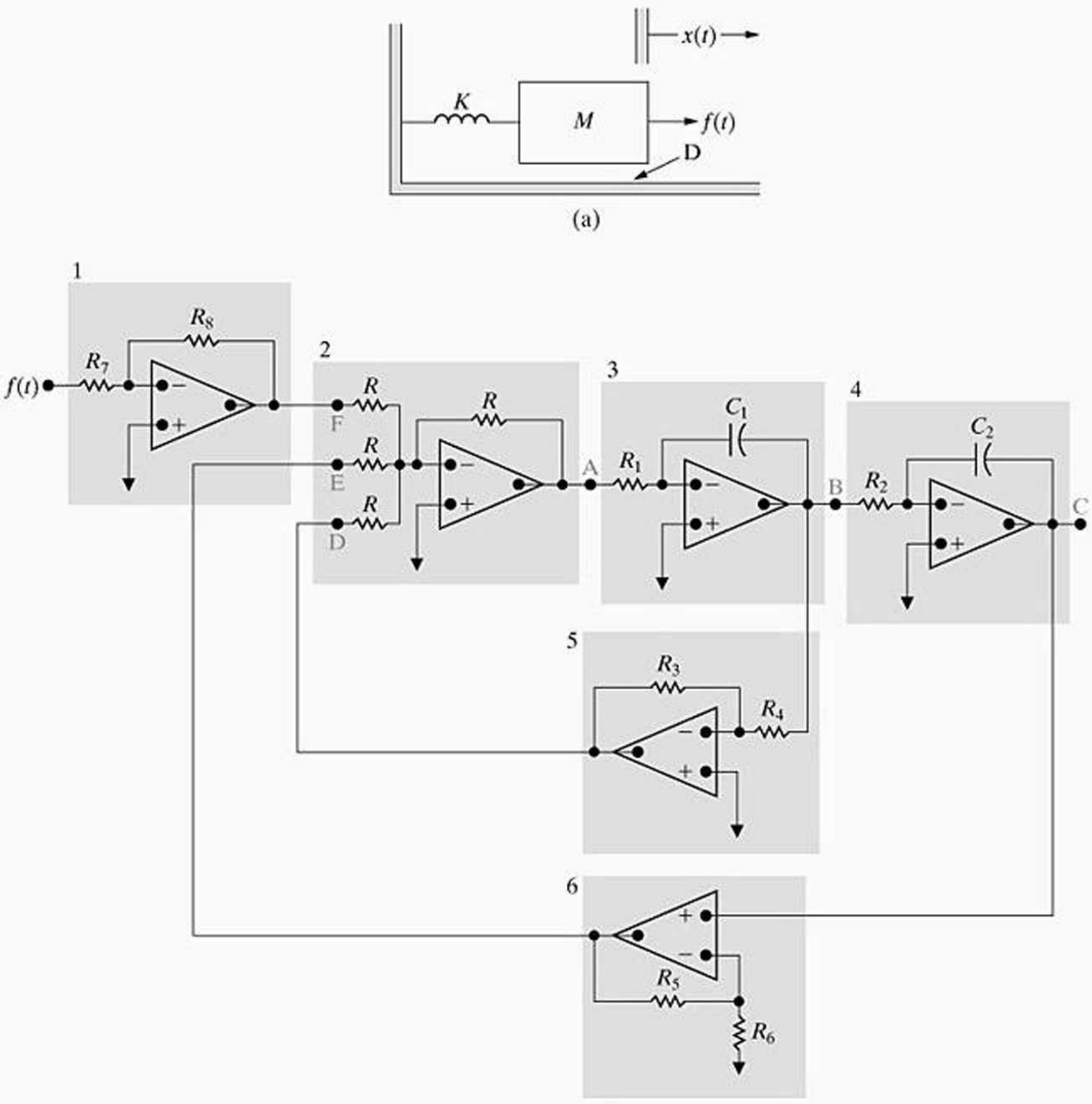
8.65* PERSPECTIVA PRÁTICA Os valores dos parâmetros no circuito na Figura 8.21 são $R = 3\ \Omega$; $L = 5$ mH; $C = 0{,}25\ \mu$F; $V_{cc} = 12$ V; $a = 50$. Suponha que a chave se abra quando a corrente no enrolamento primário é 4 A.

a) Qual é a energia armazenada no circuito em $t = 0^+$?

b) Suponha que a vela de ignição não centelhe. Qual é a tensão máxima disponível nos eletrodos da vela de ignição?

c) Qual é a tensão no capacitor, quando a tensão na vela de ignição está em seu valor máximo?

Figura P8.61



CAPÍTULO

9

Análise do regime permanente senoidal

SUMÁRIO DO CAPÍTULO

9.1 **Fonte senoidal**

9.2 **Resposta senoidal**

9.3 **O conceito de fasor**

9.4 **Elementos passivos no domínio da freqüência**

9.5 **As leis de Kirchhoff no domínio da freqüência**

9.6 **Associações em série, em paralelo e transformações Δ-Y**

9.7 **Transformações de fonte e circuitos equivalentes de Thévenin-Norton**

9.8 **O método das tensões de nó**

9.9 **O método das correntes de malha**

9.10 **O transformador**

9.11 **O transformador ideal**

9.12 **Diagramas fasoriais**

✔ OBJETIVOS DO CAPÍTULO

1 Entender o conceito de fasor e saber executar uma transformada fasorial e a transformada inversa.

2 Saber transformar um circuito com uma fonte senoidal para o domínio da freqüência usando o conceito de fasor.

3 Saber como usar as seguintes técnicas de análise de circuitos no domínio da freqüência:
- Leis de Kirchhoff;
- Associação de elementos em série, em paralelo e transformação Δ-Y;
- Divisão de tensão e corrente;
- Equivalentes de Thévenin e Norton;
- Método das tensões de nó e
- Método das correntes de malha.

4 Saber analisar circuitos que contêm transformadores lineares usando métodos fasoriais.

5 Entender as relações terminais do transformador ideal e saber analisar circuitos que contêm transformadores ideais usando métodos fasoriais.

Até aqui, focalizamos circuitos com fontes constantes; neste capítulo, estamos agora em condições de considerar circuitos energizados por fontes de tensão ou de corrente que variem com o tempo. Em particular, estamos interessados em fontes em que o valor da tensão ou corrente varia senoidalmente. Fontes senoidais e seus efeitos sobre o comportamento do circuito são uma importante área de estudo por várias razões. A primeira é que a geração, transmissão, distribuição e consumo de energia elétrica ocorrem sob condições de regime permanente essencialmente senoidais. A segunda é que entender o funcionamento de circuitos sob regime senoidal possibilita prever o comportamento de circuitos com fontes não senoidais. A terceira é que o comportamento de regime permanente senoidal freqüentemente simplifica o projeto de sistemas elétricos. Assim, um projetista pode formular claramente suas especificações em termos de uma resposta de regime permanente senoidal desejável e projetar o circuito ou o sistema para satisfazer essas características. Se o dispositivo satisfizer as especificações, o projetista sabe que o circuito responderá satisfatoriamente a entradas não senoidais.

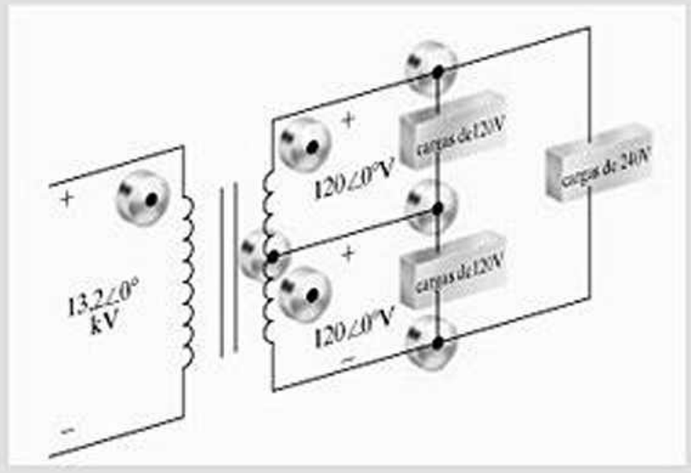
Os capítulos subseqüentes deste livro são baseados, em grande parte, em um entendimento detalhado das técnicas necessárias para analisar circuitos excitados por fontes senoidais. Como, felizmente, as técnicas de análise de circuitos e associação de elementos que foram apresentadas, pela primeira vez, nos capítulos 1–4 funcionam tanto para circuitos com fontes senoidais, quanto para circuitos com fontes cc, parte do material deste capítulo você já conhece bem. Dentre os desafios iniciais da análise senoidal incluem-se a formulação adequada das equações apropriadas e os cálculos no domínio dos números complexos.

Perspectiva prática

Um circuito de distribuição residencial

Sistemas de potência que geram, transmitem e distribuem energia elétrica são projetados para funcionar no regime permanente senoidal. O circuito de distribuição padrão para residências nos Estados Unidos é o trifásico de 240/120 V mostrado na figura apresentada na página a seguir.

O transformador é usado para reduzir a tensão de distribuição de 13,2 kV para 240 V. O tap central do enrolamento secundário está a um potencial de 120 V dos outros taps. Nos Estados Unidos, a freqüência de operação de sistemas de potência é 60 Hz, porém em outros países são encontrados sistemas de 50 e 60 Hz. Os valores de tensão citados são valores rms. A razão para se definir um valor rms de um sinal que varia com o tempo será explicada no Capítulo 10.



9.1 Fonte senoidal

Uma *fonte de tensão* senoidal (independente ou dependente) produz uma tensão que varia senoidalmente com o tempo. Uma *fonte de corrente* senoidal (independente ou dependente) produz uma corrente que varia senoidalmente com o tempo. Ao analisarmos a função senoidal, usaremos uma fonte de tensão, mas nossas observações também se aplicam a fontes de corrente.

Podemos expressar uma função que varia senoidalmente usando a função seno ou a função co-seno. Embora ambas funcionem igualmente bem, não podemos usar as duas formas funcionais simultaneamente. Usaremos a função co-seno em nossa discussão e, conseqüentemente, escrevemos uma tensão que varia senoidalmente como

$$v = V_m \cos(\omega t + \phi). \tag{9.1}$$

Para auxiliar a discussão sobre os parâmetros na Equação 9.1, mostramos o gráfico da tensão em função de tempo na Figura 9.1.

Observe que a função senoidal se repete a intervalos regulares. Tal função é denominada periódica. Um parâmetro de interesse é o intervalo de tempo necessário para que a função senoidal passe por todos os seus valores possíveis. Esse tempo é chamado de *período* da função, é representado por T e é medido em segundos. O recíproco de T é o número de ciclos por segundo, ou a freqüência, da função seno e é representado por f, ou

$$f = \frac{1}{T}. \tag{9.2}$$

Um ciclo por segundo é denominado hertz, símbolo Hz. (O termo *ciclos por segundo* é raramente usado na literatura técnica contemporânea.) O coeficiente de t na Equação 9.1 contém o valor numérico de T ou f. Ômega (ω) representa a freqüência angular da função senoidal, ou

$$\omega = 2\pi f = 2\pi/T \text{ (radianos/segundo)}. \tag{9.3}$$

A Equação 9.3 reflete o fato de a função co-seno (ou seno) passar por um conjunto completo de valores cada vez que seu argumento, ωt, passa por 2π rad (360°). Pela Equação 9.3, observe que, sempre que t for um inteiro múltiplo de T, o argumento ωt aumenta por um múltiplo inteiro de 2π rad.

O coeficiente V_m é a amplitude máxima da tensão senoidal. Como ± 1 limita a função co-seno, $\pm V_m$ limita a amplitude. A Figura 9.1 mostra essas características.

O ângulo ϕ na Equação 9.1 é conhecido como o *ângulo de fase* da tensão senoidal. Ele determina o valor da função senoidal em $t = 0$; portanto, fixa o ponto da onda periódica em que começamos a medir o tempo. Mudar o ângulo de fase ϕ desloca a função senoidal ao longo do eixo dos tempos, mas não tem nenhum efeito sobre a amplitude (V_m) ou sobre a freqüência angular (ω). Observe, por exemplo, que reduzir ϕ a zero desloca a função senoidal apresentada na Figura 9.1 ϕ/ω unidades de tempo para a direita, como mostra a Figura 9.2. Observe também que, se ϕ for positivo, a função senoidal desloca-se para a esquerda, ao passo que, se ϕ for negativo, a função desloca-se para a direita. (Veja o Problema 9.4.)

Vale fazer um comentário sobre o ângulo de fase: ωt e ϕ devem ter as mesmas unidades porque são somados no argumento da função senoidal. Se ωt for expressa em radianos, você deve esperar que ϕ também o seja. Contudo, normalmente ϕ é dado em graus e ωt é convertida de radianos a graus antes que as duas quantidades sejam somadas. Adotamos esse costume e expressamos o ângulo de fase em graus. Lembre-se, de seu curso de trigonometria, de que a conversão de radianos para graus é dada por

$$\text{(numero de graus)} = \frac{180^\circ}{\pi}\text{(numero de radianos)}. \tag{9.4}$$

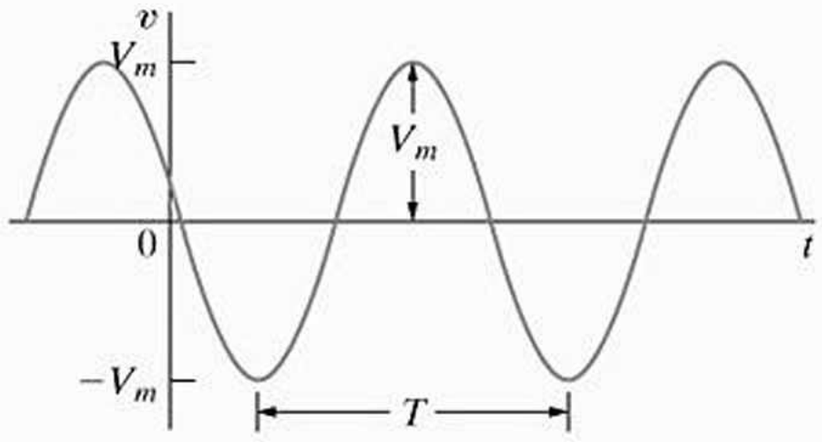


Figura 9.1 ▲ Tensão senoidal.

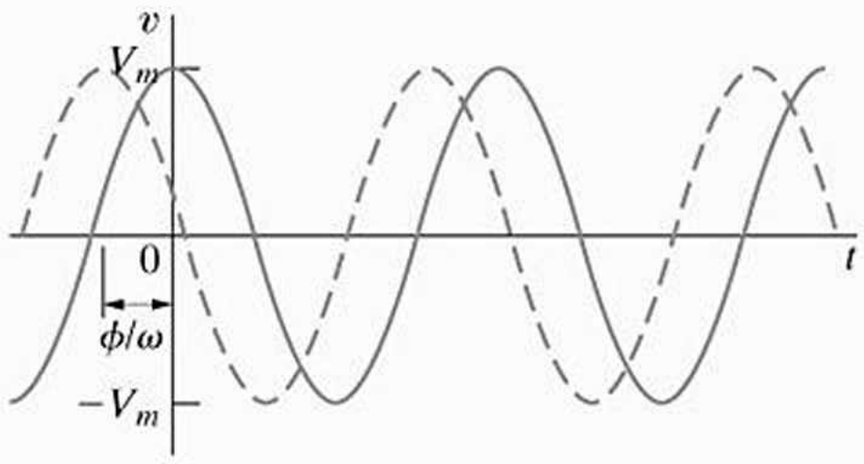


Figura 9.2 ▲ Tensão senoidal da Figura 9.1 deslocada para a direita quando $\phi = 0$.

Outra característica importante da tensão (ou corrente) senoidal é seu *valor eficaz* ou *rms* (*root mean square*). O valor eficaz de uma função periódica é definido como a raiz quadrada do valor médio da função ao quadrado. Daí, se $v = V_m \cos(\omega t + \phi)$, o valor eficaz (rms) de v é

$$V_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} V_m^2 \cos^2(\omega t + \phi)\, dt}\ . \qquad (9.5)$$

Observe, pela Equação 9.5, que obtemos o valor médio da tensão ao quadrado integrando v^2 em um único período (isto é, de t_0 a $t_0 + T$) e, então, dividindo pelo intervalo de integração, T. Observe ainda que o ponto de partida para a integração, t_0, é arbitrário.

A quantidade sob o sinal de raiz na Equação 9.5 se reduz a $V_m^2/2$. (Veja o Problema 9.6.) Assim, o valor eficaz (rms) de v é

$$V_{\text{rms}} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}. \qquad (9.6)$$

(Valor rms de uma fonte de tensão senoidal)

O valor rms da tensão senoidal depende somente da amplitude máxima de v, ou seja, V_m. O valor rms não é uma função da freqüência nem do ângulo de fase. Acentuamos a importância do valor rms porque ele está relacionado aos cálculos de potência do Capítulo 10 (veja a Seção 10.3).

Assim, podemos descrever completamente um sinal senoidal específico se conhecermos sua freqüência, ângulo de fase e amplitude (o valor máximo, ou o valor rms). Os exemplos 9.1, 9.2 e 9.3 ilustram essas propriedades básicas da função senoidal. No Exemplo 9.4, calculamos o valor rms de uma função periódica e, ao fazermos isso, esclarecemos o significado de *raiz da média quadrática*.

Exemplo 9.1 Determinação das características de uma corrente senoidal

Uma corrente senoidal tem uma amplitude máxima de 20 A. A corrente passa por um ciclo completo em 1 ms. O valor da corrente em $t = 0$ é 10 A.

a) Qual é a freqüência da corrente em hertz?

b) Qual é a freqüência em radianos por segundo?

c) Escreva a expressão para $i(t)$ usando a função co-seno. Expresse ϕ em graus.

d) Qual é o valor rms da corrente?

Solução

a) Pelo enunciado do problema, $T = 1$ ms; daí, $f = 1/T = 1.000$ Hz.

b) $\omega = 2\pi f = 2.000\pi$ rad/s.

c) Temos $i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi) = 20 \cos(2.000\pi t + \phi)$, mas $i(0) = 10$ A. Assim, $10 = 20 \cos\phi$ e $\phi = 60°$. Portanto, a expressão para $i(t)$ torna-se

$$i(t) = 20 \cos(2.000\pi t + 60°).$$

d) Por analogia com a Equação 9.6, o valor rms de uma corrente senoidal é $I_m/\sqrt{2}$. Assim, o valor rms é $20/\sqrt{2}$, ou 14,14 A.

Exemplo 9.2 Determinação das características de uma tensão senoidal

Uma tensão senoidal é dada pela expressão $v = 300 \cos(120\pi t + 30°)$.

a) Qual é o período da tensão em milissegundos?

b) Qual é a freqüência em hertz?

c) Qual é a magnitude de v em $t = 2{,}778$ ms?

d) Qual é o valor rms de v?

Solução

a) Da expressão para v, $\omega = 120\pi$ rad/s. Como $\omega = 2\pi/T$, $T = 2\pi/\omega = \frac{1}{60}$ s, ou 16,667 ms.

b) A freqüência é $1/T$, ou 60 Hz.

c) De (a), $\omega = 2\pi/16{,}667$; assim, em $t = 2{,}778$ ms, ωt é aproximadamente 1,047 rad ou 60°. Portanto, $v(2{,}778 \text{ ms}) = 300 \cos(60° + 30°) = 0$ V.

d) $V_{\text{rms}} = 300/\sqrt{2} = 212{,}13$ V.

Exemplo 9.3 Transformação de uma função seno em uma função co-seno

Podemos transformar uma função seno em uma função co-seno subtraindo 90° ($\pi/2$ rad) do argumento da função seno.

a) Confirme essa transformação mostrando que $\text{sen}(\omega t + \theta) = \cos(\omega t + \theta - 90°)$.

b) Use o resultado de (a) para expressar $\text{sen}(\omega t + 30°)$ como uma função co-seno.

Solução

A verificação envolve aplicação direta da identidade trigonométrica

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \text{sen}\,\alpha\, \text{sen}\,\beta.$$

Seja $\alpha = \omega t + \theta$ e $\beta = 90°$. Como cos 90° = 0 e sen 90° = 1, temos

$$\cos(\alpha - \beta) = \text{sen } \alpha = \text{sen}(\omega t + \theta) = \cos(\omega t + \theta - 90°).$$

b) De (a) temos

$$\text{sen}(\omega t + 30°) = \cos(\omega t + 30° - 90°) = \cos(\omega t - 60°).$$

Exemplo 9.4 Cálculo do valor rms de uma onda triangular

Calcule o valor rms da corrente triangular periódica mostrada na Figura 9.3. Expresse sua resposta em termos da corrente de pico I_p.

Solução

Pela Equação 9.5, o valor rms de i é

$$I_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} i^2 dt}.$$

Para determinar o valor rms, é útil interpretar a integral do radicando como a área sob a curva da função dada elevada ao quadrado, num intervalo de tempo igual a um período. A função ao quadrado com a área demarcada entre 0 e T é mostrada na Figura 9.4, o que também indica que, para essa função particular, a área sob o quadrado da corrente para um intervalo de um período é igual a quatro vezes a área sob o quadrado da corrente para o intervalo 0 a $T/4$ segundos; isto é,

$$\int_{t_0}^{t_0+T} i^2 dt = 4\int_0^{T/4} i^2 dt.$$

A expressão analítica para i no intervalo 0 a $T/4$ é

$$i = \frac{4I_p}{T}t, \quad 0 < t < T/4.$$

A área sob o quadrado da função para um único período é

$$\int_{t_0}^{t_0+T} i^2 dt = 4\int_0^{T/4} \frac{16I_p^2}{T^2}t^2 dt = \frac{I_p^2 T}{3}.$$

A média, ou valor médio, da função é simplesmente a área para um único período dividida pelo período. Assim,

$$i_{\text{média}} = \frac{1}{T}\frac{I_p^2 T}{3} = \frac{1}{3}I_p^2.$$

O valor rms da corrente é a raiz quadrada desse valor médio. Daí

$$I_{\text{rms}} = \frac{I_p}{\sqrt{3}}.$$

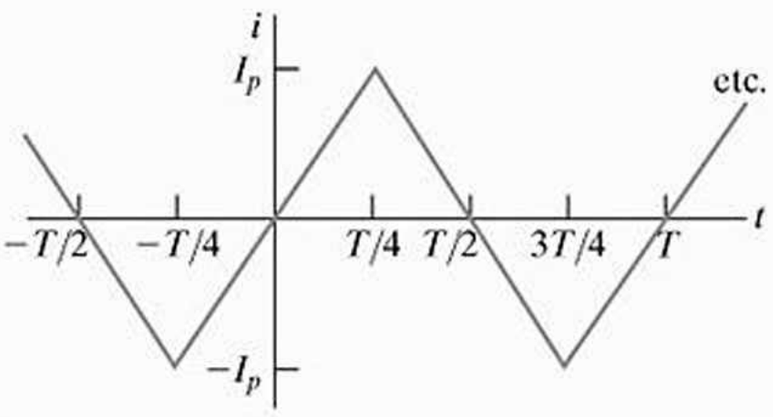


Figura 9.3 ▲ Corrente triangular periódica.

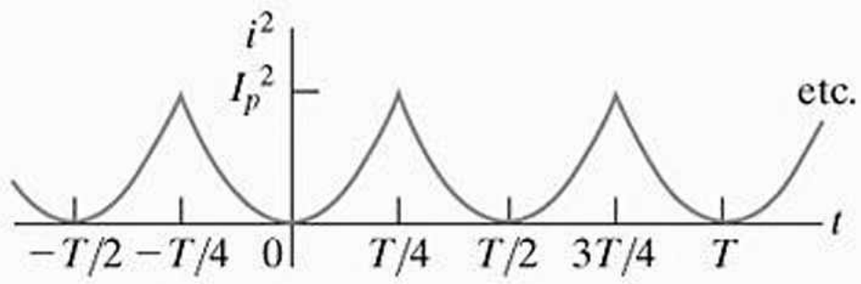


Figura 9.4 ▲ i^2 em função de t.

NOTA: Avalie o que entendeu desse material tentando resolver os problemas 9.1, 9.5 e 9.8, apresentados no final deste capítulo.

9.2 Resposta senoidal

Antes de analisarmos a resposta de regime permanente a fontes senoidais, vamos considerar o problema em termos mais amplos, isto é, em termos da resposta total. Essa visão geral o ajudará a manter a solução de regime permanente em perspectiva. O circuito mostrado na Figura 9.5 descreve a natureza geral do problema. Nesse circuito, v_s é uma tensão senoidal, ou

$$v_s = V_m \cos(\omega t + \phi). \tag{9.7}$$

Por conveniência, admitimos que a corrente inicial no circuito seja zero e tomamos como referência de tempo desde o momento em que a chave é fechada. Deseja-se determinar a expressão para $i(t)$ quando $t \geq 0$. Isso é semelhante a determinar a resposta a um degrau de um circuito RL, como no Capítulo 7. A única diferença é que, agora, a fonte de tensão é uma tensão senoidal que varia com o tempo, em vez de uma tensão

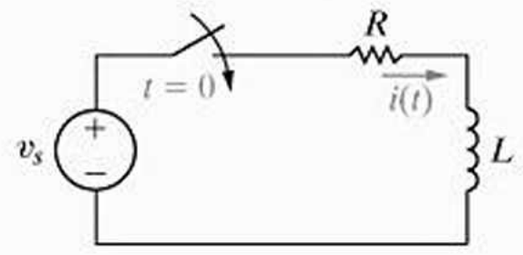


Figura 9.5 ▲ Circuito RL excitado por uma fonte de tensão senoidal.

constante, ou cc. A aplicação direta da lei das tensões de Kirchhoff ao circuito mostrado na Figura 9.5 resulta na equação diferencial ordinária

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V_m \cos(\omega t + \phi), \tag{9.8}$$

cuja solução formal é discutida em qualquer curso introdutório de equações diferenciais. Pedimos aos que ainda não estudaram equações diferenciais que aceitem que a solução para i seja

$$i = \frac{-V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\phi - \theta) e^{-(R/L)t} + \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t + \phi - \theta). \tag{9.9}$$

onde θ é definido como o ângulo cuja tangente é $\omega L/R$. Assim, podemos facilmente determinar θ para um circuito excitado por uma fonte senoidal de freqüência conhecida.

Podemos verificar a validade da Equação 9.9 confirmando que ela satisfaz a Equação 9.8 para todos os valores de $t \geq 0$; deixamos que você faça essa verificação no Problema 9.10.

O primeiro termo do lado direito da Equação 9.9 é denominado *componente transitória* da corrente porque ele torna-se infinitesimal à medida que o tempo passa. O segundo termo do lado direito é conhecido como *componente de regime permanente* da solução e existe enquanto a chave permanecer fechada e a fonte continuar a fornecer a tensão senoidal. Neste capítulo, desenvolvemos uma técnica para calcular diretamente a resposta de regime permanente, evitando assim o problema de resolver a equação diferencial. Contudo, ao usarmos essa técnica, deixamos de obter tanto a componente transitória quanto a resposta total, que é a soma das componentes de regime transitório e de regime permanente.

Agora, analisaremos a componente permanente da Equação 9.9. É importante lembrar as seguintes características da solução desse tipo de regime permanente:

1. A solução de regime permanente é uma função senoidal.
2. A freqüência do sinal de resposta é idêntica à freqüência do sinal da fonte. Essa condição é sempre verdadeira em um circuito linear em que os parâmetros de circuito R, L e C são constantes. (Se as freqüências nos sinais de resposta não estiverem presentes nos sinais da fonte, há um elemento não-linear no circuito.)
3. Em geral, a amplitude máxima da resposta de regime permanente é diferente da amplitude máxima da fonte. Para o circuito que estamos discutindo, a amplitude máxima do sinal de resposta é $V_m/\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$ e a amplitude máxima do sinal da fonte é V_m.
4. Em geral, o ângulo de fase do sinal de resposta é diferente do ângulo de fase da fonte. Para o circuito que estamos discutindo, o ângulo de fase da corrente é $\phi - \theta$ e o da fonte de tensão é ϕ. Vale a pena lembrar essas características porque elas o ajudam a entender a motivação para o método dos fasores, que apresentaremos na Seção 9.3. Em particular, observe que, uma vez tomada a decisão de determinar somente a resposta de regime permanente, a tarefa reduz-se a determinar a amplitude máxima e o ângulo de fase do sinal de resposta. A forma de onda e a freqüência da resposta já são conhecidas.

NOTA: Avalie o que entendeu desse material tentando resolver o Problema 9.9, apresentado no final deste capítulo.

9.3 O conceito de fasor

Fasor é um número complexo que contém as informações de amplitude e ângulo de fase de uma função senoidal.[1] O conceito de fasor é fundamentado na identidade de Euler, que relaciona a função exponencial com a função trigonométrica:

$$e^{\pm j\theta} = \cos\theta \pm j \operatorname{sen}\theta. \tag{9.10}$$

A Equação 9.10 é importante aqui porque nos dá outro modo de expressar as funções co-seno e seno. Podemos considerar a função co-seno como a parte real da função exponencial e a função seno como a parte imaginária da função exponencial; isto é,

$$\cos\theta = \Re\{e^{j\theta}\}, \tag{9.11}$$

e

$$\operatorname{sen}\theta = \Im\{e^{j\theta}\}, \tag{9.12}$$

onde $\Re$ significa 'a parte real de' e $\Im$ significa 'a parte imaginária de'.

Como já optamos por usar a função co-seno na análise do regime permanente senoidal (veja a Seção 9.1), podemos aplicar a Equação 9.11 diretamente. Em particular, escrevemos a função tensão senoidal dada pela Equação 9.1 na forma sugerida pela Equação 9.11:

$$\begin{aligned} v &= V_m \cos(\omega t + \phi) \\ &= V_m \Re\{e^{j(\omega t + \phi)}\} \\ &= V_m \Re\{e^{j\omega t} e^{j\phi}\}. \end{aligned} \tag{9.13}$$

Podemos movimentar o coeficiente V_m dentro do argumento da parte real da função sem alterar o resultado. Também podemos inverter a ordem das duas funções exponenciais dentro do argumento e escrever a Equação 9.13 como

$$v = \Re\{V_m e^{j\phi} e^{j\omega t}\}. \tag{9.14}$$

Observe que, na Equação 9.14, a quantidade $V_m e^{j\phi}$ é um número complexo que contém a informação sobre a amplitude e o ângulo de fase da função senoidal dada. Esse número complexo é, por definição, a *representação do fasor*, ou a *transformada fasorial* da função senoidal dada. Assim,

$$\mathbf{V} = V_m e^{j\phi} = \mathcal{P}\{V_m \cos(\omega t + \phi)\} \tag{9.15}$$

(Transformada fasorial)

[1] Se você se sentir um pouco inseguro em relação aos números complexos, consulte o Apêndice B.

onde a notação $\mathcal{P}\{V_m \cos(\omega t + \phi)\}$ é lida "a transformada fasorial de $V_m \cos(\omega t + \phi)$". Assim, a transformada fasorial transfere a função senoidal do domínio do tempo para o domínio dos números complexos que também é denominado *domínio da freqüência*, visto que, em geral, a resposta depende de ω. Como no caso da Equação 9.15, em todo este livro representaremos o fasor usando uma letra em negrito.

A Equação 9.15 é a forma polar de um fasor, mas também podemos expressá-lo em forma retangular. Assim, reescrevemos a Equação 9.15 como

$$\mathbf{V} = V_m \cos \phi + jV_m \operatorname{sen} \phi. \tag{9.16}$$

Ambas as formas, polar e retangular, são úteis em aplicações de circuito.

Ainda temos um comentário adicional sobre a Equação 9.15. A ocorrência freqüente da função exponencial $e^{j\phi}$ resultou em uma abreviação que simplifica sua expressão textual. Essa abreviação é a notação angular

$$1\underline{/\phi^\circ} \equiv 1e^{j\phi}.$$

Usamos essa notação extensivamente no material que vem a seguir.

Transformada inversa fasorial

Até aqui enfatizamos a passagem da função senoidal para sua transformada fasorial. Contudo, também podemos inverter o processo. Isto é, podemos escrever, para um fasor, a expressão para a função senoidal. Assim, para $\mathbf{V} = 100\underline{/-26^\circ}$, a expressão para v é $100 \cos(\omega t - 26^\circ)$, porque decidimos usar a função co-seno para todas as senóides. Observe que não podemos deduzir o valor de ω a partir de um fasor porque este contém apenas as informações de amplitude e fase. A etapa de passar da transformada fasorial para a expressão no domínio do tempo é denominada *obter a transformada inversa fasorial* e é formalizada pela equação

$$\mathcal{P}^{-1}\{V_m e^{j\phi}\} = \Re\{V_m e^{j\phi} e^{j\omega t}\}, \tag{9.17}$$

onde a notação $\mathcal{P}^{-1}\{V_m e^{j\phi}\}$ é lida como "a transformada fasorial inversa de $V_m e^{j\phi}$". A Equação 9.17 indica que, para determinarmos a transformada fasorial inversa, multiplicamos o fasor por $e^{j\omega t}$ e, então, extraímos a parte real do produto.

A transformada fasorial é útil em análise de circuitos porque reduz a tarefa de determinar a amplitude máxima e o ângulo de fase da resposta de regime permanente senoidal à álgebra de números complexos. As seguintes observações confirmam essa conclusão:

1. A componente transitória desaparece à medida que o tempo passa, portanto a componente de regime permanente da solução também deve satisfazer à equação diferencial. (Veja o Problema 9.10[b].)
2. Em um circuito linear excitado por fontes senoidais, a resposta de regime permanente também é senoidal, e sua freqüência é a mesma da fonte senoidal.
3. Usando a notação apresentada na Equação 9.11, podemos postular que a solução de regime permanente é da forma $\Re\{Ae^{j\beta}e^{j\omega t}\}$, onde A é a amplitude máxima da resposta e β é o ângulo de fase da resposta.
4. Quando substituímos a solução de regime permanente postulada na equação diferencial, o termo exponencial $e^{j\omega t}$ é cancelado, fazendo com que a solução para A e β se dê no domínio dos números complexos.

Ilustramos essas observações com o circuito mostrado na Figura 9.5. Sabemos que a solução de regime permanente para a corrente i é da forma

$$i_{\text{rp}}(t) = \Re\{I_m e^{j\beta} e^{j\omega t}\}, \tag{9.18}$$

onde o índice "rp" enfatiza que estamos lidando com a solução de regime permanente. Quando substituímos a Equação 9.18 na Equação 9.8, geramos a expressão

$$\Re\{j\omega L I_m e^{j\beta} e^{j\omega t}\} + \Re\{R I_m e^{j\beta} e^{j\omega t}\} = \Re\{V_m e^{j\theta} e^{j\omega t}\}. \tag{9.19}$$

Para deduzirmos a Equação 9.19, usamos o fato de que a diferenciação, bem como a multiplicação, por uma constante pode ser executada na parte real de uma expressão. Também reescrevemos o lado direito da Equação 9.8 usando a notação da Equação 9.11. Pela álgebra de números complexos, sabemos que a soma das partes reais é igual à parte real da soma. Assim, podemos reduzir o lado esquerdo da Equação 9.19 a um único termo:

$$\Re\{(j\omega L + R) I_m e^{j\beta} e^{j\omega t}\} = \Re\{V_m e^{j\theta} e^{j\omega t}\}. \tag{9.20}$$

Lembre-se de que a decisão que tomamos de utilizar a função co-seno na análise da resposta de um circuito no regime permanente nos leva à utilização do operador $\Re$ para a dedução da Equação 9.20. Se, ao contrário, tivéssemos preferido utilizar a função seno em nossa análise do regime permanente senoidal, teríamos aplicado a Equação 9.12 diretamente, no lugar da Equação 9.11, e o resultado seria a Equação 9.21:

$$\Im\{(j\omega L + R) I_m e^{j\beta} e^{j\omega t}\} = \Im\{V_m e^{j\theta} e^{j\omega t}\}. \tag{9.21}$$

Observe que as quantidades complexas de qualquer lado da Equação 9.21 são idênticas às de quaisquer lados da Equação 9.20. Quando a parte real e a parte imaginária de duas quantidades complexas são iguais, então as próprias quantidades complexas são iguais. Assim, pelas equações 9.20 e 9.21,

$$(j\omega L + R) I_m e^{j\beta} = V_m e^{j\phi},$$

ou

$$I_m e^{j\beta} = \frac{V_m e^{j\phi}}{R + j\omega L}. \tag{9.22}$$

Observe que $e^{j\omega t}$ foi eliminado da determinação da amplitude (I_m) e do ângulo de fase (β) da resposta. Assim, para esse circuito, a tarefa de determinar I_m e β envolve a manipulação algébrica das quantidades complexas $V_m e^{j\phi}$ e $R + j\omega L$. Observe que encontramos a forma polar e também a forma retangular.

Aqui é bom fazer uma advertência: a transformada fasorial, com a transformada fasorial inversa, nos permite ir e vir entre o domínio do tempo e o domínio da freqüência. Por conseguinte, quando obtemos uma solução, ou estamos no domínio do tempo ou no domínio da freqüência. Não

podemos estar em ambos os domínios simultaneamente. Qualquer solução que contenha uma combinação de nomenclatura dos domínios do tempo e fasorial é absurda.

A transformada fasorial também é útil em análise de circuitos porque ela se aplica diretamente à soma de funções senoidais. Como a análise de circuitos, quase sempre, envolve a soma de correntes e tensões, a importância dessa observação é óbvia. Podemos formalizar essa propriedade da seguinte maneira:

$$v = v_1 + v_2 + \ldots + v_n, \tag{9.23}$$

onde todas as tensões do lado direito são tensões senoidais de mesma freqüência, então

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \ldots + \mathbf{V}_n. \tag{9.24}$$

Assim, a representação do fasor é a soma dos fasores dos termos individuais. Discutiremos o desenvolvimento da Equação 9.24 na Seção 9.5.

Antes de aplicarmos a transformada fasorial à análise de circuitos, ilustraremos sua utilidade na resolução de um problema que você já conhece: somar funções senoidais via identidades trigonométricas. O Exemplo 9.5 mostra como a transformada fasorial simplifica muito esse tipo de problema.

Exemplo 9.5 Soma de co-senos usando fasores

Se $y_1 = 20 \cos(\omega t - 30°)$ e $y_2 = 40 \cos(\omega t + 60°)$, expresse $y = y_1 + y_2$ como uma única função senoidal.

a) Resolva o problema usando identidades trigonométricas.

b) Resolva o problema usando o conceito de fasor.

Solução

a) Em primeiro lugar expandimos y_1 e y_2 usando o co-seno da soma de dois ângulos, para obter

$$y_1 = 20 \cos \omega t \cos 30° + 20 \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} 30°;$$

$$y_2 = 40 \cos \omega t \cos 60° - 40 \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} 60°.$$

Somando y_1 e y_2, obtemos

$$\begin{aligned} y &= (20 \cos 30 + 40 \cos 60) \cos \omega t \\ &\quad + (20 \operatorname{sen} 30 - 40 \operatorname{sen} 60) \operatorname{sen} \omega t \\ &= 37{,}32 \cos \omega t - 24{,}64 \operatorname{sen} \omega t \end{aligned}$$

Para combinar esses dois termos, tratamos os coeficientes do co-seno e do seno como lados de um triângulo retângulo (Figura 9.6) e, então, multiplicamos e dividimos o lado direito pela hipotenusa. Nossa expressão para y torna-se

$$y = 44{,}72\left(\frac{37{,}32}{44{,}72}\cos \omega t - \frac{24{,}64}{44{,}72}\operatorname{sen} \omega t\right)$$

$$= 44{,}72(\cos 33{,}43° \cos \omega t - \operatorname{sen} 33{,}43° \operatorname{sen} \omega t).$$

Mais uma vez, usamos a identidade que envolve o co-seno da soma de dois ângulos e escrevemos

$$y = 44{,}72 \cos(\omega t + 33{,}43°).$$

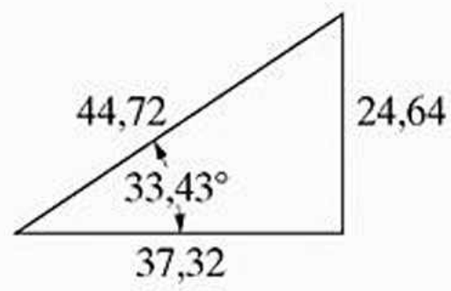


Figura 9.6 ▲ Triângulo retângulo usado na solução para y.

b) Podemos resolver o problema usando fasores da seguinte forma:

$$y = y_1 + y_2,$$

então, pela Equação 9.24,

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 \\ &= 20\angle -30° + 40\angle 60° \\ &= (17{,}32 - j10) + (20 + j34{,}64) \\ &= 37{,}32 + j24{,}64 \\ &= 44{,}72\angle 33{,}43°. \end{aligned}$$

Uma vez conhecido o fasor Y, podemos escrever a função trigonométrica correspondente para y tomando a transformada fasorial inversa:

$$y = \mathcal{P}^{-1}\{44{,}72e^{j33{,}43}\} = \Re\{44{,}72e^{j33{,}43}e^{j\omega t}\}$$

$$= 44{,}72 \cos(\omega t + 33{,}43°).$$

A essa altura, a superioridade da abordagem de fasor para somar funções senoidais deve ser óbvia. Observe que o método pressupõe a capacidade de ir e vir entre as formas polar e retangular de números complexos.

✔ PROBLEMAS PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 1 — Entender o conceito de fasor e saber executar uma transformada fasorial e uma transformada fasorial inversa

9.1 Determine a transformada fasorial de cada função trigonométrica:

a) $v = 170 \cos(377t - 40°)$ V.

b) $i = 10 \operatorname{sen}(1.000t + 20°)$ A.

c) $i = [5 \cos(\omega t + 36{,}87°) + 10 \cos(\omega t - 53{,}13°)]$ A.

d) $v = [300 \cos(20.000\pi t + 45°) - 100 \operatorname{sen}(20.000\pi t + 30°)]$ mV.

Resposta: (a) $170\angle -40°$ V; (c) $11{,}18\angle -26{,}57°$ A;
(b) $10\angle -70°$ A; (d) $339{,}90\angle 61{,}51°$ mV.

9.2 Determine a expressão no domínio do tempo correspondente a cada fasor:

a) $\mathbf{V} = 18{,}6\angle -54°$ V.

b) $\mathbf{I} = (20\angle 45° - 50\angle -30°)$ mA.

c) $\mathbf{V} = (20 + j80 - 30\angle 15°)$ V.

Resposta: (a) 18,6 cos (ωt – 54°) V;
(b) 48,81 cos (ωt + 126,68°) mA;
(c) 72,79 cos (ωt + 97,08°) V.

NOTA: Tente resolver também o Problema 9.12, *apresentado no final deste capítulo.*

9.4 Elementos passivos no domínio da freqüência

A aplicação sistemática da transformada fasorial à análise de circuitos pressupõe duas etapas. Na primeira, devemos estabelecer a relação entre a corrente fasorial e a tensão fasorial nos terminais dos elementos passivos do circuito. Na segunda, devemos desenvolver a versão das leis de Kirchhoff no domínio fasorial, que discutimos na Seção 9.5. Nesta seção, estabelecemos a relação entre a corrente e a tensão fasoriais nos terminais do resistor, do indutor e do capacitor. Começamos com o resistor e usamos a convenção passiva em todas as deduções.

A relação V-I para um resistor

Pela lei de Ohm, se a corrente em um resistor variar senoidalmente com o tempo — isto é, se $i = I_m \cos(\omega t + \theta_i)$ — a tensão nos terminais do resistor, como mostra a Figura 9.7, será

$$\begin{aligned} v &= R[I_m \cos(\omega t + \theta i)] \\ &= RI_m[\cos(\omega t + \theta i)], \end{aligned} \tag{9.25}$$

onde I_m é a amplitude máxima da corrente em ampères e θ_i é o ângulo de fase da corrente.

A transformada fasorial dessa tensão é

$$\mathbf{V} = RI_m e^{j\theta_i} = RI_m\angle\theta_i. \tag{9.26}$$

Como $I_m\angle\theta_i$ é a representação fasorial da corrente senoidal, podemos escrever a Equação 9.26 como

$$\mathbf{V} = R\mathbf{I}, \tag{9.27}$$

(Relação entre tensão e corrente fasoriais para um resistor)

que afirma que a tensão fasorial nos terminais de um resistor é simplesmente a resistência vezes a corrente fasorial. A Figura 9.8 mostra o diagrama do circuito para um resistor no domínio da freqüência.

As equações 9.25 e 9.27 contêm outra informação importante, ou seja, que nos terminais de um resistor não há nenhum deslocamento de fase entre a corrente e a tensão. A Figura 9.9 demonstra essa relação de fase, na qual o ângulo de fase das formas de onda da tensão é 60°. Diz-se que os sinais estão *em fase* porque ambos alcançam valores correspondentes em suas respectivas curvas ao mesmo tempo (por exemplo, ambos estão em seus máximos positivos no mesmo instante).

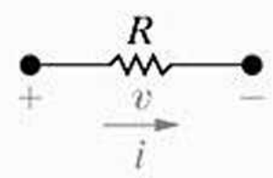


Figura 9.7 ▲ Elemento resistivo percorrido por uma corrente senoidal.

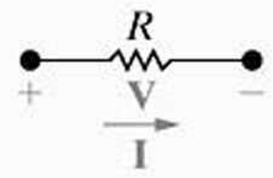


Figura 9.8 ▲ Circuito equivalente de um resistor no domínio da freqüência.

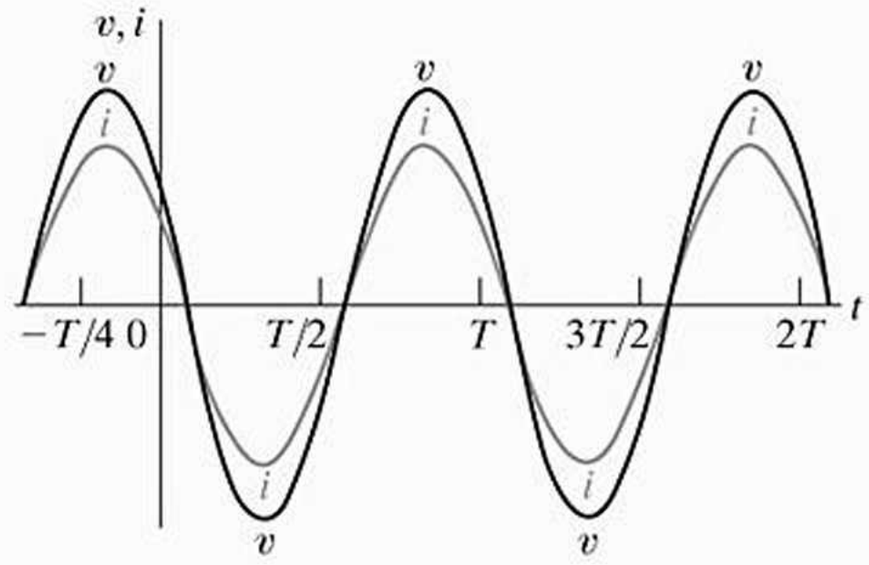


Figura 9.9 ▲ Gráfico mostrando que a tensão e a corrente nos terminais de um resistor estão em fase.

A relação V-I para um indutor

Deduzimos a relação entre a corrente fasorial e a tensão de fasor nos terminais de um indutor admitindo uma corrente senoidal e usando $L di/dt$ para calcular a tensão correspondente. Assim, para $i = I_m \cos(\omega t + \theta_i)$, a expressão para a tensão é

$$v = L\frac{di}{dt} = -\omega L I_m \operatorname{sen}(\omega t + \theta_i). \tag{9.28}$$

Agora, reescrevemos a Equação 9.28 usando a função co-seno:

$$v = -\omega L I_m \cos(\omega t + \theta_i - 90°). \tag{9.29}$$

A representação fasorial da tensão, dada pela Equação 9.29, é

$$\begin{aligned}\mathbf{V} &= -\omega L I_m e^{j(\theta_i - 90^\circ)} \\ &= -\omega L I_m e^{j\theta_i} e^{-j90^\circ} \\ &= j\omega L I_m e^{j\theta_i} \\ &= j\omega L \mathbf{I}.\end{aligned} \tag{9.30}$$

(Relação entre tensão e corrente fasoriais para um indutor)

Observe que, ao deduzirmos a Equação 9.30, usamos a identidade

$$e^{-j90^\circ} = \cos 90^\circ - j \operatorname{sen} 90^\circ = -j$$

Segundo a Equação 9.30, a tensão fasorial nos terminais de um indutor é igual a $j\omega L$ vezes a corrente fasorial. A Figura 9.10 mostra o circuito equivalente no domínio da freqüência para o indutor. É importante observar que a relação entre a tensão fasorial e a corrente fasorial para um indutor aplica-se também à indutância mútua em um enrolamento devido à corrente que flui em outro enrolamento mutuamente acoplado. Isto é, a tensão fasorial nos terminais de um enrolamento de um par de enrolamentos mutuamente acoplados é igual a $j\omega M$ vezes a corrente fasorial no outro enrolamento.

Podemos reescrever a Equação 9.30 como

$$\begin{aligned}\mathbf{V} &= (\omega L \angle 90^\circ) I_m \angle \theta_i \\ &= \omega L I_m \angle (\theta_i + 90)^\circ,\end{aligned} \tag{9.31}$$

que indica que a tensão e a corrente estão defasadas em exatamente 90°. Em particular, a tensão está adiantada de 90° em relação à corrente ou, o que é equivalente, a corrente está atrasada de 90° em relação à tensão. A Figura 9.11 ilustra esse conceito de *tensão adiantada em relação à corrente* ou *corrente atrasada em relação à tensão*. Por exemplo, a tensão atinge seu pico negativo exatamente 90° antes que a corrente alcance seu pico negativo. A mesma observação pode ser em relação aos pontos de passagem de valores negativos para positivos ou ao pico positivo.

Também podemos expressar o deslocamento de fase em segundos. Uma defasagem de 90° corresponde a um quarto de período; daí, a tensão está adiantada em relação à corrente de $T/4$, ou $\frac{1}{4f}$ segundo.

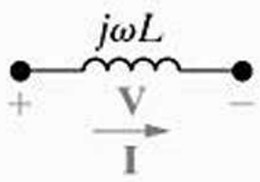


Figura 9.10 ▲ Circuito equivalente no domínio da freqüência para um indutor.

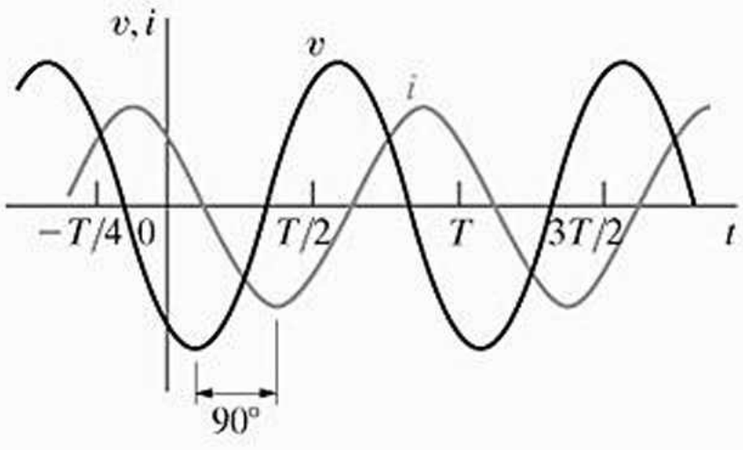


Figura 9.11 ◀ Gráfico mostrando a relação entre as fases da corrente e da tensão nos terminais de um indutor ($\theta_i = 60°$).

A relação V-I para um capacitor

Obtemos a relação entre a corrente fasorial e a tensão fasorial nos terminais de um capacitor de forma semelhante à usada para a obtenção da Equação 9.30. Em outras palavras, se observarmos que, para um capacitor,

$$i = C\frac{dv}{dt},$$

e admitirmos que

$$v = V_m \cos(\omega t + \theta_v),$$

então,

$$\mathbf{I} = j\omega C \mathbf{V}. \tag{9.32}$$

Agora, se resolvermos a Equação 9.32 para a tensão como uma função da corrente, obtemos

$$\mathbf{V} = \frac{1}{j\omega C}\mathbf{I}. \tag{9.33}$$

(Relação entre tensão e corrente fasoriais para um capacitor)

A Equação 9.33 demonstra que o circuito equivalente para o capacitor no domínio fasorial é como mostra a Figura 9.12.

A tensão nos terminais de um capacitor está atrasada de exatamente 90° em relação à corrente. Podemos mostrar essa relação com facilidade reescrevendo a Equação 9.33 como

$$\begin{aligned}\mathbf{V} &= \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ I_m \angle \theta_i^\circ \\ &= \frac{I_m}{\omega C} \angle (\theta_i - 90)^\circ.\end{aligned} \tag{9.34}$$

O modo alternativo de expressar a relação de fase da Equação 9.34 é dizer que a corrente está adiantada de 90° em relação à tensão. A Figura 9.13 mostra a relação entre as fases da corrente e da tensão nos terminais de um capacitor.

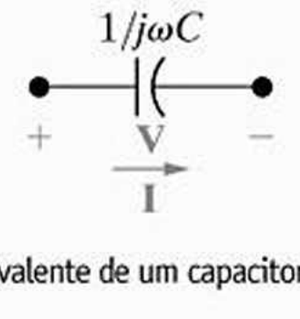


Figura 9.12 ▲ Circuito equivalente de um capacitor no domínio da freqüência.

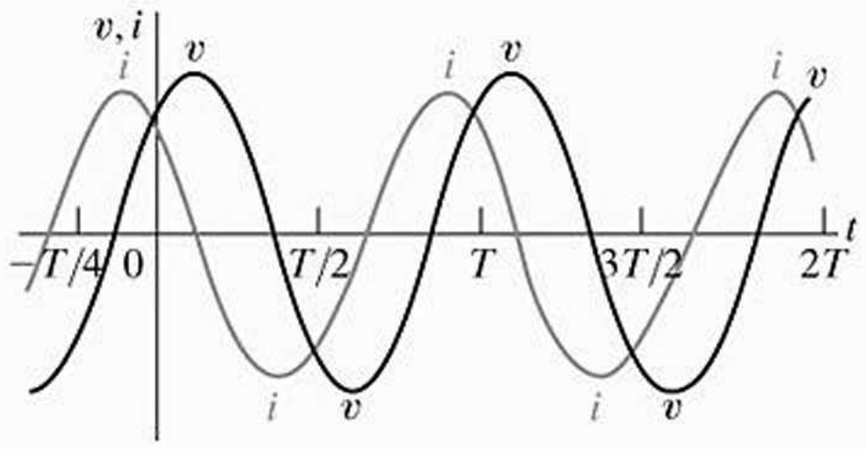


Figura 9.13 ▲ Gráfico mostrando a relação entre as fases da corrente e da tensão nos terminais de um capacitor ($\theta_i = 60°$).

Impedância e reatância

Concluímos essa discussão com uma observação importante. Quando comparamos as equações 9.27, 9.30 e 9.33, observamos que elas são todas da forma

$$\mathbf{V} = Z\mathbf{I}, \tag{9.35}$$

(Definição de impedância)

onde Z representa a *impedância* do elemento de circuito. Resolvendo a Equação 9.35 para Z, você pode ver que a impedância é a razão entre o fasor tensão de um elemento de circuito e seu fasor corrente. Assim, a impedância de um resistor é R, a impedância de um indutor é $j\omega L$, a impedância da indutância mútua é $j\omega M$, e a impedância de um capacitor é $1/j\omega C$. Em todos os casos, a impedância é medida em ohms. Observe que, embora a impedância seja um número complexo, ela não é um fasor. Lembre-se de que um fasor é um número complexo que aparece como o coeficiente de $e^{j\omega t}$. Por isso, embora todos os fasores sejam números complexos, nem todos os números complexos são fasores.

Impedância no domínio da freqüência é a quantidade análoga à resistência, indutância e capacitância no domínio do tempo. A parte imaginária da impedância é denominada *reatância*. Os valores de impedância e reatância para cada um dos componentes passivos estão reunidos na Tabela 9.1.

TABELA 9.1 Valores de impedância e reatância

Elemento de circuito	Impedância	Reatância
Resistor	R	—
Indutor	$j\omega L$	ωL
Capacitor	$j(-1/\omega C)$	$-1/\omega C$

Por fim, um lembrete. Se o sentido de referência para a corrente em um elemento passivo estiver no sentido da elevação da tensão no elemento, devemos inserir um sinal negativo na equação que relaciona a tensão com a corrente.

9.5 As leis de Kirchhoff no domínio da freqüência

Na Seção 9.3, dissemos, com referência às equações 9.23 e 9.24, que a transformada fasorial é útil na análise de circuitos porque se aplica à soma de funções senoidais. Ilustramos essa utilidade no Exemplo 9.5. Agora, formalizamos essa observação desenvolvendo as leis de Kirchhoff no domínio da freqüência.

Lei das tensões de Kirchhoff no domínio da freqüência

Começamos admitindo que $v_1 - v_n$ representam tensões ao longo de um caminho fechado em um circuito. Admitimos também que o circuito está funcionando em um regime permanente senoidal. Assim, a lei das tensões de Kirchhoff requer que

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n = 0, \tag{9.36}$$

que, no regime permanente senoidal torna-se complexa

$$V_{m_1}\cos(\omega t + \theta_1) + V_{m_2}\cos(\omega t + \theta_2) \ldots + V_{m_n}\cos(\omega t + \theta_n) = 0. \tag{9.37}$$

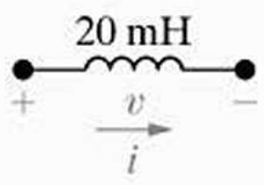
Agora, usamos a identidade de Euler para escrever a Equação 9.37 como

$$\Re\{V_{m_1} e^{j\theta_1} e^{j\omega t} + R\{V_{m_2} e^{j\theta_2} e^{j\omega t} + \ldots + \Re\{V_{m_n} e^{j\theta_n} e^{j\omega t}\}, \tag{9.38}$$

✔ PROBLEMAS PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 2 — Saber transformar um circuito com uma fonte senoidal para o domínio da freqüência usando o conceito de fasor

9.3 A corrente no indutor de 20 mH é 10 cos (10.000t + 30°) mA. Calcule (a) a reatância indutiva; (b) a impedância do indutor; (c) a tensão fasorial **V** e (d) a expressão de regime permanente para $v(t)$.



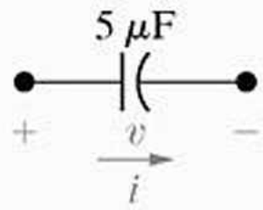
Resposta: (a) 200 Ω;

(b) $j200$ Ω;

(c) $2\angle 120°$ V;

(d) 2 cos (10.000t + 120°) V.

9.4 A tensão nos terminais do capacitor de 5 μF é 30 cos (4.000t + 25°) V. Calcule (a) a reatância capacitiva; (b) a impedância do capacitor; (c) a corrente fasorial **I** e (d) a expressão de regime permanente para $i(t)$.



Resposta: (a) −50 Ω;

(b) $-j50$ Ω;

(c) $0{,}6\angle 115°$ A;

(d) 0,6 cos (4.000t + 115°)A.

NOTA: Tente resolver também os problemas 9.13 *e* 9.15, *apresentados no final deste capítulo.*

que reescrevemos como

$$\Re\{ V_{m_1} e^{j\theta_1} e^{j\omega t} + V_{m_2} e^{j\theta_2} e^{j\omega t} + \ldots + V_{m_n} e^{j\theta_n} e^{j\omega t}\} = 0. \quad (9.39)$$

Fatorando o termo $e^{j\omega t}$ de cada termo, obtemos

$$\Re\{(V_{m_1} e^{j\theta_1} + V_{m_2} e^{j\theta_2} + \ldots + V_{m_n} e^{j\theta_n}) e^{j\omega t}\} = 0,$$

ou

$$\Re\{(\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \ldots + \mathbf{V}_n) e^{j\omega t}\} = 0. \quad (9.40)$$

Mas $e^{j\omega t} \neq 0$, portanto

$$\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \cdots + \mathbf{V}_n = 0, \quad (9.41)$$

(LTK no domínio da freqüência)

que é o enunciado da lei das tensões de Kirchhoff como aplicada às tensões fasoriais. Em outras palavras, a Equação 9.36 aplica-se a um conjunto de tensões senoidais no domínio do tempo e a Equação 9.41 é o enunciado equivalente no domínio da freqüência.

Lei das correntes de Kirchhoff no domínio da freqüência

Uma dedução semelhante aplica-se a um conjunto de correntes senoidais. Assim, se

$$i_1 + i_2 + \ldots + i_n = 0 \quad (9.42)$$

então,

$$\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \cdots + \mathbf{I}_n = 0, \quad (9.43)$$

(LCK no domínio da freqüência)

onde $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \ldots, \mathbf{I}_n$ são as representações fasoriais das correntes individuais $i_1, i_2, \ldots, i_n$.

As equações 9.35, 9.41 e 9.43 formam a base para a análise de circuitos no domínio da freqüência. Observe que a Equação 9.35 tem a mesma forma algébrica da lei de Ohm e que as equações 9.41 e 9.43 enunciam as leis de Kirchhoff para quantidades fasoriais. Por conseguinte, podemos usar todas as técnicas desenvolvidas para análise de circuitos resistivos para determinar correntes e tensões fasoriais. Não é necessário aprender nenhuma técnica analítica nova; todas as ferramentas básicas de análise de circuitos e as combinações em série e paralelo de elementos discutidas nos capítulos 2–4 podem ser usadas para analisar circuitos no domínio da freqüência. A análise de circuitos fasoriais se divide em duas etapas fundamentais: (1) Você deve saber construir o modelo de um circuito no domínio da freqüência e (2) você deve saber manipular algebricamente quantidades e/ou números complexos. Ilustramos esses aspectos da análise fasorial na discussão apresentada a seguir, começando com associações em série, em paralelo e transformações Δ-Y.

9.6 Associações em série, em paralelo e transformações Δ-Y

As regras para associar impedâncias em série ou em paralelo e para fazer transformações Δ-Y são as mesmas que para resistores. A única diferença é que associações de impedâncias envolvem a manipulação algébrica de números complexos.

Combinação de impedâncias em série e em paralelo

Impedâncias em série podem ser transformadas em uma única impedância equivalente pela simples soma das impedâncias individuais. O circuito mostrado na Figura 9.14 define o problema em termos gerais. As impedâncias $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ estão ligadas em série entre os terminais a e b. Impedâncias em série conjugam a mesma corrente fasorial $\mathbf{I}$. Pela Equação 9.35, a queda de tensão em cada impedância é $Z_1\mathbf{I}, Z_2\mathbf{I}, \ldots, Z_n\mathbf{I}$ e, pela lei das tensões de Kirchhoff,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{ab} &= Z_1\mathbf{I} + Z_2\mathbf{I} + \ldots + Z_n\mathbf{I} \\ &= (Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n)\mathbf{I}. \end{aligned} \quad (9.44)$$

A impedância equivalente entre os terminais a e b é

$$Z_{ab} = \frac{\mathbf{V}_{ab}}{\mathbf{I}} = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n. \quad (9.45)$$

O Exemplo 9.6 ilustra uma aplicação numérica da Equação 9.45.

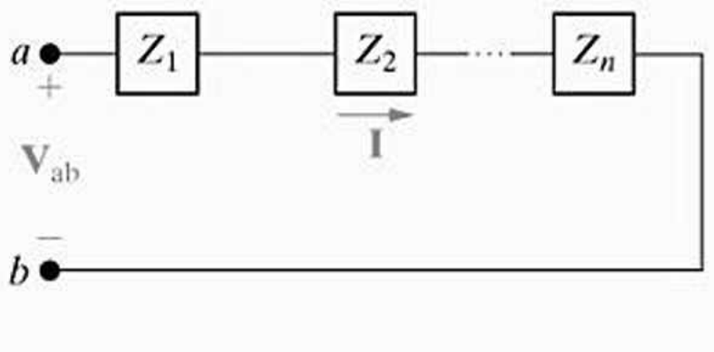


Figura 9.14 ◄ Impedâncias em série.

✔ PROBLEMA PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 3 — Saber como usar técnicas de análise de circuitos para resolver um circuito no domínio da freqüência

9.5 Quatro ramos terminam em um nó de referência. O sentido de referência de cada corrente de ramo (i_1, i_2, i_3 e i_4) é em direção ao nó. Se

$i_1 = 100 \cos(\omega t + 25°)$ A,

$i_2 = 100 \cos(\omega t + 145°)$ A e

$i_3 = 100 \cos(\omega t - 95°)$ A, determine i_4.

Resposta: $i_4 = 0$.

NOTA: Tente resolver também os problemas 9.14 *e* 9.16, *apresentados no final deste capítulo.*

Exemplo 9.6 Combinação de impedâncias em série

Um resistor de 90 Ω, um indutor de 32 mH e um capacitor de 5 μF estão ligados em série aos terminais de uma fonte de tensão senoidal, como mostra a Figura 9.15. A expressão de regime permanente para a tensão da fonte v_s é 750 cos (5.000t + 30°) V.

a) Construa o circuito equivalente no domínio da freqüência.

b) Calcule a corrente de regime permanente i pelo método fasorial.

Solução

a) Pela expressão de v_s, temos ω = 5.000 rad/s. Por conseguinte, a impedância do indutor de 32 mH é

$$Z_L = j\omega L = j(5.000)(32 \times 10^{-3}) = j160\ \Omega,$$

e a impedância do capacitor é

$$Z_C = j\frac{-1}{\omega C} = -j\frac{10^6}{(5.000)(5)} = -j40\ \Omega.$$

A transformada fasorial de v_s é

$$\mathbf{V}_s = 750\angle 30°\ \text{V}.$$

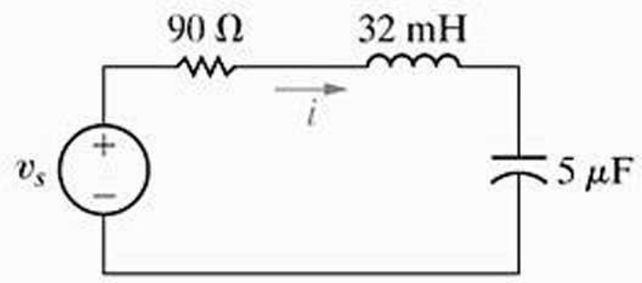


Figura 9.15 ▲ Circuito para o Exemplo 9.6.

A Figura 9.16 ilustra o circuito equivalente no domínio da freqüência do circuito mostrado na Figura 9.15.

b) Calculamos a corrente fasorial pela simples divisão da tensão da fonte pela impedância equivalente vista dos terminais a e b. Pela Equação 9.45,

$$Z_{ab} = 90 + j160 - j40$$

$$= 90 + j120 = 150\angle 53{,}13°\ \Omega.$$

Assim,

$$\mathbf{I} = \frac{750\angle 30°}{150\angle 53{,}13°} = 5\angle -23{,}13°\ \text{A}.$$

Agora, podemos escrever diretamente a expressão de regime permanente para i:

$$i = 5\cos(5.000t - 23{,}13°)\ \text{A}.$$

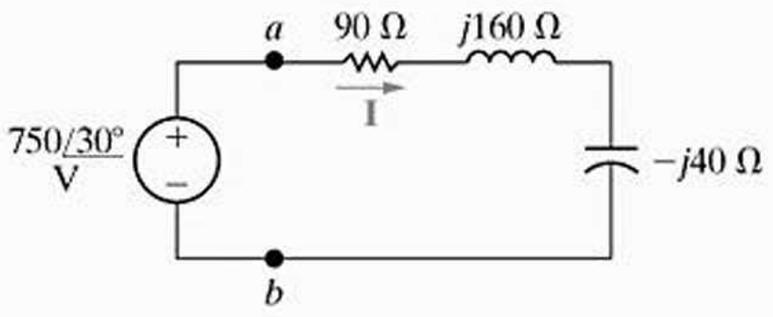


Figura 9.16 ▲ Circuito equivalente no domínio da freqüência para o circuito mostrado na Figura 9.15.

✔ PROBLEMA PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 3 — Saber como usar técnicas de análise de circuitos para resolver um circuito no domínio da freqüência

9.6 Usando os valores de resistência e indutância do circuito na Figura 9.15, sejam $\mathbf{V}_s = 125\angle -60°$ V e ω = 5.000 rad/s. Determine

a) o valor da capacitância que gera uma corrente de saída de regime permanente i com um ângulo de fase de −105°.

b) a amplitude da corrente de saída de regime permanente i.

Resposta: (a) 2,86 μF;
(b) 0,982 A.

NOTA: Tente resolver também o Problema 9.21, apresentado no final deste capítulo.

Impedâncias ligadas em paralelo podem ser reduzidas a uma única impedância equivalente pela relação recíproca

$$\frac{1}{Z_{ab}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \cdots + \frac{1}{Z_n}. \qquad (9.46)$$

A Figura 9.17 ilustra a ligação em paralelo de impedâncias. Observe que, quando impedâncias estão em paralelo, elas têm a mesma tensão em seus terminais. Deduzimos a Equação 9.46 diretamente da Figura 9.17 pela simples utilização da lei das correntes de Kirchhoff em combinação com a versão fasorial da lei de Ohm, isto é, a Equação 9.35. Pela Figura 9.17,

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \ldots + \mathbf{I}_n,$$

ou

$$\frac{\mathbf{V}}{Z_{ab}} = \frac{\mathbf{V}}{Z_1} + \frac{\mathbf{V}}{Z_2} + \cdots + \frac{\mathbf{V}}{Z_n}. \qquad (9.47)$$

Eliminando o termo comum da tensão da Equação 9.47, obtemos a Equação 9.46.

Da Equação 9.46, para o caso especial de apenas duas impedâncias em paralelo,

$$Z_{ab} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}. \tag{9.48}$$

Também podemos expressar a Equação 9.46 em termos de *admitância*, definida como a recíproca da impedância e denotada por *Y*. Assim,

$$Y = \frac{1}{Z} = G + jB \text{ (siemens)}. \tag{9.49}$$

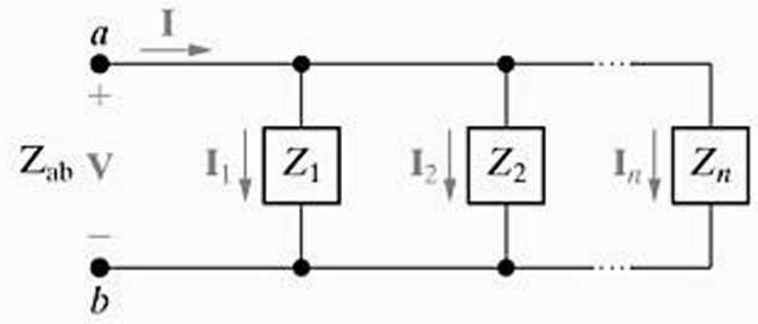


Figura 9.17 ▲ Impedâncias em paralelo.

É claro que a admitância é um número complexo cuja parte real, *G*, é denominada *condutância* e cuja parte imaginária, *B*, é denominada *susceptância*. Como a admitância, a condutância e a susceptância são medidas em siemens (S). Usando a Equação 9.49 na Equação 9.46, obtemos

$$Y_{ab} = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n. \tag{9.50}$$

A admitância de cada um dos elementos passivos ideais está resumida na Tabela 9.2.

O Exemplo 9.7 ilustra a aplicação das equações 9.49 e 9.50 a um circuito específico.

TABELA 9.2 Valores de admitância e susceptância

Elemento de circuito	Admitância (*Y*)	Susceptância
Resistor	G (condutância)	—
Indutor	$j(-1/\omega L)$	$-1/\omega L$
Capacitor	$j\omega C$	ωC

Exemplo 9.7 Associação de impedâncias em série e em paralelo

A fonte de corrente senoidal no circuito mostrado na Figura 9.18 produz a corrente $i_s = 8 \cos 200.000t$ A.

a) Determine o circuito equivalente no domínio da freqüência.

b) Calcule as expressões de regime permanente para v, i_1, i_2 e i_3.

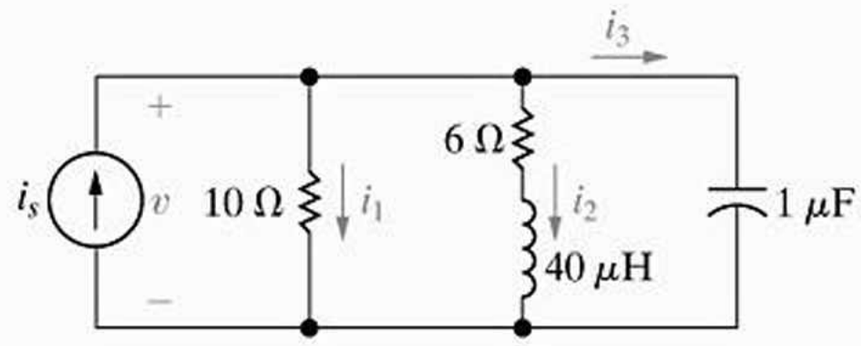


Figura 9.18 ▲ Circuito para o Exemplo 9.7.

Solução

a) A transformada fasorial da fonte de corrente é $8\angle 0°$; os resistores são transformados diretamente para o domínio da freqüência como 10 e 6 Ω; o indutor de 40 μH tem uma impedância de $j8$ Ω na freqüência dada de 200.000 rad/s e, nessa freqüência, o capacitor de 1 μF tem uma impedância de $-j5$ Ω. A Figura 9.19 mostra o circuito equivalente no domínio da freqüência e os símbolos que representam as transformadas fasoriais das incógnitas.

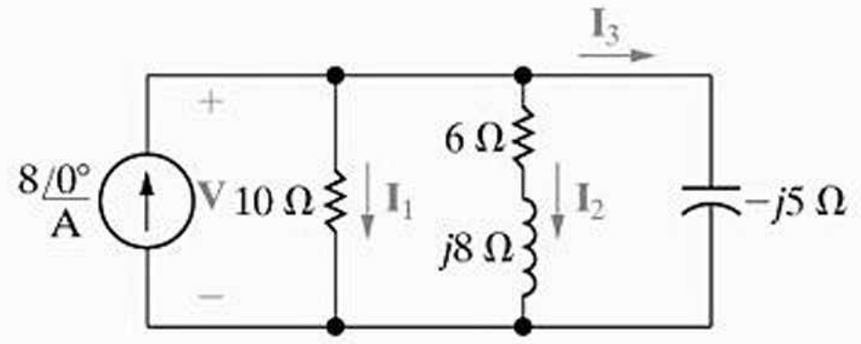


Figura 9.19 ▲ Circuito equivalente no domínio da freqüência.

b) O circuito mostrado na Figura 9.19 indica que podemos obter, com facilidade, a tensão na fonte de corrente uma vez conhecida a impedância equivalente dos três ramos em paralelo. Além do mais, uma vez conhecida **V**, podemos calcular as três correntes fasoriais $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$ e $\mathbf{I}_3$ usando a Equação 9.35. Para determinar a impedância equivalente dos três ramos, em primeiro lugar determinamos a admitância equivalente simplesmente somando as admitâncias de cada ramo. A admitância do primeiro ramo é

$$Y_1 = \frac{1}{10} = 0{,}1 \text{ S},$$

a admitância do segundo ramo é

$$Y_2 = \frac{1}{6 + j8} = \frac{6 - j8}{100} = 0{,}06 - j0{,}08 \text{ S},$$

e a admitância do terceiro ramo é

$$Y_3 = \frac{1}{-j5} = j0{,}2 \text{ S}.$$

A admitância equivalente dos três ramos é

$$\begin{aligned} Y &= Y_1 + Y_2 + Y_3 \\ &= 0{,}16 + j0{,}12 \\ &= 0{,}2\angle 36{,}87° \text{ S}. \end{aligned}$$

A impedância vista pela fonte de corrente é

$$Z = \frac{1}{Y} = 5\angle -36{,}87° \ \Omega.$$

A Tensão **V** é

$$\mathbf{V} = Z\mathbf{I} = 40\angle -36{,}87° \text{ V}.$$

Daí

$$\mathbf{I}_1 = \frac{40\angle -36{,}87°}{10} = 4\angle -36{,}87° = 3{,}2 - j2{,}4 \text{ A},$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{40\angle -36{,}87^\circ}{6 + j8} = 4\angle -90^\circ = -j4 \text{ A},$$

e

$$\mathbf{I}_3 = \frac{40\angle -36{,}87^\circ}{5\angle -90^\circ} = 8\angle 53{,}13^\circ = 4{,}8 + j6{,}4 \text{ A}.$$

Verificamos os cálculos neste ponto confirmando que

$$\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3 = \mathbf{I}.$$

Especificamente,

$$3{,}2 - j2{,}4 - j4 + 4{,}8 + j6{,}4 = 8 + j0.$$

As expressões de regime permanente correspondentes no domínio do tempo são

$$v = 40 \cos (200.000t - 36{,}87^\circ) \text{ V},$$

$$i_1 = 4 \cos (200.000t - 36{,}87^\circ) \text{ A},$$

$$i_2 = 4 \cos (200.000t - 90^\circ) \text{ A},$$

$$i_3 = 8 \cos (200.000t + 53{,}13^\circ) \text{ A}.$$

✔ PROBLEMAS PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 3 — Saber como usar técnicas de análise de circuitos para resolver um circuito no domínio da freqüência

9.7 Um resistor de 20 Ω está ligado em paralelo com um indutor de 5 mH. Essa combinação em paralelo está ligada em série com um resistor de 5 Ω e um capacitor de 25 μF.

a) Calcule a impedância dessa interligação se a freqüência for 2 krad/s.
b) Repita (a) para uma freqüência de 8 krad/s.
c) Em qual freqüência finita a impedância da interligação torna-se puramente resistiva?
d) Qual é a impedância na freqüência determinada em (c)?

Resposta: (a) 9 – j12 Ω;
(b) 21 + j3 Ω;
(c) 4 krad/s;
(d)15 Ω.

9.8 A mesma combinação de elementos descrita no Problema para Avaliação 9.7 está ligada aos terminais de uma fonte de tensão de $v = 150 \cos 4.000t$ V. Qual é a amplitude máxima da corrente no indutor de 5 mH?

Resposta: 7,07 A.

NOTA: Tente resolver também os problemas 9.26–9.28, apresentados no final deste capítulo.

Transformações Δ-Y

A transformação Δ-Y que discutimos na Seção 3.7 em relação a circuitos resistivos também se aplica a impedâncias. A Figura 9.20 mostra três impedâncias ligadas em Δ com o circuito equivalente em Y. As impedâncias em Y como funções das impedâncias em Δ são

$$Z_1 = \frac{Z_b Z_c}{Z_a + Z_b + Z_c}, \tag{9.51}$$

$$Z_2 = \frac{Z_c Z_a}{Z_a + Z_b + Z_c}, \tag{9.52}$$

$$Z_3 = \frac{Z_a Z_b}{Z_a + Z_b + Z_c}. \tag{9.53}$$

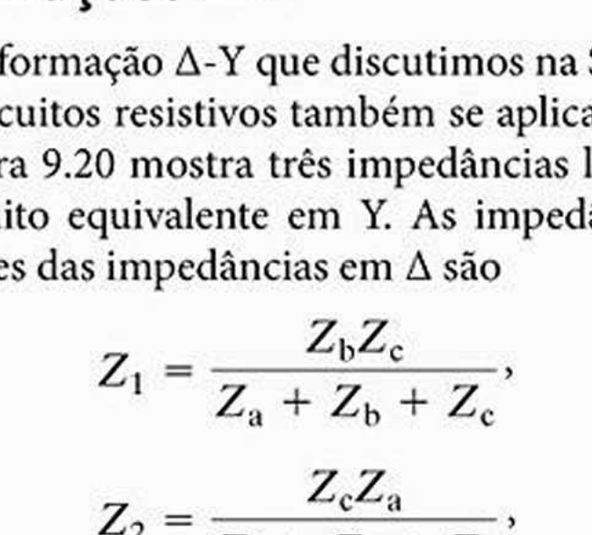


Figura 9.20 ▲ Transformações delta Y.

A transformação Δ-Y também pode ser aplicada em sentido inverso; isto é, podemos iniciar com a estrutura Y e substituí-la por uma estrutura equivalente Δ. As impedâncias em Δ como funções das impedâncias em Y são

$$Z_a = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_1}, \tag{9.54}$$

$$Z_b = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_2}, \tag{9.55}$$

$$Z_c = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_3}. \tag{9.56}$$

O processo usado para obter as equações 9.51–9.53 ou as equações 9.54–9.56 é o mesmo usado para obter as equações correspondentes para circuitos resistivos puros. Na verdade, uma comparação entre as equações 3.44–3.46 e as equações 9.51–9.53 e entre as equações 3.47–3.49 e as equações 9.54–9.56 revela que o símbolo Z substituiu o símbolo R. Talvez você ache interessante revisar o Problema 3.61 que trata da transformação Δ-Y.

O Exemplo 9.8 ilustra a utilidade da transformação Δ-Y na análise de circuitos fasoriais.

Exemplo 9.8 Uso da transformação Δ-Y no domínio da freqüência

Use a transformação Δ-Y de impedâncias para determinar $\mathbf{I}_0$, $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$, $\mathbf{I}_3$, $\mathbf{I}_4$, $\mathbf{I}_5$ e $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$ no circuito da Figura 9.21.

Solução

Em primeiro lugar, observe que, do modo como está agora, o circuito não se presta à simplificação por associações em série ou em paralelo. Uma transformação Δ-Y de impedância permite determinar todas as correntes de ramo sem se recorrer ao método das tensões de nó nem ao método das correntes de malha. Se substituirmos o delta superior (*abc*) ou o delta inferior (*bcd*) por seu Y equivalente, podemos simplificar ainda mais o circuito resultante por associações em série e em paralelo. Para decidir qual delta substituir, vale a pena verificar a soma das impedâncias ao longo de cada delta porque essa quantidade forma o denominador para as impedâncias do Y equivalente. Como a soma ao longo do delta inferior é 30 + *j*40, optamos por eliminá-lo do circuito. A impedância Y ligada ao terminal *b* é

$$Z_1 = \frac{(20 + j60)(10)}{30 + j40} = 12 + j4\Omega,$$

a impedância Y ligada ao terminal *c* é

$$Z_2 = \frac{10(-j20)}{30 + j40} = -3{,}2 - j2{,}4\ \Omega,$$

e a impedância Y ligada ao terminal *d* é

$$Z_3 = \frac{(20 + j60)(-j20)}{30 + j40} = 8 - j24\ \Omega.$$

Inserindo as impedâncias do Y equivalente no circuito, obtemos o circuito mostrado na Figura 9.22, que agora simplificamos por associações em série e em paralelo. A impedância do ramo *abn* é

$$Z_{abn} = 12 + j4 - j4 = 12\ \Omega,$$

e a impedância do ramo *acn* é

$$Z_{acn} = 63{,}2 + j2{,}4 - j2{,}4 - 3{,}2 = 60\ \Omega.$$

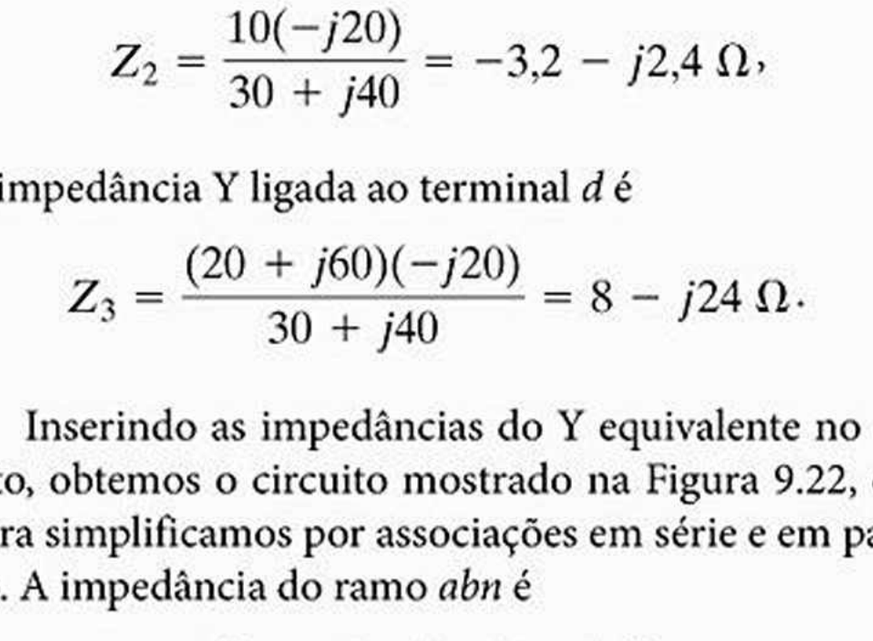


Figura 9.22 ▲ Circuito mostrado na Figura 9.21, com o delta inferior substituído por seu Y equivalente.

Observe que o ramo *abn* está em paralelo com o ramo *acn*. Por conseguinte, podemos substituir esses dois ramos por um único ramo com uma impedância de

$$Z_{an} = \frac{(60)(12)}{72} = 10\ \Omega.$$

Associar esse resistor de 10 Ω com a impedância entre *n* e *d* reduz o circuito da Figura 9.22 ao mostrado na Figura 9.23. Por este último circuito,

$$\mathbf{I}_0 = \frac{120\angle 0^\circ}{18 - j24} = 4\angle 53{,}13^\circ = 2{,}4 + j3{,}2\ \text{A}.$$

Conhecida $\mathbf{I}_0$, podemos seguir o caminho inverso e trabalhar nos circuitos equivalentes para determinar as correntes de ramo no circuito original. Começamos observando que $\mathbf{I}_0$ é a corrente no ramo *nd* da Figura 9.22. Assim,

$$\mathbf{V}_{nd} = (8 - j24)\mathbf{I}_0 = 96 - j32\ \text{V}.$$

Agora, podemos calcular a tensão $\mathbf{V}_{an}$, pois

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_{an} + \mathbf{V}_{nd}$$

e ambas, $\mathbf{V}$ e $\mathbf{V}_{nd}$, são conhecidas. Assim,

$$\mathbf{V}_{an} = 120 - 96 + j32 = 24 + j32\ \text{V}$$

Agora, calculamos as correntes de ramo $\mathbf{I}_{abn}$ e $\mathbf{I}_{acn}$:

$$\mathbf{I}_{abn} = \frac{24 + j32}{12} = 2 + j\frac{8}{3}\ \text{A},$$

$$\mathbf{I}_{acn} = \frac{24 + j32}{60} = \frac{4}{10} + j\frac{8}{15}\ \text{A}.$$

Em termos das correntes de ramo definidas na Figura 9.21,

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_{abn} = 2 + j\frac{8}{3}\ \text{A},$$

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_{acn} = \frac{4}{10} + j\frac{8}{15}\ \text{A}.$$

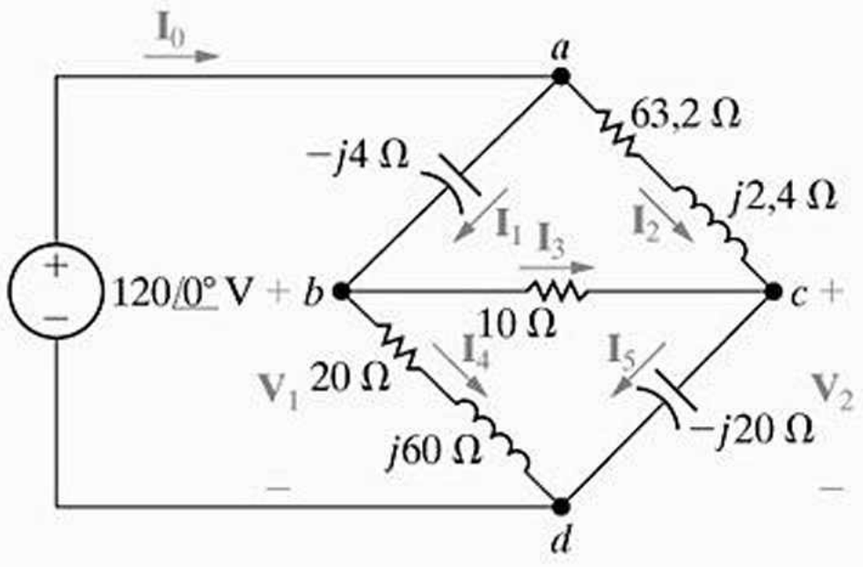


Figura 9.21 ▲ Circuito para o Exemplo 9.8.

Verificamos os cálculos de $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ observando que

$$\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 = 2{,}4 + j3{,}2 = \mathbf{I}_0.$$

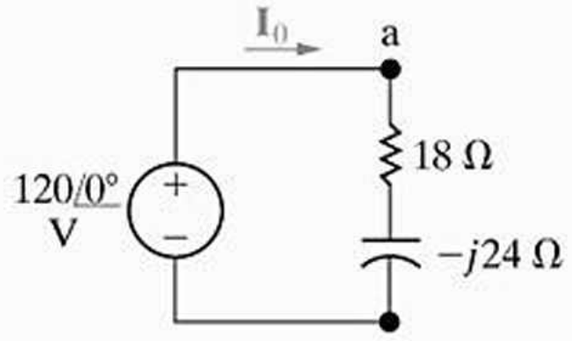


Figura 9.23 ▲ Versão simplificada do circuito mostrado na Figura 9.22.

Para determinar as correntes de ramo $\mathbf{I}_3$, $\mathbf{I}_4$ e $\mathbf{I}_5$, devemos calcular, em primeiro lugar, as tensões $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$. Com referência à Figura 9.21, observamos que

$$\mathbf{V}_1 = 120\angle 0° - (-j4)\mathbf{I}_1 = \frac{328}{3} + j8 \text{ V},$$

$$\mathbf{V}_2 = 120\angle 0° - (63{,}2 + j2{,}4)\mathbf{I}_2 = 96 - j\frac{104}{3} \text{ V}.$$

Agora, calculamos as correntes de ramo $\mathbf{I}_3$, $\mathbf{I}_4$ e $\mathbf{I}_5$:

$$\mathbf{I}_3 = \frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2}{10} = \frac{4}{3} + j\frac{12{,}8}{3} \text{ A},$$

$$\mathbf{I}_4 = \frac{\mathbf{V}_1}{20 + j60} = \frac{2}{3} - j1{,}6 \text{ A},$$

$$\mathbf{I}_5 = \frac{\mathbf{V}_2}{-j20} = \frac{26}{15} + j4{,}8 \text{ A}.$$

Verificamos os cálculos observando que

$$\mathbf{I}_4 + \mathbf{I}_5 = \frac{2}{3} + \frac{26}{15} - j1{,}6 + j4{,}8 = 2{,}4 + j3{,}2 = \mathbf{I}_0,$$

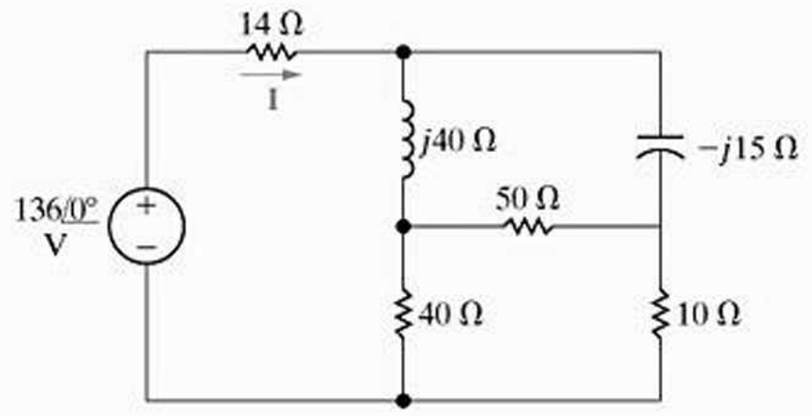
$$\mathbf{I}_3 + \mathbf{I}_4 = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} + j\frac{12{,}8}{3} - j1{,}6 = 2 + j\frac{8}{3} = \mathbf{I}_1,$$

$$\mathbf{I}_3 + \mathbf{I}_2 = \frac{4}{3} + \frac{4}{10} + j\frac{12{,}8}{3} + j\frac{8}{15} = \frac{26}{15} + j4{,}8 = \mathbf{I}_5.$$

✔ PROBLEMA PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 3 — Saber como usar técnicas de análise de circuitos para resolver um circuito no domínio da freqüência

9.9 Use uma transformação Δ-Y para determinar a corrente **I** no circuito mostrado.



Resposta: $\mathbf{I} = 4\angle 28{,}07°$ A.

NOTA: Tente resolver também o Problema 9.34, apresentado no final deste capítulo.

9.7 Transformações de fonte e circuitos equivalentes de Thévenin-Norton

As transformações de fonte apresentadas na Seção 4.9 e os circuitos equivalentes de Thévenin-Norton discutidos na Seção 4.10 são técnicas analíticas que também podem ser aplicadas a circuitos no domínio da freqüência. Provamos a validade dessas técnicas seguindo o mesmo processo utilizado nas seções 4.9 e 4.10, exceto pela substituição da impedância (Z) pela resistência (R). A Figura 9.24 mostra uma transformação de fonte com a nomenclatura do domínio da freqüência.

A Figura 9.25 ilustra a versão de um circuito equivalente de Thévenin no domínio da freqüência. A Figura 9.26 mostra um circuito equivalente de Norton no domínio da freqüência. As técnicas para determinar a tensão e a impedância equivalentes de Thévenin são idênticas às usadas para circuitos resistivos, com exceção de que o circuito equivalente no domínio da freqüência envolve a manipulação de quantidades complexas. O mesmo vale para a determinação da corrente e impedância equivalentes de Norton.

O Exemplo 9.9 demonstra a aplicação da transformação de fontes à análise no domínio da freqüência. O Exemplo 9.10 ilustra detalhes da determinação de um circuito equivalente de Thévenin no domínio da freqüência.

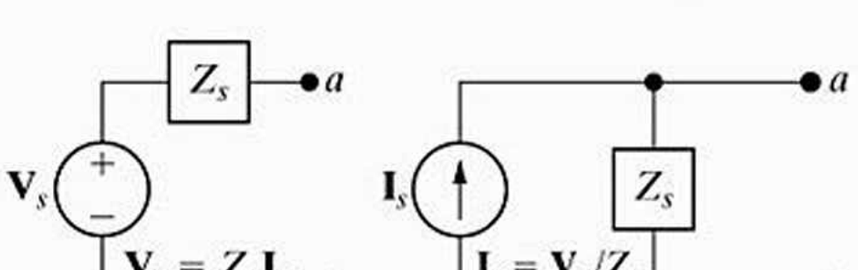


Figura 9.24 ▲ Transformação de fonte no domínio da freqüência.

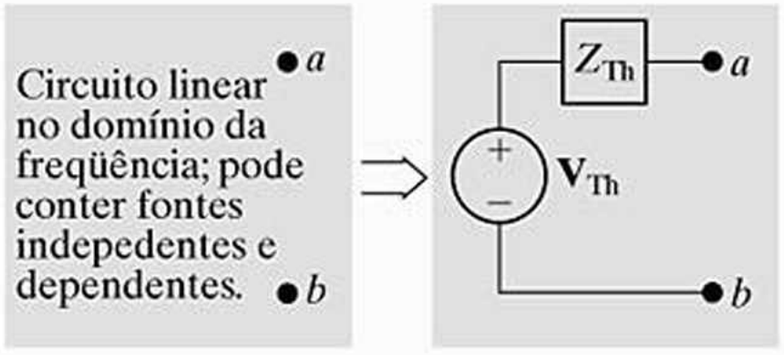


Figura 9.25 ▲ Circuito equivalente de Thévenin no domínio da freqüência.

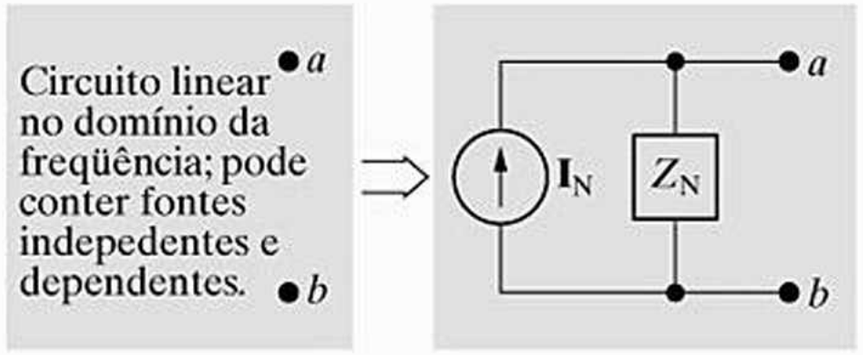


Figura 9.26 ▲ Circuito equivalente de Norton no domínio da freqüência.

Exemplo 9.9 Transformações de fonte no domínio da freqüência

Use o conceito de transformação de fonte para determinar a tensão fasorial V_0 no circuito mostrado na Figura 9.27.

Solução

Podemos substituir a combinação em série da fonte de tensão $40 \angle 0°$ com a impedância de $1 + j3\ \Omega$ pela combinação em paralelo de uma fonte de corrente com a impedância de $1 + j3\ \Omega$. A fonte de corrente é

$$\mathbf{I} = \frac{40}{1 + j3} = \frac{40}{10}(1 - j3) = 4 - j12\ \text{A}.$$

Assim, podemos substituir o circuito da Figura 9.27 pelo mostrado na Figura 9.28. Observe que a referência de polaridade da fonte de 40 V determina a direção de referência para I.

Em seguida, combinamos os dois ramos em paralelo em uma única impedância,

$$Z = \frac{(1 + j3)(9 - j3)}{10} = 1{,}8 + j2{,}4\ \Omega.$$

que está em paralelo com a fonte de corrente de $4 - j12$ A. Outra transformação de fonte converte essa combinação em paralelo em uma combinação em série, consistindo em uma fonte de tensão em série com a impedância de $1{,}8 + j2{,}4\ \Omega$. A tensão da fonte de tensão é

$$\mathbf{V} = (4 - j12)(1{,}8 + j2{,}4) = 36 - j12\ \text{V}.$$

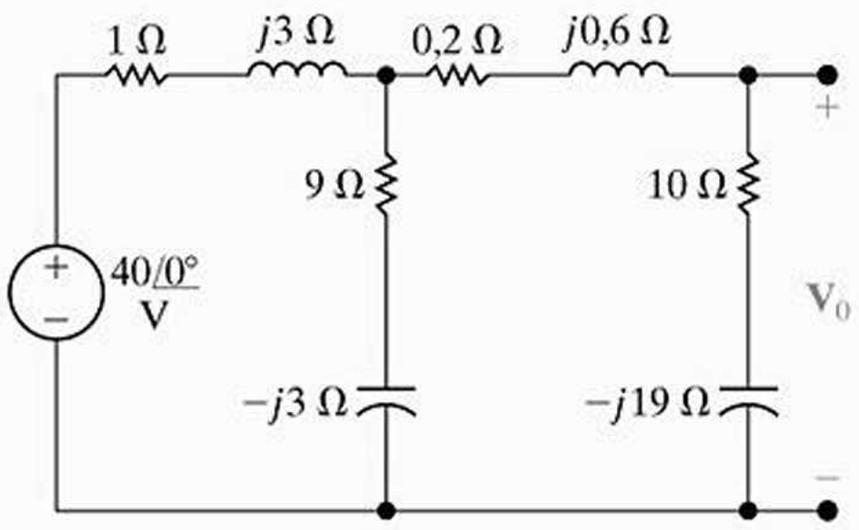


Figura 9.27 ▲ Circuito para o Exemplo 9.9.

Usando essa transformação, desenhamos novamente o circuito como na Figura 9.29. Observe a polaridade da fonte de tensão. Incluímos a corrente $\mathbf{I}_0$ no circuito para facilitar a solução para $\mathbf{V}_0$.

Observe também que reduzimos o circuito a um simples circuito em série. Calculamos a corrente $\mathbf{I}_0$ dividindo a tensão da fonte pela impedância total em série:

$$\mathbf{I}_0 = \frac{36 - j12}{12 - j16} = \frac{12(3 - j1)}{4(3 - j4)}$$

$$= \frac{39 + j27}{25} = 1{,}56 + j1{,}08\ \text{A}.$$

Agora, obtemos o valor de $\mathbf{V}_0$ multiplicando $\mathbf{I}_0$ pela impedância $10 - j19$:

$$\mathbf{V}_0 = (1{,}56 + j1{,}08)(10 - j19) = 36{,}12 - j18{,}84\ \text{V}.$$

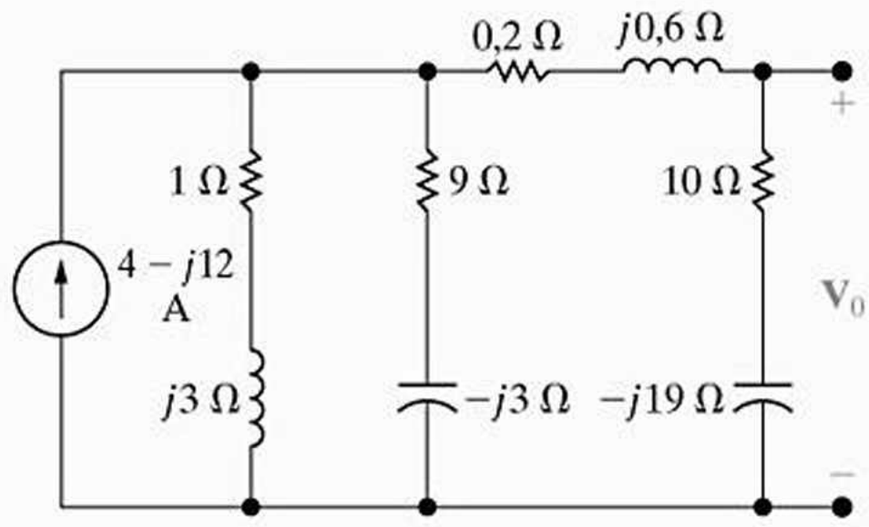


Figura 9.28 ▲ Primeira etapa na redução do circuito mostrado na Figura 9.27.

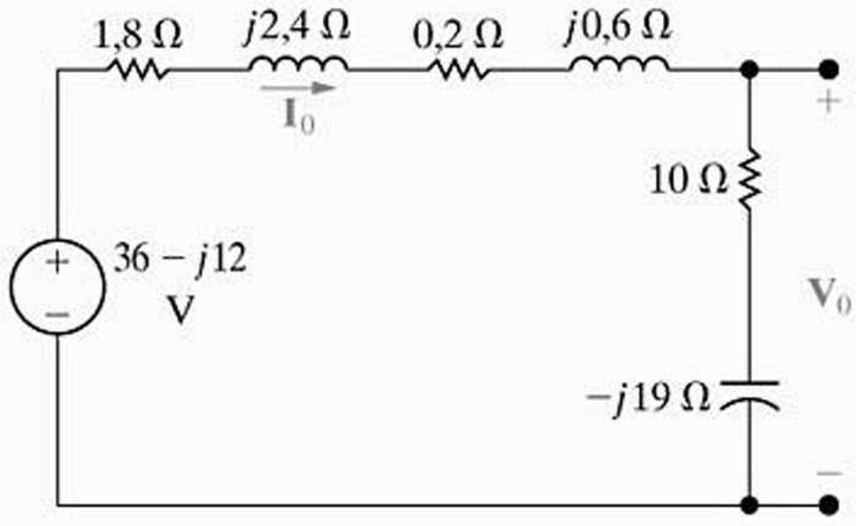


Figura 9.29 ▲ Segunda etapa na redução do circuito mostrado na Figura 9.27.

Exemplo 9.10 Determinação de um equivalente de Thévenin no domínio da freqüência

Determine o circuito equivalente de Thévenin visto a partir dos terminais *a,b* para o circuito mostrado na Figura 9.30.

Solução

Em primeiro lugar, determinamos a tensão equivalente de Thévenin. Essa tensão é a tensão de circuito aberto que aparece nos terminais *a,b*. Escolhemos a referência para a tensão de Thévenin como positiva no terminal *a*. Para simplificar o circuito, podemos fazer duas transformações de fonte na malha constituída pela fonte de 120 V e os resistores de 12 Ω e 60 Ω. Essas transformações devem preservar a identidade da tensão de controle V_x por causa da fonte de tensão dependente.

Determinamos as duas transformações de fonte substituindo, em primeiro lugar, a combinação em série da fonte de 120 V e do resistor de 12 Ω por uma fonte de corrente de 10 A em paralelo com 12 Ω. Em seguida, substituímos a combinação em paralelo dos resistores de 12 e 60 Ω por um único resistor de 10 Ω. Por fim, substituímos a fonte de 10 A em paralelo com 10 Ω por uma fonte de 100 V em série com 10 Ω. A Figura 9.31 mostra o circuito resultante.

Incluímos a corrente **I** à Figura 9.31 para auxiliar a discussão. Observe que, conhecida a corrente **I**, podemos calcular a tensão de Thévenin. Determinamos **I** somando as tensões ao longo do caminho fechado no circuito mostrado na Figura 9.31. Daí

$$100 = 10\mathbf{I} - j40\mathbf{I} + 120\mathbf{I} + 10\mathbf{V}_x = (130 - j40)\mathbf{I} + 10\mathbf{V}_x.$$

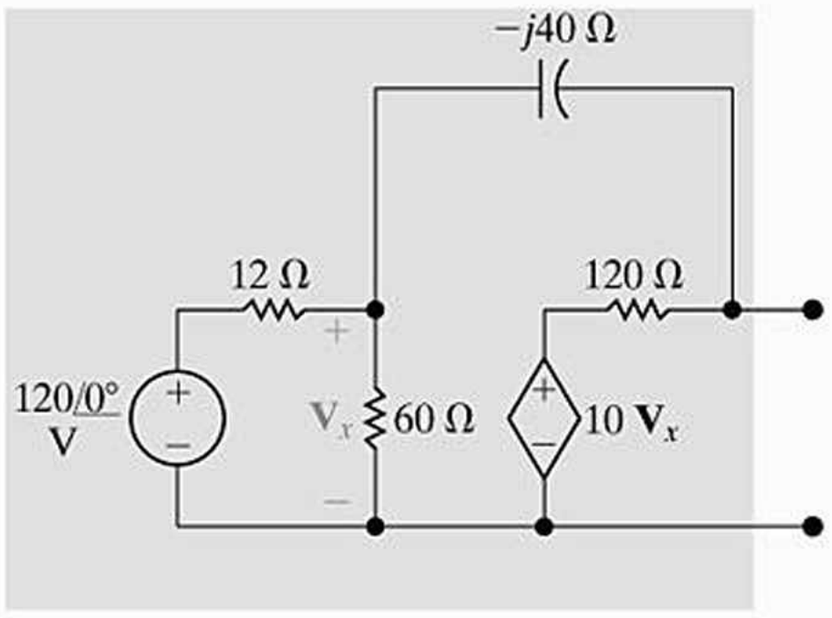


Figura 9.30 ▲ Circuito para o Exemplo 9.10.

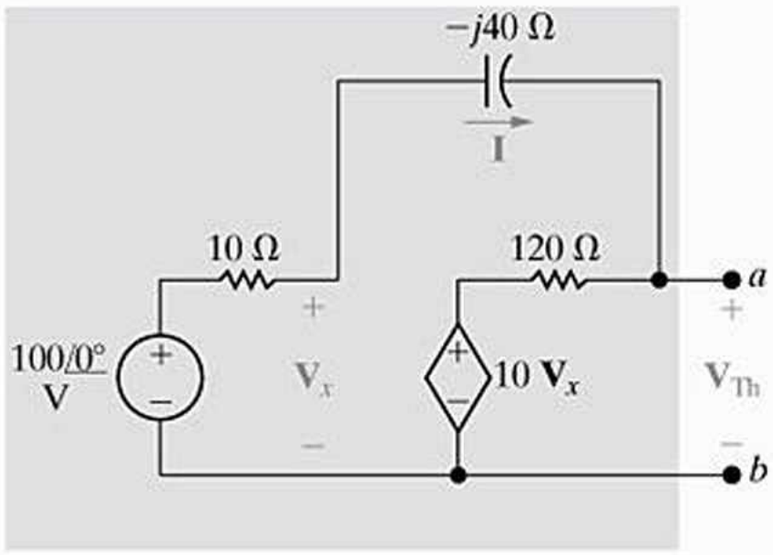


Figura 9.31 ▲ Versão simplificada do circuito mostrado na Figura 9.30.

Relacionamos a tensão de controle $\mathbf{V}_x$ com a corrente **I** observando, pela Figura 9.31, que

$$\mathbf{V}_x = 100 - 10\mathbf{I}.$$

Então,

$$\mathbf{I} = \frac{-900}{30 - j40} = 18\angle -126{,}87^\circ \text{ A}.$$

Agora calculamos $\mathbf{V}_x$:

$$\mathbf{V}_x = 100 - 180\angle -126{,}87^\circ = 208 + j144 \text{ V}.$$

Por fim, observamos pela Figura 9.31 que

$$\mathbf{V}_{\text{Th}} = 10\mathbf{V}_x + 120\mathbf{I}$$

$$= 2.080 + j1.440 + 120(18)\angle -126{,}87^\circ$$

$$= 784 - j288 = 835{,}22\angle -20{,}17^\circ \text{ V}.$$

Para obter a impedância de Thévenin, podemos usar qualquer das técnicas anteriormente usadas para determinar a resistência de Thévenin. Neste exemplo, ilustramos o método da fonte auxiliar. Lembre-se de que, quando usamos esse método, desativamos todas as fontes independentes do circuito e, então, aplicamos uma fonte de tensão auxiliar ou uma fonte de corrente auxiliar aos terminais de interesse. A razão entre a tensão e a corrente na fonte é a impedância de Thévenin. A Figura 9.32 mostra o resultado da aplicação dessa técnica ao circuito da Figura 9.30. Observe que escolhemos uma fonte de tensão auxiliar $\mathbf{V}_T$. Observe também que desativamos a fonte de tensão independente com um curto-circuito adequado e preservamos a identidade de $\mathbf{V}_x$.

As correntes de ramo $\mathbf{I}_a$ e $\mathbf{I}_b$ foram adicionadas ao circuito para simplificar o cálculo de $\mathbf{I}_T$. Aplicando as leis de Kirchhoff, você poderá verificar as seguintes relações:

$$\mathbf{I}_a = \frac{\mathbf{V}_T}{10 - j40}, \quad \mathbf{V}_x = 10\mathbf{I}_a,$$

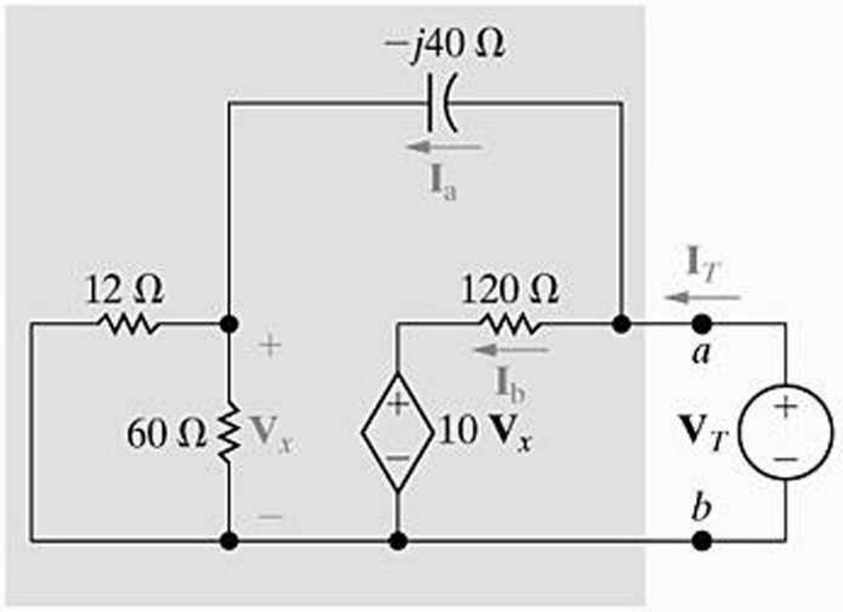


Figura 9.32 ▲ Circuito para calcular a impedância equivalente de Thévenin.

$$\mathbf{I}_b = \frac{\mathbf{V}_T - 10\mathbf{V}_x}{120}$$

$$= \frac{-\mathbf{V}_T(9 + j4)}{120(1 - j4)},$$

$$\mathbf{I}_T = \mathbf{I}_a + \mathbf{I}_b$$

$$= \frac{\mathbf{V}_T}{10 - j40}\left(1 - \frac{9 + j4}{12}\right)$$

$$= \frac{\mathbf{V}_T(3 - j4)}{12(10 - j40)},$$

$$Z_{\text{Th}} = \frac{\mathbf{V}_T}{\mathbf{I}_T} = 91{,}2 - j38{,}4\ \Omega\ .$$

A Figura 9.33 representa o circuito equivalente de Thévenin.

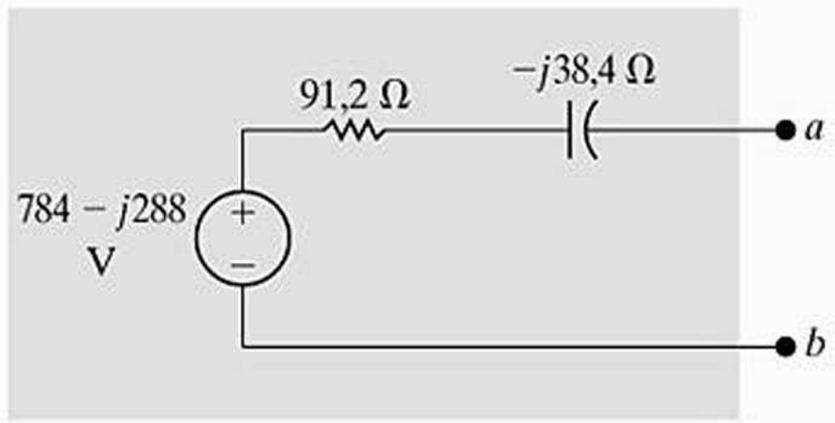


Figura 9.33 ▲ Equivalente de Thévenin para o circuito mostrado na Figura 9.30.

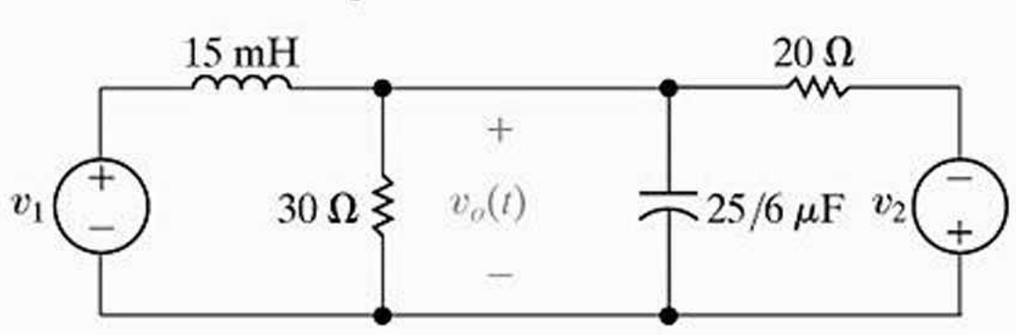
✔ PROBLEMAS PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 3 — Saber como usar técnicas de análise de circuitos para resolver um circuito no domínio da freqüência

9.10 Determine a expressão de regime permanente para $v_o(t)$ no circuito mostrado, usando a técnica de transformações de fonte. As fontes de tensão senoidais são

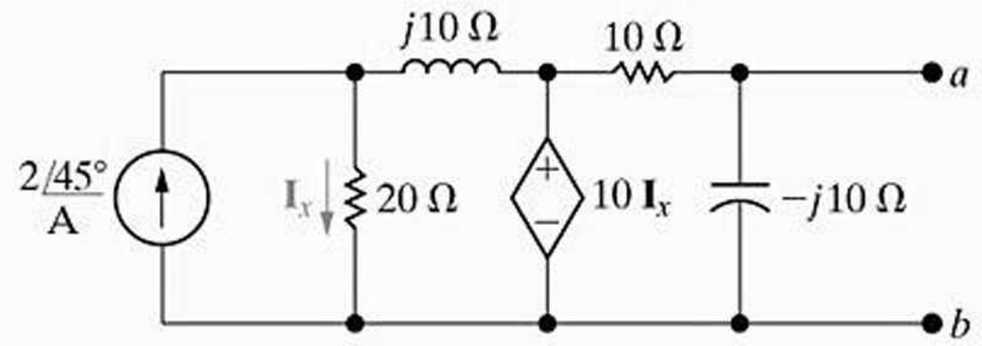
$$v_1 = 240 \cos (4.000t + 53{,}13°)\ \text{V},$$

$$v_2 = 96 \operatorname{sen} 4.000t\ \text{V}.$$



Resposta: 48 cos (4.000t + 36,87°) V.

9.11 Determine o circuito equivalente de Thévenin visto a partir dos terminais a,b para o circuito mostrado.



Resposta: $\mathbf{V}_{\text{Th}} = \mathbf{V}_{\text{ab}} = 10\angle 45°$ V;

$Z_{\text{Th}} = 5 - j5\ \Omega$.

NOTA: Tente resolver também os problemas 9.40, 9.41 *e* 9.47, *apresentados no final deste capítulo.*

9.8 O método das tensões de nó

Nas seções 4.2–4.4, apresentamos os conceitos básicos do método das tensões de nó para a análise de circuitos. Os mesmos conceitos se aplicam quando usamos esse método para analisar circuitos no domínio da freqüência. O Exemplo 9.11 ilustra a aplicação de tal método. O Problema para Avaliação 9.12 e muitos dos problemas apresentados no final do capítulo lhe darão a oportunidade de usar o método das tensões de nó para determinar respostas de regime permanente senoidal.

Exemplo 9.11 Uso do método das tensões de nó no domínio da freqüência

Use o método das tensões de nó para determinar as correntes de ramo $\mathbf{I}_a$, $\mathbf{I}_b$ e $\mathbf{I}_c$ no circuito mostrado na Figura 9.34.

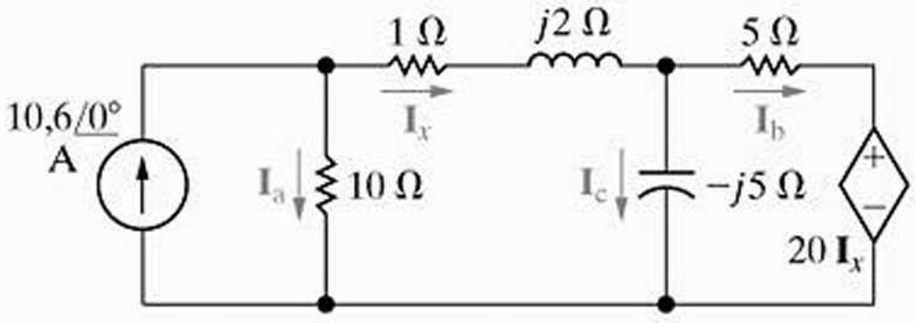


Figura 9.34 ▲ Circuito para o Exemplo 9.11.

Solução

Podemos descrever o circuito em termos de duas tensões de nó porque ele contém três nós essenciais. Como quatro ramos terminam no nó essencial que se estende pela parte inferior da Figura 9.34, nós o usaremos como nó de referência. Os dois nós remanescentes são rotulados 1 e 2 e as tensões de nó correspondentes são $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$. A Figura 9.35 ilustra a situação.

Somando as correntes que saem do nó 1, temos

$$-10{,}6 + \frac{\mathbf{V}_1}{10} + \frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2}{1 + j2} = 0.$$

Multiplicando por $1 + j2$ e colocando em evidência os coeficientes de $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$, chega-se à expressão

$$\mathbf{V}_1(1{,}1 + j0{,}2) - \mathbf{V}_2 = 10{,}6 + j21{,}2.$$

Somando as correntes que saem do nó 2, temos

$$\frac{\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1}{1 + j2} + \frac{\mathbf{V}_2}{-j5} + \frac{\mathbf{V}_2 - 20\mathbf{I}_x}{5} = 0.$$

A corrente de controle $\mathbf{I}_x$ é

$$\mathbf{I}_x = \frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2}{1 + j2}.$$

Substituindo essa expressão por $\mathbf{I}_x$ na equação do nó 2, multiplicando por $1 + j2$ e colocando os coeficientes de $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$ em evidência, obtemos a equação

$$-5\mathbf{V}_1 + (4{,}8 + j0{,}6)\mathbf{V}_2 = 0.$$

As soluções para $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$ são

$$\mathbf{V}_1 = 68{,}40 - j16{,}80 \text{ V},$$

$$\mathbf{V}_2 = 68 - j26 \text{ V}.$$

Daí, as correntes dos ramos são

$$\mathbf{I}_a = \frac{\mathbf{V}_1}{10} = 6{,}84 - j1{,}68 \text{ A},$$

$$\mathbf{I}_x = \frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2}{1 + j2} = 3{,}76 + j1{,}68 \text{ A},$$

$$\mathbf{I}_b = \frac{\mathbf{V}_2 - 20\mathbf{I}_x}{5} = -1{,}44 - j11{,}92 \text{ A},$$

$$\mathbf{I}_c = \frac{\mathbf{V}_2}{-j5} = 5{,}2 + j13{,}6 \text{ A}.$$

Para verificar nosso trabalho, observamos que

$$\mathbf{I}_a + \mathbf{I}_x = 6{,}84 - j1{,}68 + 3{,}76 + j1{,}68 = 10{,}6 \text{ A},$$

$$\mathbf{I}_x = \mathbf{I}_b + \mathbf{I}_c = -1{,}44 - j11{,}92 + 5{,}2 + j13{,}6$$

$$= 3{,}76 + j1{,}68 \text{ A}.$$

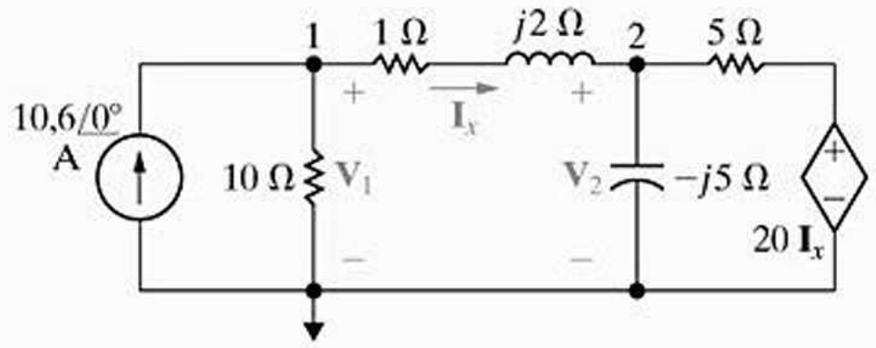
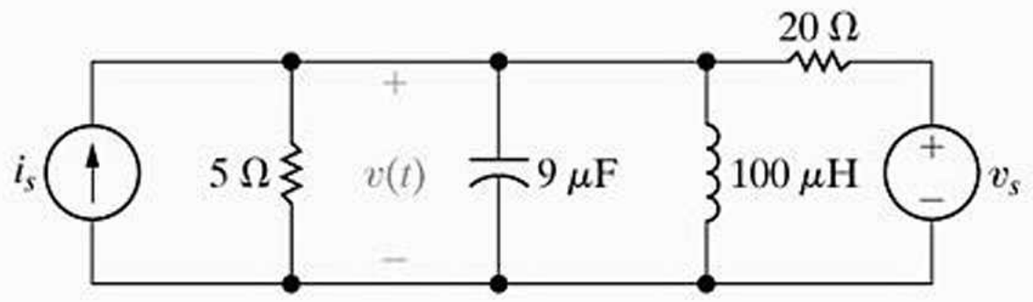


Figura 9.35 ▲ Circuito mostrado na Figura 9.34, com as tensões de nó definidas.

✔ PROBLEMA PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 3 — Saber como aplicar as técnicas de análise de circuitos em circuitos no domínio da freqüência

9.12 Use o método das tensões de nó para determinar a expressão de regime permanente para $v(t)$ no circuito mostrado. As fontes senoidais são $i_s = 10 \cos \omega t$ A e $v_s = 100 \text{ sen } \omega t$ V, onde $\omega = 50$ krad/s.



Resposta: $v(t) = 31{,}62 \cos(50.000t - 71{,}57°)$ V.

NOTA: Tente resolver também os problemas 9.51 *e* 9.56, *apresentados no final deste capítulo.*

9.9 O método das correntes de malha

Também podemos usar o método das correntes de malha para analisar os circuitos no domínio da freqüência. Os procedimentos utilizados para aplicações no domínio da freqüência são os mesmos usados na análise de circuitos resistivos. Nas seções 4.5–4.7, apresentamos as técnicas básicas do método das correntes de malha; demonstraremos a extensão desse método para circuitos no domínio da freqüência no Exemplo 9.12.

Exemplo 9.12 Uso do método das correntes de malha no domínio da freqüência

Use o método das correntes de malha para determinar as tensões $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$ e $\mathbf{V}_3$ no circuito mostrado na Figura 9.36.

Solução

Como o circuito tem duas malhas e uma fonte de tensão dependente, devemos escrever duas equações de cor-

rente de malha e uma equação de restrição. O sentido de referência para as correntes de malha $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ é no sentido horário, como mostra a Figura 9.37. Conhecidas $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$, podemos determinar, com facilidade, as tensões desconhecidas. Somando as tensões ao longo da malha 1, temos

$$150 = (1 + j2)\mathbf{I}_1 + (12 - j16)(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2),$$

ou

$$150 = (13 - j14)\mathbf{I}_1 - (12 - j16)\mathbf{I}_2.$$

Somando as tensões ao longo da malha 2, obtemos a equação

$$0 = (12 - j16)(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1) + (1 + j3)\mathbf{I}_2 + 39\mathbf{I}_x.$$

A Figura 9.37 revela que a corrente de controle $\mathbf{I}_x$ é a diferença entre $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$; isto é, a restrição é

$$\mathbf{I}_x = \mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2.$$

Substituindo essa restrição na equação da malha 2 e simplificando a expressão resultante, obtemos

$$0 = (27 + j16)\mathbf{I}_1 - (26 + j13)\mathbf{I}_2.$$

Resolvendo para $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ temos

$$\mathbf{I}_1 = -26 - j52 \text{ A},$$

$$\mathbf{I}_2 = -24 - j58 \text{ A},$$

$$\mathbf{I}_x = -2 + j6 \text{ A}.$$

As três tensões são

$$\mathbf{V}_1 = (1 + j2)\mathbf{I}_1 = 78 - j104 \text{ V}$$

$$\mathbf{V}_2 = (12 - j16)\mathbf{I}_x = 72 + j104 \text{ V}$$

$$\mathbf{V}_3 = (1 + j3)\mathbf{I}_2 = 150 - j130 \text{ V}$$

Além disso,

$$39\mathbf{I}_x = -78 + j234 \text{ V}.$$

Verificamos esses cálculos somando as tensões ao longo dos caminhos fechados:

$$-150 + \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 = -150 + 78 - j104 + 72 + j104 = 0,$$

$$-\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3 + 39\mathbf{I}_x = -72 - j104 + 150 - j130 - 78 + j234 = 0,$$

$$-150 + \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_3 + 39\mathbf{I}_x = -150 + 78 - j104 + 150 - j130 - 78 + j234 = 0.$$

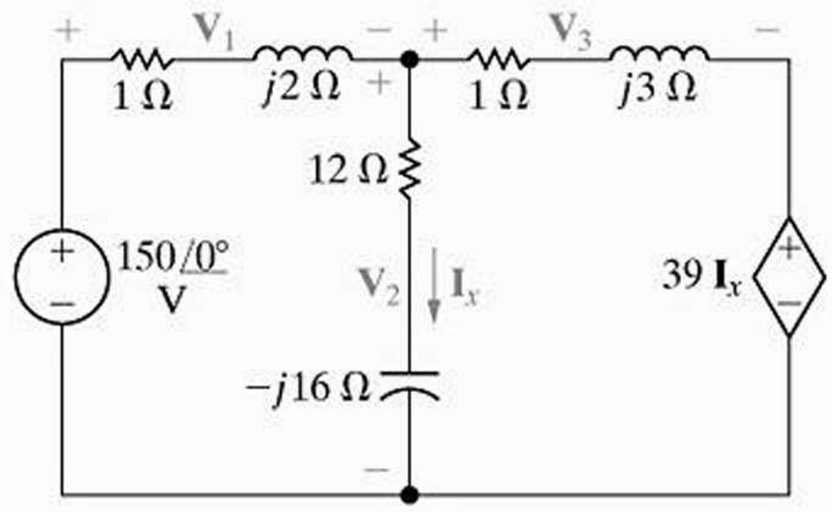


Figura 9.36 ▲ Circuito para o Exemplo 9.12.

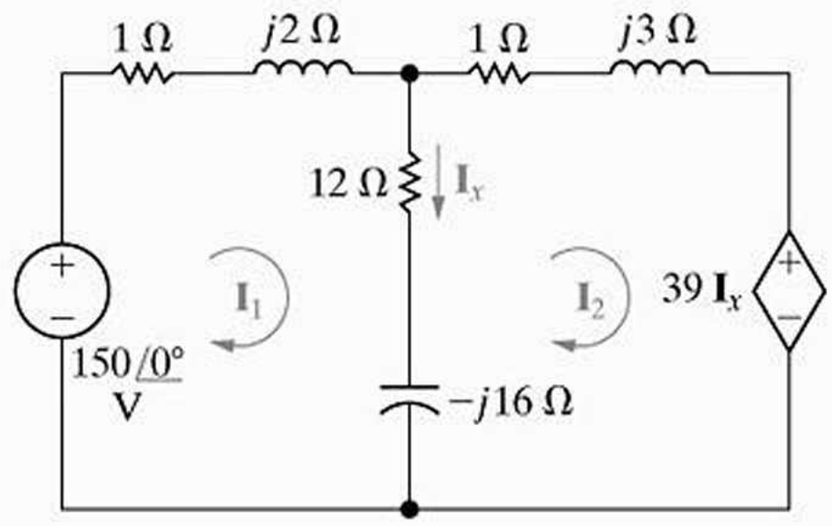
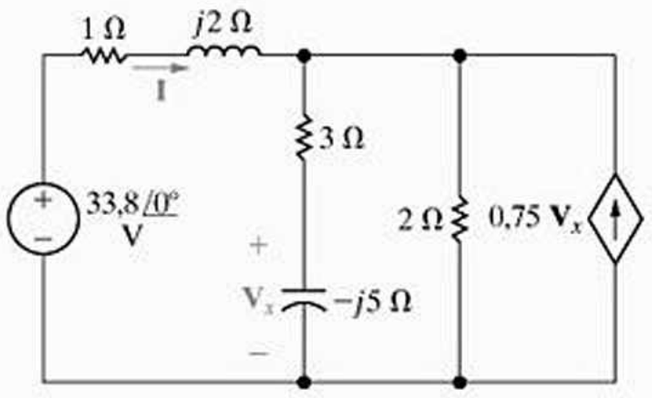


Figura 9.37 ▲ Correntes de malha usadas para resolver o circuito mostrado na Figura 9.36.

✔ PROBLEMA PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 3 — Saber como usar técnicas de análise de circuitos para resolver um circuito no domínio da freqüência

9.13 Use o método das correntes de malha para determinar a corrente fasorial $\mathbf{I}$ no circuito mostrado.



Resposta: $\mathbf{I} = 29 + j2 = 29{,}07 \angle 3{,}95°$ A.

NOTA: Tente resolver também os problemas 9.58 e 9.61, apresentados no final deste capítulo.

9.10 O transformador

Um transformador é um dispositivo baseado em acoplamentos magnéticos. Transformadores são usados tanto em circuitos de comunicação, como de potência. Em circuitos de comunicação, o transformador é usado para ajustar impedâncias e eliminar sinais cc de partes do sistema. Em circuitos de potência, transformadores são usados para esta-

belecer níveis de tensão cc que facilitem a transmissão, distribuição e consumo de potência elétrica. É preciso conhecer o comportamento de regime permanente senoidal do transformador para analisar sistemas de comunicação e sistemas de potência. Nesta seção, discutiremos o comportamento de regime permanente senoidal do *transformador linear*, que é encontrado primordialmente em circuitos de comunicação. Na Seção 9.11, trataremos do *transformador ideal*, que é usado para modelar o transformador de núcleo ferromagnético encontrado em sistemas de potência.

Antes de iniciar, uma observação útil. Quando analisar circuitos que contenham indutância mútua, use o método da corrente de malha ou de laço para escrever equações de circuito. Usar o método das tensões de nó é incômodo quando a indutância mútua está envolvida porque não é possível escrever as correntes nos vários enrolamentos por inspeção como funções das tensões de nó.

A análise do circuito de um transformador linear

Um *transformador* simples é formado quando dois enrolamentos são construídos em um único núcleo para se garantir acoplamento magnético. A Figura 9.38 mostra o modelo de circuito no domínio da freqüência de um sistema que usa um transformador para ligar uma carga a uma fonte. Quando discutirmos esse circuito, designaremos o enrolamento do transformador ligado à fonte de *enrolamento primário* e o enrolamento ligado à carga de *enrolamento secundário*. Com base nessa terminologia, os parâmetros de circuito do transformador são

R_1 = a resistência do enrolamento primário,
R_2 = a resistência do enrolamento secundário,
L_1 = a auto-indutância do enrolamento primário,
L_2 = a auto-indutância do enrolamento secundário,
M = a indutância mútua.

A tensão interna da fonte senoidal é $\mathbf{V}_s$ e a impedância interna da fonte é Z_s. A impedância Z_L representa a carga ligada ao enrolamento secundário do transformador. As correntes fasoriais $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ representam as correntes no primário e no secundário do transformador, respectivamente.

A análise do circuito da Figura 9.38 consiste em determinar $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ como funções dos parâmetros de circuito $\mathbf{V}_s$, Z_s, R_1, L_1, L_2, R_2, M, Z_L e ω. Além disso, estamos interessados em determinar a impedância do transformador vista a partir dos terminais a,b. Para determinar $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$, em primeiro lugar escrevemos as duas equações de corrente de malha que descrevem o circuito:

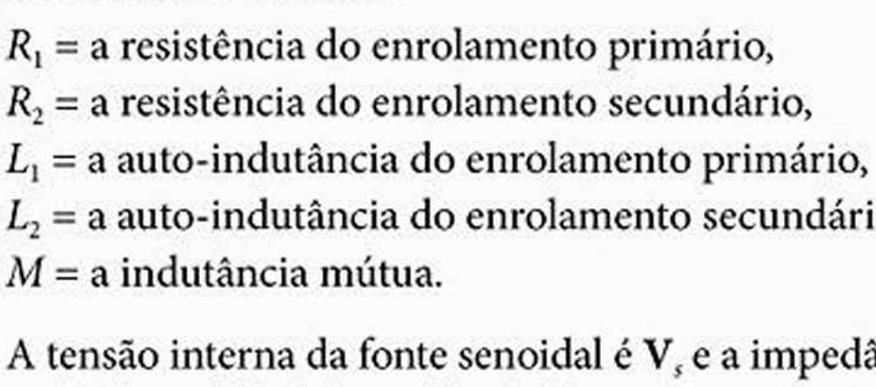


Figura 9.38 ▲ Modelo de circuito, no domínio da freqüência, para um transformador usado para ligar uma carga a uma fonte.

$$\mathbf{V}_s = (Z_s + R_1 + j\omega L_1)\mathbf{I}_1 - j\omega M\mathbf{I}_2\,, \tag{9.57}$$

$$0 = -j\omega M\mathbf{I}_1 + (R_2 + j\omega L_2 + Z_L)\mathbf{I}_2\,. \tag{9.58}$$

Para facilitar a manipulação algébrica das equações 9.57 e 9.58, fazemos

$$Z_{11} = Z_s + R_1 + j\omega L_1\,, \tag{9.59}$$

$$Z_{22} = R_2 + j\omega L_2 + Z_L\,, \tag{9.60}$$

onde Z_{11} é a auto-impedância total da malha que contém o enrolamento primário do transformador e Z_{22} é a auto-impedância total da malha que contém o enrolamento secundário. Com base na notação apresentada nas equações 9.59 e 9.60, as soluções para $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$, pelas equações 9.57 e 9.58, são

$$\mathbf{I}_1 = \frac{Z_{22}}{Z_{11}Z_{22} + \omega^2M^2}\mathbf{V}_s\,, \tag{9.61}$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{j\omega M}{Z_{11}Z_{22} + \omega^2M^2}\mathbf{V}_s = \frac{j\omega M}{Z_{22}}\mathbf{I}_1\,. \tag{9.62}$$

Para a fonte de tensão interna $\mathbf{V}_s$, a impedância aparece como $\mathbf{V}_s/\mathbf{I}_1$, ou

$$\frac{\mathbf{V}_s}{\mathbf{I}_1} = Z_{\text{int}} = \frac{Z_{11}Z_{22} + \omega^2M^2}{Z_{22}} = Z_{11} + \frac{\omega^2M^2}{Z_{22}} \tag{9.63}$$

A impedância nos terminais da fonte é $Z_{\text{int}} - Z_s$, portanto,

$$Z_{ab} = Z_{11} + \frac{\omega^2M^2}{Z_{22}} - Z_s = R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2M^2}{(R_2 + j\omega L_2 + Z_L)}\,. \tag{9.64}$$

Observe que a impedância é independente da polaridade magnética do transformador. A razão é que a indutância mútua aparece na Equação 9.64 como uma quantidade ao quadrado. Essa impedância é de particular interesse porque mostra como o transformador afeta a impedância da carga vista pela fonte. Sem o transformador, a carga estaria ligada diretamente à fonte, e a fonte veria Z_L com a impedância de carga; com o transformador, a carga é ligada à fonte por meio do transformador, e a fonte vê uma versão modificada de Z_L, como mostra o terceiro termo da Equação 9.64.

Impedância refletida

O terceiro termo da Equação 9.64 é denominado *impedância refletida* (Z_r) porque corresponde a impedância equivalente do enrolamento secundário e da impedância de carga transferidos ou refletidos, para o primário do transformador. Observe que a impedância refletida deve-se exclusivamente à existência da indutância mútua; isto é, se as duas bobinas forem desacopladas, M se tornará zero, Z_r se tornará zero, e Z_{ab} será reduzida à auto-impedância do enrolamento primário.

Para considerar a impedância refletida com mais detalhes, em primeiro lugar expressamos a impedância da carga em forma retangular:

$$Z_L = R_L + jX_L, \tag{9.65}$$

em que a reatância da carga X_L leva consigo o próprio sinal algébrico. Em outras palavras, X_L é um número positivo se a carga for indutiva, e um número negativo, se a carga for capacitiva. Agora, usamos a Equação 9.65 para escrever a impedância refletida em forma retangular:

$$\begin{aligned} Z_r &= \frac{\omega^2 M^2}{R_2 + R_L + j(\omega L_2 + X_L)} \\ &= \frac{\omega^2 M^2 [(R_2 + R_L) - j(\omega L_2 + X_L)]}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 + X_L)^2} \\ &= \frac{\omega^2 M^2}{|Z_{22}|^2} [(R_2 + R_L) - j(\omega L_2 + X_L)]. \end{aligned} \tag{9.66}$$

A dedução da Equação 9.66 leva em conta o fato de que, quando Z_L é escrita em forma retangular, a auto-impedância da malha que contém o enrolamento secundário é

$$Z_{22} = R_2 + R_L + j(\omega L_2 + X_L). \tag{9.67}$$

Observe agora que, pela Equação 9.66, a auto-impedância do circuito secundário é refletida no circuito primário por meio de um fator de escala de $(\omega M/|Z_{22}|)^2$ e que o sinal do componente reativo $(\omega L_2 + X_L)$ é invertido. Assim, o transformador linear reflete para o primário o conjugado da auto-impedância do circuito secundário (Z^*_{22}) multiplicado por um fator de escala. O Exemplo 9.13 ilustra a análise de correntes de malha para um circuito que contém um transformador linear.

Exemplo 9.13 Análise de um transformador linear no domínio da freqüência

Os parâmetros de certo transformador linear são $R_1 = 200\ \Omega$, $R_2 = 100\ \Omega$, $L_1 = 9$ H, $L_2 = 4$ H e $k = 0{,}5$. O transformador acopla uma impedância, que consiste em um resistor de 800 Ω em série com um capacitor de 1 μF, a uma fonte de tensão senoidal. A fonte de 300 V (rms) tem uma impedância interna de $500 + j100\ \Omega$ e uma freqüência de 400 rad/s.

a) Construa um circuito equivalente do sistema no domínio da freqüência.

b) Calcule a auto-impedância do circuito primário.

c) Calcule a auto-impedância do circuito secundário.

d) Calcule a impedância refletida no enrolamento primário.

e) Calcule o fator de escala para a impedância refletida.

f) Calcule a impedância vista a partir dos terminais primários do transformador.

g) Calcule o equivalente de Thévenin visto a partir dos terminais *c,d*.

Solução

a) A Figura 9.39 mostra o circuito equivalente no domínio da freqüência. Observe que a tensão interna da fonte serve como fasor de referência e que $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$ representam as tensões terminais do transformador. Para construir o circuito da Figura 9.39, fizemos os seguintes cálculos:

$$j\omega L_1 = j(400)(9) = j3.600\ \Omega,$$

$$j\omega L_2 = j(400)(4) = j1.600\ \Omega,$$

$$M = 0{,}5\sqrt{(9)(4)} = 3\text{ H},$$

$$j\omega M = j(400)(3) = j1.200\ \Omega,$$

$$\frac{1}{j\omega C} = \frac{10^6}{j400} = -j2.500\Omega.$$

b) A auto-impedância do circuito primário é

$$Z_{11} = 500 + j100 + 200 + j3.600 = 700 + j3.700\ \Omega$$

c) A auto-impedância do circuito secundário é

$$Z_{22} = 100 + j1.600 + 800 - j2.500 = 900 - j900\ \Omega$$

d) A impedância refletida para o primário é

$$\begin{aligned} Z_r &= \left(\frac{1200}{|900 - j900|}\right)^2 (900 + j900) \\ &= \frac{8}{9}(900 + j900) = 800 + j800\ \Omega. \end{aligned}$$

e) O fator de escala pelo qual (Z^*_{22}) é refletida é 8/9.

f) A impedância vista a partir dos terminais primários do transformador é a impedância do enrolamento primário mais a impedância refletida; assim,

$$Z_{ab} = 200 + j3.600 + 800 + j800 = 1.000 + j4.400\ \Omega.$$

g) A tensão de Thévenin será igual ao valor de circuito aberto de $\mathbf{V}_{cd}$. O valor de circuito aberto de $\mathbf{V}_{cd}$ será igual a $j1.200$ vezes o valor de circuito aberto de $\mathbf{I}_1$. O valor de circuito aberto de $\mathbf{I}_1$ é

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1 &= \frac{300\angle 0°}{700 + j3.700} \\ &= 79{,}67\angle -79{,}29°\ \text{mA}. \end{aligned}$$

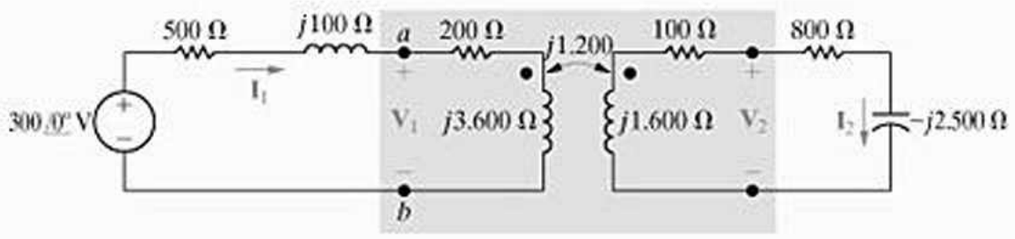


Figura 9.39 ▲ Circuito equivalente no domínio da freqüência para o Exemplo 9.13.

Por conseguinte,

$$\mathbf{V}_{\text{Th}} = j1200(79{,}67\,\angle -79{,}29°) \times 10^{-3}$$
$$= 95{,}60\,\angle 10{,}71°\ \text{V}.$$

A impedância de Thévenin será igual à impedância do enrolamento secundário mais a impedância refletida do primário quando a fonte de tensão for substituída por um curto-circuito. Assim,

$$Z_{\text{Th}} = 100 + j1.600 + \left(\frac{1200}{|700 + j3.700|}\right)^2 (700 - j3.700)$$
$$= 171{,}09 + j1.224{,}26\ \Omega.$$

O equivalente de Thévenin é mostrado na Figura 9.40.

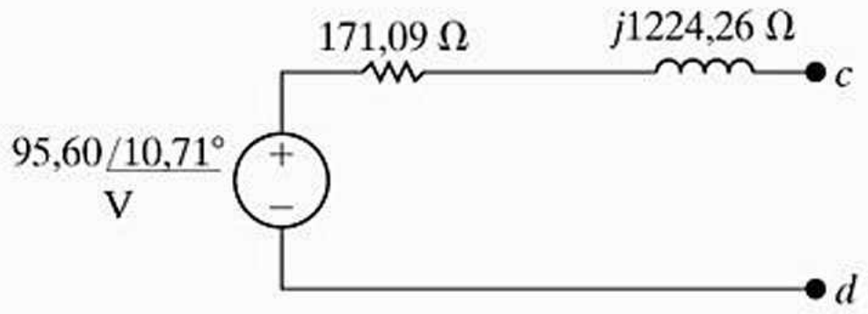


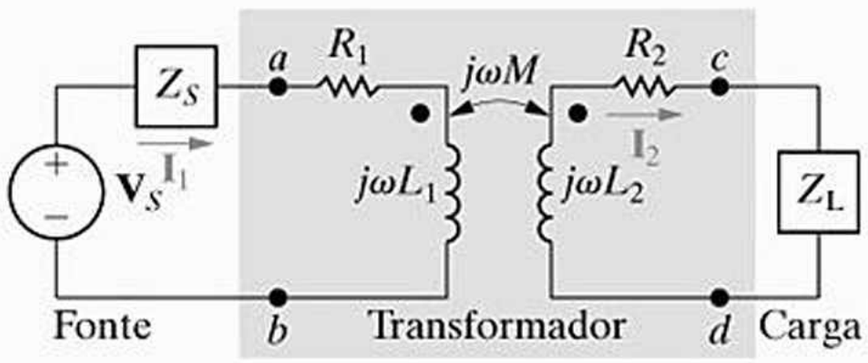
Figura 9.40 ▲ Circuito equivalente de Thévenin para o Exemplo 9.13.

✔ PROBLEMAS DE AVALIAÇÃO

Objetivo 4 — Saber analisar circuitos que contêm transformadores lineares usando métodos fasoriais

9.14 Um transformador linear acopla uma carga, que consiste em um resistor de 360 Ω em série com um indutor de 0,25 H, a uma fonte de tensão senoidal, como mostra o circuito. A fonte de tensão tem uma impedância interna de 184 + *j*0 Ω e uma tensão máxima de 245,20 V e opera com uma freqüência de 800 rad/s. Os parâmetros do transformador são $R_1 = 100\ \Omega$, $L_1 = 0{,}5$ H, $R_2 = 40\ \Omega$, $L_2 = 0{,}125$ H e $k = 0{,}4$. Calcule (a) a impedância refletida; (b) a corrente no primário e (c) a corrente no secundário.

Resposta: (a) 10,24 – *j*7,68 Ω;
(b) 0,5 cos(800*t* – 53,13°) A;
(c) 0,08 cos 800*t* A.



NOTA: Tente resolver também os problemas 9.72 e 9.73, apresentados no final deste capítulo.

9.11 O transformador ideal

Um *transformador ideal* consiste de dois enrolamentos magneticamente acoplados, com N_1 e N_2 espiras respectivamente, que exibem estas propriedades:

1. O coeficiente de acoplamento é igual à unidade ($k = 1$).
2. A auto-indutância de cada enrolamento é infinita ($L_1 = L_2 = \infty$).
3. As perdas nos enrolamentos devidas às resistências parasitas são desprezíveis.

Para entender o comportamento de transformadores ideais devemos começar com a Equação 9.64, que descreve a impedância nos terminais de uma fonte ligada a um transformador linear. Em seguida, repetimos essa equação e a examinamos um pouco mais.

Trabalhando com valores-limite

Uma relação útil entre a impedância de entrada e a impedância da carga, como dada por Z_{ab} na Equação 9.68, é quando L_1 e L_2 tornam-se infinitamente grandes e, ao mesmo tempo, o coeficiente de acoplamento se aproxima da unidade:

$$Z_{\text{ab}} = Z_{11} + \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}} - Z_s$$
$$= R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{(R_2 + j\omega L_2 + Z_{\text{L}})}. \quad (9.68)$$

Transformadores enrolados em núcleos ferromagnéticos podem satisfazer essa condição. Ainda que tais transformadores não sejam lineares, podemos obter algumas informações úteis, construindo um modelo ideal que ignore as não-linearidades.

Para mostrar como Z_{ab} muda quando $k = 1$ e L_1 e L_2 se aproximam do infinito, apresentamos, em primeiro lugar, a notação

$$Z_{22} = R_2 + R_L + j(\omega L_2 + X_L) = R_{22} + jX_{22}$$

e, então, rearranjamos a Equação 9.68:

$$Z_{\text{ab}} = R_1 + \frac{\omega^2 M^2 R_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2} + j\left(\omega L_1 - \frac{\omega^2 M^2 X_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2}\right)$$
$$= R_{ab} + jX_{ab}. \quad (9.69)$$

Neste ponto, devemos ter cuidado com o coeficiente de *j* na Equação 9.69, pois, quando L_1 e L_2 se aproximam do

infinito, esse coeficiente se torna a diferença entre duas quantidades grandes. Assim, antes de permitir que L_1 e L_2 cresçam, escrevemos o coeficiente como

$$X_{ab} = \omega L_1 - \frac{(\omega L_1)(\omega L_2)X_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2} = \omega L_1\left(1 - \frac{\omega L_2 X_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2}\right), \tag{9.70}$$

em que reconhecemos que, quando $k = 1$, $M^2 = L_1L_2$. Colocando os dois termos entre parênteses sobre um denominador comum, obtemos

$$X_{ab} = \omega L_1\left(\frac{R_{22}^2 + \omega L_2 X_L + X_L^2}{R_{22}^2 + X_{22}^2}\right). \tag{9.71}$$

Dividindo o numerador e o denominador por ωL_2, obtemos

$$X_{ab} = \frac{L_1}{L_2}\frac{X_L + (R_{22}^2 + X_L^2)/\omega L_2}{(R_{22}/\omega L_2)^2 + [1 + (X_L/\omega L_2)]^2}. \tag{9.72}$$

À medida que k se aproxima de 1,0, a razão L_1/L_2 se aproxima do valor constante $(N_1/N_2)^2$, o que decorre das equações 6.54 e 6.55. A razão para isso é que, à medida que o acoplamento torna-se extremamente forte, as permeâncias $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ tornam-se iguais. Então, a Equação 9.72 é reduzida a

$$X_{ab} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 X_L, \tag{9.73}$$

quando $L_1 \to \infty$, $L_2 \to \infty$ e $k \to 1.0$.

O mesmo raciocínio leva à simplificação da resistência refletida na Equação 9.69:

$$\frac{\omega^2 M^2 R_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2} = \frac{L_1}{L_2}R_{22} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 R_{22}. \tag{9.74}$$

Aplicando os resultados das equações 9.73 e 9.74 à Equação 9.69, obtemos

$$Z_{ab} = R_1 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 R_2 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 (R_L + jX_L). \tag{9.75}$$

Compare esse resultado com o da Equação 9.68. Aqui, vemos que, quando o coeficiente de acoplamento aproxima-se da unidade e as auto-indutâncias dos enrolamentos acoplados se aproximam do infinito, o transformador reflete a resistência do enrolamento secundário e a impedância da carga para o primário por um fator de escala igual à razão entre o número de espiras, (N_1/N_2), ao quadrado. Daí, podemos descrever o comportamento terminal do transformador ideal em termos de duas características. A primeira é que a quantidade de volts por espira é a mesma para cada enrolamento, ou

$$\left|\frac{\mathbf{V}_1}{N_1}\right| = \left|\frac{\mathbf{V}_2}{N_2}\right|. \tag{9.76}$$

A segunda é que a quantidade de ampère-espira é a mesma para cada enrolamento, ou

$$|\mathbf{I}_1 N_1| = |\mathbf{I}_2 N_2|. \tag{9.77}$$

Somos obrigados a usar o valor absoluto dos termos nas equações 9.76 e 9.77 porque ainda não estabelecemos polaridades de referência para as correntes e tensões; em breve, discutiremos a eliminação dessa restrição.

A Figura 9.41 mostra dois enrolamentos acoplados magneticamente, sem perdas ($R_1 = R_2 = 0$), e a usamos para demonstrar a validade das equações 9.76 e 9.77. Na Figura 9.41(a), o enrolamento 2 está aberto; na Figura 9.41(b), o enrolamento 2 está em curto. Embora realizemos a análise a seguir em termos do funcionamento em regime permanente senoidal, os resultados também se aplicam aos valores instantâneos de v e i.

Determinação das relações entre tensões e das relações entre correntes

Observe que na Figura 9.41(a) a tensão nos terminais do enrolamento 2 se deve inteiramente à corrente no enrolamento 1; assim

$$\mathbf{V}_2 = j\omega M\mathbf{I}_1. \tag{9.78}$$

A corrente no enrolamento 1 é

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}_1}{j\omega L_1}. \tag{9.79}$$

Pelas equações 9.78 e 9.79,

$$\mathbf{V}_2 = \frac{M}{L_1}\mathbf{V}_1. \tag{9.80}$$

Para um acoplamento unitário, a indutância mútua é igual a $\sqrt{L_1L_2}$, e a Equação 9.80 torna–se

$$\mathbf{V}_2 = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}\mathbf{V}_1. \tag{9.81}$$

Para um acoplamento unitário, o fluxo que atravessa o enrolamento 1 é igual ao que atravessa o enrolamento 2, e, portanto, só precisamos de uma permeância para descrever a auto-indutância de cada enrolamento. Assim, a Equação 9.81 torna-se

$$\mathbf{V}_2 = \sqrt{\frac{N_2^2\mathcal{P}}{N_1^2\mathcal{P}}}\mathbf{V}_1 = \frac{N_2}{N_1}\mathbf{V}_1 \tag{9.82}$$

ou

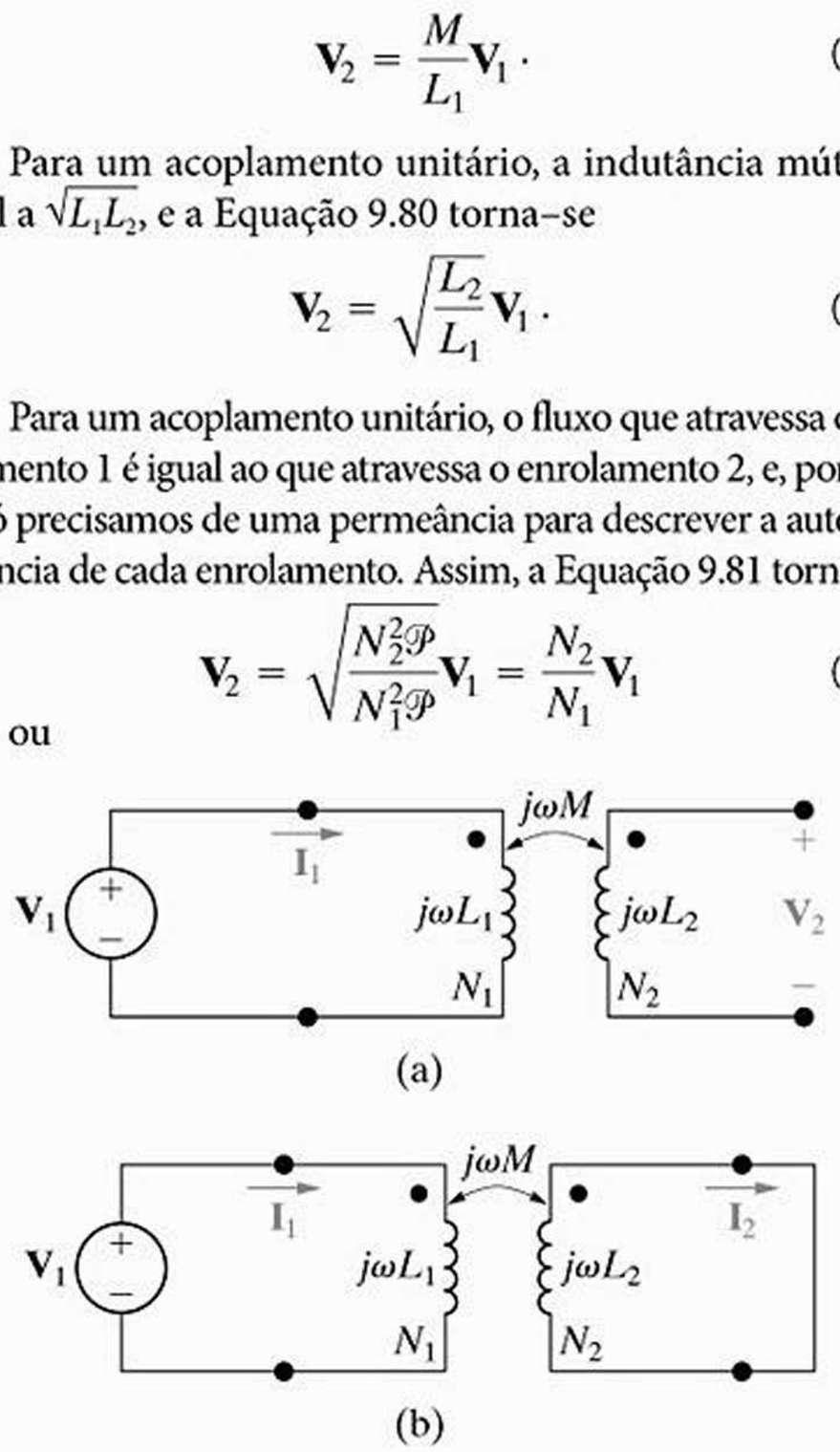


Figura 9.41 ▲ Circuitos usados para verificar as relações volts por espira e ampère-espira para um transformador ideal.

$$\frac{\mathbf{V}_1}{N_1} = \frac{\mathbf{V}_2}{N_2}. \tag{9.83}$$

(Relação entre tensões para um transformador ideal)

Somando as tensões ao longo da bobina em curto da Figura 9.41(b), obtemos

$$0 = -j\omega M\mathbf{I}_1 + j\omega L_2\mathbf{I}_2, \tag{9.84}$$

da qual, para $k = 1$,

$$\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{I}_2} = \frac{L_2}{M} = \frac{L_2}{\sqrt{L_1L_2}} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \frac{N_2}{N_1}. \tag{9.85}$$

A Equação 9.85 é equivalente a

$$\mathbf{I}_1N_1 = \mathbf{I}_2N_2. \tag{9.86}$$

(Relação entre as correntes em um transformador ideal)

A Figura 9.42 mostra o símbolo de um transformador ideal. As linhas verticais representam as camadas de material magnético de que os núcleos ferromagnéticos costumam ser feitos. Assim, o símbolo nos lembra de que os enrolamentos construídos em núcleos ferromagnéticos comportam-se de um modo muito parecido com um transformador ideal.

Há várias razões para isso. O material ferromagnético cria no espaço uma região de alta permeância. Assim, grande parte do fluxo magnético fica confinada no interior do material do núcleo, estabelecendo forte acoplamento magnético entre os enrolamentos que compartilham o mesmo núcleo. Alta permeância também significa alta auto-indutância porque $L = N^2\mathcal{P}$. Por fim, enrolamentos acoplados ferromagneticamente transferem potência com eficiência de um enrolamento para o outro. Eficiências acima de 95% são comuns, de tal forma que desprezar as perdas não é uma má aproximação para muitas aplicações.

Determinação da polaridade das relações entre tensões e das relações entre correntes

Agora, voltemos à eliminação dos módulos das equações 9.76 e 9.77. Observe que não apareceram módulos de grandezas na dedução das equações 9.83 e 9.86. Naquele caso não precisávamos deles, pois tínhamos estabelecido polaridades de referência para tensões e direções de referência para correntes. Ademais, conhecíamos os pontos de polaridade magnética dos dois enrolamentos acoplados.

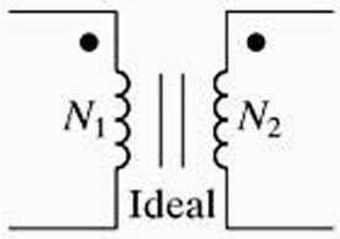


Figura 9.42 ▲ Símbolo para um transformador ideal.

As regras para se estabelecer o sinal algébrico adequado às equações 9.76 e 9.77 são as seguintes:

> Se ambas as tensões $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$ forem positivas ou negativas no terminal marcado por pontos, use um sinal positivo na Equação 9.76. Caso contrário, use um sinal negativo.
>
> Se ambas as correntes $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ estiverem dirigidas para dentro ou para fora do terminal marcado com pontos, use um sinal negativo na Equação 9.77. Caso contrário, use um sinal positivo.

(Convenção de pontos para transformadores ideais)

Os quatro circuitos mostrados na Figura 9.43 ilustram essas regras.

A relação entre as espiras dos dois enrolamentos é um parâmetro importante do transformador ideal. Ela é definida como N_1/N_2 ou N_2/N_1; ambas aparecem escritas de várias maneiras. Neste livro, usamos a para designar a relação N_2/N_1, ou

$$a = \frac{N_2}{N_1}. \tag{9.87}$$

A Figura 9.44 mostra três maneiras de representar a relação entre espiras para um transformador ideal. A Figura 9.44(a) mostra explicitamente o número de espiras em cada enrolamento. A Figura 9.44(b) mostra que a relação N_2/N_1 é 5 para 1, e a Figura 9.44(c) mostra que a relação N_2/N_1 é1 para 1/5.

O Exemplo 9.14 ilustra a análise de um circuito que contém um transformador ideal.

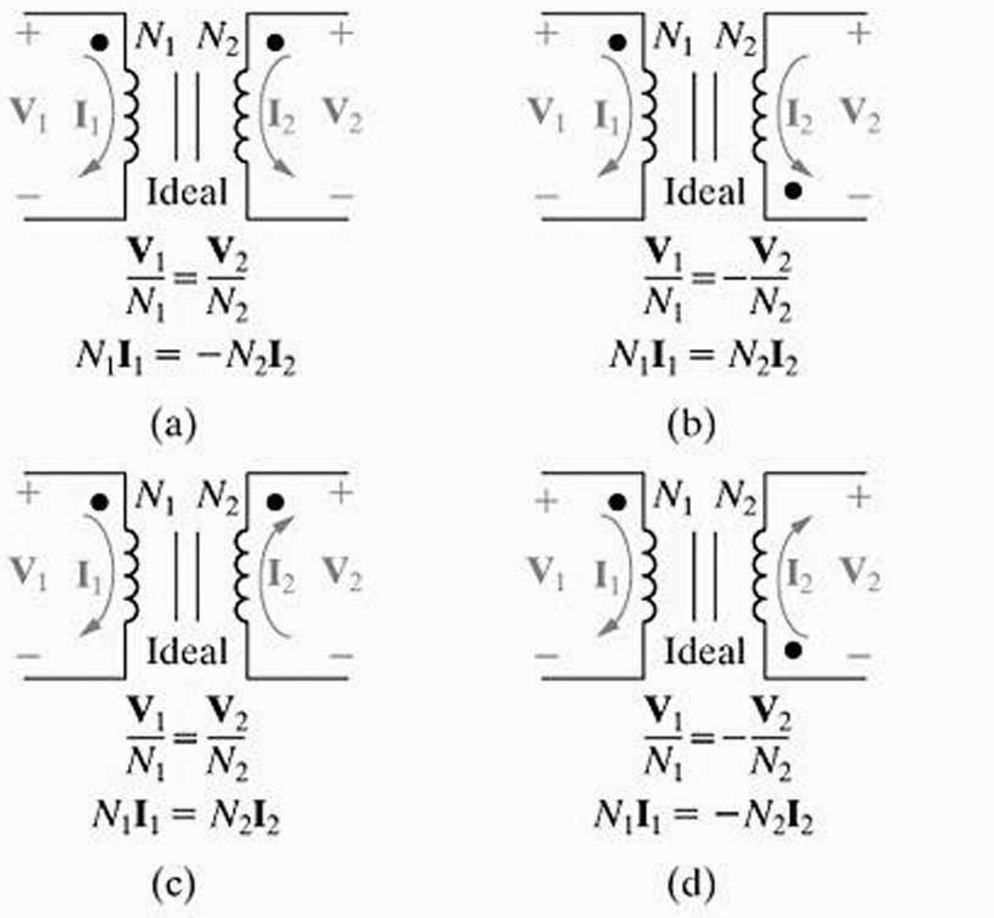


Figura 9.43 ▲ Circuitos que mostram os sinais algébricos adequados para a relação das tensões e a relação das correntes terminais de um transformador ideal.

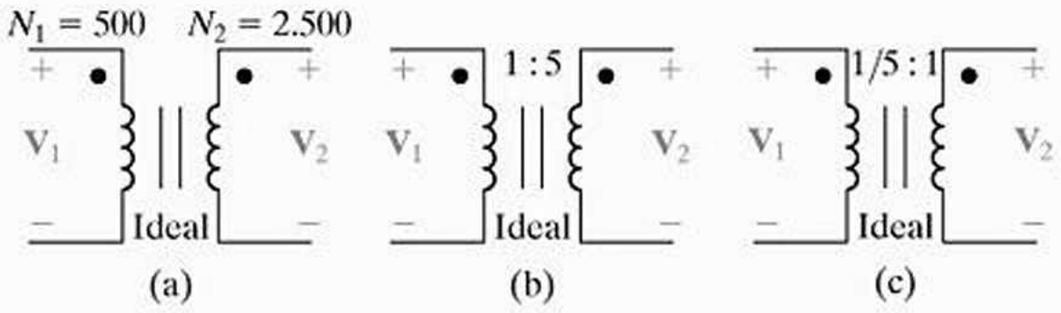


Figura 9.44 ▲ Três formas de indicar que a relação entre espiras de um transformador ideal é 5.

Exemplo 9.14 Análise do circuito de um transformador ideal no domínio da freqüência

A impedância da carga ligada ao enrolamento secundário do transformador ideal na Figura 9.45 consiste em um resistor de 237,5 mΩ em série com um indutor de 125 μH.

Se a fonte de tensão senoidal (v_g) estiver gerando a tensão de 2.500 cos 400t V, determine as expressões de regime permanente para: (a) i_1; (b) v_1; (c) i_2 e (d) v_2.

Solução

a) Começamos construindo o circuito equivalente no domínio fasorial. A fonte de tensão torna-se $2.500\underline{/0°}$ V; o indutor de 5 mH converte-se em uma impedância de $j2$ Ω e o indutor de 125 μH converte-se em uma impedância de $j0{,}05$ Ω. O circuito equivalente no domínio fasorial é mostrado na Figura 9.46.

Decorre diretamente da Figura 9.46 que

$$2.500\underline{/0°} = (0{,}25 + j2)\mathbf{I}_1 + \mathbf{V}_1,$$

e

$$\mathbf{V}_1 = 10\mathbf{V}_2 = 10[(0{,}2375 + j0{,}05)\mathbf{I}_2].$$

Como

$$\mathbf{I}_2 = 10\mathbf{I}_1$$

temos

$$\mathbf{V}_1 = 10(0{,}2375 + j0{,}05)10\mathbf{I}_1$$
$$= (23{,}75 + j5)\mathbf{I}_1.$$

Portanto,

$$2.500\underline{/0°} = (24 + j7)\mathbf{I}_1,$$

ou

$$\mathbf{I}_1 = 100\underline{/-16{,}26°}\ \text{A}.$$

Assim, a expressão de regime permanente para i_1 é

$$i_1 = 100\cos(400t - 16{,}26°)\ \text{A}$$

b) $\mathbf{V}_1 = 2.500\underline{/0°} - (100\underline{/-16{,}26°})(0{,}25 + j2)$
$= 2.500 - 80 - j185$
$= 2.420 - j185 = 2.427{,}06\underline{/-4{,}37°}$ V.

Daí,

$$v_1 = 2.427{,}06\cos(400t - 4{,}37°)\ \text{V}.$$

c) $\mathbf{I}_2 = 10\mathbf{I}_1 = 1.000\underline{/-16{,}26°}$ A.

Assim,

$$i_2 = 1.000\cos(400t - 16{,}26°)\ \text{A}.$$

d) $\mathbf{V}_2 = 0{,}1\mathbf{V}_1 = 242{,}71\underline{/-4{,}37°}$ V,

resultando em

$$v_2 = 242{,}71\cos(400t - 4{,}37°)\ \text{V}.$$

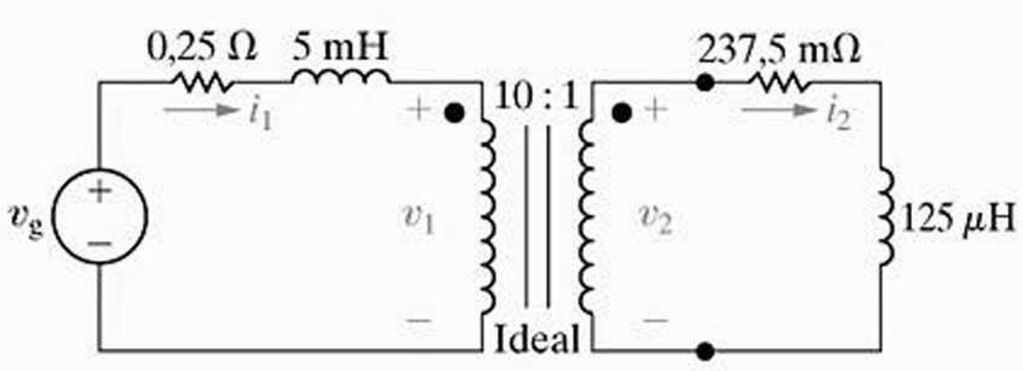


Figura 9.45 ▲ Circuito para o Exemplo 9.14.

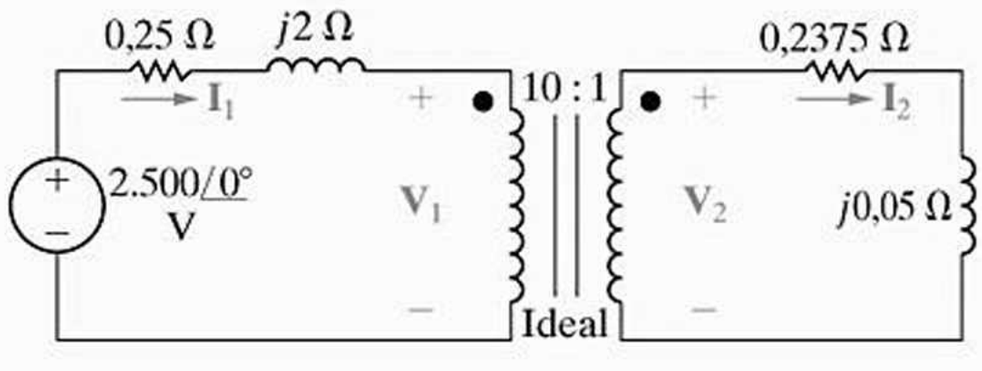


Figura 9.46 ▲ Circuito no domínio fasorial para o Exemplo 9.14.

A utilização de um transformador ideal para casamento de impedâncias

Transformadores ideais também podem ser usados para modificar o valor, visto pela fonte, de impedância de carga. O circuito mostrado na Figura 9.47 ilustra isso. A impedância percebida pela fonte real de tensão ($\mathbf{V}_s$ em série com Z_s) é $\mathbf{V}_1/\mathbf{I}_1$. A tensão e a corrente nos terminais da impedância de carga ($\mathbf{V}_2$ e $\mathbf{I}_2$) estão relacionadas com $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{I}_1$ pela relação entre espiras do transformador; assim,

$$\mathbf{V}_1 = \frac{\mathbf{V}_2}{a}, \tag{9.88}$$

e

$$\mathbf{I}_1 = a\mathbf{I}_2. \tag{9.89}$$

Por conseguinte, a impedância percebida pela fonte real é

$$Z_{\text{IN}} = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} = \frac{1}{a^2}\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_2}, \tag{9.90}$$

mas a razão $\mathbf{V}_2/\mathbf{I}_2$ é a impedância de carga Z_L, portanto a Equação 9.90 torna-se

$$Z_{\text{IN}} = \frac{1}{a^2}Z_{\text{L}}. \tag{9.91}$$

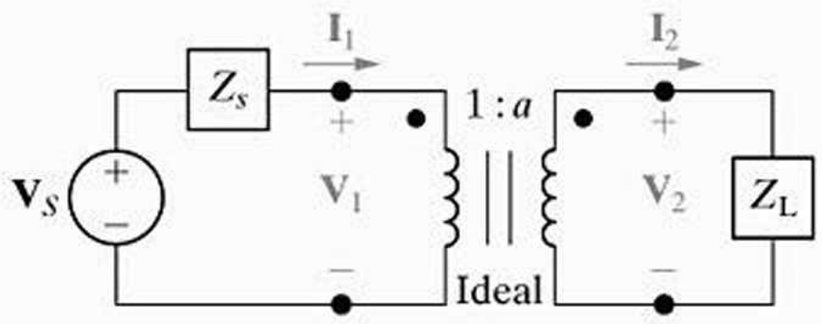


Figura 9.47 ▲ Utilização de um transformador ideal para acoplar uma carga a uma fonte.

Assim, o enrolamento secundário do transformador ideal reflete, para o enrolamento primário, a impedância de carga, com o fator de escala $1/a^2$.

Observe que o transformador ideal altera o módulo de Z_L, mas não seu ângulo de fase. O fato de Z_{IN} ser maior ou menor do que Z_L depende da relação de espiras, a.

O transformador ideal — ou sua contraparte real, o transformador de núcleo ferromagnético — pode ser usado para ajustar o módulo de Z_L ao módulo de Z_s. Discutiremos por que isso pode ser desejável no Capítulo 10.

Como veremos, transformadores ideais são usados para elevar ou abaixar tensões de uma fonte para a alimentação de uma carga. Por isso, transformadores ideais são amplamente utilizados pelas concessionárias de energia elétrica para reduzir a tensão das linhas de transmissão a níveis seguros para uso residencial.

9.12 Diagramas fasoriais

Quando usamos o método dos fasores para analisar o funcionamento do regime permanente senoidal de um circuito, um diagrama das correntes e tensões fasoriais pode nos permitir maior compreensão do comportamento do circuito. Um diagrama fasorial mostra o módulo e o ângulo de fase de cada grandeza fasorial no plano dos números complexos. Os ângulos de fase são medidos em sentido anti-horário em relação ao eixo real positivo e os módulos são medidos a partir da origem do sistema de coordenadas. Por exemplo, a Figura 9.48 mostra os fasores $10\angle 30°$, $12\angle 150°$, $5\angle -45°$ e $8\angle -170°$.

A construção de diagramas fasoriais envolve, em geral, correntes e tensões. Assim, são necessárias duas escalas, uma para correntes e outra para tensões. Localizar fasores no plano dos números complexos pode ser útil para verificar cálculos feitos em calculadoras de bolso. A calculadora de bolso típica não oferece uma cópia impressa dos dados de entrada, mas, quando o ângulo calculado é apresentado no visor, podemos compará-lo com a imagem mental que fazemos dele para verificar se estamos entrando com os valores adequados. Por exemplo, suponha que tenhamos de calcular a forma polar de $-7 - j3$. Sem fazer qualquer cálculo, podemos prever um módulo maior do que 7 e um ângulo no terceiro quadrante menor (mais negativo) do que $-135°$ ou maior (menos positivo) do que $225°$, como ilustrado na Figura 9.49.

Os exemplos 9.15 e 9.16 ilustram a construção e utilização de diagramas fasoriais. Usaremos tais diagramas em capítulos subseqüentes sempre que eles nos derem uma percepção adicional do funcionamento do regime permanente senoidal do circuito que estivermos investigando. O Problema 9.76 mostra como um diagrama fasorial pode ajudar a explicar o funcionamento de um circuito de deslocamento de fase.

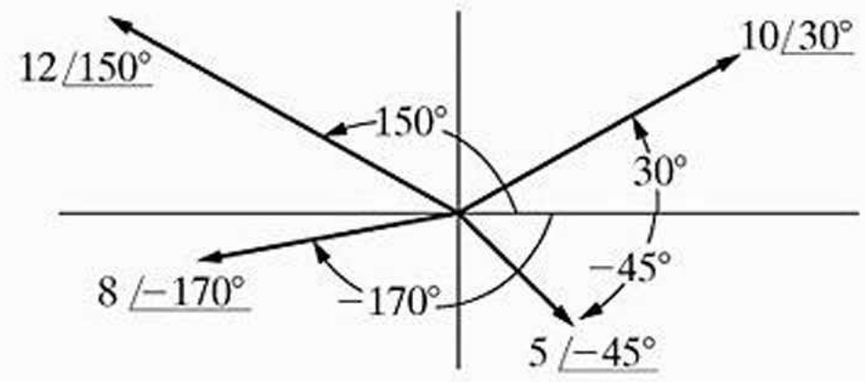


Figura 9.48 ▲ Representação gráfica de fasores.

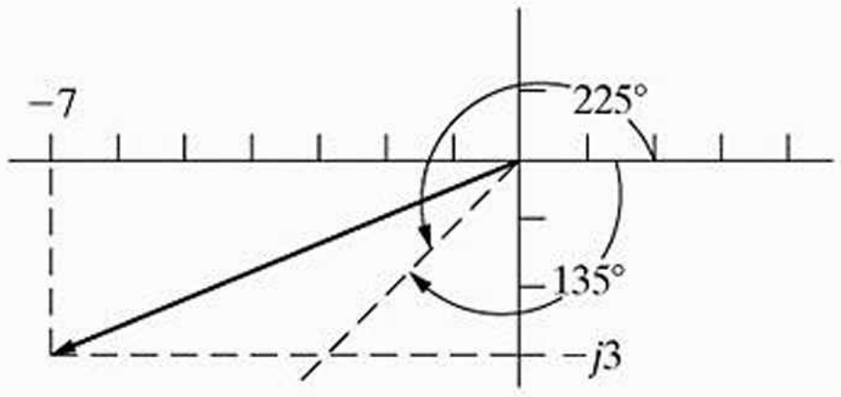
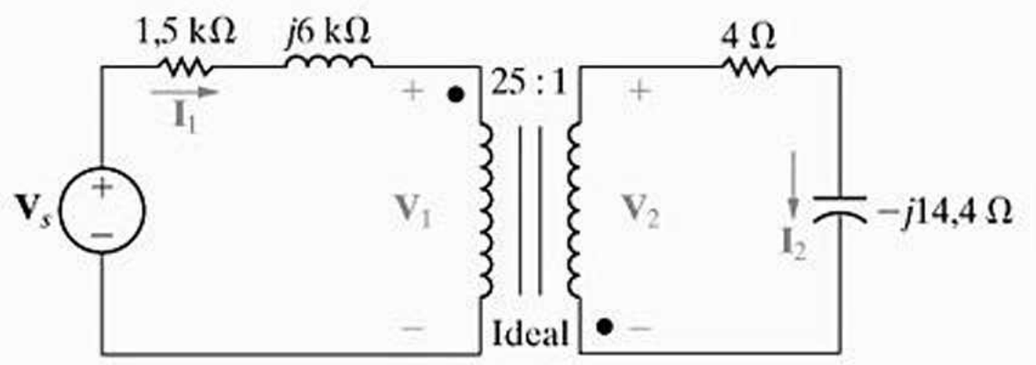


Figura 9.49 ▲ O número complexo $-7 - j3 = 7{,}62\angle -156{,}80°$.

✔ PROBLEMA PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 5 — Saber analisar circuitos com transformadores ideais

9.15 A tensão da fonte do circuito no domínio fasorial na figura que acompanha este problema é $25\angle 0°$ kV. Determine o módulo e o ângulo de fase de $\mathbf{V}_2$ e $\mathbf{I}_2$.



Resposta: $\mathbf{V}_2 = 1.868{,}15\angle 142{,}39°$ V

$\mathbf{I}_2 = 125\angle 216{,}87°$ A

NOTA: Tente resolver também o Problema 9.77, apresentado no final deste capítulo.

Exemplo 9.15 Utilização de diagramas fasoriais para analisar um circuito

No circuito da Figura 9.50, use um diagrama fasorial para determinar o valor de R que fará com que a corrente que passa por aquele resistor, i_R, fique defasada de 45° em relação à corrente da fonte, i_s, quando $\omega = 5$ krad/s.

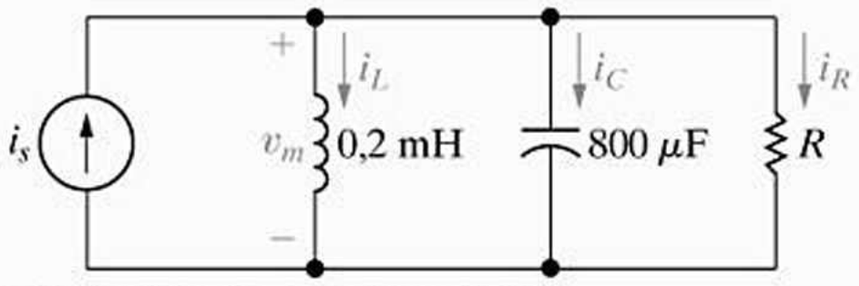


Figura 9.50 ▲ Circuito para o Exemplo 9.15.

Solução

Pela lei das correntes de Kirchhoff, a soma das correntes $\mathbf{I}_R$, $\mathbf{I}_L$ e $\mathbf{I}_C$ deve ser igual à corrente da fonte, $\mathbf{I}_s$. Se admitirmos que o ângulo de fase da tensão $\mathbf{V}_m$ é zero, podemos desenhar os fasores associados às correntes de cada um dos componentes. O fasor associado à corrente do indutor é dado por

$$\mathbf{I}_L = \frac{V_m \angle 0°}{j(5.000)(0{,}2 \times 10^{-3})} = V_m \angle -90°,$$

ao passo que o fasor associado à corrente do capacitor é dado por

$$\mathbf{I}_C = \frac{V_m \angle 0°}{-j/(5.000)(800 \times 10^{-6})} = 4V_m \angle 90°$$

e o fasor associado à corrente do resistor é dado por

$$\mathbf{I}_R = V_m \angle 0° \; R = V_m/R \angle 0°$$

Esses fasores são mostrados na Figura 9.51. O diagrama fasorial também mostra o fasor associado à corrente da fonte, representado por uma linha pontilhada, que deve ser a soma dos fasores associados às correntes dos três componentes do circuito e fazer um ângulo de 45°, no sentido anti-horário, com o fasor associado à corrente do resistor. Como você pode ver, a soma dos fasores dá origem a um triângulo isósceles, de tal forma que o módulo do fasor associado à corrente do resistor deve ser igual a $3V_m$. Por conseguinte, o valor do resistor é 1/3 Ω.

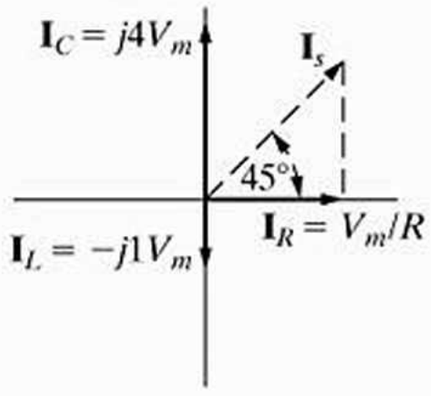


Figura 9.51 ▲ Diagrama fasorial para as correntes da Figura 9.50.

Exemplo 9.16 Uso de diagramas fasoriais para analisar efeitos de cargas capacitivas

O circuito da Figura 9.52 tem uma carga que consiste na combinação em paralelo de um resistor e de um indutor. Use diagramas fasoriais para estudar o efeito na amplitude de $\mathbf{V}_s$ da adição de um capacitor aos terminais da carga, se ajustarmos $\mathbf{V}_s$ de modo que a amplitude de $\mathbf{V}_L$ permaneça constante. As concessionárias de energia elétrica usam essa técnica para controlar a queda de tensão em suas linhas.

Solução

Começamos supondo capacitância zero nos terminais da carga. Depois de construirmos o diagrama fasorial para este caso, podemos adicionar um capacitor e estudar seu efeito sobre a amplitude de $\mathbf{V}_s$, mantendo a amplitude de $\mathbf{V}_L$ constante. A Figura 9.53 mostra o circuito equivalente, no domínio da freqüência, ao circuito apresentado na Figura 9.52. Indicamos também as correntes fasoriais de ramo $\mathbf{I}$, $\mathbf{I}_a$ e $\mathbf{I}_b$ para auxiliar a discussão.

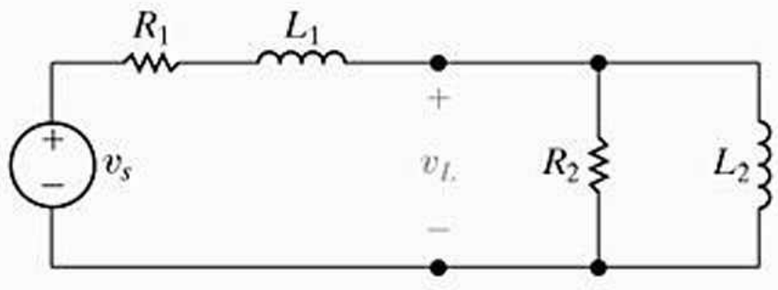


Figura 9.52 ▲ Circuito para o Exemplo 9.16.

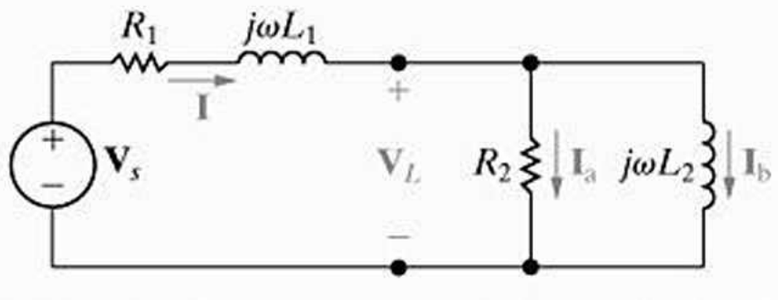


Figura 9.53 ▲ Circuito equivalente, no domínio da freqüência, ao circuito da Figura 9.52.

A Figura 9.54 mostra a evolução, etapa por etapa, da construção do diagrama fasorial. Não se esqueça de que, neste exemplo, não estamos interessados em posições e valores específicos dos fasores, mas no efeito geral da adição de um capacitor aos terminais da carga. Por isso, queremos verificar as posições relativas dos fasores antes e depois da adição do capacitor.

Relacionar o diagrama fasorial ao circuito mostrado na Figura 9.53 revela os seguintes pontos:

a) Como estamos mantendo a amplitude da tensão de carga constante, escolhemos $\mathbf{V}_L$ como nossa referência. Por conveniência, colocamos esse fasor no eixo real positivo.

b) Sabemos que $\mathbf{I}_a$ está em fase com $\mathbf{V}_L$ e que seu módulo é $|\mathbf{V}_L|/R_2$. (No diagrama fasorial, a escala dos fasores associados às correntes é independente da escala dos fasores associados às tensões.)

c) Sabemos que $\mathbf{I}_b$ está 90° atrasado em relação a $\mathbf{V}_L$ e que seu módulo é $|\mathbf{V}_L|/\omega L_2$.

d) A corrente de linha $\mathbf{I}$ é igual à soma de $\mathbf{I}_a$ e $\mathbf{I}_b$.

e) A queda de tensão em R_1 está em fase com a corrente de linha e a queda de tensão em $j\omega L_1$ está 90° adiantado em relação à corrente de linha.

f) A tensão na fonte é a soma da tensão na carga e da queda ao longo da linha; isto é, $\mathbf{V}_s = \mathbf{V}_L + (R_1 + j\omega L_1)\mathbf{I}$.

Observe que o diagrama fasorial completo, mostrado na etapa 6 da Figura 9.54, deixa claras as relações entre o módulo e o ângulo de fase de todas as correntes e tensões da Figura 9.53.

Agora, adicionamos o ramo do capacitor, como mostra a Figura 9.55. Como estamos mantendo $\mathbf{V}_L$ constante, construímos o diagrama fasorial para o circuito da Figura 9.55 seguindo as mesmas etapas da Figura 9.54, exceto que, na etapa 4, incluímos a corrente $\mathbf{I}_c$ do capacitor ao diagrama. Ao fazermos isso, $\mathbf{I}_c$ está 90° adiantada em relação a $\mathbf{V}_L$, sendo sua magnitude $|\mathbf{V}_L\omega C|$. A Figura 9.56 mostra o efeito de $\mathbf{I}_c$ sobre a corrente de linha: o módulo, bem como o ângulo de fase da corrente de linha $\mathbf{I}$, varia de acordo com as variações na magnitude de $\mathbf{I}_c$. À medida que $\mathbf{I}$ varia, também variam o módulo e o ângulo de fase da queda de tensão ao longo da linha. À medida que essa queda varia, o módulo e ângulo de $\mathbf{V}_s$ variam. O diagrama fasorial mostrado na Figura 9.57 ilustra essas observações. Os fasores em linhas tracejadas representam as correntes e tensões pertinentes antes da adição do capacitor.

Assim, comparar os fasores de $\mathbf{I}$, $R_1\mathbf{I}$, $j\omega L_1\mathbf{I}$ e $\mathbf{V}_s$ em linhas tracejadas com suas contrapartes em linhas cheias mostra claramente o efeito da adição de C ao circuito. Em particular, observe que isso reduz a amplitude da tensão da fonte e ainda mantém a amplitude da tensão da carga. Na prática, esse resultado quer dizer que, à medida que a carga aumenta (isto é, à medida que $\mathbf{I}_a$ e $\mathbf{I}_b$ aumentam), devemos adicionar capacitores ao sistema (isto é, aumentar $\mathbf{I}_c$) de modo que, sob condições de carga pesada, possamos manter $\mathbf{V}_L$ sem aumentar a amplitude da tensão da fonte.

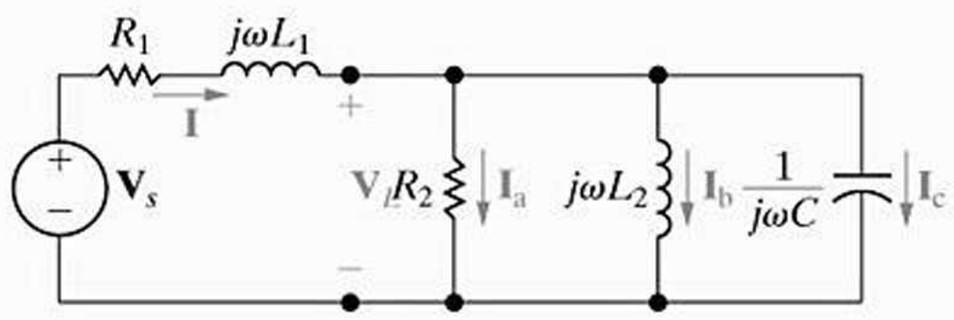


Figura 9.55 ▲ Adição de um capacitor ao circuito mostrado na Figura 9.53.

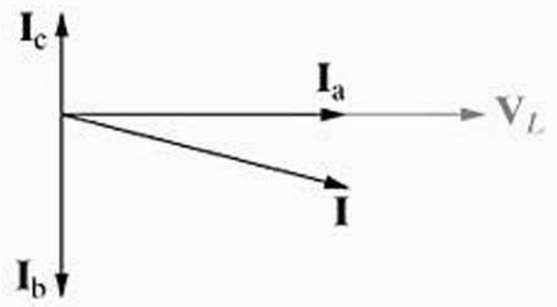


Figura 9.56 ▲ Efeito da corrente do capacitor, $\mathbf{I}_c$, sobre a corrente de linha, $\mathbf{I}$.

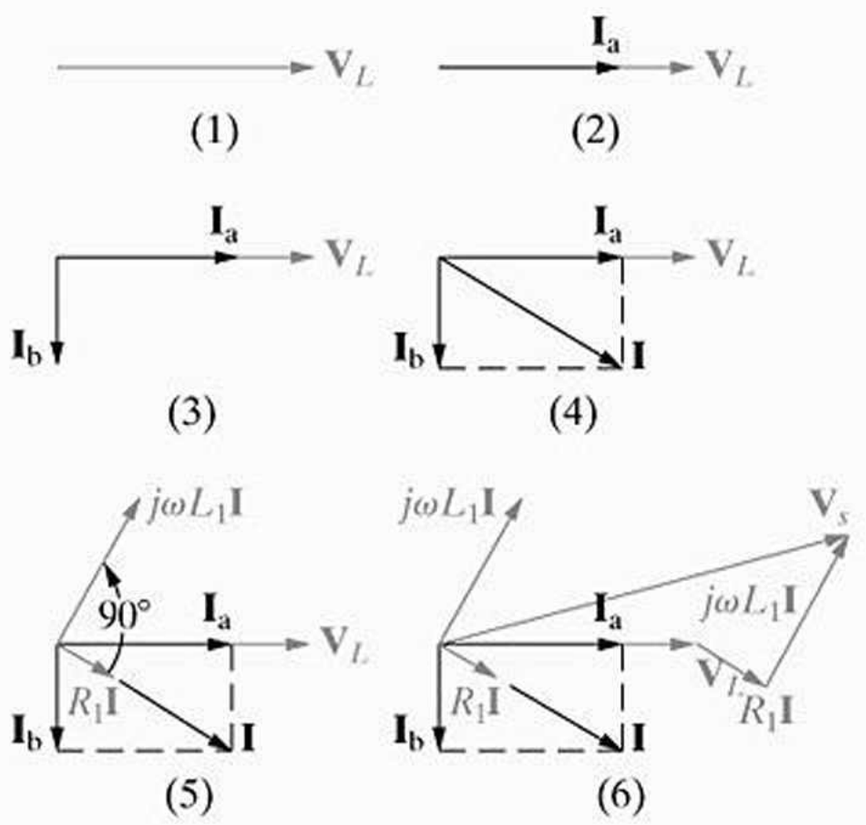


Figura 9.54 ▲ Evolução, etapa por etapa, da construção do diagrama fasorial para o circuito da Figura 9.53.

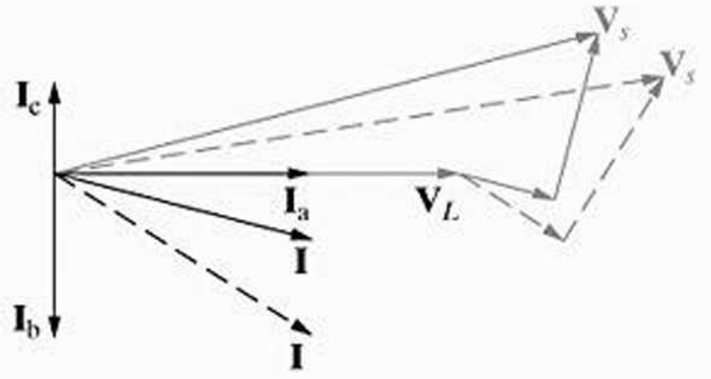


Figura 9.57 ▲ Efeito da adição de um capacitor ao circuito mostrado na Figura 9.53, se $\mathbf{V}_L$ for mantida constante.

NOTA: Avalie o que você entendeu desse material tentando resolver os problemas 9.81 *e* 9.82, *apresentados no final deste capítulo.*

Perspectiva prática

Um circuito de distribuição residencial

Vamos voltar ao circuito de distribuição residencial apresentado no início do capítulo. Modificaremos o circuito ligeiramente adicionando uma resistência a cada condutor conectado ao secundário do transformador para simular com mais exatidão as fiações residenciais. O circuito modificado é mostrado na Figura 9.58. No Problema 9.85, você calculará as seis correntes de ramo no secundário do transformador de distribuição e, então, mostrará como calcular a corrente no enrolamento primário.

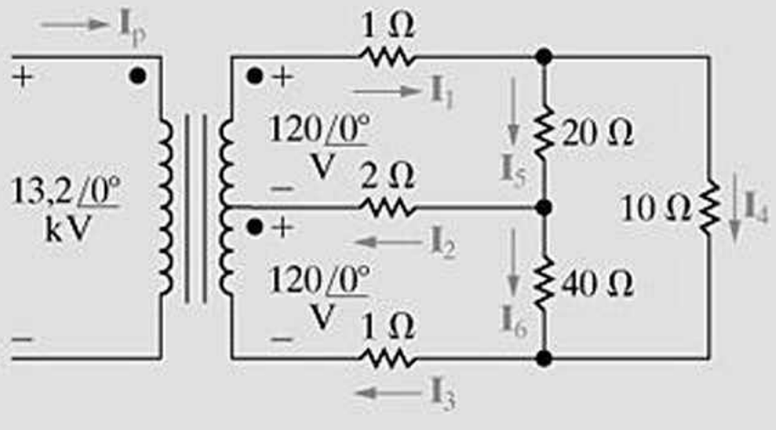


Figura 9.58 ▲ Circuito de distribuição.

NOTA: Avalie o que você entendeu dessa "Perspectiva prática" tentando resolver os problemas 9.85 e 9.86, apresentados no final deste capítulo.

Resumo

- A equação geral para uma *fonte senoidal* é

$$v = V_m \cos(\omega t + \phi) \text{ (fonte de tensão)},$$

ou

$$i = I_m \cos(\omega t + \phi) \text{ (fonte de corrente)},$$

onde V_m (ou I_m) é a amplitude máxima, ω é a freqüência, e ϕ é o ângulo de fase.

- A freqüência, ω, de uma resposta senoidal é a mesma que a freqüência da fonte senoidal que excita o circuito. Em geral, o módulo e o ângulo de fase da resposta são diferentes dos da fonte.
- A melhor maneira de determinar as tensões e correntes de regime permanente em um circuito excitado por fontes senoidais é executar a análise no domínio da freqüência. As seguintes transformadas matemáticas permitem que nos movimentemos entre o domínio do tempo e o da freqüência.
- A transformada fasorial (do domínio do tempo para o domínio da freqüência):

$$\mathbf{V} = V_m e^{j\phi} = \mathcal{P}\{V_m \cos(\omega t + \phi)\}.$$

- A transformada fasorial inversa (do domínio da freqüência para o domínio do tempo):

$$\mathcal{P}^{-1}\{ V_m e^{j\phi} = \Re\{V_m e^{j\phi} e^{j\omega t}\}.$$

- Quando trabalhar com sinais que variam senoidalmente, lembre-se de que a tensão está 90° adiantada em relação à corrente nos terminais de um indutor e de que a corrente está 90° adiantada em relação à tensão nos terminais de um capacitor.
- A *impedância* (Z) desempenha, no domínio da freqüência, o mesmo papel que a resistência, indutância e capacitância desempenham no domínio do tempo. Especificamente, a relação entre corrente fasorial e tensão fasorial para resistores, indutores e capacitores é

$$\mathbf{V} = Z\mathbf{I},$$

onde o sentido de referência para **I** obedece à convenção passiva. A recíproca da impedância é a *admitância* (Y). Portanto, outra maneira de expressar a relação entre corrente e tensão para resistores, indutores e capacitores no domínio da freqüência é

$$\mathbf{V} = \mathbf{I}/Y.$$

- Todas as técnicas de análise de circuitos desenvolvidas nos capítulos 2–4 para circuitos resistivos também se aplicam aos circuitos em regime permanente senoidal no domínio da freqüência. Entre essas técnicas estão a LTK, a LCK, associações em série e em paralelo de impedâncias, divisão de tensão e corrente, método das tensões de nó e correntes de malha, transformações de fonte e equivalentes de Thévenin e Norton.
- O *transformador linear* de dois enrolamentos é um dispositivo de acoplamento composto de dois enrolamentos construídos no mesmo núcleo não-magnético. *Impedância refletida* é a impedância do circuito secundário como percebida dos terminais do circuito primário ou vice-versa. A impedância refletida de um transformador linear percebida no primário é o conjugado da auto-impedância do circuito secundário, aumentada pelo fator de escala $(\omega M/|Z_{22}|)^2$.
- O *transformador ideal* de dois enrolamentos é um transformador linear que apresenta as seguintes propriedades: acoplamento perfeito ($k = 1$), auto-indutância infinita em cada bobina ($L_1 = L_2 = \infty$) e enrolamentos sem perdas ($R_1 = R_2 = 0$). O comportamento do circuito é comandado pela relação entre espiras $a = N_2/N_1$. Em particular, o número de volts por espira é o mesmo para cada enrolamento, ou

$$\mathbf{V}_1/N_1 = \pm\, \mathbf{V}_2/N_2,$$

e a quantidade de ampère-espira é a mesma para cada enrolamento, ou

$$N_1\mathbf{I}_1 = \pm\, N_2\mathbf{I}_2.$$

TABELA 9.3 Impedância e valores relacionados

Elemento	Impedância (Z)	Reatância	Admitância (Y)	Susceptância
Resistor	R (resistência)	—	G (condutância)	—
Capacitor	$j(-1/\omega C)$	$-1/\omega C$	$j\omega C$	ωC
Indutor	$j\omega L$	ωL	$j(-1/\omega L)$	$-1/\omega L$

Problemas

Seção 9.1

9.1* Uma tensão senoidal é dada pela expressão

$$v = 100 \cos(240\pi t + 45°) \text{ mV}.$$

Determine (a) f em hertz; (b) T em milissegundos; (c) V_m; (d) $v(0)$; (e) ϕ em graus e radianos; (f) o menor valor positivo de t no qual $v = 0$; e (g) o menor valor positivo de t no qual $dv/dt = 0$.

9.2 Desenhe, em um único gráfico, $v = 60 \cos(\omega t + \phi)$ em função de ωt para $\phi = -60°, -30°, 0°, 30°$ e $60°$.

a) Determine se a função tensão está se deslocando para a direita ou para a esquerda à medida que ϕ torna-se mais positivo.

b) Qual é a direção do deslocamento se ϕ passar de 0 para $-30°$?

9.3 Sabe-se que, em $t = -250/6\ \mu s$, uma tensão senoidal é zero e está aumentando. O próximo zero da tensão acontece em $t = 1.250/6\ \mu s$. Sabe-se também que a tensão é 75 V em $t = 0$.

a) Qual é a freqüência de v em hertz?

b) Qual é a expressão para v?

9.4 Uma corrente senoidal é zero em $t = 150\ \mu s$ e aumenta a uma taxa de $2 \times 10^4 \pi$ A/s. A amplitude máxima da corrente é 10 A.

a) Qual é a freqüência de v em radianos por segundo?

b) Qual é a expressão para v?

9.5* Considere a tensão senoidal

$$v(t) = 170 \cos(120\pi t - 60°)\ \text{V}.$$

a) Qual é a amplitude máxima da tensão?

b) Qual é a freqüência em hertz?

c) Qual é a freqüência em radianos por segundo?

d) Qual é o ângulo de fase em radianos?

e) Qual é o ângulo de fase em graus?

f) Qual é o período em milissegundos?

g) Qual é a primeira vez, após $t = 0$, que $v = 170$ V?

h) A função senoidal é deslocada 125/18 ms para a direita ao longo do eixo do tempo. Qual é a expressão para $v(t)$?

i) Qual é o número mínimo de milissegundos de que a função deve ser deslocada para a direita se a expressão para $v(t)$ for 170 sen $120\pi t$ V?

j) Qual é o número mínimo de milissegundos de que uma função deve ser deslocada para a esquerda se a expressão para $v(t)$ for 170 cos $120\pi t$ V?

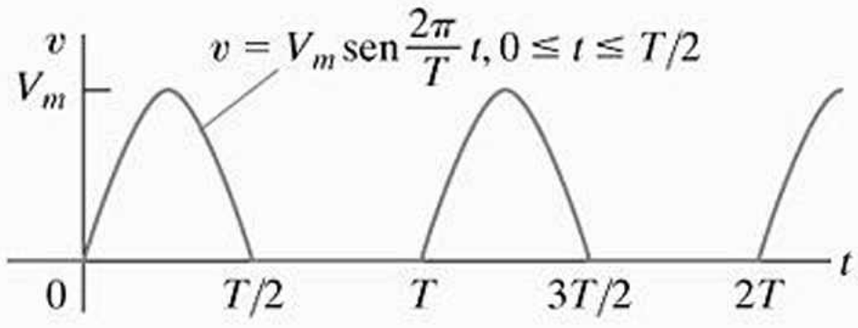
9.6 Mostre que

$$\int_{t_0}^{t_0+T} V_m^2 \cos^2(\omega t + \phi)dt = \frac{V_m^2 T}{2}.$$

9.7 O valor rms da tensão senoidal das tomadas das residências nos Estados Unidos é 120 V. Qual é o valor máximo da tensão na tomada?

9.8* Determine o valor rms da tensão na saída de um retificador de meia-onda mostrada.

Figura P9.8



Seção 9.2

9.9* A tensão aplicada ao circuito mostrado na Figura 9.5 em $t = 0$ é $100 \cos(400t + 60°)$ V. A resistência do circuito é 40 Ω e a corrente inicial no indutor de 75 mH é zero.

a) Determine $i(t)$ para $t \geq 0$.

b) Escreva as expressões para as componentes transitória e de regime permanente de $i(t)$.

c) Determine o valor numérico de i depois de a chave estar fechada por 1,875 ms.

d) Quais são a amplitude máxima, a freqüência (em radianos por segundo) e o ângulo de fase da corrente de regime permanente?

e) De quantos graus é a defasagem entre a tensão e a corrente de regime permanente?

9.10 a) Verifique se a Equação 9.9 é a solução da Equação 9.8. Isso pode ser feito substituindo a Equação 9.9 no lado esquerdo da Equação 9.8 e, então, observando se o resultado é igual ao do lado direito para todos os valores de $t > 0$. Em $t = 0$, a Equação 9.9 deve reduzir–se ao valor inicial da corrente.

b) Como a componente transitória desaparece com o passar do tempo e como nossa solução deve satisfazer a equação diferencial para todos os valores de t, a componente de regime permanente, por si, também deve satisfazer a equação diferencial. Verifique essa observação mostrando que a componente de regime permanente da Equação 9.9 satisfaz a Equação 9.8.

Seções 9.3–9.4

9.11 Use o conceito de fasor para combinar as seguintes funções senoidais em uma única expressão trigonométrica:

a) $y = 100 \cos(300t + 45°) + 500 \cos(300t - 60°)$

b) $y = 250 \cos(377t + 30°) - 150 \text{ sen}(377t + 140°)$

c) $y = 60 \cos(100t + 60°) - 120 \text{ sen}(100t - 125°) + 100 \cos(100t + 90°)$ e

d) $y = 100 \cos(\omega t + 40°) + 100 \cos(\omega t + 160°) + 100 \cos(\omega t - 80°)$.

9.12* Uma tensão senoidal de 50 Hz com amplitude máxima de 340 V em $t = 0$ é aplicada aos terminais de um indutor. A amplitude máxima da corrente de regime permanente no indutor é 8,5 A.

a) Qual é a freqüência da corrente no indutor?

b) Se o ângulo de fase da tensão for zero, qual será o ângulo de fase da corrente?

c) Qual é a reatância indutiva do indutor?

d) Qual é a indutância do indutor em mili-henrys?

e) Qual é a impedância do indutor?

9.13* Uma tensão senoidal de 40 kHz tem ângulo de fase nulo e amplitude máxima de 2,5 mV. Quando essa tensão é aplicada aos terminais de um capacitor, a corrente resultante de regime permanente tem amplitude máxima de 125,67 μA.

a) Qual é a freqüência da corrente em radianos por segundo?
b) Qual é o ângulo de fase da corrente?
c) Qual é a reatância capacitiva do capacitor?
d) Qual é a capacitância do capacitor em microfarads?
e) Qual é a impedância do capacitor?

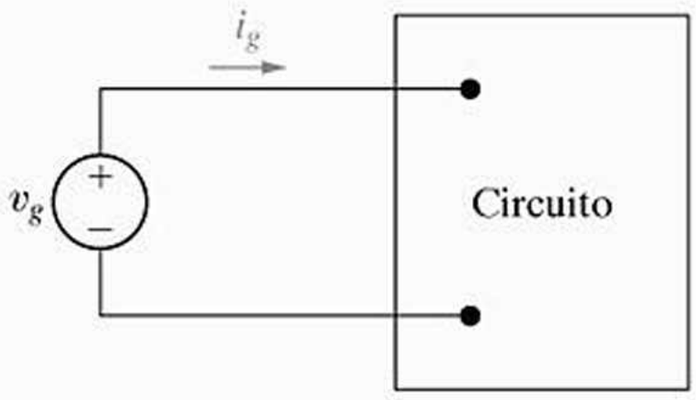
9.14* As expressões para a tensão e a corrente de regime permanente nos terminais do circuito da Figura P9.14 são

$v_g = 150 \cos (8.000\pi t + 20°)$ V,

$i_g = 30 \text{ sen } (8.000\pi t + 38°)$ A.

a) Qual é a impedância vista pela fonte?
b) De quantos microssegundos é a defasagem entre a corrente e a tensão?

Figura P9.14



Seções 9.5 e 9.6

9.15* PSPICE Um resistor de 20 Ω e um capacitor de 1 μF estão ligados em paralelo. Essa combinação está em paralelo com a combinação em série de um resistor de 1 Ω e um indutor de 40 μH. Os três ramos em paralelo são excitados por uma fonte de corrente senoidal cuja expressão é 20 cos(50.000t – 20°) A.

a) Desenhe o circuito equivalente no domínio da freqüência.
b) Referencie a tensão na fonte de corrente como uma elevação no sentido da corrente da fonte e determine a tensão fasorial.
c) Determine a expressão de regime permanente para $v(t)$.

9.16* PSPICE Um resistor de 400 Ω, um indutor de 87,5 mH e um capacitor de 312,5 nF estão ligados em série. Os elementos ligados em série são energizados por uma fonte de tensão senoidal cuja tensão é 500 cos (8.000t + 60°) V.

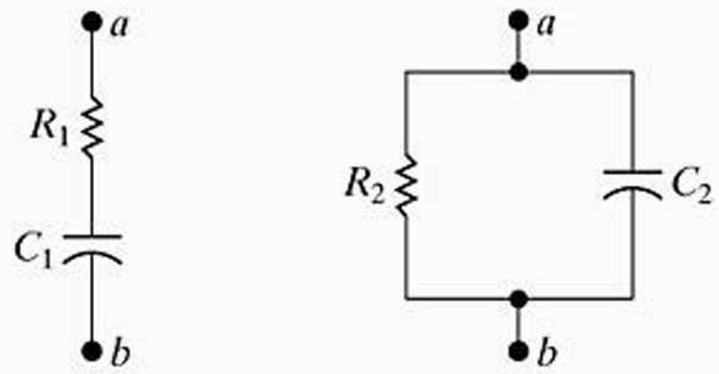
a) Desenhe o circuito equivalente no domínio da freqüência.
b) Referencie a corrente na direção da elevação da tensão na fonte e determine a corrente fasorial.
c) Determine a expressão de regime permanente para $i(t)$.

9.17 a) Mostre que, a uma dada freqüência ω, os circuitos na Figura P9.17(a) e (b) terão a mesma impedância entre os terminais a,b se

$$C_1 = \frac{1 + \omega^2 R_2^2 C_2^2}{\omega^2 R_2^2 C_2}.$$

b) Determine os valores de resistência e capacitância que, quando ligados em série, terão a mesma impedância a uma freqüência de 80 krad/s que aquela da conexão em paralelo de um resistor de 500 Ω e de um capacitor de 25 nF.

Figura P9.17



9.18 a) Mostre que, a uma dada freqüência ω, os circuitos na Figura P9.17(a) e (b) terão a mesma impedância entre os terminais a,b se

$$R_2 = \frac{1 + \omega^2 R_1^2 C_1^2}{\omega^2 R_1 C_1^2},$$

$$C_2 = \frac{C_1}{1 + \omega^2 R_1^2 C_1^2}.$$

(*Sugestão:* Os dois circuitos terão a mesma impedância se tiverem a mesma admitância.)

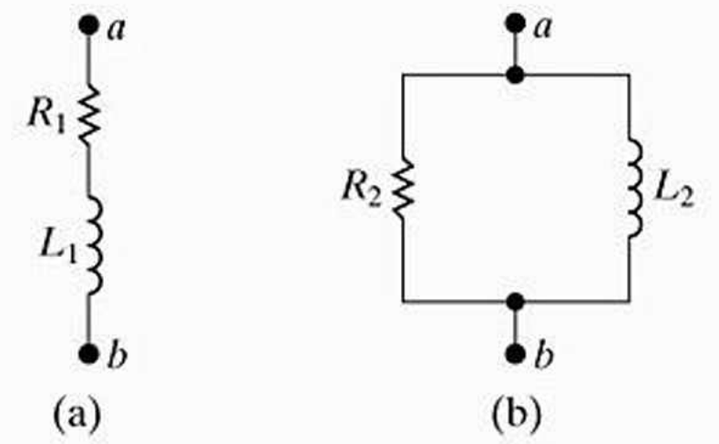
b) Determine os valores de resistência e capacitância que, quando ligados em paralelo, darão a mesma impedância a uma freqüência de 20 krads/s que a de uma conexão em série de resistor de 2 kΩ e de um capacitor de 50 nF.

9.19 a) Mostre que, a uma dada freqüência ω, os circuitos da Figura P9.19(a) e (b) terão a mesma impedância entre os terminais a,b se

$$R_1 = \frac{\omega^2 L_2^2 R_2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2}, \qquad L_1 = \frac{R_2^2 L_2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2}.$$

b) Determine os valores de resistência e indutância que, quando ligados em série, terão a mesma impedância a uma freqüência de 20 krads/s que a conexão paralela de um resistor de 50 kΩ e de um indutor de 2,5 H.

Figura P9.19



9.20 a) Mostre que, a uma dada freqüência ω, os circuitos na Figura P9.19(a) e (b) terão a mesma impedância entre os terminais a,b se

$$R_2 = \frac{R_1^2 + \omega^2 L_1^2}{R_1}, \qquad L_2 = \frac{R_1^2 + \omega^2 L_1^2}{\omega^2 L_1}.$$

(*Sugestão:* Os dois circuitos terão a mesma impedância se tiverem a mesma admitância.)

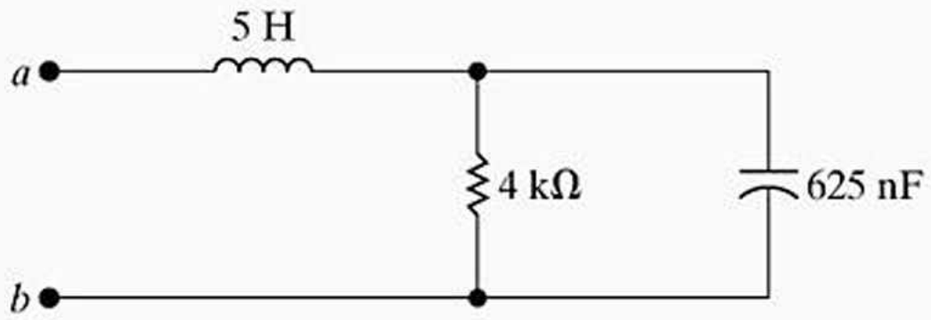
b) Determine os valores de resistência e indutância que, quando ligados em paralelo, terão a mesma impedância a uma freqüência de 10 krads/s que a de uma conexão em série de um resistor de 5 kΩ e de um indutor de 500 mH.

9.21* Três ramos com impedâncias de $4 - j3\ \Omega$, $16 + j12\ \Omega$ e $-j100\ \Omega$, respectivamente, estão ligados em paralelo. Quais são (a) a admitância, (b) a condutância e (c) a susceptância equivalentes da ligação em milissiemens? (d) Se os ramos em paralelo forem excitados por uma fonte de corrente senoidal em que $i = 50 \cos \omega t$ A, qual será a amplitude máxima da corrente no ramo puramente capacitivo?

9.22 PSPICE a) Para o circuito mostrado na Figura P9.22, determine a freqüência (em radianos por segundo) em que a impedância Z_{ab} é puramente resistiva.

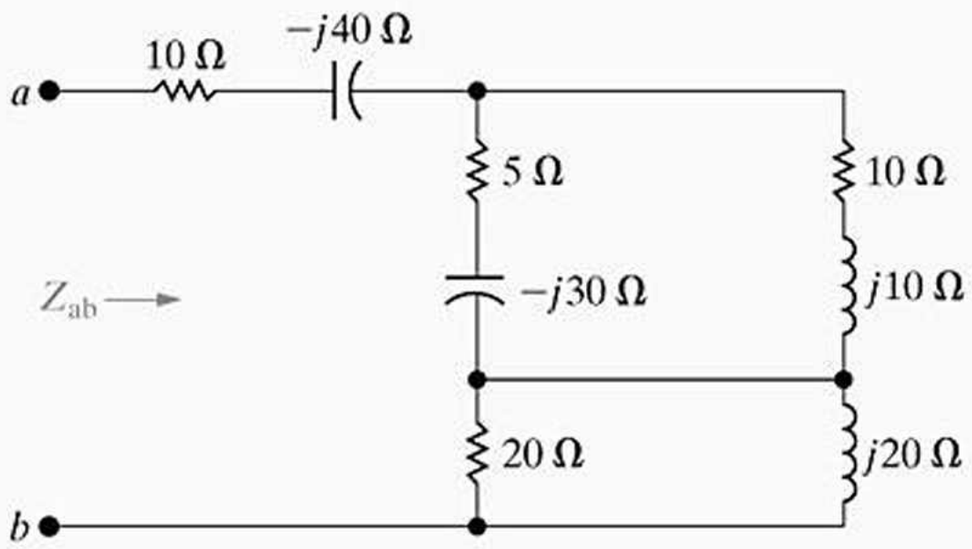
b) Determine o valor de Z_{ab} na freqüência determinada no item (a).

Figura P9.22



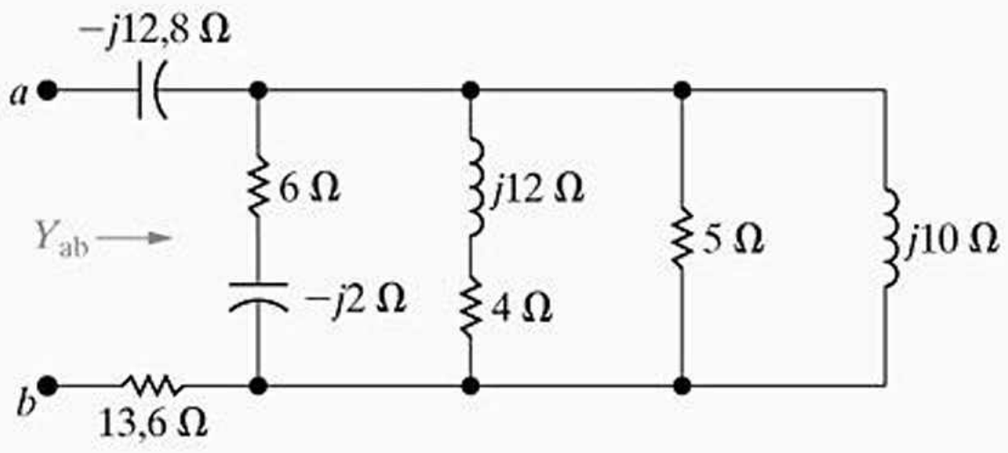
9.23 Determine a impedância Z_{ab} no circuito da Figura P9.23. Expresse Z_{ab} em forma polar e também em forma retangular.

Figura P9.23



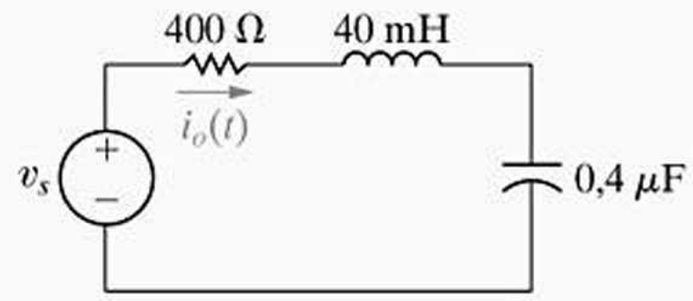
9.24 Determine a admitância Y_{ab} no circuito visto na Figura P9.24. Expresse Y_{ab} em forma polar e também em forma retangular. Determine o valor de Y_{ab} em milissiemens.

Figura P9.24



9.25 PSPICE Determine a expressão de regime permanente para $i_o(t)$ no circuito da Figura P9.25 se $v_s = 750 \cos 5.000t$ mV.

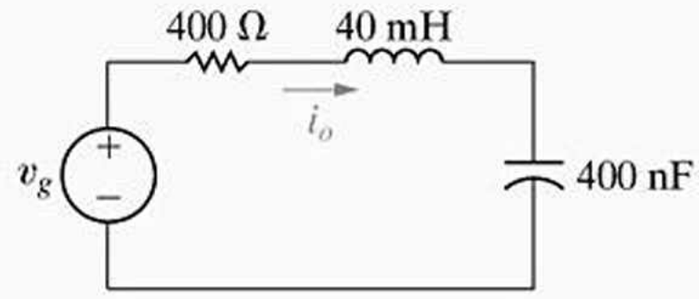
Figura P9.25



9.26* O circuito mostrado na Figura P9.26 está em regime permanente senoidal. Determine o valor de ω se

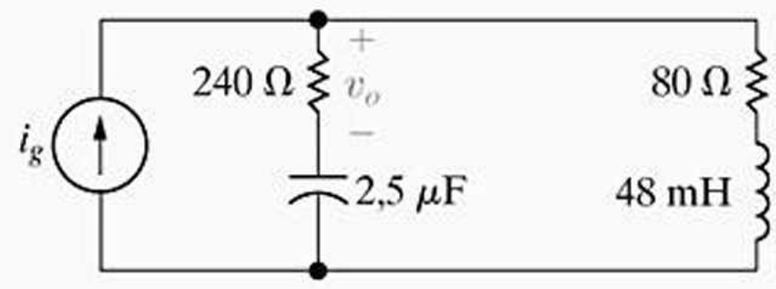
$$i_o = 100 \text{ sen } (\omega t + 81{,}87°) \text{ mA},$$
$$v_g = 50 \cos (\omega t - 45°) \text{ V}.$$

Figura P9.26



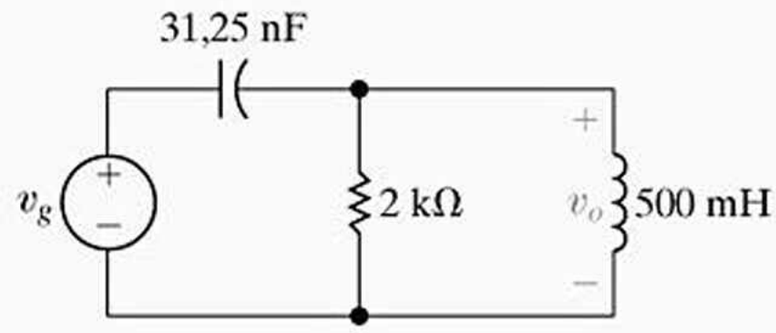
9.27* Determine a expressão de regime permanente para v_o no circuito da Figura P9.27 se $i_g = 200 \cos 5.000t$ mA.

Figura P9.27



9.28* PSPICE O circuito da Figura P9.28 está em regime permanente senoidal. Determine a expressão de regime permanente para $v_o(t)$ se $v_g = 64 \cos 8.000t$ V.

Figura P9.28

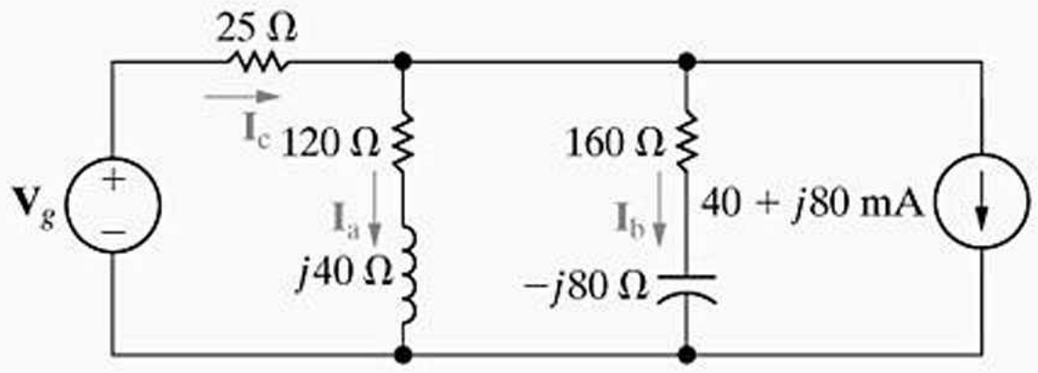


9.29 PSPICE A corrente fasorial $\mathbf{I}_a$ no circuito da Figura P9.29 é $40 \angle 0°$ mA.

a) Determine $\mathbf{I}_b$, $\mathbf{I}_c$ e $\mathbf{V}_g$.

b) Se $\omega = 800$ rad/s, determine as expressões para $i_b(t)$, $i_c(t)$ e $v_g(t)$.

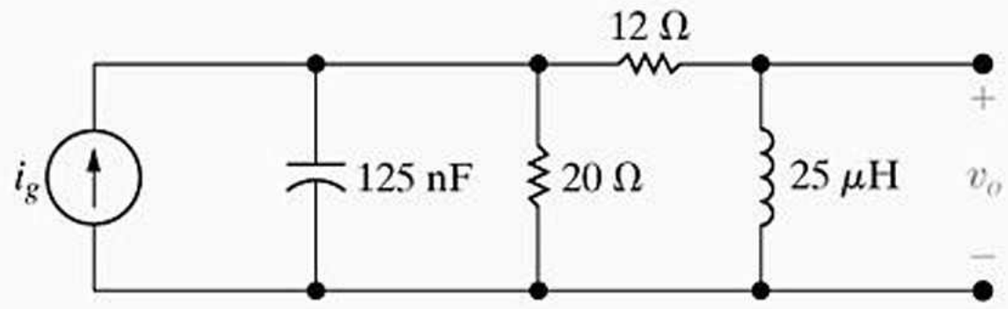
Figura P9.29



9.30 PSPICE a) Para o circuito mostrado na Figura P9.30, determine a expressão de regime permanente para v_o se $i_g = 5 \cos (8 \times 10^5 t)$ A.

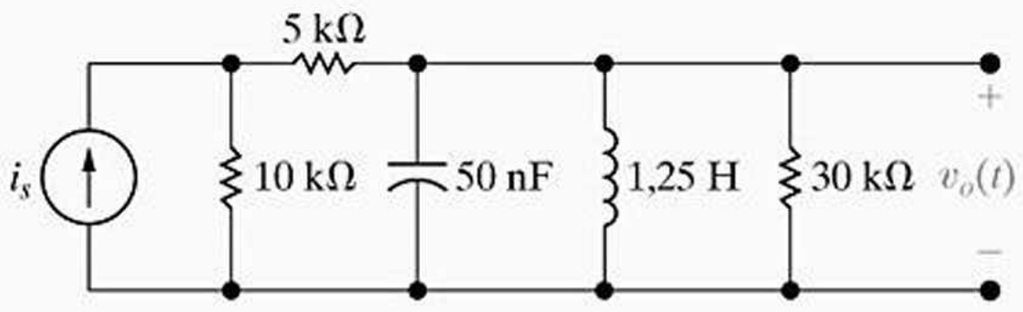
b) De quantos nanossegundos é a defasagem entre v_o lag i_g?

Figura P9.30



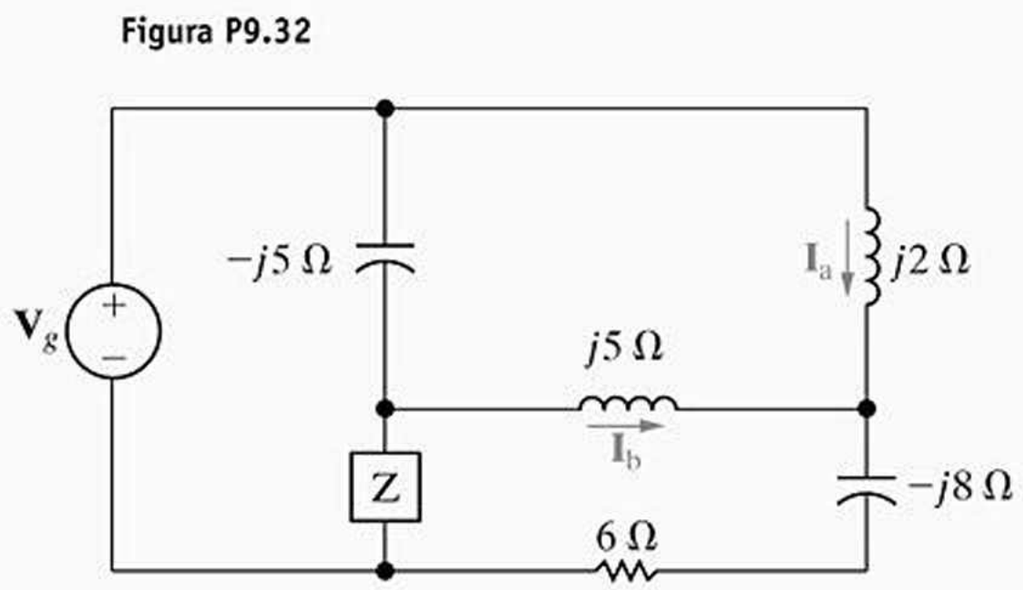
9.31 PSPICE O circuito na Figura P9.31 está funcionando em regime permanente senoidal. Determine $v_o(t)$ se $i_s(t) = 15 \cos 8.000t$ mA.

Figura P9.31



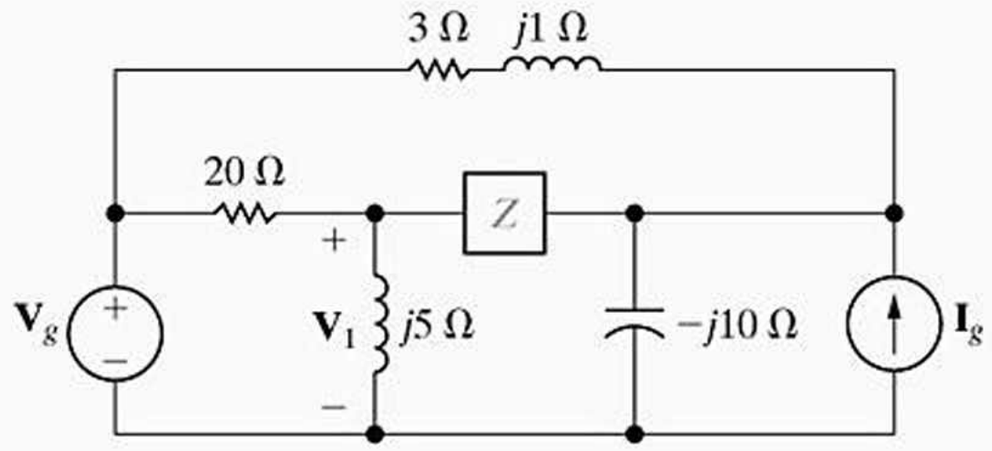
9.32 Determine $\mathbf{I}_b$ e Z no circuito da Figura P9.32 se $\mathbf{V}_g = 60 \angle 0°$ V e $\mathbf{I}_a = 5 \angle -90°$ A.

Figura P9.32



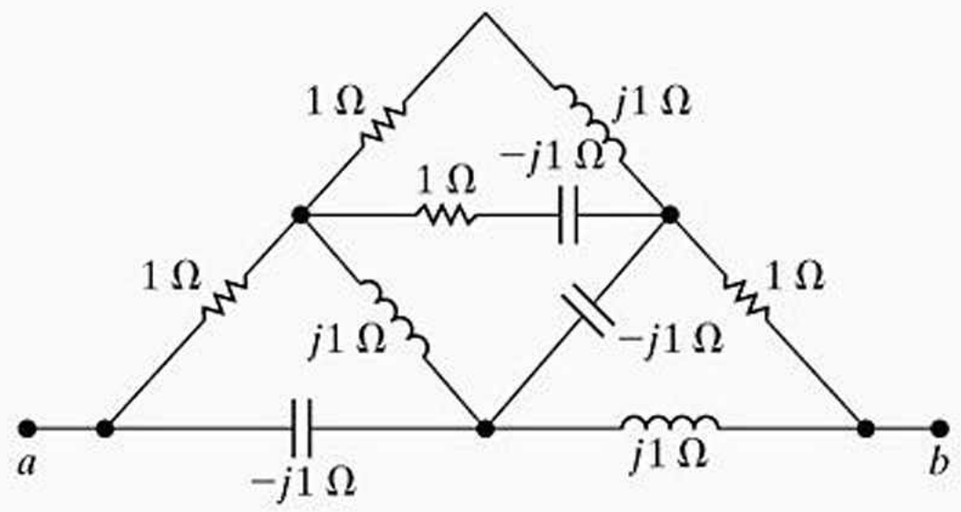
9.33 Determine o valor de Z no circuito visto na Figura P9.33 se $\mathbf{V}_g = 100 - j50$ V, $\mathbf{I}_g = 20 + j30$ A e $\mathbf{V}_1 = 40 + j30$ V.

Figura P9.33



9.34* Determine Z_{ab} para o circuito mostrado na Figura P9.34.

Figura P9.34

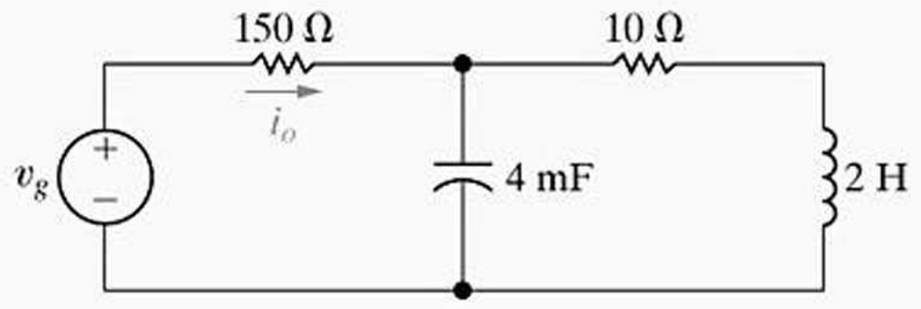


9.35 PSPICE A freqüência da fonte de tensão senoidal no circuito da Figura P9.35 é ajustada até que a corrente i_o fique em fase com v_g.

a) Determine a freqüência em hertz.

b) Determine a expressão de regime permanente para i_o (na freqüência encontrada em [a]) se $v_g = 10 \cos \omega t$ V.

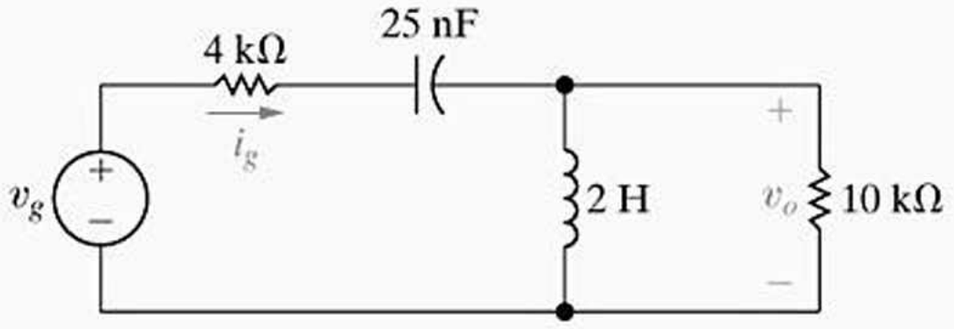
Figura P9.35



9.36 PSPICE a) A freqüência da fonte de tensão no circuito na Figura P9.36 é ajustada até que i_g fique em fase com v_g. Qual é o valor de ω em radianos por segundo?

b) Se $v_g = 45 \cos \omega t$ V (onde ω é a freqüência determinada em [a]), qual é a expressão de regime permanente para v_o?

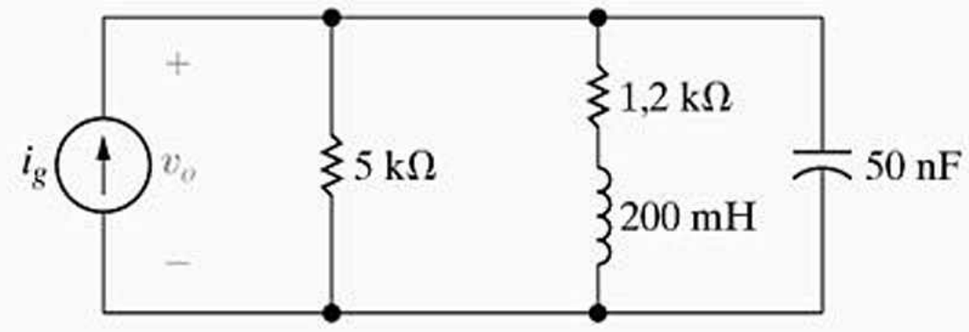
Figura P9.36



9.37 PSPICE A freqüência da fonte de corrente senoidal no circuito da Figura P9.37 é ajustada até que v_o fique em fase com i_g.

a) Qual é o valor de ω em radianos por segundo?
b) Se $i_g = 2{,}5 \cos \omega t$ mA (onde ω é a freqüência determinada em [a]), qual é a expressão de regime permanente para v_o?

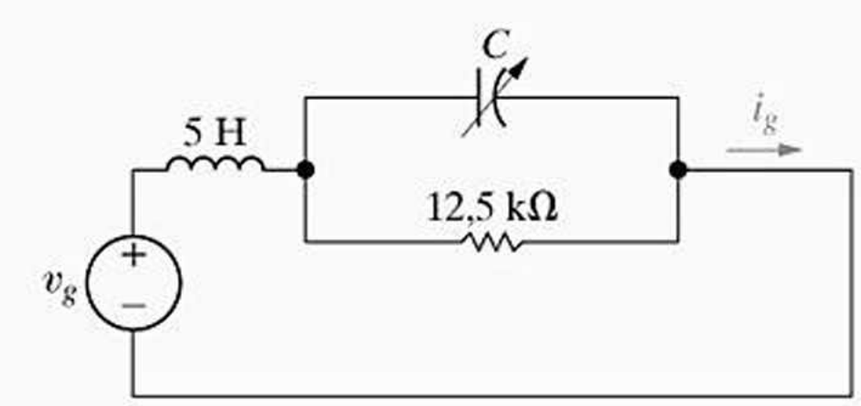
Figura P9.37



9.38 PSPICE O circuito da Figura P9.38 está em regime permanente senoidal. O capacitor é ajustado até que a corrente i_g fique em fase com a tensão senoidal v_g.

a) Especifique a capacitância em microfarads se $v_g = 250 \cos 1.000t$ V.
b) Calcule a expressão de regime permanente para i_g quando C tiver o valor determinado em (a).

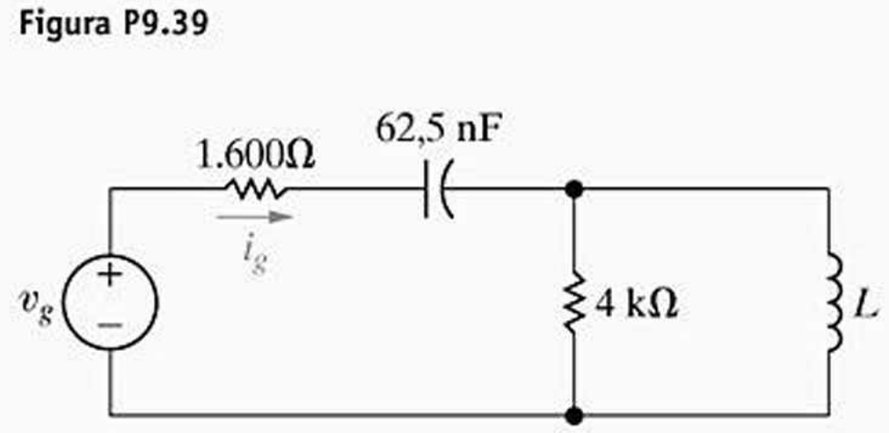
Figura P9.38



9.39 PSPICE a) A tensão da fonte no circuito da Figura P9.39 é $v_g = 96 \cos 10.000t$ V. Determine os valores de L de forma que i_g fique em fase com v_g quando o circuito estiver em regime permanente.

b) Para os valores de L encontrados em (a), determine as expressões de regime permanente para i_g.

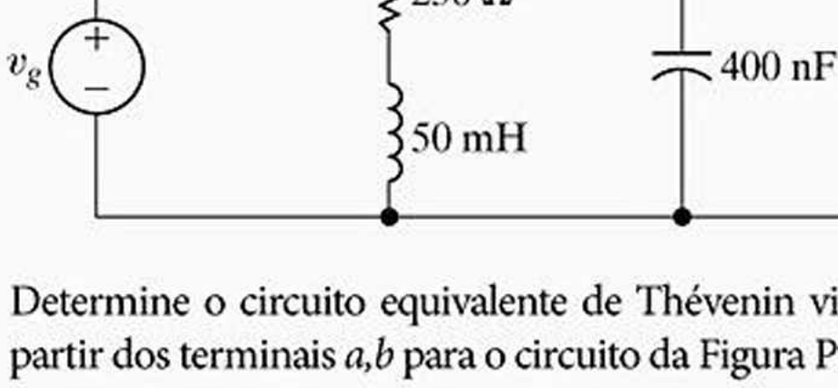
Figura P9.39



Seção 9.7

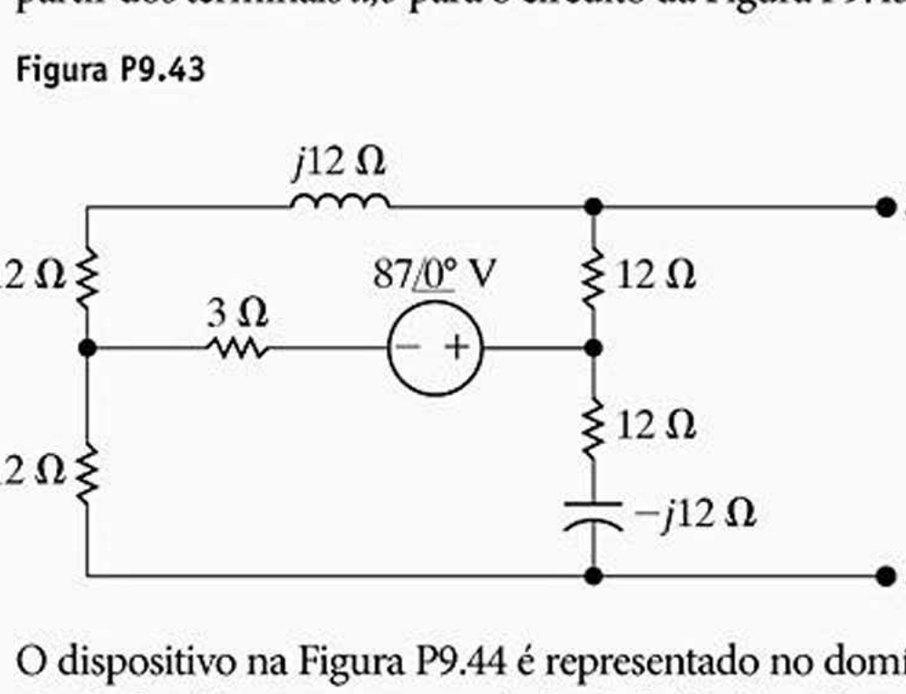
9.40* Use transformações de fonte para determinar o circuito equivalente de Thévenin visto a partir dos terminais a,b para o circuito da Figura P9.40.

Figura P9.40



9.41* Use transformações de fonte para determinar o circuito equivalente de Norton visto a partir dos terminais a,b para o circuito da Figura P9.41.

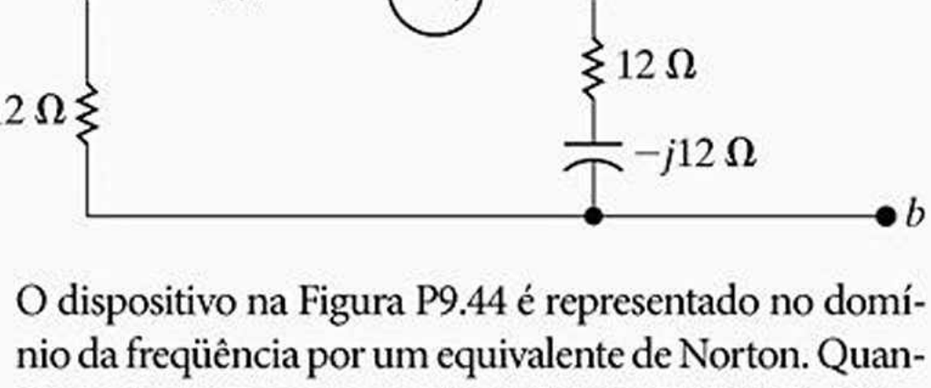
Figura P9.41



9.42 A fonte de tensão senoidal no circuito da Figura P9.42 fornece uma tensão igual a 22,36 cos (5.000t + 26,565°) V.

a) Determine a tensão de Thévenin vista a partir dos terminais a,b.
b) Determine a impedância de Thévenin em relação aos terminais a,b.
c) Desenhe o equivalente de Thévenin.

Figura P9.42



9.43 Determine o circuito equivalente de Thévenin visto a partir dos terminais a,b para o circuito da Figura P9.43.

Figura P9.43

9.44 O dispositivo na Figura P9.44 é representado no domínio da freqüência por um equivalente de Norton. Quando um indutor, com uma impedância de $j100$ Ω, é ligado ao dispositivo, o valor de $\mathbf{V}_0$ se torna $100/120°$ mV.

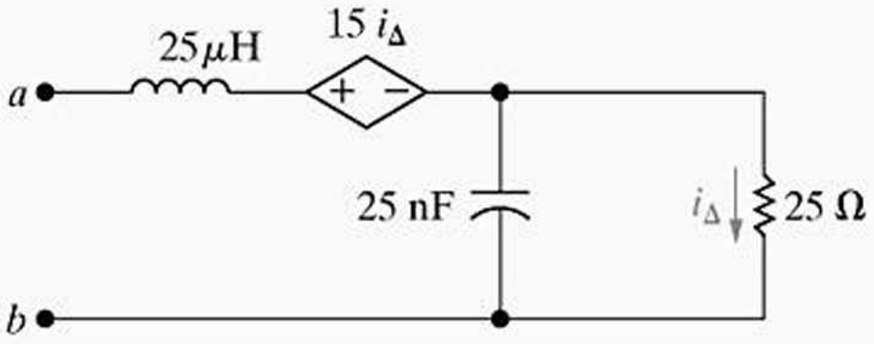
Quando um capacitor, com uma impedância de $-j100$ Ω, é ligado ao dispositivo, o valor de $\mathbf{I}_0$ se torna $-3\angle 210°$ mA. Determine a corrente de Norton $\mathbf{I}_N$ e a impedância de Norton Z_N.

Figura P9.44



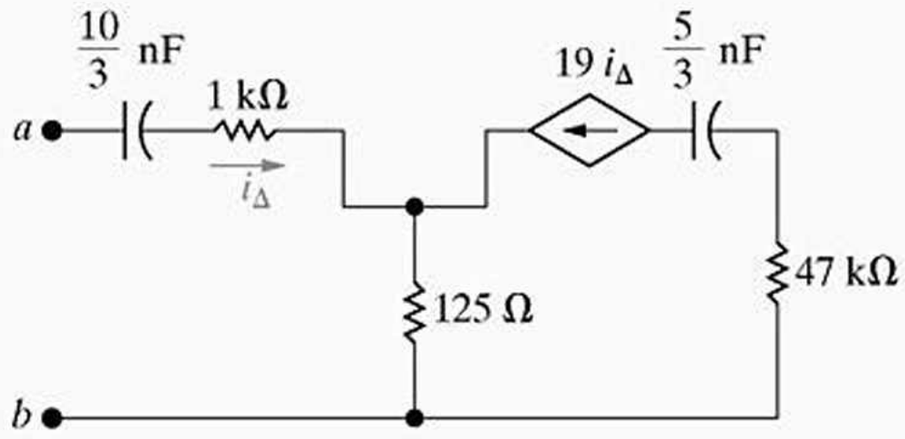
9.45 Determine Z_{ab} no circuito da Figura P9.45 quando o circuito está funcionando a uma freqüência de 1,6 Mrad/s.

Figura P9.45



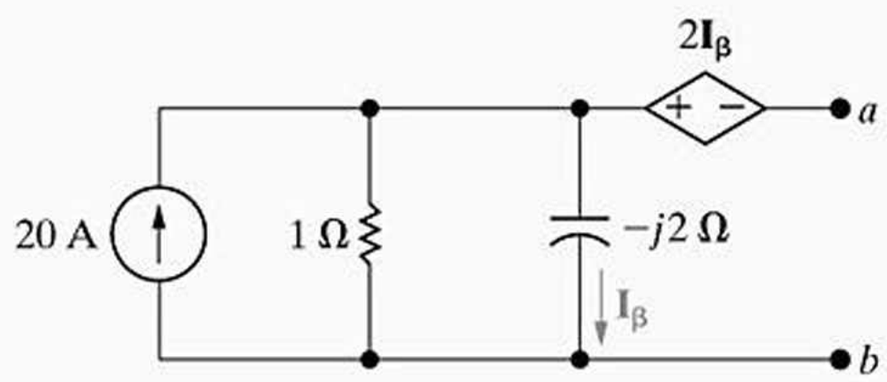
9.46 Determine a impedância de Thévenin vista a partir dos terminais *a,b* do circuito da Figura P9.46 se a freqüência de operação for 25 krad/s.

Figura P9.46



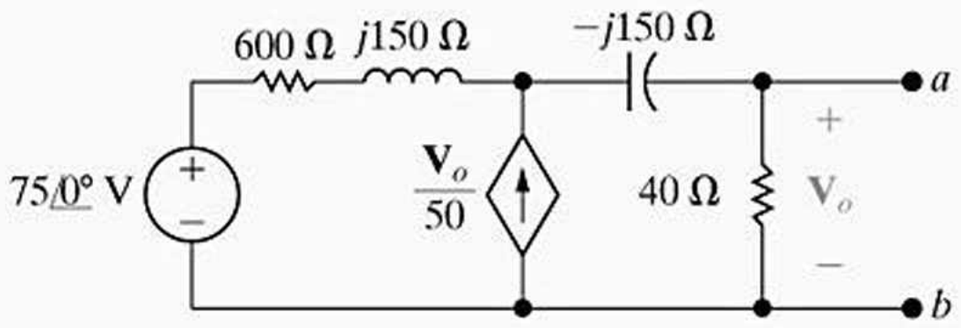
9.47* Determine o equivalente de Norton visto a partir dos terminais *a,b* no circuito da Figura P9.47.

Figura P9.47



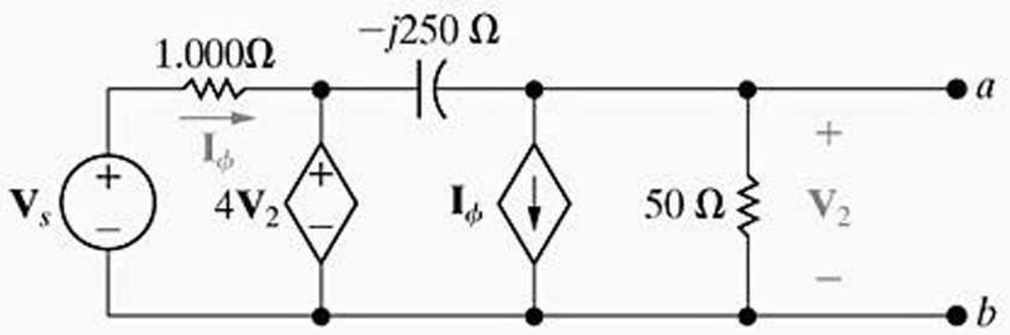
9.48 Determine o circuito equivalente de Thévenin visto a partir dos terminais *a,b* do circuito da Figura P9.48.

Figura P9.48



9.49 Determine o circuito equivalente de Norton visto a partir dos terminais *a,b* para o circuito da Figura P9.49 quando $\mathbf{V}_s = 25\angle 0°$ V.

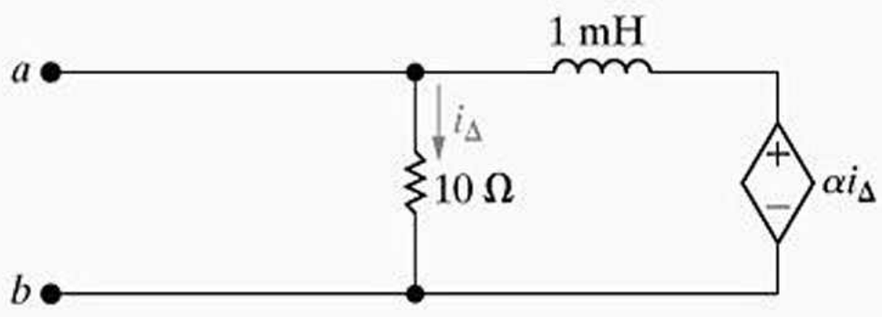
Figura P9.49



9.50 O circuito da Figura P9.50 está funcionando em uma freqüência de 10 krad/s. Suponha que α seja real e esteja entre −50 e + 50, isto é, $-50 \leq \alpha \leq 50$.

a) Determine o valor de α de modo que a impedância de Thévenin vista a partir dos terminais *a,b* seja puramente resistiva.
b) Qual é o valor da impedância de Thévenin para o α determinado em (a)?
c) Pode-se ajustar α de modo que a impedância de Thévenin seja igual a $5 + j5$ Ω? Se for possível, qual será o valor de α?
d) Para quais valores de α a impedância de Thévenin será indutiva?

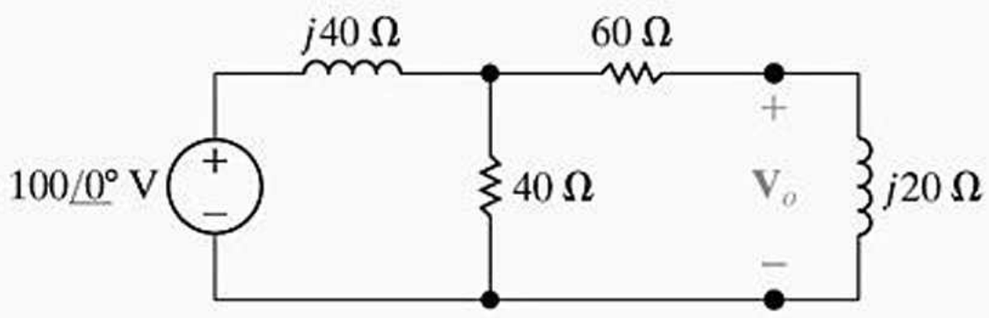
Figura P9.50



Seção 9.8

9.51* Use o método das tensões de nó para determinar $\mathbf{V}_o$ no circuito da Figura P9.51.

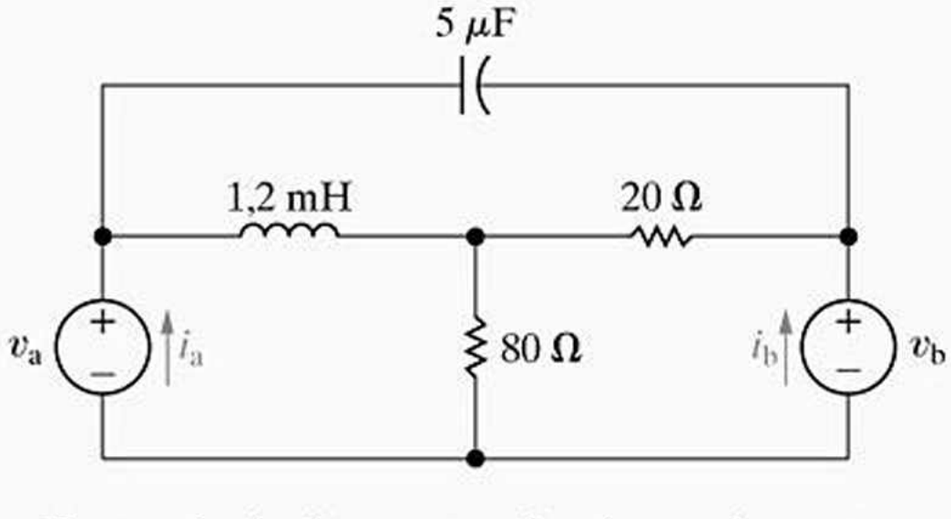
Figura P9.51



9.52 PSPICE Use o método das tensões de nó para determinar a expressão de regime permanente para $v_o(t)$ no circuito da Figura P9.52 se

$$v_{g_1} = 10 \cos (5.000t + 53{,}13°) \text{ V},$$
$$v_{g_2} = 8 \text{ sen } 5.000t \text{ V}.$$

Figura P9.52

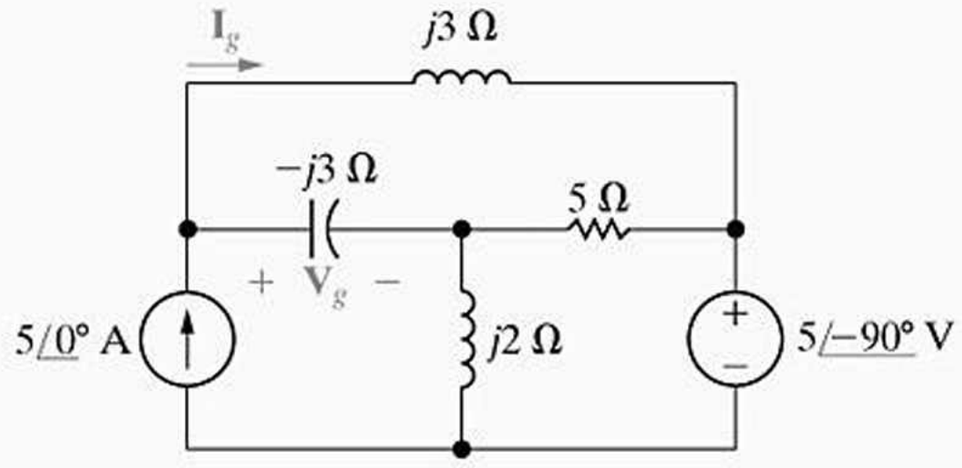


9.53 PSPICE Use o método das tensões de nó para determinar as expressões de regime permanente para as correntes de ramo i_a e i_b no circuito visto na Figura P9.53 se $v_a = 100$ sen $10.000t$ V e $v_b = 500$ cos $10.000t$ V.

Figura P9.53

9.54 Use o método das tensões de nó para determinar a tensão fasorial $\mathbf{V}_g$ no circuito da Figura P9.54.

Figura P9.54

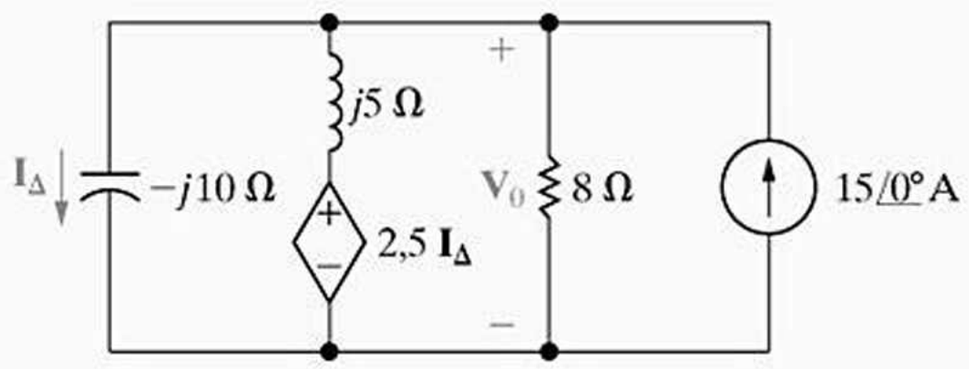


9.55 Use o método das tensões de nó para determinar $\mathbf{V}_o$ e $\mathbf{I}_o$ no circuito da Figura P9.55.

Figura P9.55

9.56* Use o método das tensões de nó para determinar a tensão fasorial $\mathbf{V}_o$ no circuito da Figura P9.56. Expresse a tensão nas formas polar e retangular.

Figura P9.56

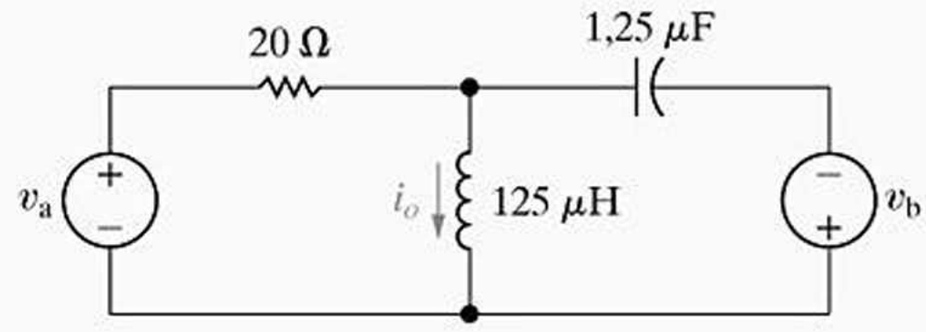


Seção 9.9

9.57 Use o método das correntes de malha para determinar a expressão de regime permanente para $i_o(t)$ no circuito da Figura P9.57 se

$$v_a = 60 \cos 40.000t \text{ V},$$
$$v_b = 90 \text{ sen } (40.000t + 180°) \text{ V}.$$

Figura P9.57

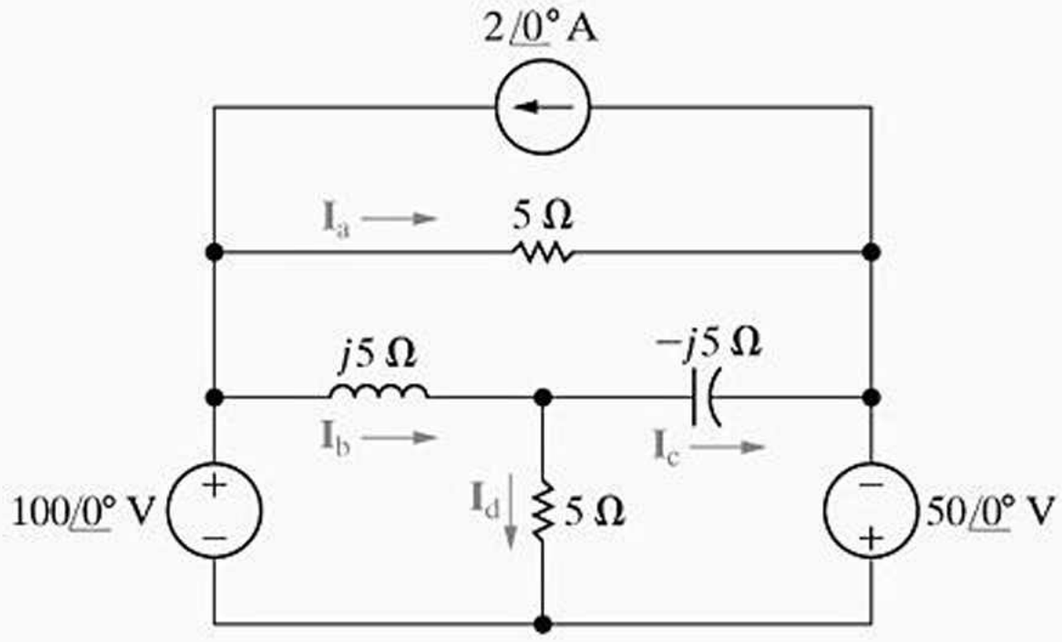


9.58* Use o método das correntes de malha para determinar a expressão de regime permanente para $v_o(t)$ no circuito da Figura P9.52.

9.59 Use o método das correntes de malha para determinar a corrente fasorial $\mathbf{I}_g$ no circuito da Figura P9.54.

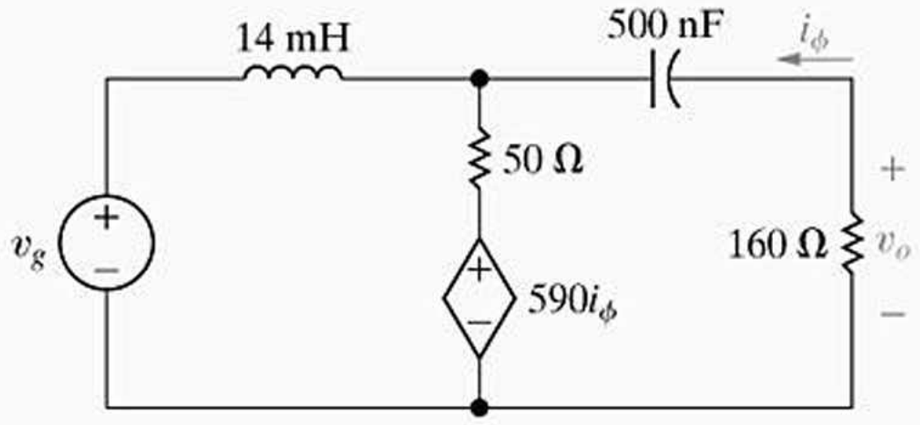
9.60 Use o método das correntes de malha para determinar as correntes de ramo $\mathbf{I}_a$, $\mathbf{I}_b$, $\mathbf{I}_c$ e $\mathbf{I}_d$ no circuito da Figura P9.60.

Figura P9.60



9.61* PSPICE Use o método das correntes de malha para determinar a expressão de regime permanente para v_o no circuito da Figura P9.61, se v_g for igual a 72 cos $5.000t$ V.

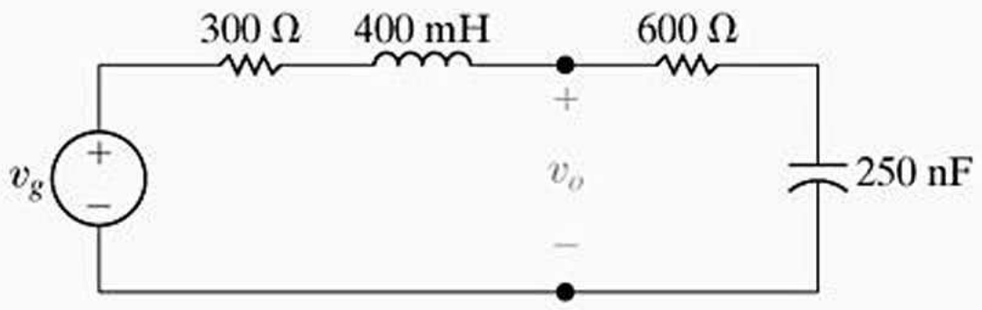
Figura P9.61



Seções 9.5–9.9

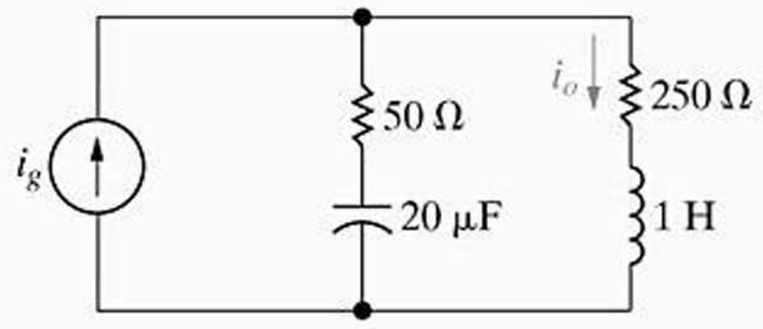
9.62 PSPICE Use o conceito da divisão de tensão para determinar a expressão de regime permanente para $v_o(t)$ no circuito da Figura P9.62 se $v_g = 75 \cos 5.000t$ V.

Figura P9.62



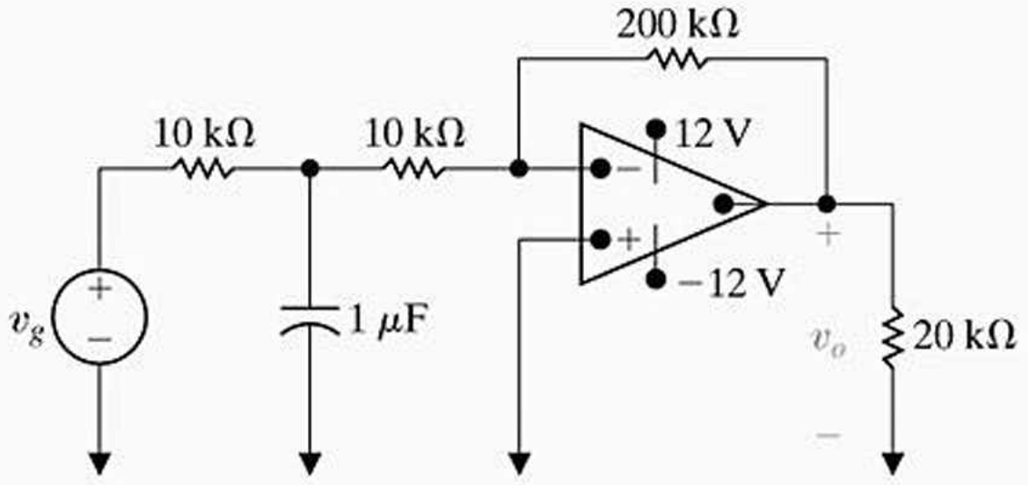
9.63 PSPICE Use o conceito da divisão de corrente para determinar a expressão de regime permanente para i_o no circuito da Figura P9.63 se $i_g = 125 \cos 500t$ mA.

Figura P9.63



9.64 PSPICE A fonte de tensão senoidal no circuito mostrado na Figura P9.64 está gerando a tensão $v_g = 1{,}2 \cos 100t$ V. Se o amp op for ideal, qual será a expressão de regime permanente para $v_o(t)$?

Figura P9.64



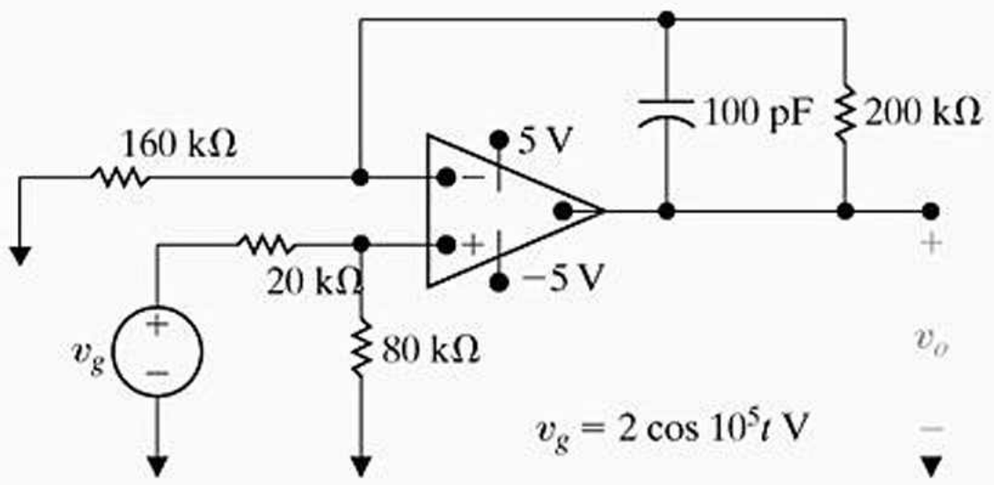
9.65 PSPICE O capacitor de 1 μF no circuito visto na Figura P9.64 é substituído por um capacitor variável. O capacitor é ajustado até que a tensão de saída esteja 120° adiantada em relação à tensão de entrada.

a) Determine os valores de C em microfarads.
b) Escreva a expressão de regime permanente para $v_o(t)$ quando C tiver o valor determinado em (a).

9.66 PSPICE O amp op no circuito da Figura P9.66 é ideal.

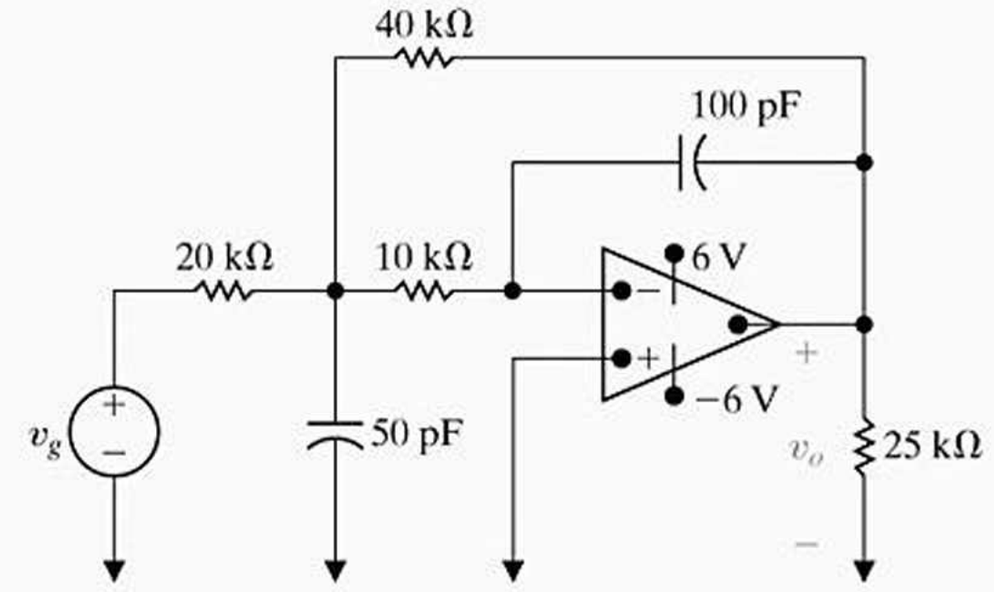
a) Determine a expressão de regime permanente para $v_o(t)$.
b) De quanto pode ser a amplitude de v_g antes que o amplificador sature?

Figura P9.66



9.67 PSPICE O amp op no circuito visto na Figura P9.67 é ideal. Determine a expressão de regime permanente para $v_o(t)$ quando $v_g = 20 \cos 10^6 t$ V.

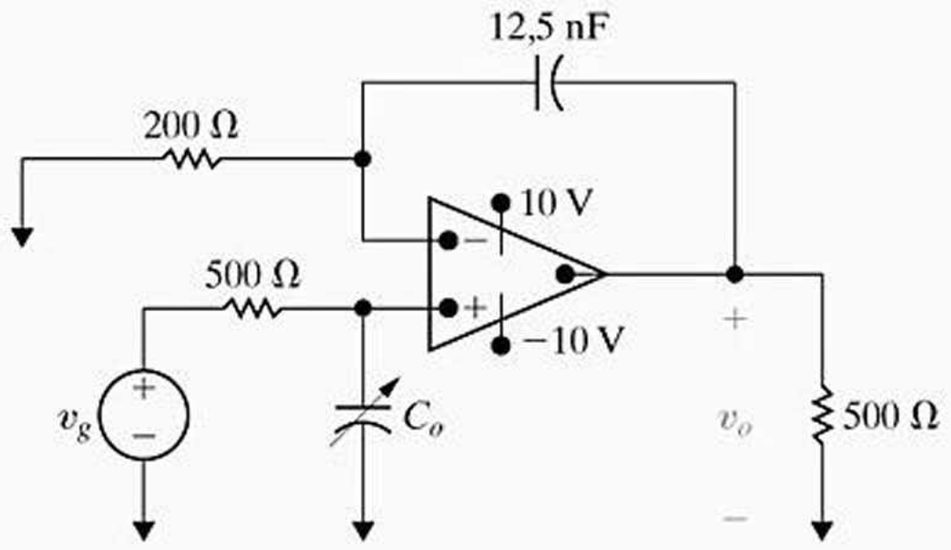
Figura P9.67



9.68 PSPICE O amplificador operacional no circuito mostrado na Figura P9.68 é ideal. A tensão da fonte senoidal ideal é $v_g = 10 \cos 2 \times 10^5 t$ V.

a) Qual é o menor valor que C_o pode alcançar antes de a tensão de saída de regime permanente não ter mais uma forma de onda puramente senoidal?
b) Escreva a expressão de regime permanente para v_o usando o valor de C_o determinado em (a).

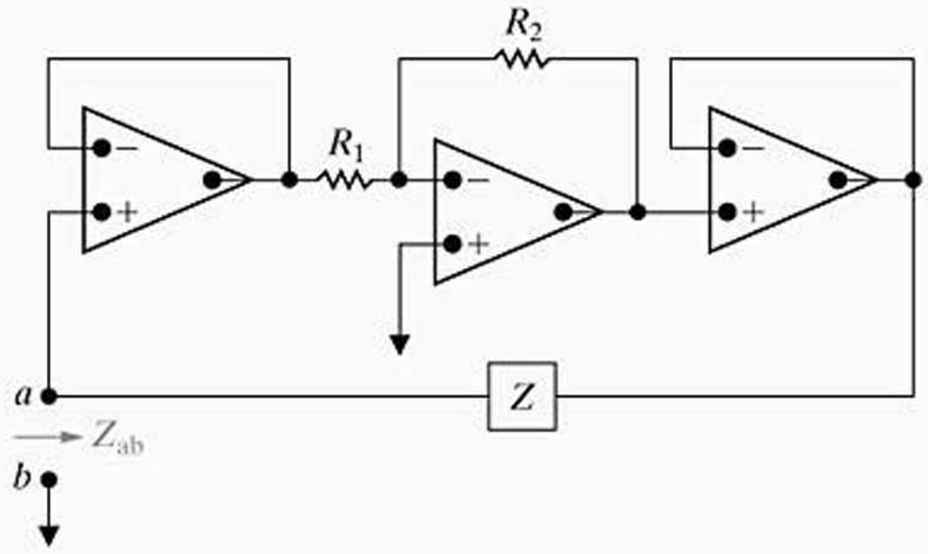
Figura P9.68



9.69 a) Determine a impedância de entrada Z_{ab} para o circuito da Figura P9.69. Expresse Z_{ab} em função de Z e K, onde $K = (R_2/R_1)$.

b) Se Z for um elemento capacitivo puro, qual será a capacitância vista a partir dos terminais a,b?

Figura P9.69



9.70 No circuito da Figura P9.57, suponha que

$$v_a = 5 \cos 80.000t \text{ V},$$

$$v_b = -2{,}5 \cos 320.000t \text{ V}.$$

a) Qual é a técnica de análise de circuitos que deve ser utilizada para determinar a expressão de regime permanente para $i_o(t)$?

b) Determine a expressão de regime permanente para $i_o(t)$.

9.71 No circuito da Figura P9.71, suponha que

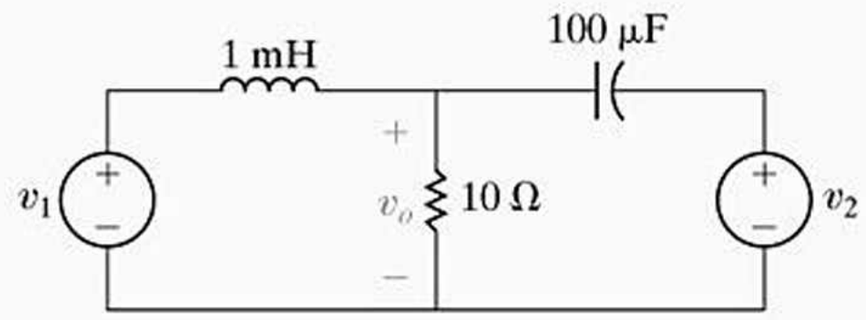
$$v_1 = 20 \cos(2.000t - 36{,}87°) \text{ V},$$

$$v_2 = 10 \cos(5.000t + 16{,}26°) \text{ V}.$$

a) Qual é a técnica de análise de circuitos que deve ser utilizada para determinar a expressão de regime permanente para $v_o(t)$?

b) Determine a expressão de regime permanente para $v_o(t)$.

Figura P9.71



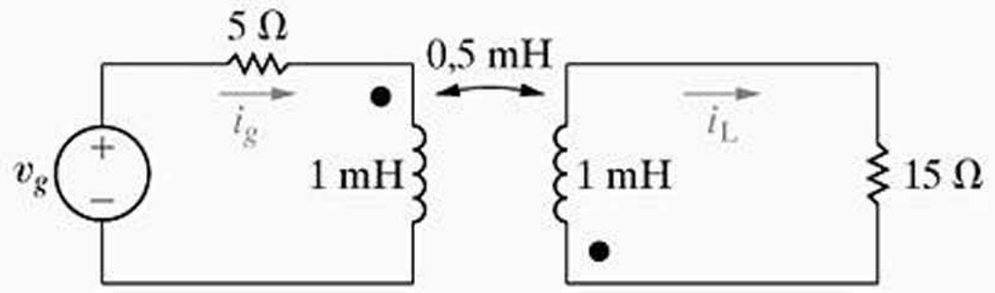
Seção 9.10

9.72* PSPICE a) Determine as expressões de regime permanente para as correntes i_g e i_L no circuito da Figura P9.72 quando $v_g = 200 \cos 10.000t$ V.

b) Determine o coeficiente de acoplamento.

c) Determine a energia armazenada nos enrolamentos magneticamente acoplados em $t = 50\pi$ μs e $t = 100\pi$ μs.

Figura P9.72

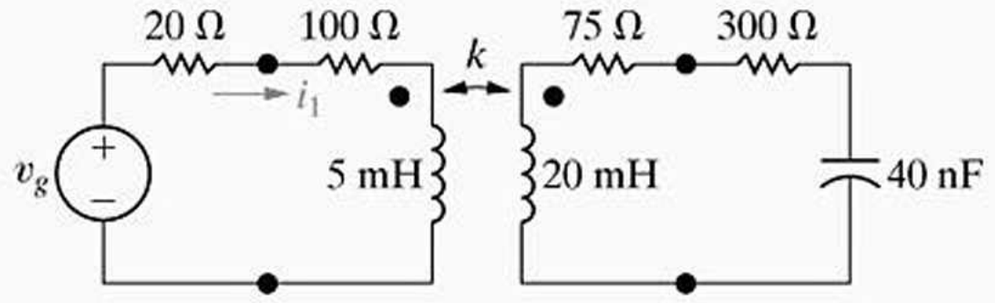


9.73* PSPICE A fonte de tensão senoidal no circuito visto na Figura P9.73 está funcionando a uma freqüência de 50 krad/s. O coeficiente de acoplamento é ajustado até que o valor de pico de i_1 seja máximo.

a) Qual é o valor de k?

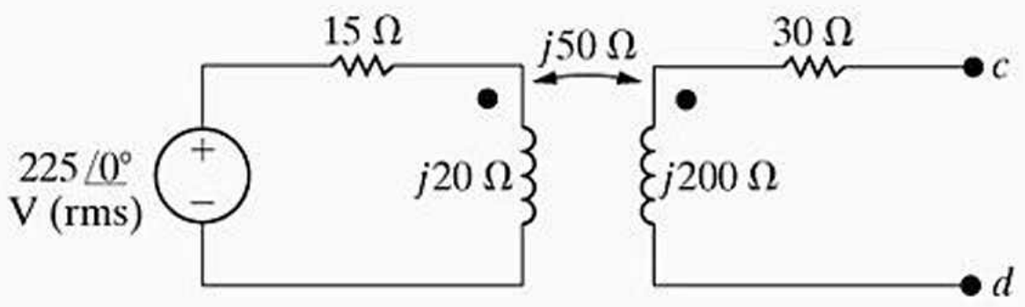
b) Se $v_g = 369 \cos(5 \times 10^4 t)$ V, qual é a amplitude de pico de i_1?

Figura P9.73



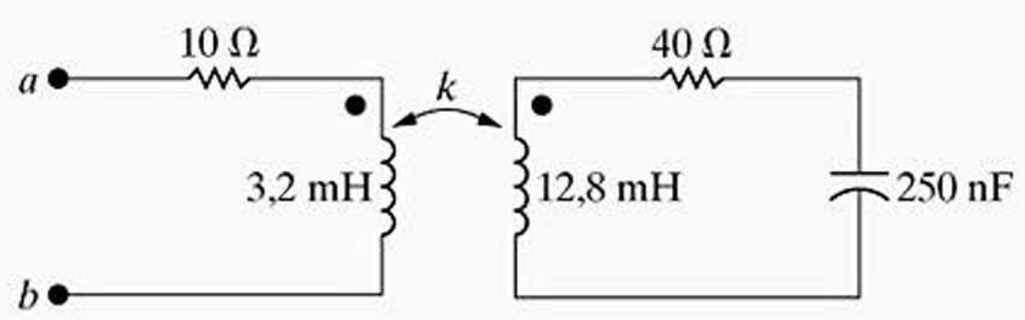
9.74 Para o circuito da Figura P9.74, determine o circuito equivalente de Thévenin visto a partir dos terminais c,d.

Figura P9.74



9.75 O valor de k no circuito da Figura P9.75 é ajustado de modo que Z_{ab} seja puramente resistiva quando $\omega = 25$ krad/s. Determine Z_{ab}.

Figura P9.75



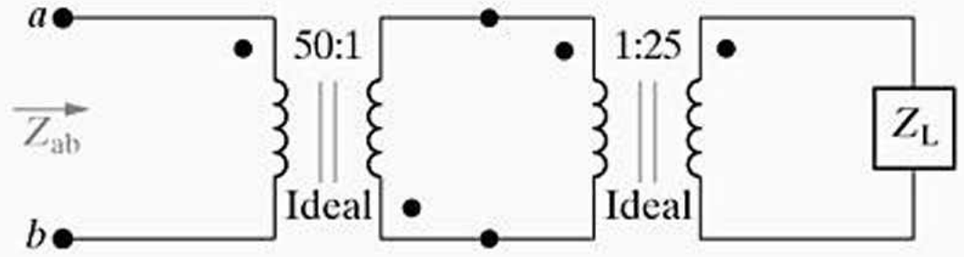
9.76 A combinação em série de um resistor de 150 Ω e um capacitor de 20 nF está ligada a uma fonte de tensão senoidal por meio de um transformador linear. A fonte está funcionando a uma freqüência de 500 krads/s. Nessa freqüência, a impedância interna da fonte é $5 + j16$ Ω. A tensão rms nos terminais da fonte é 125 V quando ela não está carregada. Os parâmetros do transformador linear são $R_1 = 12$ Ω, $L_1 = 80$ μH, $R_2 = 50$ Ω, $L_2 = 500$ μH e $M = 100$ μH.

a) Qual é o valor da impedância refletida no primário?
b) Qual é o valor da impedância vista a partir dos terminais da fonte?

Seção 9.11

9.77* Determine a impedância Z_{ab} no circuito da Figura P9.77 se $Z_L = 200 + j150\ \Omega$.

Figura P9.77



9.78 À primeira vista, pode parecer, pela Equação 9.69, que uma carga indutiva poderia fazer com que a reatância vista a partir dos terminais do primário (isto é X_{ab}) parecesse capacitiva. No entanto, por intuição, sabemos que isso é impossível. Mostre que X_{ab} nunca pode ser negativa se X_L for uma reatância indutiva.

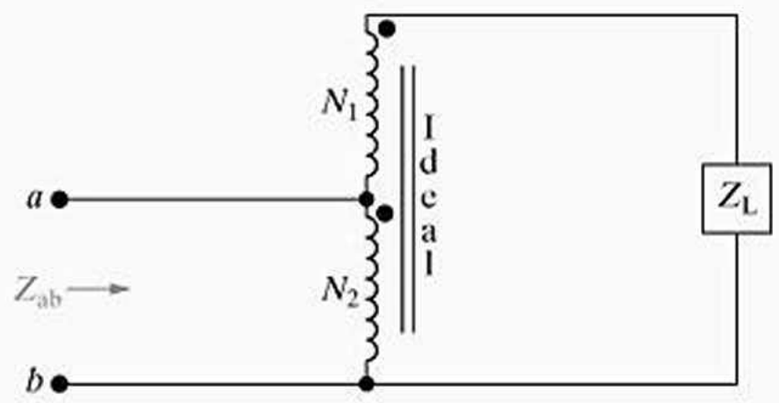
9.79 a) Mostre que a impedância vista a partir dos terminais *a,b* do circuito na Figura P9.79 é dada pela expressão

$$Z_{ab} = \frac{Z_L}{\left(1 + \frac{N_1}{N_2}\right)^2}.$$

b) Mostre que, se a polaridade do terminal de qualquer um dos enrolamentos for invertida,

$$Z_{ab} = \frac{Z_L}{\left(1 - \frac{N_1}{N_2}\right)^2}.$$

Figura P9.79



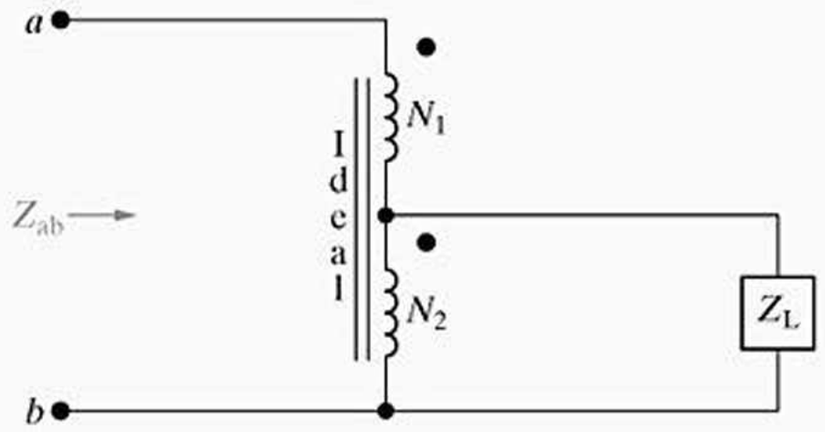
9.80 a) Mostre que a impedância vista a partir dos terminais *a,b* do circuito na Figura P9.80 é dada pela expressão

$$Z_{ab} = \left(1 + \frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z_L.$$

b) Mostre que, se a polaridade dos terminais de qualquer um dos enrolamentos for invertida,

$$Z_{ab} = \left(1 - \frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z_L.$$

Figura P9.80



Seção 9.12

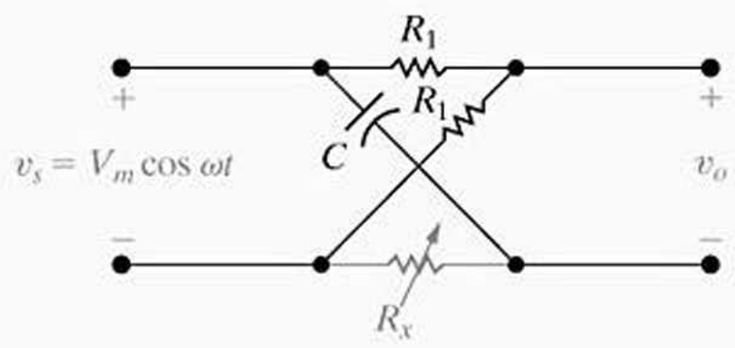
9.81* Os parâmetros do circuito mostrado na Figura 9.53 são $R_1 = 0{,}1\ \Omega$, $\omega L_1 = 0{,}8\ \Omega$, $R_2 = 24\ \Omega$, $\omega L_2 = 32\ \Omega$ e $\mathbf{V}_L = 240 + j0$ V.

a) Calcule a tensão fasorial $\mathbf{V}_s$.
b) Ligue um capacitor em paralelo com o indutor, mantenha $\mathbf{V}_L$ constante e ajuste o capacitor até que a magnitude de $\mathbf{I}$ seja mínima. Qual será a reatância capacitiva? Qual será o valor de $\mathbf{V}_s$?
c) Determine o valor da reatância capacitiva que mantém a magnitude de $\mathbf{I}$ a menor possível e que, ao mesmo tempo, faça

$$|\mathbf{V}_s| = |\mathbf{V}_L| = 240\ \text{V}.$$

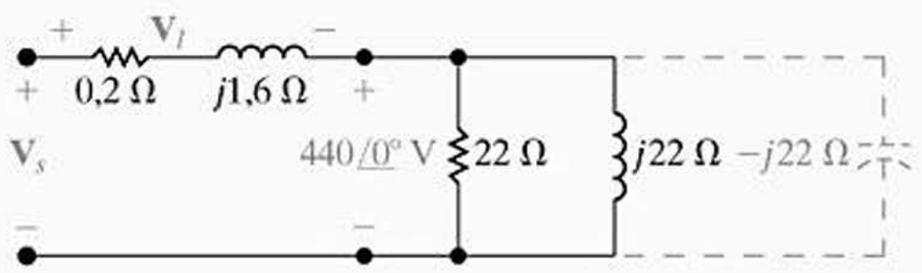
9.82* PSPICE Usando um diagrama fasor, mostre o que acontece ao módulo e ao ângulo de fase da tensão v_o no circuito da Figura P9.82, à medida que R_x varia de zero até o infinito. O módulo e o ângulo de fase da tensão na fonte são mantidos constantes, enquanto R_x varia.

Figura P9.82



9.83 a) Para o circuito mostrado na Figura P9.83, calcule $\mathbf{V}_s$ e $\mathbf{V}_l$.
b) Construa um diagrama fasorial para mostrar a relação entre $\mathbf{V}_s$, $\mathbf{V}_l$ e a tensão de carga de $440\ \underline{/0°}$ V.
c) Repita as partes (a) e (b), considerando que a tensão da carga permanece constante em $440\ \underline{/0°}$ V quando uma reatância capacitiva de $-22\ \Omega$ é ligada aos terminais da carga.

Figura P9.83

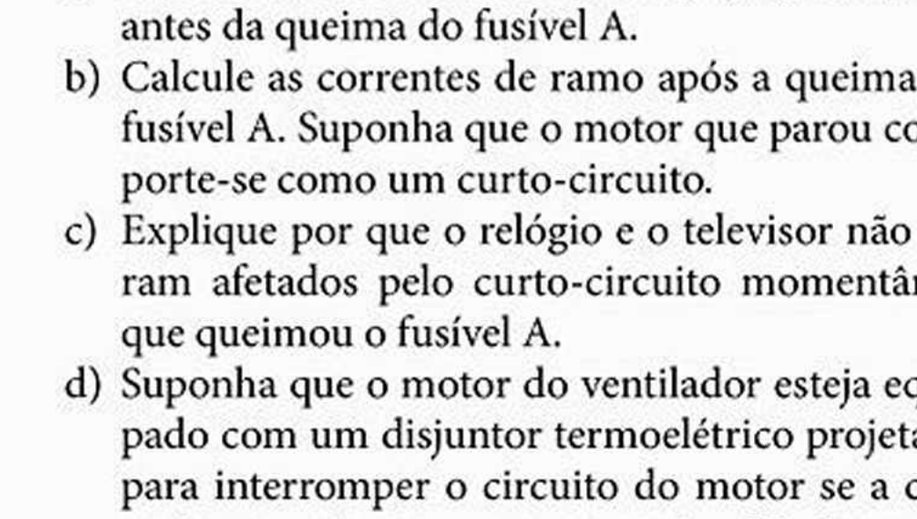


Seções 9.1–9.12

9.84 Como engenheiro formado, pode ser que você tenha a oportunidade de trabalhar como perito em ações judiciais que envolvam danos à propriedade ou a pessoas. Como um exemplo desse tipo de problema, para o qual sua opinião profissional pode ser pedida, considere o seguinte evento. Ao final de um dia de trabalho no campo, um fazendeiro volta à sede da fazenda, verifica o galpão de confinamento de suínos e percebe, para sua consternação, que os animais estão mortos. Verificou-se que a origem do problema foi a queima de um fusível, que provocou a parada do motor de um ventilador de 240 V. A falta de ventilação resultou na morte dos animais por asfixia. O fusível queimado está localizado no quadro geral, a partir do qual toda a fazenda é alimentada. Antes de pagar a indenização, a companhia seguradora quer saber se os circuitos elétricos da fazenda estavam funcionando adequadamente. Os advogados da seguradora estão intrigados porque a esposa do fazendeiro, que estava em casa no dia do acidente convalescendo-se de uma pequena cirurgia, assistiu à televisão durante toda a tarde. Além disso, quando ela foi até a cozinha para preparar o jantar, o relógio elétrico indicava a hora certa. Os advogados contrataram você para explicar (1) por que o relógio elétrico da cozinha e o aparelho de televisão da sala de estar continuaram funcionando após a queima do fusível na chave geral e (2) por que o segundo fusível da chave geral não queimou após a parada do motor do ventilador. Após averiguar as cargas existentes no circuito trifásico de distribuição antes da interrupção do fusível A, você é capaz de desenhar o modelo de circuito mostrado na Figura P9.84. As impedâncias dos condutores são consideradas desprezíveis.

a) Calcule as correntes de ramo $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$, $\mathbf{I}_3$, $\mathbf{I}_4$, $\mathbf{I}_5$ e $\mathbf{I}_6$ antes da queima do fusível A.
b) Calcule as correntes de ramo após a queima do fusível A. Suponha que o motor que parou comporte-se como um curto-circuito.
c) Explique por que o relógio e o televisor não foram afetados pelo curto-circuito momentâneo que queimou o fusível A.
d) Suponha que o motor do ventilador esteja equipado com um disjuntor termoelétrico projetado para interromper o circuito do motor se a corrente no motor tornar-se excessiva. Você esperaria que o disjuntor funcionasse? Explique.
e) Explique por que o fusível B não queima quando o motor do ventilador pára.

Figura P9.84



9.85* PERSPECTIVA PRÁTICA
a) Calcule as correntes de ramo $\mathbf{I}_1$–$\mathbf{I}_6$ no circuito da Figura P9.58.
b) Determine a corrente no primário, $\mathbf{I}_p$.

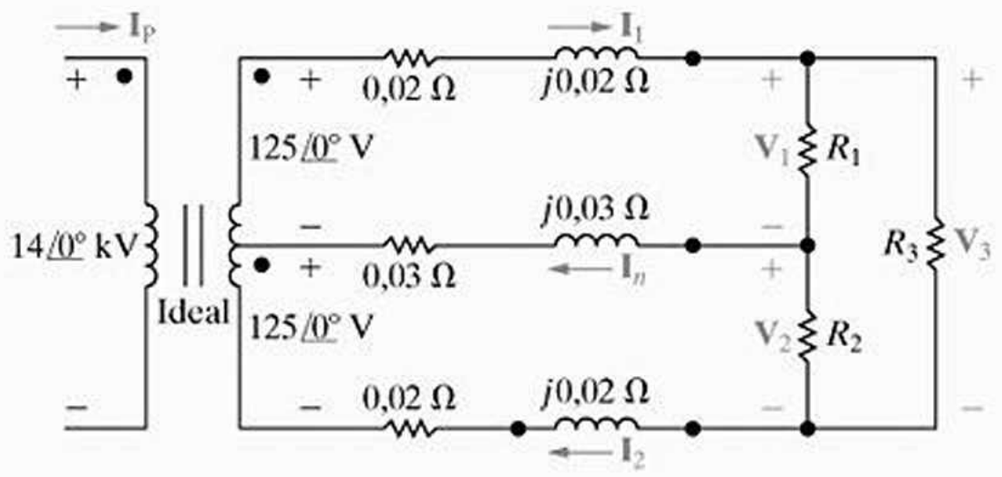
9.86* PERSPECTIVA PRÁTICA Suponha que a resistência de 40 Ω no circuito de distribuição da Figura P9.58 seja substituída por uma resistência de 20 Ω.

a) Calcule novamente a corrente de ramo no resistor de 2 Ω, $\mathbf{I}_2$.
b) Calcule novamente a corrente no primário, $\mathbf{I}_p$.
c) Tomando suas respostas como base, é desejável que a resistência das duas cargas de 120 V seja igual?

9.87 PERSPECTIVA PRÁTICA Um circuito residencial é mostrado na Figura P9.87. Nesse modelo, o resistor R_3 é usado para modelar um eletrodoméstico que funciona em 240 V (por exemplo, um forno elétrico), e os resistores R_1 e R_2 são usados para modelar eletrodomésticos que funcionam em 120 V (por exemplo, uma lâmpada, uma torradeira e um ferro elétrico). Os ramos que conduzem $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ estão modelando o que os eletricistas chamam de condutores 'vivos' no circuito, e o ramo que transporta $\mathbf{I}_n$ está modelando o condutor neutro. Nossa finalidade ao analisar o circuito é mostrar a importância do condutor neutro para o funcionamento satisfatório do circuito. Escolha o método para analisar o circuito.

a) Mostre que $\mathbf{I}_n$ é zero se $R_1 = R_2$.
b) Mostre que $\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2$ se $R_1 = R_2$.
c) Interrompa o neutro e calcule $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$ se $R_1 = 60\ \Omega$, $R_2 = 600\ \Omega$ e $R_3 = 10\ \Omega$.
d) Torne a ligar o condutor neutro e repita (c).
e) Tomando seus cálculos como base, explique por que nunca se colocam fusíveis no condutor neutro de tal maneira que ele possa ser interrompido enquanto os condutores "vivos" continuam energizados.

Figura P9.87



9.88 PERSPECTIVA PRÁTICA
a) Determine a corrente no primário, $\mathbf{I}_p$, para (c) e (d) no Problema 9.87.
b) Suas respostas fazem sentido em termos do comportamento conhecido de circuitos elétricos?

CAPÍTULO

10

Cálculos de potência em regime permanente senoidal

SUMÁRIO DO CAPÍTULO

10.1 **Potência instantânea**
10.2 **Potência média e potência reativa**
10.3 **Valor eficaz e cálculos de potência**
10.4 **Potência complexa**
10.5 **Cálculos de potência**
10.6 **Máxima transferência de potência**

✔ OBJETIVOS DO CAPÍTULO

1 Entender os seguintes conceitos de potência em circuitos ca, as relações entre elas e como calculá-las em um circuito de:
   - Potência instantânea;
   - Potência média (ativa);
   - Potência reativa;
   - Potência complexa e
   - Fator de potência.
2 Entender a condição para máxima potência ativa fornecida a uma carga em um circuito ca e saber calcular a impedância de carga necessária para fornecer a máxima potência ativa à carga.
3 Saber calcular todas as formas de potência em circuitos ca com transformadores lineares e com transformadores ideais.

A eletrotécnica evoluiu para uma das mais importantes subdisciplinas da engenharia elétrica. A gama de problemas que trata do fornecimento de energia elétrica para produzir trabalho é considerável, desde determinar a potência nominal de um eletrodoméstico para seu funcionamento seguro e eficiente, até o projeto de grandes conjuntos de geradores, transformadores e linhas de transmissão que fornecem energia elétrica a consumidores residenciais e industriais.

Praticamente toda energia elétrica é fornecida sob a forma de tensões e correntes senoidais. Por isso, depois da discussão de circuitos em regime senoidal feita no Capítulo 9, agora é apropriado considerar os cálculos de potência em regime permanente senoidal. Nosso principal interesse é a potência média fornecida ou recebida por um par de terminais como resultado de tensões e correntes senoidais ou recebida dele. Outras grandezas, como potência reativa, potência complexa e potência aparente também serão apresentadas. O conceito de valor eficaz (rms) senoidalmente, apresentado brevemente no Capítulo 9, é particularmente pertinente aos cálculos de potência.

Começamos e terminamos este capítulo com dois conceitos que você deve conhecer muito bem de capítulos anteriores: a equação básica para potência (Seção 10.1) e a máxima transferência de potência (Seção 10.6). Entre um e outro, discutimos os processos gerais para analisar a potência, que você também deve conhecer muito bem pelo estudo dos capítulos 1 e 4, embora neste capítulo sejam necessárias algumas técnicas matemáticas para lidar com sinais senoidais, em vez de sinais cc.

Perspectiva prática

Eletrodomésticos de aquecimento

No Capítulo 9, calculamos tensões e correntes de regime permanente em circuitos elétricos excitados por fontes senoidais. Neste capítulo, analisamos a potência em tais circuitos. As técnicas que desenvolvemos são úteis para analisar muitos dos equipamentos elétricos que encontramos diariamente, porque fontes senoidais são os meios predominantes para o fornecimento de potência elétrica para casas, escolas e empresas.

Uma classe comum de equipamentos elétricos são os aquecedores, que transformam energia elétrica em energia térmica. Exemplos desses equipamentos são os fogões e fornos elétricos, as torradeiras, os ferros de passar roupa, os aquecedores elétricos de água, os aquecedores de ambiente, as secadoras elétricas de roupas e os secadores de cabelo. Uma das preocupações críticas no projeto de um aquecedor é o consumo de energia. A potência é importante por duas razões: quanto mais potência um aquecedor dissipar, maior será seu custo de operação e mais calor poderá produzir.

Muitos aquecedores elétricos têm diferentes ajustes de potência correspondentes à quantidade de calor que o equipamento fornece. Você deve estar imaginando exatamente como esses ajustes resultam em diferentes quantidades de calor fornecidas. O exemplo da "Perspectiva prática" ao final deste capítulo examina o projeto de um secador de cabelo portátil com três ajustes de temperatura.

Você verá como o projeto prevê três níveis diferentes de potência, que correspondem a três níveis diferentes de calor fornecido.

10.1 Potência instantânea

Começamos nossa investigação sobre a potência de circuitos em regime permanente senoidal com o conhecido circuito da Figura 10.1. Neste circuito, v e i são sinais senoidais de regime permanente. Usando a convenção passiva, a potência em qualquer instante do tempo é

$$p = vi. \tag{10.1}$$

Essa é a *potência instantânea*. Lembre-se de que, se o sentido de referência da corrente estiver no sentido da elevação de tensão, a Equação 10.1 deve ser escrita com um sinal negativo. A potência instantânea será medida em watts quando a tensão estiver em volts e a corrente, em ampères. Em primeiro lugar, escrevemos expressões para v e i:

$$v = V_m \cos(\omega t + \theta_v), \tag{10.2}$$

$$i = I_m \cos(\omega t + \theta_i), \tag{10.3}$$

onde θ_v é o ângulo de fase da tensão e θ_i é o ângulo de fase da corrente.

Como estamos trabalhando no regime permanente senoidal, então podemos escolher qualquer referência conveniente de ângulo para $t = 0$. Engenheiros que projetam sistemas capazes de transferir grandes blocos de energia preferem usar como origem da contagem do tempo o instante em que a corrente está passando por um máximo positivo. Esse sistema de referência exige um deslocamento de θ_i para ambas, tensão e corrente. Assim, as equações 10.2 e 10.3 tornam-se

$$v = V_m \cos(\omega t + \theta_v - \theta_i), \tag{10.4}$$

$$i = I_m \cos \omega t. \tag{10.5}$$

Quando substituímos as equações 10.4 e 10.5 na Equação 10.1, a expressão para a potência instantânea torna-se

$$p = V_m I_m \cos(\omega t + \theta_v - \theta_i) \cos \omega t. \tag{10.6}$$

Poderíamos usar a Equação 10.6 diretamente para determinar a potência média; contudo, com a simples aplicação de algumas identidades trigonométricas, podemos colocar a Equação 10.6 em uma forma muito mais ilustrativa.

Começamos com a identidade trigonométrica[1]

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha + \beta)$$

para expandir a Equação 10.6; fazendo $\alpha = \omega t + \theta_v - \theta_i$ e $\beta = \omega t$, temos

$$p = \frac{V_m I_m}{2}\cos(\theta_v - \theta_i) + \frac{V_m I_m}{2}\cos(2\omega t + \theta_v - \theta_i). \tag{10.7}$$

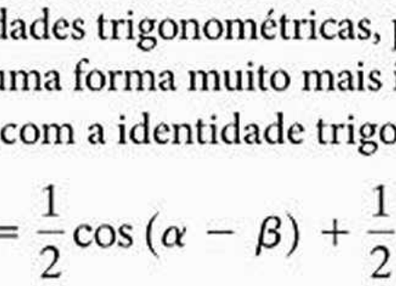


Figura 10.1 ▲ Representação, em forma de caixa preta, de um circuito usado para calcular potência.

Agora, usamos a identidade trigonométrica

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$$

para expandir o segundo termo do lado direito da Equação 10.7, o que resulta em

$$p = \frac{V_m I_m}{2}\cos(\theta_v - \theta_i) + \frac{V_m I_m}{2}\cos(\theta_v - \theta_i)\cos 2\omega t - \frac{V_m I_m}{2}\operatorname{sen}(\theta_v - \theta_i)\operatorname{sen} 2\omega t. \tag{10.8}$$

A Figura 10.2 mostra uma relação típica entre v, i e p, segundo $\theta_v = 60°$ e $\theta_i = 0°$. Você pode ver que a freqüência da potência instantânea é duas vezes a freqüência da tensão ou corrente. Essa observação também decorre diretamente do segundo e terceiro termos do lado direito da Equação 10.8. Por conseguinte, a potência instantânea passa por dois ciclos completos para cada ciclo da tensão ou da corrente. Observe também que a potência instantânea pode ser negativa em parte do ciclo, ainda que a rede ligada aos terminais seja passiva. Em uma rede completamente passiva, a potência negativa implica que a energia armazenada nos indutores ou capacitores seja fornecida pela rede. O fato de a potência instantânea variar ao longo do tempo para um circuito em regime permanente senoidal explica por que alguns equipamentos acionados por motor (como os refrigeradores) vibram e exigem suportes amortecedores para evitar a vibração excessiva.

Agora estamos prontos para usar a Equação 10.8 para determinar a potência média nos terminais do circuito da Figura 10.1 e, ao mesmo tempo, apresentar o conceito de potência reativa.

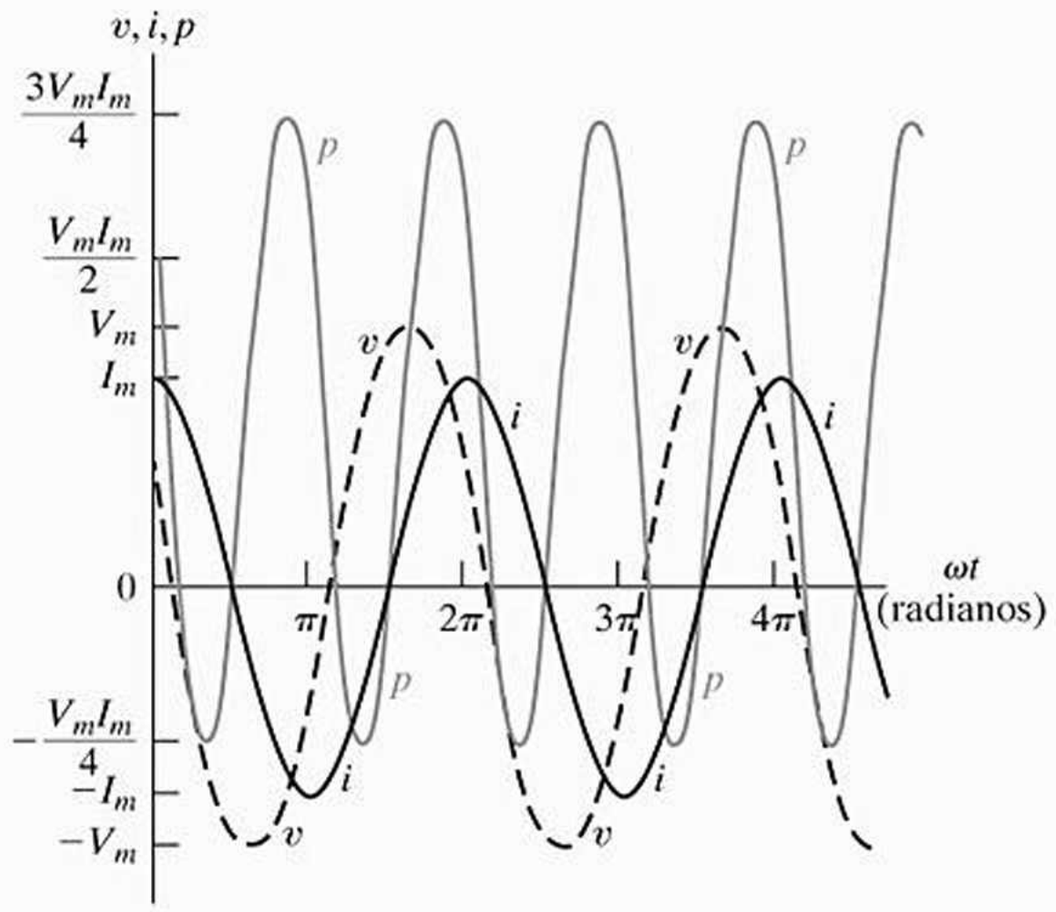


Figura 10.2 ▲ Potência instantânea, tensão e corrente em função de ωt para um circuito em regime permanente senoidal.

[1]Veja o item 8 do Apêndice F.

10.2 Potência média e potência reativa

Começamos observando que a Equação 10.8 tem três termos, que podemos reescrever da seguinte forma:

$$p = P + P\cos 2\omega t - Q \operatorname{sen} 2\omega t, \tag{10.9}$$

onde

$$P = \frac{V_m I_m}{2}\cos(\theta_v - \theta_i), \tag{10.10}$$

(Potência média [ativa])

$$Q = \frac{V_m I_m}{2}\operatorname{sen}(\theta_v - \theta_i). \tag{10.11}$$

(Potência reativa)

P é denominada *potência média* e Q é denominada *potência reativa*. A potência média também é denominada *potência ativa*, porque descreve, muitas vezes, a potência que é convertida de uma forma elétrica para uma forma não-elétrica. Embora os dois termos sejam intercambiáveis, neste livro usaremos, de preferência, o termo *potência média*.

É fácil ver por que P é denominada potência média. A potência média associada a sinais senoidais é a média das potências instantâneas durante um período ou, em forma de equação,

$$P = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} p\,dt, \tag{10.12}$$

onde T é o período da função senoidal. Os limites da Equação 10.12 indicam que podemos iniciar o processo de integração em qualquer tempo t_0, mas temos de concluí-lo exatamente um período depois. (Poderíamos integrar em nT períodos, onde n é um inteiro, contanto que multiplicássemos a integral por $1/nT$.)

Poderíamos determinar a potência média substituindo a Equação 10.9 diretamente na Equação 10.12 e, então, executar a integração. Contudo, observe que o valor médio de p é dado pelo primeiro termo do lado direito da Equação 10.9, pois a integral de cos $2\omega t$, bem como a de seno $2\omega t$, em um período é zero. Por isso, a potência média é dada pela Equação 10.10.

Podemos desenvolver melhor nosso entendimento de todos os termos da Equação 10.9 e as relações entre eles examinando a potência em circuitos puramente resistivos, puramente indutivos ou puramente capacitivos.

Potência em circuitos puramente resistivos

Se o circuito for puramente resistivo, a tensão e a corrente nos terminais dele estarão em fase, o que significa que $\theta_v = \theta_i$. Então, a Equação 10.9 se reduz a

$$p = P + P\cos 2\omega t. \tag{10.13}$$

A potência instantânea expressa na Equação 10.13 é denominada *potência ativa instantânea*. A Figura 10.3 mostra o gráfico da Equação 10.13 para um circuito representativo puramente resistivo típico, admitindo-se que $\omega = 377$ rad/s. Por definição, a potência média, P, é a média de p em um período. Assim, é fácil perceber que $P = 1$ para esse circuito — basta observar o gráfico. Note, pela Equação 10.13, que a potência ativa instantânea nunca pode ser negativa, o que também é mostrado na Figura 10.3. Em outras palavras, não é possível extrair potência de uma rede puramente resistiva. Mais exatamente, toda a energia elétrica é dissipada sob a forma de energia térmica.

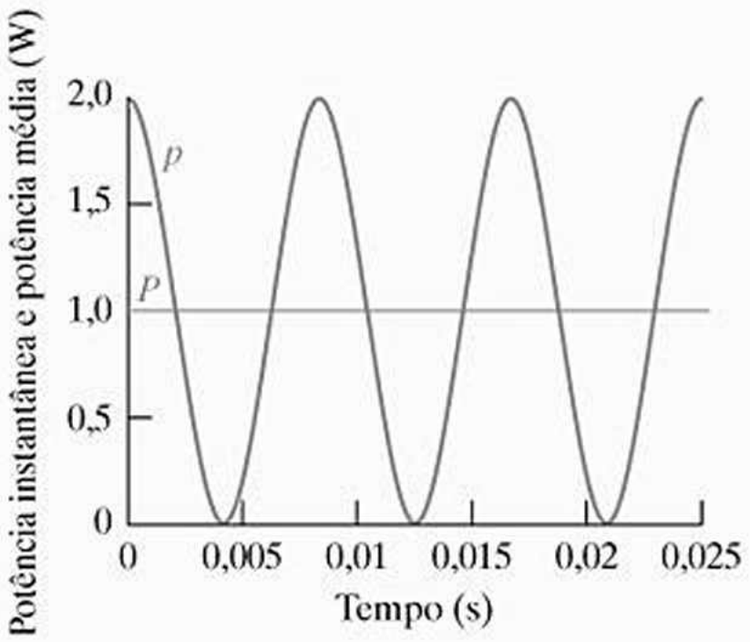


Figura 10.3 ◀ Potência instantânea e potência média para um circuito puramente resistivo.

Potência em circuitos puramente indutivos

Se o circuito for puramente indutivo, a tensão e a corrente em seus terminais estarão defasadas de exatamente 90°. Em particular, a corrente fica 90° atrasada em relação à tensão (isto é, $\theta_i = \theta_v - 90°$); assim, $\theta_v - \theta_i = +90°$. Então, a expressão para a potência instantânea reduz-se a

$$p = -Q \operatorname{sen} 2\omega t. \tag{10.14}$$

Em um circuito puramente indutivo, a potência média é zero. Portanto, não ocorre nenhuma transformação de energia elétrica para outra forma de energia. A potência instantânea nos terminais de um circuito puramente indutivo é continuamente permutada entre o circuito e a fonte que excita o circuito, a uma freqüência de 2ω. Em outras palavras, quando p é positiva, a energia está sendo armazenada nos campos magnéticos associados aos elementos indutivos, e quando p é negativa, a energia está sendo extraída dos campos magnéticos.

Uma medida da potência associada a circuitos puramente indutivos é a potência reativa Q. O nome *potência reativa* se deve à caracterização de um indutor como elemento reativo; sua impedância é puramente reativa. Observe que a potência média P e a potência reativa Q têm a mesma dimensão. Para distinguir a potência média da potência reativa, usamos a unidade *watt* (W) para potência média e a unidade *var* (*volt-amp reativo*, ou VAR) para potência reativa. A Figura 10.4 apresenta o gráfico da potência instantânea para um circuito puramente indutivo típico, admitindo-se que $\omega = 377$ rad/s e $Q = 1$ VAR.

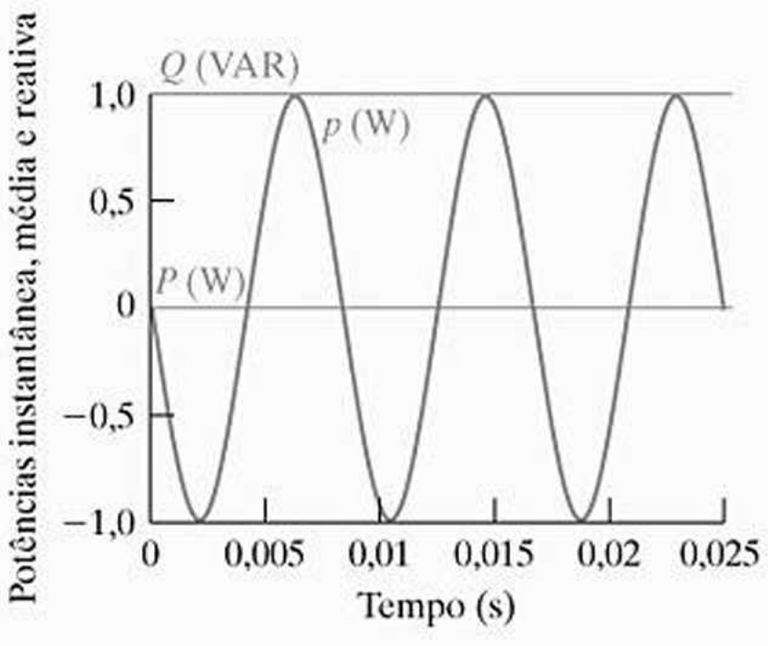


Figura 10.4 ◀ Potência instantânea, potência média e potência reativa para um circuito puramente indutivo.

Potência em circuitos puramente capacitivos

Se o circuito for puramente capacitivo, a tensão e a corrente em seus terminais estarão defasadas de exatamente 90°. Nesse caso, a corrente fica 90° adiantada em relação à tensão (isto é, $\theta_i = \theta_v + 90°$); assim, $\theta_v - \theta_i = -90°$. Então, a expressão para a potência instantânea torna-se

$$p = -Q \operatorname{sen} 2\omega t. \tag{10.15}$$

De novo, a potência média é zero, portanto não há nenhuma transformação de energia elétrica para outra forma de energia. Em um circuito puramente capacitivo, a potência é continuamente permutada entre a fonte que excita o circuito e o campo elétrico associado aos elementos capacitivos. A Figura 10.5 apresenta o gráfico da potência instantânea para um circuito puramente capacitivo típico, admitindo-se que $\omega = 377$ rads/s e $Q = -1$ VAR.

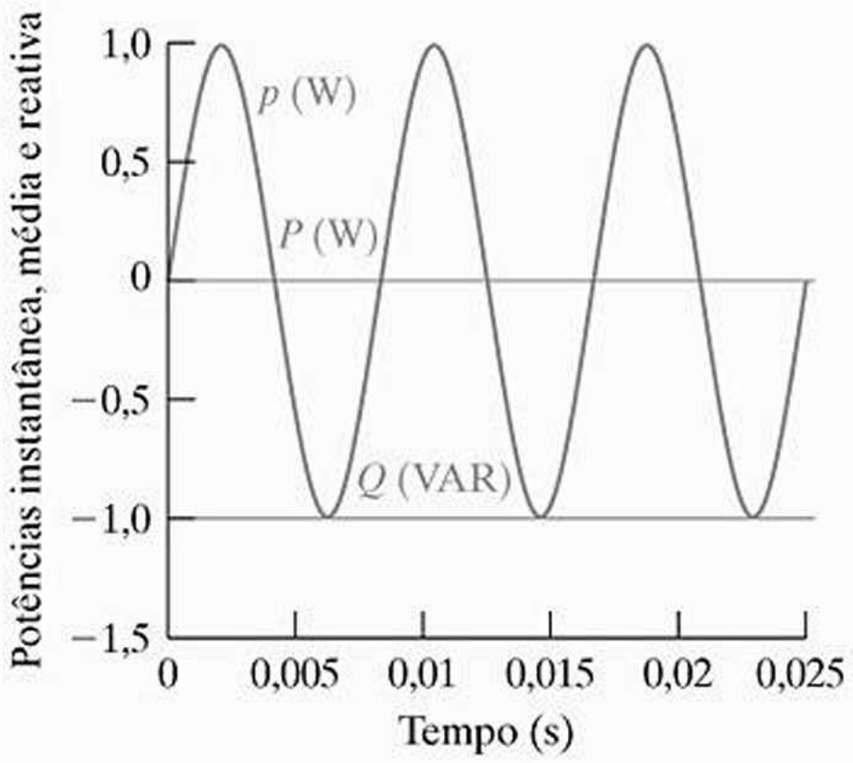


Figura 10.5 ▲ Potência instantânea e potência média para um circuito puramente capacitivo.

Observe que a decisão de usar a corrente como a referência resulta em Q positiva para indutores (isto é, $\theta_v - \theta_i = 90°$) e negativa para capacitores (isto é, $\theta_v - \theta_i = -90°$). Os engenheiros eletricistas reconhecem essa diferença no sinal algébrico de Q, afirmando que indutores consomem energia de magnetização e capacitores fornecem energia de magnetização. Mais adiante falaremos mais sobre essa convenção.

O fator de potência

O ângulo $\theta_v - \theta_i$ desempenha um papel tanto no cálculo da potência média como no da potência reativa e é denominado *ângulo do fator de potência*. O co-seno desse ângulo é denominado *fator de potência*, abreviatura fp, e o seno desse ângulo é denominado *fator reativo*, abreviatura fr. Assim,

$$\text{pf} = \cos(\theta_v - \theta_i), \tag{10.16}$$

(Fator de potência)

$$\text{fr} = \operatorname{sen}(\theta_v - \theta_i). \tag{10.17}$$

Conhecer o valor do fator de potência não nos revela o valor do ângulo do fator de potência, pois $\cos(\theta_v - \theta_i) = \cos(\theta_i - \theta_v)$. Para descrever completamente esse ângulo, usamos as sentenças descritivas *fator de potência atrasado* e *fator de potência adiantado*. Fator de potência atrasado significa que a corrente está atrasada em relação à tensão — daí uma carga indutiva. Fator de potência adiantado significa que a corrente está adiantada em relação à tensão — daí uma carga capacitiva. Tanto o fator de potência quanto o fator reativo são quantidades convenientes para se utilizar na descrição de cargas elétricas.

O Exemplo 10.1 ilustra a interpretação de P e Q com base em um cálculo numérico.

Exemplo 10.1 Cálculo da potência média e da potência reativa

a) Calcule a potência média e a potência reativa nos terminais da rede da Figura 10.6 se

$$v = 100 \cos(\omega t + 15°) \text{ V},$$
$$i = 4 \operatorname{sen}(\omega t - 15°) \text{ A}.$$

b) A rede no interior da caixa está absorvendo ou fornecendo potência média?

c) A rede no interior da caixa está absorvendo ou fornecendo energia reativa?

Solução

a) Como i é expressa em termos da função seno, a primeira etapa no cálculo de P e Q é reescrever i como uma função co-seno:

$$i = 4 \cos(\omega t - 105°) \text{ A}.$$

Agora, calculamos P e Q diretamente das equações 10.10 e 10.11. Assim,

$$P = \frac{1}{2}(100)(4)\cos[15 - (-105)] = -100 \text{ W},$$

$$Q = \frac{1}{2}100(4)\operatorname{sen}[15 - (-105)] = 173{,}21 \text{ VAR}.$$

b) Observe, na Figura 10.6, a utilização da convenção passiva. Por isso, o valor negativo de -100 W significa que a rede no interior da caixa está fornecendo potência média aos terminais.

c) A convenção passiva significa que, como Q é positiva, a rede no interior da caixa está absorvendo energia reativa de seus terminais.

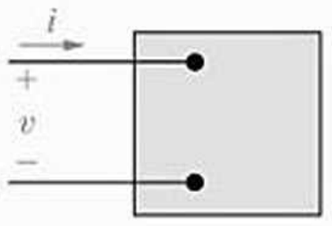


Figura 10.6 ◀ Par de terminais usado para calcular potência.

✔ PROBLEMAS PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 1 — Entender conceitos de potência ca, as relações entre elas e como calcular essas potências em um circuito

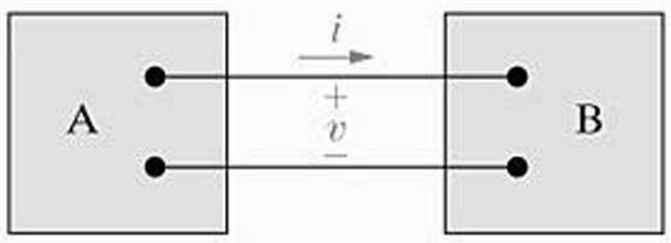
10.1 Para cada um dos seguintes conjuntos de tensão e corrente, calcule a potência ativa e a potência reativa na linha que conecta as redes A e B no circuito mostrado. Em cada caso, confirme se o fluxo de potência é de A para B ou vice-versa. Além disso, confirme se a energia reativa está sendo transferida de A para B ou vice-versa.

a) $v = 100 \cos(\omega t - 45°)$ V;
$i = 20 \cos(\omega t + 15°)$ A.

b) $v = 100 \cos(\omega t - 45°)$ V;
$i = 20 \cos(\omega t + 165°)$ A.

c) $v = 100 \cos(\omega t - 45°)$ V;
$i = 20 \cos(\omega t - 105°)$ A.

d) $v = 100 \cos \omega t$ V;
$i = 20 \cos(\omega t + 120°)$ A.



Resposta: (a) $P = 500$ W (A para B),
$Q = -866{,}03$ VAR (B para A);

(b) $P = -866{,}03$ W (B para A),
$Q = 500$ VAR (A para B);

(c) $P = 500$ W (A para B),
$Q = 866{,}03$ VAR (A para B);

(d) $P = -500$ W (B para A),
$Q = -866{,}03$ VAR (B para A).

10.2 Calcule o fator de potência e o fator reativo para a rede no interior da caixa na Figura 10.6, cujas tensão e corrente são descritas no Exemplo 10.1.
Sugestão: Use $-i$ para calcular os fatores de potência e reativo.

Resposta: fp = 0,5 adiantado; fr = − 0,866.

NOTA: Tente resolver também o Problema 10.2, apresentado no final deste capítulo.

Consumo de energia de eletrodomésticos

A energia consumida pelos eletrodomésticos é especificada em termos da potência média. A potência média nominal e o consumo médio anual estimado em quilowatts-horas de alguns eletrodomésticos comuns são apresentados na Tabela 10.1. Os valores de consumo de energia são obtidos estimando-se o número de horas anuais de utilização dos eletrodomésticos. Por exemplo, uma cafeteira elétrica tem um consumo anual estimado de 140 kWh e uma potência média durante o funcionamento de 1,2 kW. Conseqüentemente, admite-se que uma cafeteira seja utilizada durante 140/1,2, ou 116,67 horas por ano ou, aproximadamente, 19 minutos por dia.

O Exemplo 10,2 usa a Tabela 10.1 para determinar se quatro eletrodomésticos comuns podem estar em funcionamento ao mesmo tempo sem ultrapassar a capacidade de um circuito doméstico.

Exemplo 10.2 Cálculo da potência de eletrodomésticos

O condutor de um circuito que alimenta as tomadas de uma cozinha residencial típica tem a bitola de 2,5 mm². O circuito é protegido por um fusível de 20 A ou um disjuntor de 20 A. Suponha que os seguintes eletrodomésticos de 120 V estejam em funcionamento ao mesmo tempo: uma cafeteira, um cozinhador de ovos, uma frigideira elétrica e uma torradeira. O circuito será interrompido pelo dispositivo de proteção?

Solução

Pela Tabela 10.1, a potência média total demandada pelos quatro eletrodomésticos é

$$P = 1.200 + 516 + 1.196 + 1.146 = 4.058 \text{ W}$$

A corrente total no dispositivo de proteção é

$$I_{ef} = \frac{4058}{120} \approx 33{,}82 \text{ A}.$$

Sim, o dispositivo de proteção interromperá o circuito.

TABELA 10.1 Consumo anual de energia de alguns eletrodomésticos

Eletrodoméstico	Potência média	Consumo estimado em KWh por ano[a]
Preparação de alimentos		
Cafeteira elétrica	1.200	140
Lavadora de pratos	1.201	165
Cozinhador de ovos	516	14
Frigideira elétrica	1.196	100
Batedeira	127	2
Forno de microondas	1.450	190
Fogão elétrico, com forno	12.200	596
Torradeira	1.146	39

Eletrodoméstico	Potência média	Consumo estimado em KWh por ano[a]
Lavanderia		
Secadora de roupas	4.856	993
Máquina de lavar roupas, automática	512	103
Aquecedor de água	2.475	4.219
de aquecimento rápido	4.474	4.811
Condicionadores de ambiente		
Condicionador de ar (quarto)	860	860[b]
Desumidificador	257	377
Ventilador (circulador)	88	43
Aquecedor (portátil)	1.322	176
Saúde e beleza		
Secador de cabelo	600	25
Barbeador elétrico	15	0,5
Lâmpada de bronzeamento	279	16
Diversão		
Rádio	71	86
Televisão, em cores, de tubo	240	528
Do tipo estado sólido	145	320
Outros equipamentos domésticos		
Relógio	2	17
Aspirador de pó	630	46

a) Com base na utilização normal. Quando usar esses números para fazer projeções, fatores como o tamanho do eletrodoméstico específico, a área geográfica de utilização e as diferenças individuais nos padrões de consumo devem ser levados em consideração. Observe que as potências não devem ser somadas para determinada residência, visto que, normalmente, os aparelhos não estão todos em funcionamento ao mesmo tempo.

b) Com base em 1.000 horas de funcionamento por ano. Esse número pode variar muito dependendo da área e do tamanho específico da residência.

Fonte: Edison Electric Institute.

NOTA: Avalie o que entendeu desse material tentando resolver o Problema 10.3, apresentado no final deste capítulo.

10.3 Valor eficaz e cálculos de potência

Quando apresentamos o valor eficaz (rms) de uma tensão (ou corrente) senoidal na Seção 9.1, mencionamos que ele desempenharia um papel importante no cálculo de potências. Agora podemos discutir esse papel.

Suponha que uma tensão senoidal seja aplicada aos terminais de um resistor, como mostra a Figura 10.7, e que queiramos determinar a potência média fornecida ao resistor. Pela Equação 10.12,

$$P = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \frac{V_m^2 \cos^2(\omega t + \phi_v)}{R} dt$$

$$= \frac{1}{R}\left[\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} V_m^2 \cos^2(\omega t + \phi_v) dt\right]. \qquad (10.18)$$

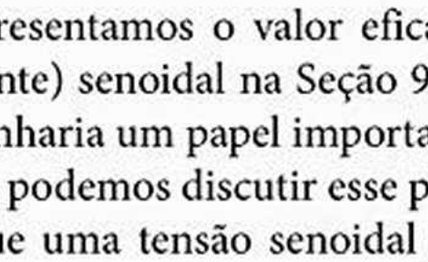


Figura 10.7 ▲ Tensão senoidal aplicada nos terminais de um resistor.

Comparando a Equação 10.18 com a Equação 9.5 percebemos que a potência média fornecida a R é simplesmente o valor eficaz da tensão ao quadrado, dividido por R, ou

$$P = \frac{V_{ef}^2}{R}. \qquad (10.19)$$

Se o resistor estiver conduzindo uma corrente senoidal, digamos, $I_m \cos(\omega t + \phi_i)$, a potência média fornecida ao resistor será

$$P = I_{ef}^2 R. \qquad (10.20)$$

O *valor eficaz* (rms) tem uma propriedade interessante: dados uma carga resistiva equivalente, R, e um período de tempo equivalente, T, o valor eficaz de uma fonte senoidal com certo valor eficaz de tensão fornece a R a mesma energia que uma fonte cc com tensão igual ao valor eficaz da fonte senoidal. Por exemplo, uma fonte cc de 100 V fornece a mesma energia em T segundos que uma fonte senoidal de 100 V_{ef}, admitindo-se resistências de carga equivalentes (veja o Problema 10.11). A Figura 10.8 ilustra essa equivalência. No que concerne à energia, o efeito das duas fontes é idêntico. Esse fato levou ao uso dos termos *valor eficaz* e *valor rms* como equivalentes.

A potência média dada pela Equação 10.10 e a potência reativa dada pela Equação 10.11 podem ser escritas em termos de valores eficazes:

$$P = \frac{V_m I_m}{2}\cos(\theta_v - \theta_i)$$
$$= \frac{V_m}{\sqrt{2}}\frac{I_m}{\sqrt{2}}\cos(\theta_v - \theta_i)$$
$$= V_{\text{ef}}\, I_{\text{ef}}\, \cos(\theta_v - \theta_i); \qquad (10.21)$$

e, por manipulação semelhante,

$$Q = V_{\text{ef}} I_{\text{ef}} \operatorname{sen}(\theta_v - \theta_i). \qquad (10.22)$$

A utilização do valor eficaz de tensões e correntes senoidais em cálculos de potência é tão ampla que os valores nominais de tensões e correntes nominais de circuitos e equipamentos elétricos são dados em termos de valores eficazes. Por exemplo, a tensão nominal para uso residencial costuma ser 240 V ou 120 V. Esses níveis de tensão são os valores eficazes das tensões senoidais fornecidas pela concessionária de energia elétrica, que fornece energia em dois níveis de tensão, para servir a eletrodomésticos de baixa tensão (como televisores) e a eletrodomésticos de tensão mais elevada (como fogões elétricos). Lâmpadas elétricas, ferros de passar e torradeiras são eletrodomésticos que apresentam valores nominais de tensão e corrente eficazes em suas plaquetas de identificação e informação. Por exemplo, uma lâmpada de 120 V, 100 W tem uma resistência de $120^2/100$, ou 144 Ω, e conduz uma corrente eficaz de 120/144, ou 0,833 A. O valor de pico da corrente da lâmpada é $0{,}833\sqrt{2}$, ou 1,18 A.

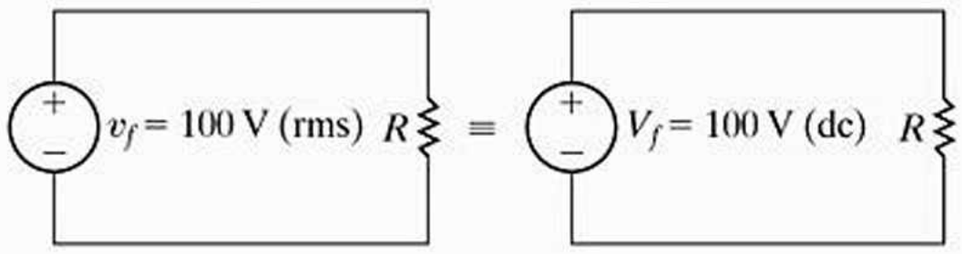


Figura 10.8 ▲ Valor eficaz de v_f (100 V rms) fornece a R a mesma potência que uma fonte de tensão cc V_f (100 V cc).

A transformada fasorial de uma função senoidal também pode ser expressa em termos do valor eficaz. A magnitude do fasor eficaz é igual ao valor eficaz da função senoidal. Quando um fasor é expresso em termos do valor eficaz, indicamos isso por uma declaração explícita, um 'ef', entre parênteses, adjacente à quantidade do fasor, como na Equação 10.21.

No Exemplo 10.3, ilustramos a utilização de valores eficazes para calcular a potência.

Exemplo 10.3 Determinação da potência média fornecida a um resistor por uma fonte de tensão senoidal

a) Uma tensão senoidal com uma amplitude máxima de 625 V é aplicada aos terminais de um resistor de 50 Ω. Determine a potência média fornecida ao resistor.

b) Repita (a) determinando, em primeiro lugar, a corrente no resistor.

Solução

O valor eficaz da tensão senoidal é $625/\sqrt{2}$, ou, aproximadamente, 441,94 V. Pela Equação 10.19, a potência média fornecida ao resistor de 50 Ω é

$$P = \frac{(441{,}94)^2}{50} = 3.906{,}25 \text{ W}.$$

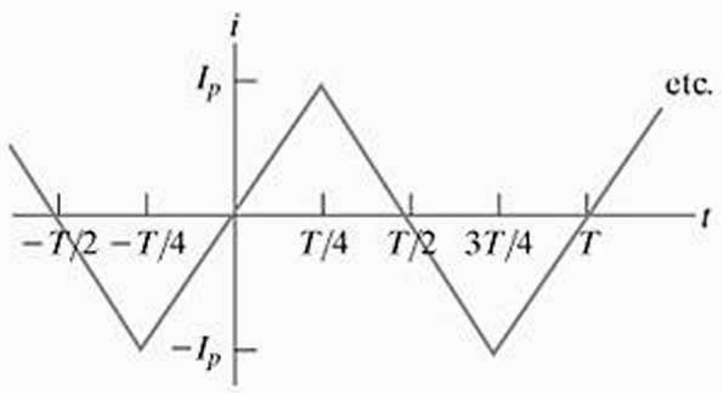
b) A amplitude máxima da corrente no resistor é 625/50, ou 12,5 A. O valor eficaz da corrente é $12{,}5/\sqrt{2}$, ou, aproximadamente, 8,84 A. Daí, a potência média fornecida ao resistor é

$$P = (8{,}84)^2 50 = 3.906{,}25 \text{ W}.$$

✔ PROBLEMA PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 1 — Entender conceitos de potência ca, as relações entre elas e como calcular essas potências em um circuito

10.3 A corrente triangular periódica do Exemplo 9.4, repetida aqui, tem um valor de pico de 180 mA. Determine a potência média que essa corrente fornece a um resistor de 5 kΩ.



Resposta: 54 W.

NOTA: Tente resolver também o Problema 10.13, apresentado no final deste capítulo.

10.4 Potência complexa

Antes de passarmos para os vários métodos de cálculo da potência ativa e reativa em circuitos que operam em regime permanente senoidal, precisamos apresentar e definir a potência complexa. A *potência complexa* é a soma complexa da potência ativa e da potência reativa, ou

$$S = P + jQ. \tag{10.23}$$

(Potência complexa)

Como você verá, podemos calcular a potência complexa diretamente dos fasores de tensão e corrente de um circuito. Em seguida, a Equação 10.23 pode ser usada para calcular a potência média e a potência reativa, porque $P = \Re\{S\}$ e $Q = \Im\{S\}$.

A potência complexa tem a mesma dimensão da potência média ou da potência reativa. Contudo, para distinguir a potência complexa das outras duas, usamos para ela a unidade *volt-ampère* (VA). Portanto, usamos volts-ampères para a potência complexa, watts para a potência média e vars para a potência reativa, como resumido na Tabela 10.2.

Outra vantagem de usar a potência complexa é a interpretação geométrica que ela permite. Quando estiver trabalhando com a Equação 10.23, imagine P, Q e $|S|$ como os lados de um triângulo retângulo, como mostra a Figura 10.9. É fácil mostrar que o ângulo θ no triângulo de potências é o ângulo do fator de potência $\theta_v - \theta_i$. Para o triângulo retângulo mostrado na Figura 10.9,

$$\tan\theta = \frac{Q}{P}. \tag{10.24}$$

TABELA 10.2 Três tipos de potência e suas unidades

Quantidade	Unidades
Potência complexa	volts-ampères
Potência média	watt
Potência reativa	var

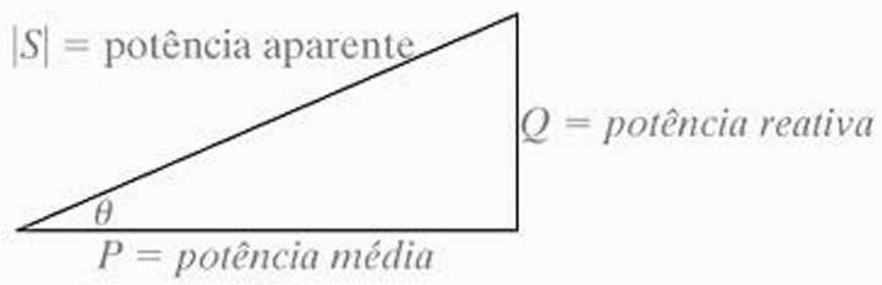


Figura 10.9 ▲ Triângulo de potências.

Mas, pelas definições de P e Q (equações [10.10] e [10.11], respectivamente),

$$\frac{Q}{P} = \frac{(V_m I_m/2)\,\text{sen}(\theta_v - \theta_i)}{(V_m I_m/2)\cos(\theta_v - \theta_i)}$$

$$= \tan(\theta_v - \theta_i). \tag{10.25}$$

Portanto, $\theta = \theta_v - \theta_i$. As relações geométricas para um triângulo retângulo significam também que as quatro grandezas associadas ao triângulo de potências (os três lados e o ângulo do fator de potência) podem ser determinadas se forem conhecidas quaisquer duas delas.

A magnitude da potência complexa é denominada *potência aparente*. Especificamente,

$$|S| = \sqrt{P^2 + Q^2}. \tag{10.26}$$

(Potência aparente)

A potência aparente, como a potência complexa, é medida em volts-ampères. A potência aparente, ou volt-amp, de aparelhos projetados para converter energia elétrica em outras formas de energia é uma grandeza mais importante do que a potência média. Embora a potência média represente a parcela da potência que realiza trabalho, a potência aparente representa a potência total disponível necessária para fornecer a potência média desejada. Como você pode ver pelo triângulo de potências na Figura 10.9, a menos que o ângulo do fator de potência seja 0° (isto é, o dispositivo seja puramente resistivo, fp = 1 e $Q = 0$), a potência aparente é sempre maior do que a potência média absorvida pelo dispositivo. Como veremos no Exemplo 10.6, vale a pena operar um dispositivo com um fator de potência próximo de 1.

Muitos eletrodomésticos úteis (como refrigeradores, ventiladores, aparelhos de ar condicionado, lâmpadas fluorescentes e máquinas de lavar roupa) e a maioria das cargas industriais operam com um fator de potência atrasado. O fator de potência dessas cargas às vezes é corrigido pela adição de um capacitor ao próprio dispositivo, ou pela conexão de capacitores à linha que alimenta a carga; o último método é freqüentemente usado para grandes cargas industriais. Muitos dos problemas apresentados no final do capítulo lhe proporcionarão a oportunidade de fazer alguns cálculos que corrigem um fator de potência atrasado e melhoram a operação de um circuito.

O Exemplo 10.4 usa o triângulo de potências para calcular diversas grandezas associadas a uma carga elétrica.

Exemplo 10.4 Cálculo da potência complexa

Uma carga elétrica funciona em 240 V_{ef}. A carga absorve uma potência média de 8 kW, com um fator de potência atrasado de 0,8.

a) Calcule a potência complexa da carga.

b) Calcule a impedância da carga.

Solução

a) O fator de potência é descrito como atrasado, portanto sabemos que a carga é indutiva e que o sinal algébrico da potência reativa é positivo. Pelo triângulo de potências da Figura 10.10,

$$P = |S| \cos \theta$$

$$Q = |S| \operatorname{sen} \theta$$

Agora, como $\cos \theta = 0{,}8$, $\operatorname{sen} \theta = 0{,}6$. Portanto

$$|S| = \frac{P}{\cos \theta} = \frac{8 \text{ kW}}{0{,}8} = 10 \text{ kVA},$$

$$Q = 10 \operatorname{sen} \theta = 6 \text{ kVAR}$$

e

$$S = 8 + j6 \text{ kVA}$$

b) Pelo cálculo da potência complexa da carga, vemos que $P = 8$ kW. Usando a Equação 10.21,

$$P = V_{ef} I_{ef} \cos (\theta_v - \theta_i)$$
$$= (240) I_{ef} (0{,}8)$$
$$= 8.000 \text{ W}$$

Resolvendo para I_{ef},

$$I_{ef} = 41{,}67 \text{ A}$$

Já conhecemos o ângulo da impedância da carga, pois ele é o ângulo do fator de potência:

$$\theta = \cos^{-1}(0{,}8) = 36{,}87°$$

Também sabemos que θ é positivo porque o fator de potência é atrasado, o que indica uma carga indutiva. Calculamos o módulo da impedância de carga por sua definição como a razão entre o módulo da tensão e o módulo da corrente:

$$|Z| = \frac{|V_{ef}|}{|I_{ef}|} = \frac{240}{41{,}67} = 5{,}76.$$

Daí,

$$Z = 5{,}76 \angle 36{,}87° \ \Omega = 4{,}608 + j3{,}456 \ \Omega.$$

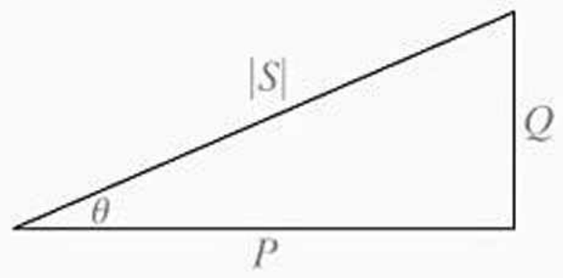


Figura 10.10 ▲ Triângulo de potências.

10.5 Cálculos de potência

Agora estamos em condições de deduzir equações adicionais que podem ser usadas para calcular as potências ativa, reativa e complexa. Começamos combinando as equações 10.10, 10.11 e 10.23 para obter

$$S = \frac{V_m I_m}{2} \cos (\theta_v - \theta_i) + j \frac{V_m I_m}{2} \operatorname{sen}(\theta_v - \theta_i)$$
$$= \frac{V_m I_m}{2} [\cos (\theta_v - \theta_i) + j \operatorname{sen}(\theta_v - \theta_i)]$$
$$= \frac{V_m I_m}{2} e^{j(\theta_v - \theta_i)} = \frac{1}{2} V_m I_m \angle (\theta_v - \theta_i). \quad (10.27)$$

Se usarmos os valores eficazes da tensão e corrente senoidais, a Equação 10.27 torna-se

$$S = V_{ef} I_{ef} \angle (\theta_v - \theta_i). \quad (10.28)$$

As equações 10.27 e 10.28 são relações importantes em cálculos de potência porque mostram que, se a corrente e a tensão fasoriais terminais forem conhecidas, a potência complexa associada a esse par de terminais é a metade do produto entre a tensão e o conjugado da corrente, ou o produto entre a tensão fasorial eficaz e o conjugado da corrente fasorial eficaz. Podemos mostrar isso para a tensão e a corrente da Figura 10.11 da seguinte maneira:

$$S = V_{ef} I_{ef} \angle (\theta_v - \theta_i)$$
$$= V_{ef} I_{ef} \, e^{j(\theta_v - \theta_i)}$$
$$= V_{ef} e^{j\theta_v} I_{ef} \, e^{-j\theta_i}$$
$$= \mathbf{V}_{ef} \mathbf{I}^*_{ef}. \quad (10.29)$$

(Potência complexa)

Observe que $\mathbf{I}^*_{ef} = I_{ef} e^{-j\theta_i}$ decorre da identidade de Euler e das identidades trigonométricas $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ e $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}(\theta)$:

$$I_{ef} e^{-j\theta_i} = I_{ef} \cos(-\theta_i) + j I_{ef} \operatorname{sen}(-\theta_i)$$
$$= I_{ef} \cos(\theta_i) - j I_{ef} \operatorname{sen}(\theta_i) = \mathbf{I}^*_{ef}.$$

A mesma técnica de dedução poderia ser aplicada à Equação 10.27, resultando em

$$S = \frac{1}{2} \mathbf{V} \mathbf{I}^*. \quad (10.30)$$

Ambas as equações 10.29 e 10.30 são baseadas na convenção passiva. Se a referência de corrente estiver no sentido da elevação de tensão nos terminais, inserimos um sinal negativo no lado direito de cada equação.

Para ilustrar a utilização da Equação 10.30 em um cálculo de potência, vamos usar o mesmo circuito do Exemplo 10.1. Tomando a representação fasorial para a tensão e a corrente terminais, temos

$$\mathbf{V} = 100 \angle 15° \text{ V},$$
$$\mathbf{I} = 4 \angle -105° \text{ A}.$$

Então,

$$S = \frac{1}{2}(100 \angle 15°)(4 \angle +105°) = 200 \angle 120°$$
$$= -100 + j173{,}21 \text{ VA}.$$

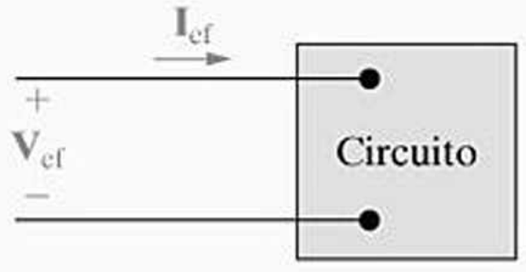


Figura 10.11 ▲ Tensão e corrente fasoriais associadas a um par de terminais.

Calculada a potência complexa, podemos obter diretamente a potência ativa e a potência reativa, pois $S = P + jQ$. Assim,

$$P = -100 \text{ W},$$

$$Q = 173{,}21 \text{ VAR}.$$

As interpretações dos sinais algébricos de P e Q são idênticas às dadas na solução do Exemplo 10.1.

Formas alternativas da potência complexa

As equações 10.29 e 10.30 têm diversas formas alternativas úteis. Aqui, usaremos a forma com valores eficazes, porque estes são mais comuns na representação de tensões e correntes em cálculos de potência.

A primeira variação da Equação 10.29 é obtida substituindo a tensão pelo produto da corrente pela impedância. Em outras palavras, sempre podemos representar o circuito no interior da caixa da Figura 10.11 por uma impedância equivalente, como mostra a Figura 10.12. Então,

$$\mathbf{V}_{ef} = Z\mathbf{I}_{ef}. \tag{10.31}$$

Substituindo a Equação 10.31 na Equação 10.29, obtemos

$$\begin{aligned} S &= Z\mathbf{I}_{ef}\mathbf{I}_{ef}^{*} \\ &= |\mathbf{I}_{ef}|^2 Z \\ &= |\mathbf{I}_{ef}|^2 (R + jX) \\ &= |\mathbf{I}_{ef}|^2 R + j|\mathbf{I}_{ef}|^2 X = P + jQ \end{aligned} \tag{10.32}$$

da qual

$$P = |\mathbf{I}_{ef}|^2 R = \frac{1}{2} I_m^2 R, \tag{10.33}$$

$$Q = |\mathbf{I}_{ef}|^2 X = \frac{1}{2} I_m^2 X. \tag{10.34}$$

Na Equação 10.34, X é a reatância da indutância equivalente ou da capacitância equivalente do circuito. Lembre-se, de nossas discussões anteriores, de que a reatância é positiva para circuitos indutivos e negativa para circuitos capacitivos.

Uma segunda variação útil da Equação 10.29 resulta da substituição da corrente pela tensão dividida pela impedância:

$$S = \mathbf{V}_{ef}\left(\frac{\mathbf{V}_{ef}}{Z}\right)^{*} = \frac{|\mathbf{V}_{ef}|^2}{Z^{*}} = P + jQ. \tag{10.35}$$

Observe que, se Z for um elemento resistivo puro,

$$P = \frac{|\mathbf{V}_{ef}|^2}{R}, \tag{10.36}$$

e, se Z for um elemento reativo puro,

$$Q = \frac{|\mathbf{V}_{ef}|^2}{X}. \tag{10.37}$$

Na Equação 10.37, X é positiva para um indutor e negativa para um capacitor.

Os exemplos a seguir ilustram vários cálculos de potência em circuitos que operam em regime permanente senoidal.

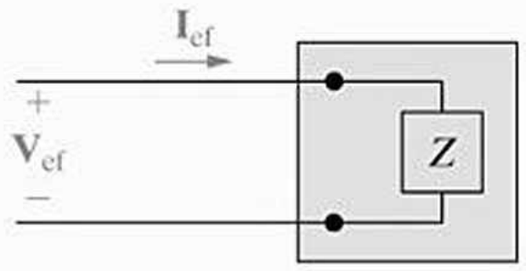


Figura 10.12 ▲ Circuito genérico da Figura 10.11 substituído por uma impedância equivalente.

Exemplo 10.5 Cálculo da potência média e da potência reativa

No circuito mostrado na Figura 10.13, uma carga cuja impedância é $39 + j26\ \Omega$ é alimentada por uma fonte de tensão por meio de uma linha de impedância $1 + j4\ \Omega$. O valor eficaz, ou rms, da fonte de tensão é 250 V.

a) Calcule a corrente $\mathbf{I}_L$ e a tensão $\mathbf{V}_L$ de carga.
b) Calcule a potência média e a potência reativa fornecidas à carga.
c) Calcule a potência média e a potência reativa fornecidas à linha.
d) Calcule a potência média e a potência reativa fornecidas pela fonte.

Solução

a) Como as impedâncias de linha e de carga estão em série, a corrente de carga é igual à tensão de fonte dividida pela impedância total, ou

$$\mathbf{I}_L = \frac{250\ \angle 0^\circ}{40 + j30} = 4 - j3 = 5\ \underline{\angle -36{,}87^\circ}\ \text{A (ef)}.$$

Como a tensão é dada em termos de seu valor eficaz, o mesmo acontece com a corrente. A tensão na carga é o produto entre a corrente e a impedância da carga:

$$\mathbf{V}_L = (39 + j26)\mathbf{I}_L = 234 - j13$$

$$= 234{,}36\ \underline{\angle -3{,}18^\circ}\ \text{V (ef)}.$$

b) A potência média e a potência reativa fornecidas à carga podem ser calculadas usando a Equação 10.29. Assim,

$$S = \mathbf{V}_L\mathbf{I}_L^{*} = (234 - j13)(4 + j3)$$

$$= 975 + j650 \text{ VA}.$$

Portanto, a carga está absorvendo uma potência média de 975 W e uma potência reativa de 650 VAR.

c) A potência média e a potência reativa fornecidas à linha são calculadas mais facilmente pelas equações 10.33 e 10.34, pois a corrente de linha é conhecida. Assim,

$$P = (5)^2(1) = 25 \text{ W},$$

$$Q = (5)^2(4) = 100 \text{ VAR}.$$

Observe que a potência reativa associada à linha é positiva porque a reatância de linha é indutiva.

d) Um modo de calcular a potência média e a potência reativa fornecidas pela fonte é adicionar a potência complexa fornecida à linha à potência complexa fornecida à carga, ou

$$S = 25 + j100 + 975 + j650$$

$$= 1.000 + j750 \text{ VA}.$$

A potência complexa na fonte também pode ser calculada pela Equação 10.29:

$$S_f = -250\mathbf{I}_L^*.$$

O sinal negativo é inserido na Equação 10.29 sempre que a referência de corrente estiver no sentido de uma elevação de tensão. Assim,

$$S_f = -250(4 + j3) = -(1.000 + j750) \text{ VA}$$

O sinal negativo implica que ambas as potências, média e reativa, estejam sendo fornecidas pela fonte. Observe que esse resultado está de acordo com o cálculo anterior de S, como era de se esperar, porque a fonte deve fornecer toda a potência média e reativa absorvidas pela linha e pela carga.

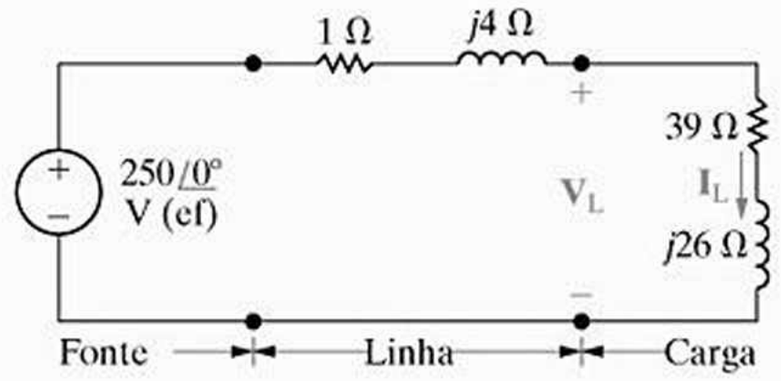


Figura 10.13 ▲ Circuito para o Exemplo 10.5.

Exemplo 10.6 Cálculo da potência em cargas paralelas

As duas cargas do circuito mostrado na Figura 10.14 podem ser descritas da seguinte forma: a carga 1 absorve uma potência média de 8 kW com um fator de potência adiantado de 0,8. A carga 2 absorve 20 kVA com um fator de potência atrasado de 0,6.

a) Determine o fator de potência das duas cargas em paralelo.
b) Determine a potência aparente necessária para alimentar as cargas, a amplitude da corrente, $\mathbf{I}_f$, e a potência média dissipada na linha de transmissão.
c) Dado que a freqüência da fonte é 60 Hz, calcule o valor do capacitor que corrigiria o fator de potência para 1 se colocado em paralelo com as duas cargas. Calcule novamente os valores em (b) para a carga com o fator de potência corrigido.

Solução

a) Admite-se que todos os fasores de tensão e corrente neste problema representem valores eficazes. Observe, pelo diagrama do circuito na Figura 10.14, que $\mathbf{I}_f = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2$. A potência complexa total absorvida pelas duas cargas é

$$S = (250)\mathbf{I}_f^*$$
$$= (250)(\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2)^*$$
$$= (250)\mathbf{I}_1^* + (250)\mathbf{I}_2^*$$
$$= S_1 + S_2.$$

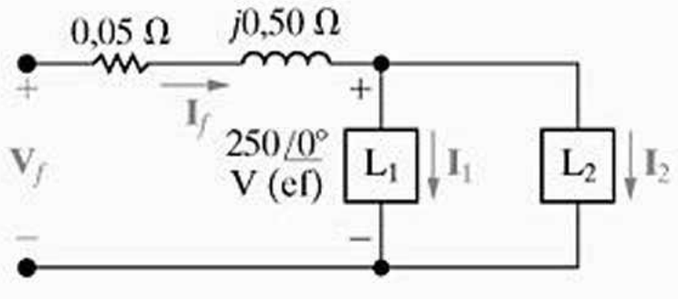


Figura 10.14 ▲ Circuito para o Exemplo 10.6.

Podemos somar as potências complexas geometricamente, usando os triângulos de potências para cada carga, como mostra a Figura 10.15. Por hipótese,

$$S_1 = 8.000 - j\frac{8.000(0,6)}{(0,8)}$$

$$= 8.000 - j6.000 \text{ VA},$$

$$S_2 = 20.000(0,6) + j20.000(0,8)$$

$$= 12.000 + j16.000 \text{ VA}.$$

Assim,

$$S = 20.000 + j10.000 \text{ VA}$$

e

$$\mathbf{I}_f^* = \frac{20.000 + j10.000}{250} = 80 + j40 \text{ A}.$$

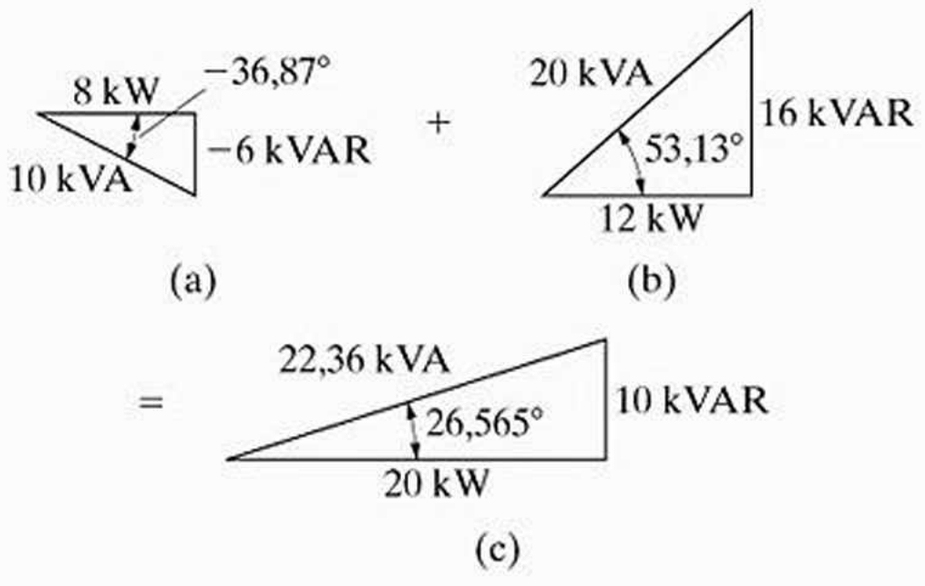


Figura 10.15 ▲ a) Triângulo de potências para a carga 1. (b) Triângulo de potências para a carga 2. (c) Soma dos triângulos de potências.

Portanto,

$$\mathbf{I}_f = 80 - j40 = 89{,}44 \angle -26{,}57° \text{ A}.$$

Assim, o fator de potência da carga combinada é

$$\text{fp} = \cos(0 + 26{,}57°) = 0{,}8944 \text{ atrasado}.$$

O fator de potência das duas cargas em paralelo é atrasado porque a potência reativa líquida é positiva.

b) A potência aparente que deve ser fornecida para essas cargas é

$$|S| = |20 + j10| = 22{,}36 \text{ kVA}.$$

A amplitude da corrente que fornece essa potência aparente é

$$|\mathbf{I}_f| = |80 - j40| = 89{,}44 \text{ A}.$$

A potência média dissipada na linha, que resulta da passagem da corrente pela resistência da linha, é

$$P_{\text{linha}} = |\mathbf{I}_f|^2 R = (89{,}44)^2(0{,}05) = 400 \text{ W}$$

Observe que a fonte fornece 20.000 + 400 = 20.400 W, ainda que as cargas necessitem de apenas 20.000 W.

c) Como vemos pelo triângulo de potências na Figura 10.15(c), podemos corrigir o fator de potência para 1 se colocarmos um capacitor em paralelo com as cargas existentes, de modo que o capacitor forneça 10 kVAR de potência reativa. O valor do capacitor é calculado da seguinte forma: em primeiro lugar, determine a reatância capacitiva pela Equação 10.37:

$$X = \frac{|V_{\text{ef}}|^2}{Q} = \frac{(250)^2}{-10.000} = -6{,}25 \ \Omega.$$

Lembre-se de que a impedância reativa de um capacitor é $-1/\omega C$ e $\omega = 2\pi(60) = 376{,}99$ rad/s, se a freqüência da fonte for 60 Hz. Assim,

$$C = \frac{-1}{\omega X} = \frac{-1}{(376{,}99)(-6{,}25)} = 424{,}4 \ \mu\text{F}.$$

A adição do capacitor como terceira carga é representada em forma geométrica como a soma dos dois triângulos de potências mostrados na Figura 10.16. Quando o fator de potência for 1, a potência aparente e a potência média serão as mesmas, como pode-se ver pelo triângulo de potências na Figura 10.16(c). Portanto, uma vez corrigido o fator de potência, a potência aparente é

$$|S| = P = 20 \text{ kVA}$$

A amplitude da corrente que fornece essa potência aparente é

$$|\mathbf{I}_f| = \frac{20.000}{250} = 80 \text{ A}.$$

Portanto, a potência média dissipada na linha é reduzida para

$$P_{\text{linha}} = |\mathbf{I}_f|^2 R = (80)^2(0{,}05) = 320 \text{ W}$$

Agora, a potência fornecida é 20.000 + 320 = 20.320 W. Observe que a adição do capacitor reduziu as perdas na linha de 400 W para 320 W.

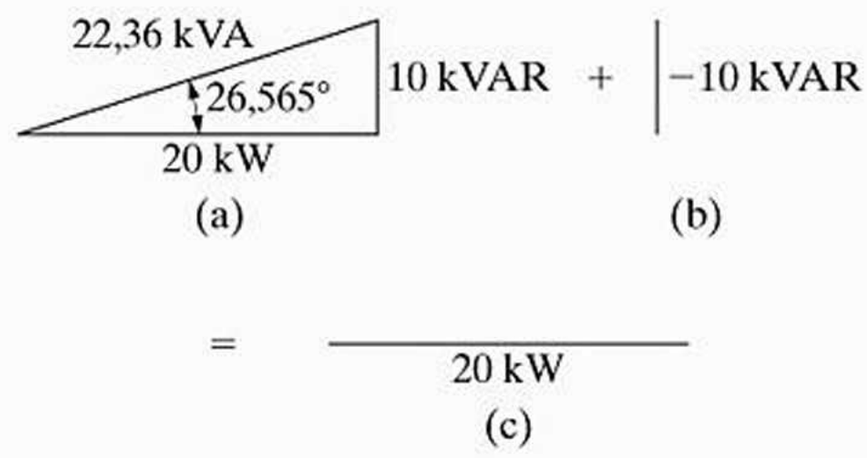


Figura 10.16 ▲ (a) Soma dos triângulos de potências para as cargas 1 e 2. (b) Triângulo de potências para um capacitor de 424,4 μF a 60 Hz. (c) Soma dos triângulos de potências em (a) e (b).

Exemplo 10.7 Equilíbrio da potência fornecida com a potência absorvida em um circuito ca

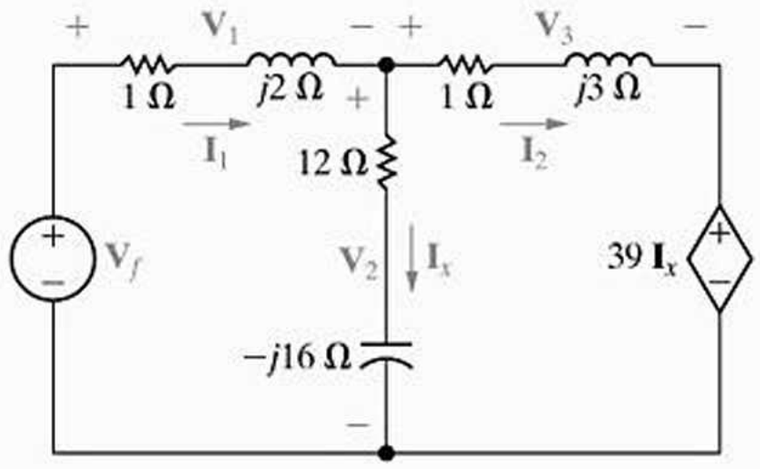
a) Calcule a potência média e reativa total fornecida a cada impedância no circuito da Figura 10.17.
b) Calcule a potência média e a potência reativa associadas a cada fonte no circuito.
c) Verifique se a potência média fornecida é igual à potência média absorvida e se a potência reativa fornecida é igual à potência reativa absorvida.

Solução

a) A potência complexa fornecida à impedância de (1 + $j2$) Ω é

$$S_1 = \frac{1}{2}\mathbf{V}_1\mathbf{I}_1^* = P_1 + jQ_1$$

$$= \frac{1}{2}(78 - j104)(-26 + j52)$$



$\mathbf{V}_f = 150 \angle 0° \text{ V}$

$\mathbf{V}_1 = (78 - j104) \text{ V}$ $\quad \mathbf{I}_1 = (-26 - j52) \text{ A}$

$\mathbf{V}_2 = (72 + j104) \text{ V}$ $\quad \mathbf{I}_x = (-2 + j6) \text{ A}$

$\mathbf{V}_3 = (150 - j130) \text{ V}$ $\quad \mathbf{I}_2 = (-24 - j58) \text{ A}$

Figura 10.17 ◀ Circuito para o Exemplo 10.7, com a solução.

$$= \frac{1}{2}(3.380 + j6.760)$$

$$= 1.690 + j3.380 \text{ VA}.$$

Assim, essa impedância está absorvendo uma potência média de 1.690 W e uma potência reativa de 3.380 VAR. A potência complexa fornecida à impedância de $(12 - j16)\ \Omega$ é

$$S_2 = \frac{1}{2}\mathbf{V}_2\mathbf{I}_x^* = P_2 + jQ_2$$

$$= \frac{1}{2}(72 + j104)(-2 - j6)$$

$$= 240 - j320 \text{ VA}.$$

Portanto, a impedância no ramo vertical está absorvendo 240 W e fornecendo 320 VAR. A potência complexa fornecida à impedância de $(1 + j3)\ \Omega$ é

$$S_3 = \frac{1}{2}\mathbf{V}_3\mathbf{I}_2^* = P_3 + jQ_3$$

$$= \frac{1}{2}(150 - j130)(-24 + j58)$$

$$= 1.970 + j5.910 \text{ VA}.$$

Essa impedância está absorvendo 1.970 W e 5.910 VAR.

b) A potência complexa associada à fonte de tensão independente é

$$S_s = -\frac{1}{2}\mathbf{V}_f\mathbf{I}_1^* = P_f + jQ_f$$

$$= -\frac{1}{2}(150)(-26 + j52)$$

$$= 1.950 - j3.900 \text{ VA}.$$

Observe que a fonte de tensão independente está absorvendo uma potência média de 1.950 W e fornecendo 3.900 VAR. A potência complexa associada à fonte de tensão controlada por corrente é

$$S_x = \frac{1}{2}(39\mathbf{I}_x)(\mathbf{I}_2^*) = P_x + jQ_x$$

$$= \frac{1}{2}(-78 + j234)(-24 + j58)$$

$$= -5.850 - j5.070 \text{ VA}.$$

Tanto a potência média como a potência reativa estão sendo fornecidas pela fonte dependente.

c) A potência total absorvida pelas impedâncias passivas e pela fonte de tensão independente é

$$P_{\text{absorvida}} = P_1 + P_2 + P_3 + P_s = 5.850 \text{ W}.$$

A fonte de tensão dependente é o único elemento de circuito que está fornecendo potência média. Assim,

$$P_{\text{fornecida}} = 5.850 \text{ W}.$$

A potência reativa está sendo absorvida pelos dois ramos horizontais. Assim,

$$Q_{\text{absorvida}} = Q_1 + Q_3 = 9.290 \text{ VAR}.$$

A potência reativa está sendo fornecida pela fonte de tensão independente, pelo capacitor no ramo vertical e pela fonte de tensão dependente. Assim,

$$Q_{\text{fornecida}} = 9.290 \text{ VAR}.$$

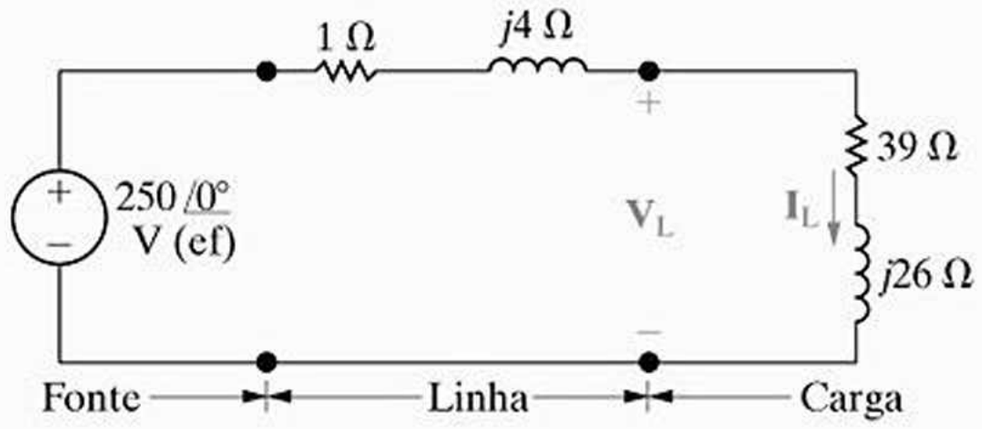
✔ PROBLEMAS PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 1 — Entender conceitos de potência ca, as relações entre elas e como calcular essas potências em um circuito

10.4 Um capacitor de reatância capacitiva de $-52\ \Omega$ é ligado em paralelo com a carga do circuito da figura. Calcule:

a) os valores eficazes dos fasores $\mathbf{V}_L$ e $\mathbf{I}_L$;
b) a potência média e a potência reativa absorvidas pela impedância de carga de $(39 + j26)\ \Omega$;
c) a potência média e a potência reativa absorvidas pela impedância de linha de $(1 + j4)\ \Omega$;
d) a potência média e a potência reativa fornecidas pela fonte e
e) a potência reativa fornecida pelo capacitor em paralelo com a carga.

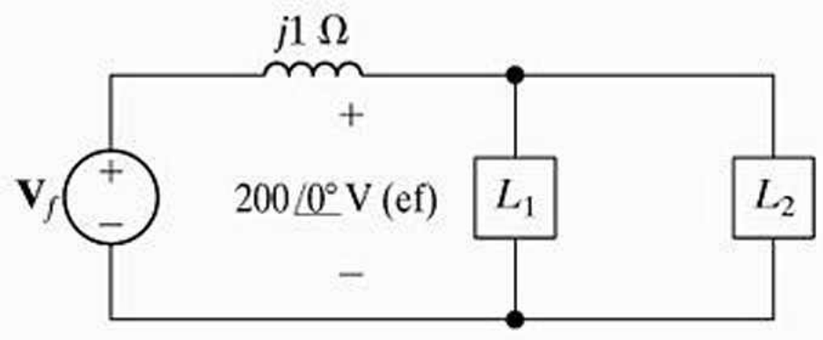
Resposta: (a) $252{,}20\ \angle -4{,}54°$ V (ef), $5{,}38\ \angle -38{,}23°$ A (ef);
(b) 1.129,09 W; 752,73 VAR;
(c) 23,52 W; 94,09 VAR;
(d) 1.152,62 W; −376,36 VAR;
(e) 1.223,18 VAR.



10.5 A tensão eficaz nos terminais de uma carga é 250 V. A carga está absorvendo uma potência média de 40 kW e fornecendo uma potência reativa de 30 kVAR. Determine dois modelos de impedância equivalente da carga e os valores respectivos de seus parâmetros.

Resposta: 1 Ω em série com 0,75 Ω de reatância capacitiva; 1,5625 Ω em paralelo com 2,083 Ω de reatância capacitiva.

10.6 Determine a tensão fasorial $\mathbf{V}_f$ (ef) no circuito mostrado se as cargas L_1 e L_2 estiverem absorvendo 15 kVA com um fp atrasado de 0,6 e 6 kVA com um fp adiantado de 0,8, respectivamente. Expresse $\mathbf{V}_f$ em forma polar.



Resposta: 251,64 $\angle 15{,}91°$ V.

NOTA: Tente resolver também os problemas 10.17, 10.21 e 10.22, apresentados no final deste capítulo.

10.6 Máxima transferência de potência

Lembre-se de que, no Capítulo 4, afirmamos que certos sistemas — por exemplo, os que transmitem informações por meio de sinais elétricos — operam na perspectiva de se poder transferir uma quantidade máxima de potência da fonte para a carga. Agora, estudaremos a máxima transferência de potência no contexto de uma rede em regime permanente senoidal, começando com a Figura 10.18. Devemos determinar a impedância de carga Z_L que possibilita o fornecimento de máxima potência média aos terminais *a* e *b*. Qualquer rede linear pode ser vista a partir dos terminais da carga como um circuito equivalente de Thévenin. Assim, torna-se necessário apenas determinar o valor de Z_L que resulta em máxima potência média a ser fornecida a Z_L, no circuito da Figura 10.19.

Para a máxima transferência de potência média, Z_L deve ser igual ao conjugado da impedância de Thévenin; isto é,

$$Z_L = Z_{Th}^*. \tag{10.38}$$

(Condição para máxima transferência de potência média)



Figura 10.18 ▲ Circuito usado para a análise da máxima transferência de potência.

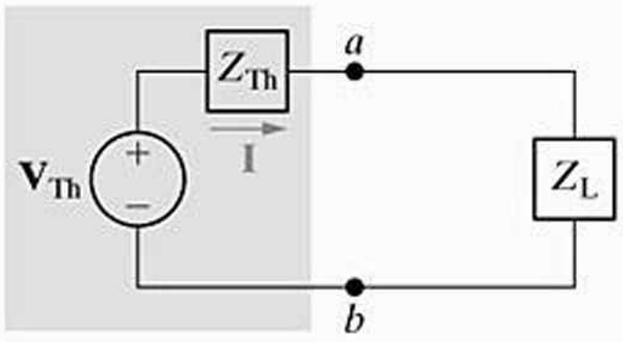


Figura 10.19 ▲ Circuito da Figura 10.18, com a rede substituída por seu equivalente de Thévenin.

Deduzimos a Equação 10.38 pela simples aplicação do cálculo elementar. Começamos expressando Z_{Th} e Z_L em forma retangular:

$$Z_{Th} = R_{Th} + jX_{Th}, \tag{10.39}$$

$$Z_L = R_L + jX_L. \tag{10.40}$$

Em ambas as equações 10.39 e 10.40, o termo da reatância tem o sinal positivo para indutância e negativo para capacitância. Como estamos fazendo um cálculo de potência média, admitimos que a amplitude da tensão de Thévenin seja expressa em termos de seu valor eficaz. Além disso, usamos a tensão de Thévenin como fasor de referência. Então, pela Figura 10.19, o valor eficaz da corrente de carga **I** é

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_{Th}}{(R_{Th} + R_L) + j(X_{Th} + X_L)}. \tag{10.41}$$

A potência média fornecida à carga é

$$P = |\mathbf{I}|^2 R_L \tag{10.42}$$

Substituindo a Equação 10.41 na Equação 10.42, temos

$$P = \frac{|\mathbf{V}_{Th}|^2 R_L}{(R_{Th} + R_L)^2 + (X_{Th} + X_L)^2}. \tag{10.43}$$

Quando trabalhar com a Equação 10.43, lembre-se sempre de que V_{Th}, R_{Th} e X_{Th} são quantidades fixas, ao passo que R_L e X_L são variáveis independentes. Portanto, para maximizar P, devemos determinar os valores de R_L e X_L para os quais $\partial P/\partial R_L$ e $\partial P/\partial X_L$ são iguais a zero. Pela Equação 10.43,

$$\frac{\partial P}{\partial X_L} = \frac{-|\mathbf{V}_{Th}|^2 2R_L(X_L + X_{Th})}{[(R_L + R_{Th})^2 + (X_L + X_{Th})^2]^2}, \tag{10.44}$$

$$\frac{\partial P}{\partial R_L} = \frac{|\mathbf{V}_{Th}|^2[(R_L + R_{Th})^2 + (X_L + X_{Th})^2 - 2R_L(R_L + R_{Th})]}{[(R_L + R_{Th})^2 + (X_L + X_{Th})^2]^2}. \tag{10.45}$$

Pela Equação 10.44, $\partial P/\partial X_L$ é zero quando

$$X_L = -X_{Th}. \tag{10.46}$$

Pela Equação 10.45, $\partial P/\partial R_L$ é zero quando

$$R_L = \sqrt{R_{Th}^2 + (X_L + X_{Th})^2}. \tag{10.47}$$

Observe que, quando combinamos a Equação 10.46 com a Equação 10.47, ambas as derivadas são zero quando $Z_L = Z^*_{Th}$.

Máxima potência média absorvida

A máxima potência média que pode ser fornecida a Z_L quando ela é igualada ao conjugado de Z_{Th} é calculada facilmente pelo circuito da Figura 10.19. Quando $Z_L = Z^*_{Th}$, o valor eficaz da corrente de carga é $\mathbf{V}_{Th}/2R_L$ e a máxima potência média fornecida à carga é

$$P_{max} = \frac{|\mathbf{V}_{Th}|^2 R_L}{4R_L^2} = \frac{1}{4}\frac{|\mathbf{V}_{Th}|^2}{R_L}. \tag{10.48}$$

Se a tensão de Thévenin for expressa em termos de sua amplitude máxima, em vez de sua amplitude eficaz, a Equação 10.48 torna-se

$$P_{max} = \frac{1}{8}\frac{\mathbf{V}_m^2}{R_L}. \tag{10.49}$$

Máxima transferência de potência quando existem limitações para o valor de *Z*

A máxima potência média só pode ser fornecida a Z_L se esta puder ser igualada ao conjugado de Z_{Th}. Há situações em que isso não é possível. Em primeiro lugar, R_L e X_L podem estar restritas a uma faixa limitada de valores. Nessa situação, a condição ótima para R_L e X_L é ajustar o valor de X_L o mais próximo possível de $-X_{Th}$ e, então, ajustar o valor de R_L o mais próximo possível de $\sqrt{R_{Th}^2 + (X_L + X_{Th})^2}$ (veja o Exemplo 10.9).

Um segundo tipo de restrição ocorre quando o módulo de Z_L pode variar, mas seu ângulo de fase não pode. Sob essa restrição, a maior quantidade de potência é transferida à carga quando o módulo de Z_L é igualado ao módulo de Z_{Th}; isto é, quando

$$|Z_L| = |Z_{Th}| \tag{10.50}$$

Deixamos ao leitor a demonstração da Equação 10.50 no Problema 10.40, apresentado no final deste capítulo.

Para redes puramente resistivas, a máxima transferência de potência ocorre quando a resistência de carga é igual à resistência de Thévenin. Observe que deduzimos esse resultado quando apresentamos a máxima transferência de potência pela primeira vez no Capítulo 4.

Os exemplos 10.8–10.11 ilustram o problema de se obter máxima transferência de potência nas situações que acabamos de discutir.

Exemplo 10.8 Determinação da máxima transferência de potência quando a impedância da carga pode variar livremente

a) Para o circuito mostrado na Figura 10.20, determine a impedância Z_L para a máxima transferência de potência média a essa impedância.
b) Qual é a máxima transferência de potência média para a impedância de carga determinada em (a)?

Solução

a) Começamos determinando o equivalente de Thévenin visto a partir dos terminais *a*, *b*. Após duas transformações de fonte envolvendo a fonte de 20 V, o resistor de 5 Ω e o resistor de 20 Ω, simplificamos o circuito da Figura 10.20 para o da Figura 10.21. Então,

$$\mathbf{V}_{Th} = \frac{16\angle 0^\circ}{4 + j3 - j6}(-j6)$$
$$= 19{,}2\angle -53{,}13^\circ = 11{,}52 - j15{,}36 \text{ V}.$$

Determinamos a impedância de Thévenin eliminando a fonte independente e calculando a impedância vista a partir dos terminais *a* e *b*. Assim,

$$Z_{Th} = \frac{(-j6)(4 + j3)}{4 + j3 - j6} = 5{,}76 - j1{,}68\ \Omega.$$

Para a máxima transferência de potência média, a impedância da carga deve ser o conjugado de Z_{Th} e, então,

$$Z_L = 5{,}76 + j1{,}68\ \Omega.$$

b) Calculamos a máxima potência média fornecida a Z_L por meio do circuito da Figura 10.22, no qual substituímos a rede original por seu equivalente de Thévenin. Pela Figura 10.22, o valor eficaz da corrente de carga **I** é

$$I_{ef} = \frac{19{,}2/\sqrt{2}}{2(5{,}76)} = 1{,}1785 \text{ A}.$$

A potência média fornecida à carga é

$$P = I_{ef}^2\,(5{,}76) = 8 \text{ W}$$

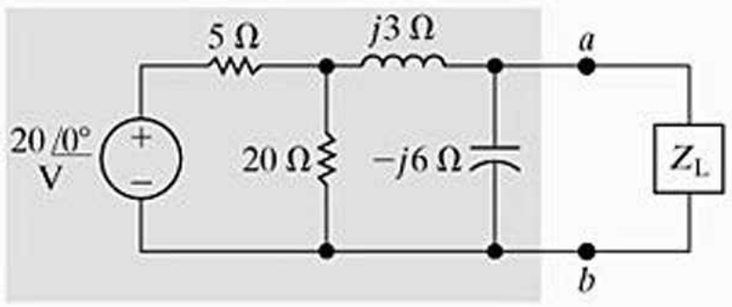


Figura 10.20 Circuito para o Exemplo 10.8.

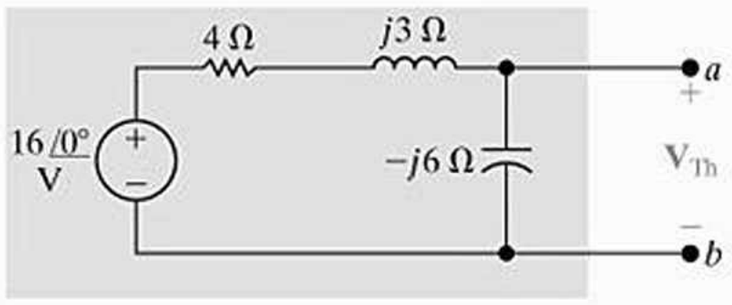


Figura 10.21 Simplificação da Figura 10.20 por meio de transformações de fonte.

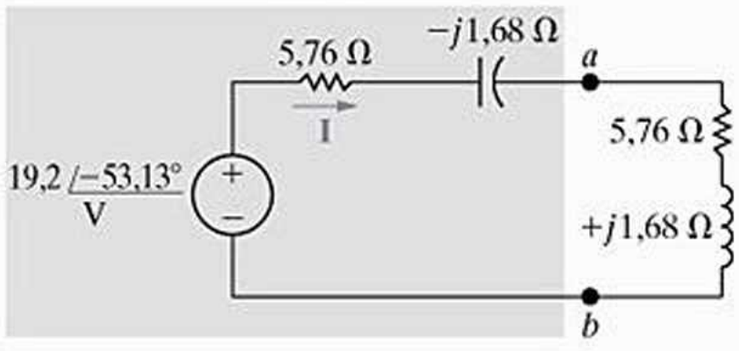


Figura 10.22 Circuito da Figura 10.20, com a rede original substituída por seu equivalente de Thévenin.

Exemplo 10.9 Determinação da máxima transferência de potência quando há limitações à variação de impedância da carga

a) Para o circuito mostrado na Figura 10.23, qual é o valor de Z_L que possibilita a máxima transferência de potência média a Z_L? Qual é a máxima potência em miliwatts?

b) Admita que a resistência da carga possa variar entre 0 e 4.000 Ω e que a reatância capacitiva da carga possa variar entre 0 e −2.000 Ω. Quais são os ajustes de R_L e X_L que transferem a maior potência média à carga? Qual é a máxima potência média que pode ser transferida, dadas essas restrições?

Solução

a) Se não houver restrições a R_L e X_L, a impedância de carga será igualada ao conjugado da impedância de Thévenin. Portanto, fazemos

$$R_L = 3.000\ \Omega \text{ e } X_L = -4.000\ \Omega$$

ou

$$Z_L = 3.000 - j4.000\ \Omega$$

Como a tensão da fonte é dada em termos de seu valor eficaz, a potência média fornecida a Z_L é

$$P = \frac{1}{4}\frac{10^2}{3.000} = \frac{25}{3}\text{ mW} = 8{,}33\text{ mW}.$$

b) Como a variação dos valores de R_L e X_L é limitada, primeiro ajustamos X_L o mais próximo possível de −4.000 Ω; assim, $X_L = -2.000\ \Omega$. Em seguida, ajustamos R_L o mais próximo possível de $\sqrt{R_{Th}^2 + (X_L + X_{Th})^2}$.

Assim,

Agora, como R_L pode variar de 0 a 4.000 Ω, podemos ajustá-la para 3.605,55 Ω. Portanto, a impedância de carga é ajustada para o valor de

$$Z_L = 3.605{,}55 - j2.000\ \Omega$$

Com Z_L ajustada para esse valor, o valor da corrente de carga é

$$\mathbf{I}_{ef} = \frac{10\ \angle 0°}{6.605{,}55 + j2.000} = 1{,}4489\ \angle -16{,}85°\text{ mA}.$$

A potência média fornecida à carga é

$$P = (1{,}4489 \times 10^{-3})^2(3.605{,}55) = 7{,}57\text{ mW}$$

Essa quantidade é a maior potência que podemos fornecer à carga, dadas as restrições aos valores de R_L e X_L. Observe que essa potência é menor do que a potência que pode ser fornecida se não houver restrições; em (a) constatamos que podemos fornecer 8,33 mW.

$$R_L = \sqrt{3.000^2 + (-2.000 + 4.000)^2} = 3.605{,}55\Omega.$$

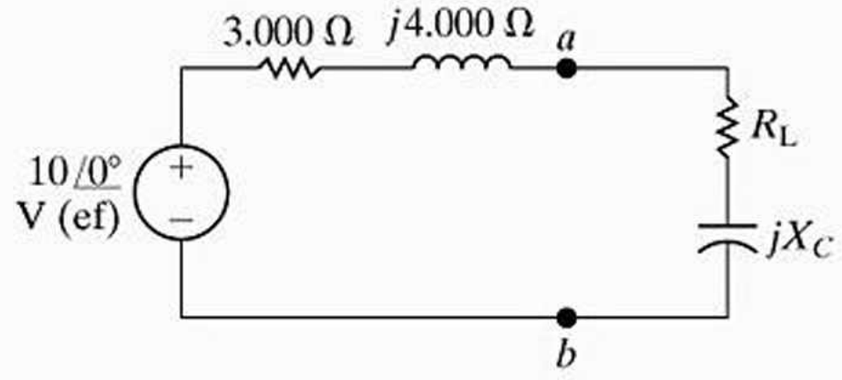


Figura 10.23 ▲ Circuito para os exemplos 10.9 e 10.10.

Exemplo 10.10 Determinação da máxima transferência de potência quando há limitação à variação do ângulo da impedância

Uma impedância de carga com um ângulo de fase constante de −36,87° está ligada aos terminais de carga *a* e *b* no circuito da Figura 10.23. O módulo de Z_L é variado até que a potência média fornecida seja a maior possível, sob a restrição dada.

a) Determine Z_L em forma retangular.

b) Calcule a potência média fornecida a Z_L.

Solução

a) Pela Equação 10.50, sabemos que o módulo de Z_L deve ser igual ao módulo de Z_{Th}. Portanto,

$$|Z_L| = |Z_{Th}| = |3.000 + j4.000| = 5.000\ \Omega$$

Agora, como sabemos que o ângulo de fase de Z_L é −36,87°, temos

$$Z_L = 5.000\ \angle -36{,}87° = 4000 - j3.000\Omega.$$

b) Igualando Z_L a 4.000 − *j*3.000 Ω, a corrente de carga é

$$\mathbf{I}_{ef} = \frac{10}{7.000 + j1.000} = 1{,}4142\ \angle -8{,}13°\text{ mA},$$

e a potência média fornecida à carga é

$$P = (1{,}4142 \times 10^{-3})^2(4.000) = 8\text{ mW}$$

Essa quantidade é a maior potência que pode ser fornecida por este circuito à impedância de carga, cujo ângulo permanece constante em −36,87°. Mais uma vez, essa quantidade é menor do que a máxima potência que pode ser fornecida se não houver nenhuma restrição à variação de Z_L.

✔ PROBLEMA PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 2 — Entender a condição para máxima potência ativa fornecida a uma carga em um circuito ca

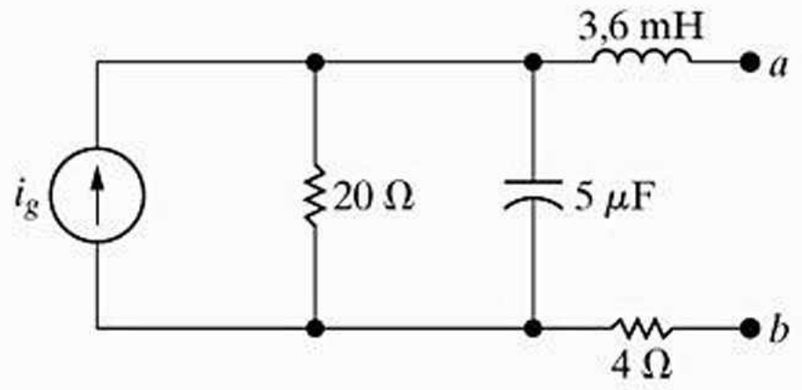
10.7 A corrente da fonte no circuito mostrado é 3 cos 5.000t A.

a) Qual é a impedância que deve ser ligada aos terminais a,b para máxima transferência de potência média?

b) Qual é a potência média transferida à impedância em (a)?

c) Suponha que a carga seja exclusivamente resistiva. Qual é o valor do resistor que, ligado aos terminais a,b, promoverá a máxima transferência de potência média?

d) Qual é a potência média transferida ao resistor em (c)?



Resposta: (a) $20 - j10\ \Omega$;
(b) 18 W;
(c) 22,36 Ω;
(d) 17,00 W.

NOTA: Tente resolver também os problemas 10.41, 10.49 e 10.50, apresentados no final deste capítulo.

Exemplo 10.11 Determinação da máxima transferência de potência em um circuito com um transformador ideal

O resistor variável no circuito da Figura 10.24 é ajustado até que a máxima potência média seja fornecida a R_L.

a) Qual é o valor de R_L em ohms?

b) Qual é a máxima potência média (em watts) fornecida a R_L?

Solução

a) Em primeiro lugar, determinamos o equivalente de Thévenin visto a partir dos terminais de R_L. O circuito para determinar a tensão de circuito aberto é mostrado na Figura 10.25. As variáveis $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ foram adicionadas para facilitar a análise.

Primeiro, observamos que o transformador ideal impõe as seguintes restrições às variáveis $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$:

$$\mathbf{V}_2 = \frac{1}{4}\mathbf{V}_1, \qquad \mathbf{I}_1 = -\frac{1}{4}\mathbf{I}_2.$$

O valor de circuito aberto de $\mathbf{I}_2$ é zero, então, $\mathbf{I}_1$ é zero. Segue-se que

$$\mathbf{V}_1 = 840\ \angle 0^\circ\ \text{V}, \qquad \mathbf{V}_2 = 210\ \angle 0^\circ\ \text{V}.$$

Pela Figura 10.25, observamos que $\mathbf{V}_{th}$ é o negativo de $\mathbf{V}_2$, portanto,

$$\mathbf{V}_{\text{Th}} = -210\ \angle 0^\circ\ \text{V}.$$

O circuito mostrado na Figura 10.26 é usado para determinar a corrente de curto-circuito. Considerando $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ correntes de malha, as duas equações de malha são

$$840\ \angle 0^\circ = 80\mathbf{I}_1 - 20\mathbf{I}_2 + \mathbf{V}_1,$$

$$0 = 20\mathbf{I}_2 - 20\mathbf{I}_1 + \mathbf{V}_2.$$

Quando essas duas equações são combinadas com as equações de restrição, obtemos

$$840\ \angle 0^\circ = -40\mathbf{I}_2 + \mathbf{V}_1,$$

$$0 = 25\mathbf{I}_2 + \frac{\mathbf{V}_1}{4}.$$

Resolvendo esse sistema de equações, temos

$$\mathbf{I}_2 = -6\ \text{A}.$$

Portanto, a resistência de Thévenin é

$$R_{\text{Th}} = \frac{-210}{-6} = 35\ \Omega.$$

A máxima potência será fornecida a R_L quando R_L for igual a 35 Ω.

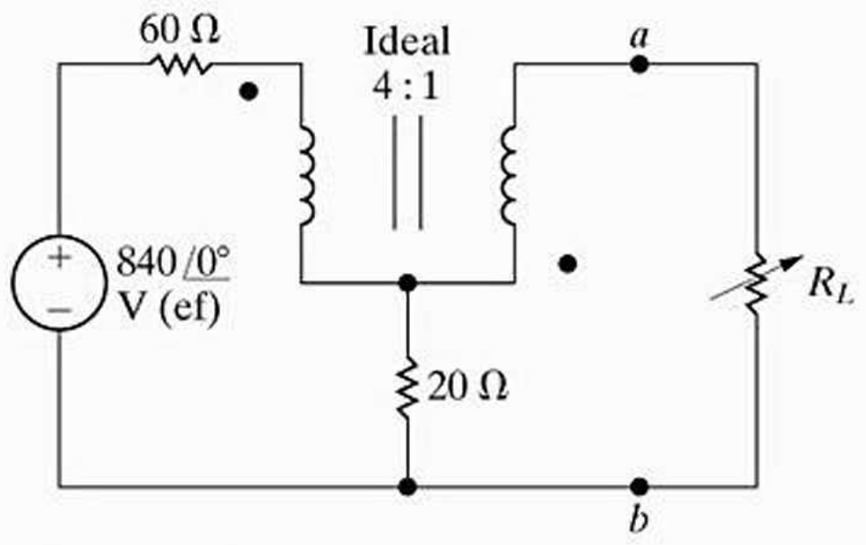


Figura 10.24 ▲ Circuito para o Exemplo 10.11.

b) A máxima potência fornecida a R_L é determinada mais facilmente usando-se o equivalente de Thévenin. Pelo circuito da Figura 10.27, temos

$$P_{max} = \left(\frac{-210}{70}\right)^2 (35) = 315 \text{ W}.$$

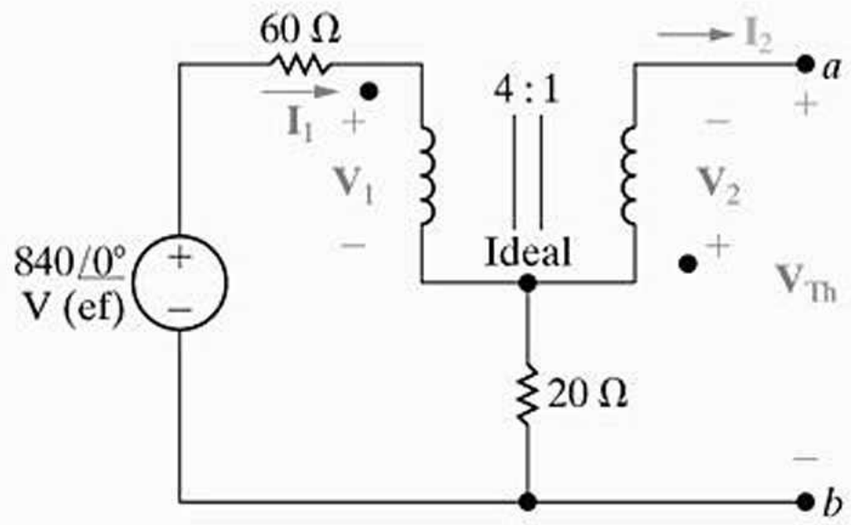


Figura 10.25 ▲ Circuito usado para determinar a tensão de Thévenin.

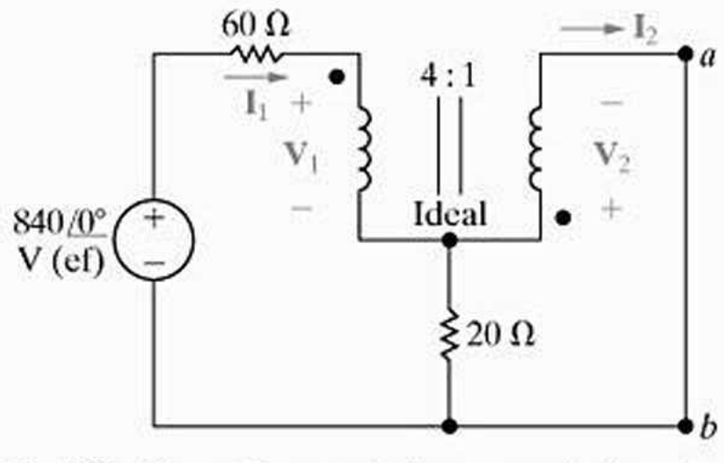


Figura 10.26 ▲ Circuito usado para calcular a corrente de curto-circuito.

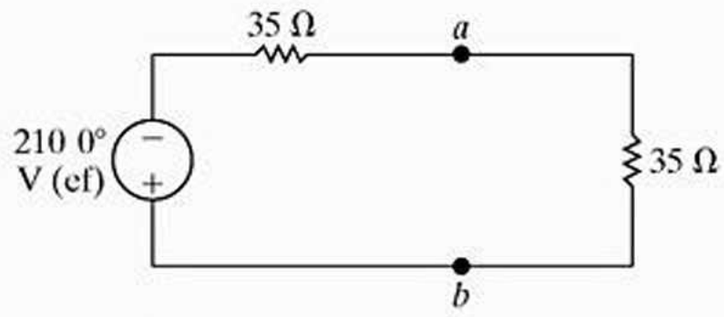
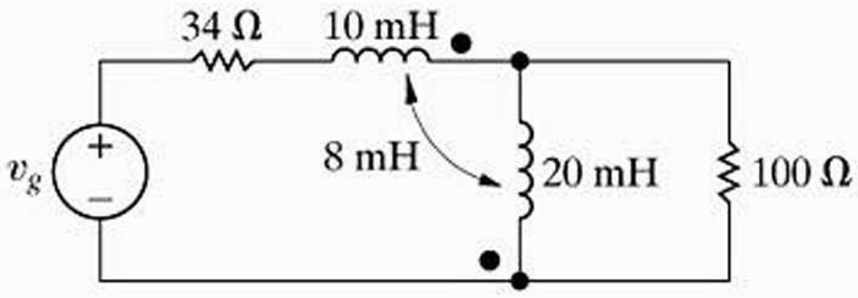


Figura 10.27 ▲ Equivalente de Thévenin com a carga ajustada para máxima transferência de potência.

✔ PROBLEMAS PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 3 — Saber calcular todas as formas de potência em circuitos ca com transformadores lineares e com transformadores ideais

10.8 Determine a potência média fornecida ao resistor de 100 Ω no circuito mostrado, se $v_g = 660 \cos 5.000t$ V.

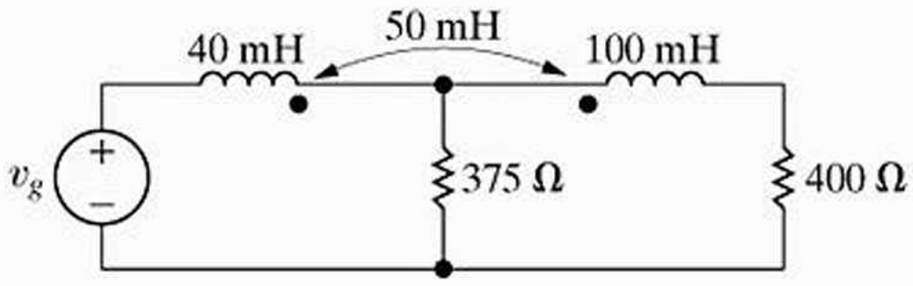


Resposta: 612,5 W.

10.9 a) Determine a potência média fornecida ao resistor de 400 Ω no circuito mostrado, se $v_g = 248 \cos 10.000t$ V.

b) Determine a potência média fornecida ao resistor de 375 Ω.

c) Determine a potência fornecida pela fonte de tensão ideal. Verifique seu resultado mostrando que a potência absorvida é igual à potência fornecida.



Resposta: (a) 50 W;
(b) 49,2 W;
(c) 99,2 W, 50 + 49,2 = 99,2 W.

10.10 Resolva o Exemplo 10.11 se o ponto de polaridade no enrolamento ligado ao terminal *a* estiver na parte superior.

Resposta: (a) 15 Ω; (b) 735 W.

10.11 Resolva o Exemplo 10.11 se a fonte de tensão for reduzida a $146 \angle 0°$ V (ef) e a relação de espiras for invertida para 1:4.

Resposta: (a) 1.460 Ω; (b) 58,4 W.

NOTA: Tente resolver também os problemas 10.44, 10.45, 10.58 e 10.59, apresentados no final deste capítulo.

Perspectiva prática

Eletrodomésticos de aquecimento

Secadores de cabelo portáteis contêm um elemento de aquecimento que é apenas um resistor aquecido pela corrente senoidal que passa por ele e uma ventoinha que impele o ar quente, criado em torno do resistor, para a parte frontal da unidade. Isso é mostrado esquematicamente na Figura 10.28. O tubo do aquecedor nessa figura é um resistor feito de fio de

nicromo enrolado. Nicromo é uma liga de ferro, cromo e níquel. Duas propriedades o tornam ideal para o uso em aquecedores. Em primeiro lugar, possui uma resistência maior do que a maioria dos outros metais e, assim, precisa-se de uma quantidade menor de material para se conseguir a resistência desejada. Em segundo lugar, diferentemente de muitos outros metais, o nicromo não se oxida quando aquecido ao rubro na presença de ar. Por isso, o elemento do aquecedor dura por um longo tempo.

Um diagrama do circuito para o secador de cabelo é mostrado na Figura 10.29. Essa é apenas uma parte do circuito do secador usada para controlar a temperatura. O resto do circuito fornece potência ao motor da ventoinha e não nos interessa aqui. O fio enrolado que constitui o elemento do aquecedor possui uma derivação que o divide em duas partes. Modelamos essa situação na Figura 10.29, com dois resistores em série, R_1 e R_2. Os controles para ligar e selecionar a temperatura usam uma chave de quatro posições, na qual dois pares de terminais entrarão em curto-circuito simultaneamente por meio de um par de barras metálicas deslizantes. A posição da chave determina quais pares de terminais entram em curto-circuito. Como as barras de metal estão separadas por um isolador, não há contato elétrico entre os pares de terminais que entram em curto-circuito.

O circuito da Figura 10.29 contém um fusível, que é um dispositivo de proteção que normalmente age como um curto-circuito. No entanto, se a temperatura nas proximidades do aquecedor tornar-se perigosamente alta, o fusível torna-se um circuito aberto e interrompe o fluxo de corrente, reduzindo o risco de fogo ou ferimento. O fusível proporciona uma proteção caso o motor falhe ou a ventoinha fique bloqueada. Embora o projeto do sistema de proteção não faça parte deste exemplo, é importante destacar que a análise da segurança é uma parte essencial do trabalho do engenheiro eletricista.

Agora que já modelamos os controles do secador de cabelo, vamos determinar os valores dos componentes de circuito que estão presentes para os três ajustes da chave. Para começar, desenhamos novamente o circuito da Figura 10.29 na Figura 10.30(a) para representar o ajuste da chave para temperatura BAIXA. Os condutores em aberto foram eliminados por questão de clareza. Um circuito equivalente simplificado é mostrado na Figura 10.30(b). Um par de figuras semelhantes é mostrado para os ajustes de temperatura MÉDIA (Figura 10.31) e ALTA (Figura 10.32). Observe, por essas figuras, que no ajuste de temperatura BAIXA, a fonte de tensão vê os resistores R_1 e R_2 em série; no ajuste de temperatura MÉDIA, a fonte de tensão vê apenas o resistor R_2 e, no ajuste de temperatura ALTA, a fonte de tensão vê os resistores em paralelo.



Figura 10.28 ◀ Representação esquemática de um secador de cabelo portátil.

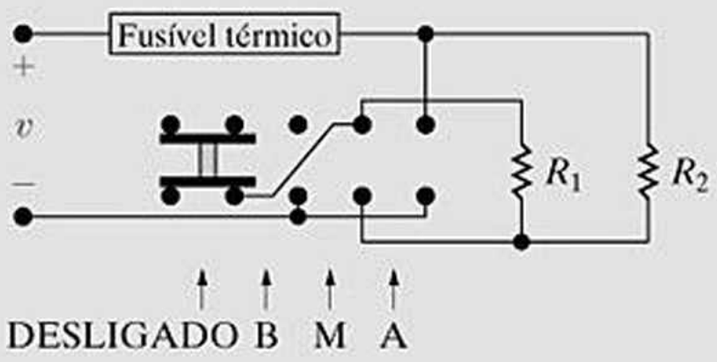


Figura 10.29 ▲ Diagrama do circuito para os controles do secador de cabelo.

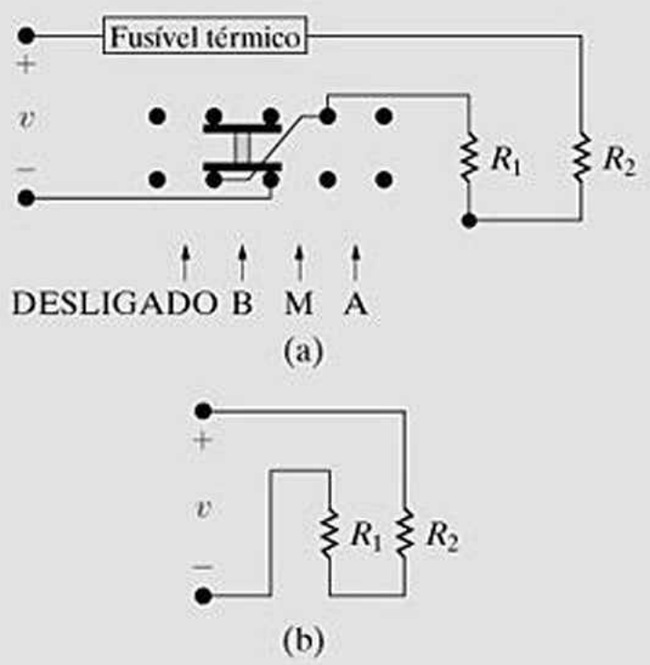


Figura 10.30 ▲ (a) Circuito da Figura 10.29 redesenhado para o ajuste de temperatura BAIXA. Circuito equivalente simplificado para (a).

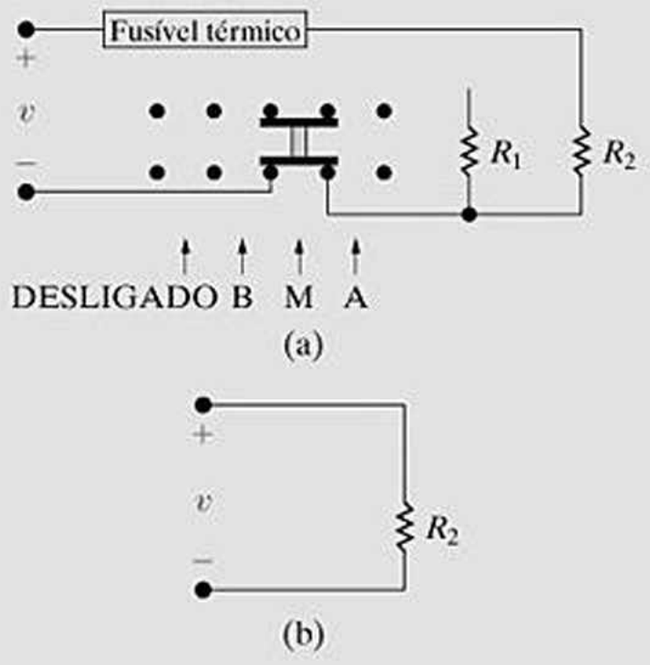


Figura 10.31 ▲ (a) Circuito da Figura 10.29 redesenhado para o ajuste de temperatura MÉDIA. (b) Circuito equivalente simplificado para (a).

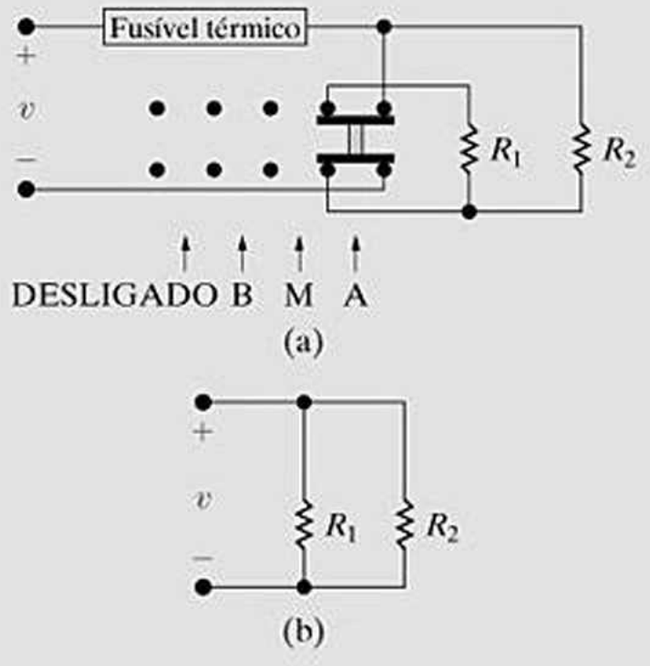


Figura 10.32 ▲ (a) Circuito da Figura 10.29 redesenhado para o ajuste de temperatura ALTA. (b) Circuito equivalente simplificado para (a).

NOTA: Avalie o que entendeu dessa "Perspectiva prática" tentando resolver os problemas 10.66-10.68, apresentados no final deste capítulo.

Resumo

- *Potência instantânea* é o produto entre a tensão e a corrente instantâneas, ou $p = \pm vi$. O sinal positivo é usado quando o sentido de referência para a corrente for da tensão positiva para a negativa. A freqüência da potência instantânea é duas vezes a freqüência da tensão (ou corrente).
- *Potência média* é o valor médio da potência instantânea durante um período. É a potência convertida da forma elétrica para formas não-elétricas e vice-versa. Essa conversão é a razão por que a potência média também é denominada potência ativa. Pela convenção passiva, a potência média é expressa como

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i)$$

$$= V_{ef} I_{ef} \cos(\theta_v - \theta_i)$$

- *Potência reativa* é a potência elétrica trocada entre o campo magnético de um indutor e a fonte que o alimenta ou entre o campo elétrico de um capacitor e a fonte que o alimenta. A potência reativa nunca é convertida em potência não-elétrica. Pela convenção passiva, a potência reativa é expressa como

$$Q = \frac{1}{2} V_m I_m \operatorname{sen}(\theta_v - \theta_i)$$

$$= V_{ef} I_{ef} \operatorname{sen}(\theta_v - \theta_i)$$

  Ambas, potência média e potência reativa, podem ser expressas em termos de corrente e tensão de pico (V_m, I_m) ou eficaz (V_{ef}, I_{ef}). Valores eficazes são amplamente usados em aplicações residenciais e industriais. *Valor eficaz* e *valor rms* são termos intercambiáveis para a mesma grandeza.
- O *fator de potência* é o co-seno do ângulo de fase entre a tensão e a corrente:

$$\text{fp} = \cos(\theta_v - \theta_i)$$

  Os termos *atrasado* e *adiantado* adicionados à descrição do fator de potência indicam se a corrente está atrasada ou adiantada em relação à tensão e, portanto, se a carga é indutiva ou capacitiva.
- O *fator reativo* é o seno do ângulo de fase entre a tensão e a corrente:

$$\text{fr} = \operatorname{sen}(\theta_v - \theta_i)$$

- *Potência complexa* é a soma das potências média e reativa multiplicada por j, ou

$$S = P + jQ$$

$$= \frac{1}{2}\mathbf{V}\mathbf{I}^* = \mathbf{V}_{ef}\,\mathbf{I}_{ef}^*$$

$$= I_{ef}^2 Z = \frac{V_{ef}^2}{Z^*}.$$

- *Potência aparente* é o módulo da potência complexa:

$$|S| = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

- O *watt* é usado como a unidade para a potência instantânea e para a potência ativa. O *var* (volt-ampère reativo, ou VAR) é usado como unidade para a potência reativa. O *volt-ampère* (VA) é usado como unidade para as potências complexa e aparente.
- A *máxima transferência de potência* ocorre em circuitos que funcionam em regime permanente senoidal quando a impedância de carga é o conjugado da impedância de Thévenin vista a partir dos terminais da impedância de carga.

Problemas

Seções 10.1–10.2

10.1 Mostre que o máximo valor da potência instantânea dada pela Equação 10.9 é $P + \sqrt{P^2 + Q^2}$ e que o valor mínimo é $P - \sqrt{P^2 + Q^2}$.

10.2* Os seguintes conjuntos de valores para v e i referem-se ao circuito da Figura 10.1. Calcule P e Q para cada conjunto de valores e determine se o circuito no interior da caixa está absorvendo ou fornecendo (1) potência média e (2) potência reativa.

a) $v = 340 \cos(\omega t + 60°)$ V,
   $i = 20 \cos(\omega t + 15°)$ A,

b) $v = 75 \cos(\omega t - 15°)$ V,
   $i = 16 \cos(\omega t + 60°)$ A,

c) $v = 625 \cos(\omega t + 40°)$ V,
   $i = 4 \operatorname{sen}(\omega t + 240°)$ A,

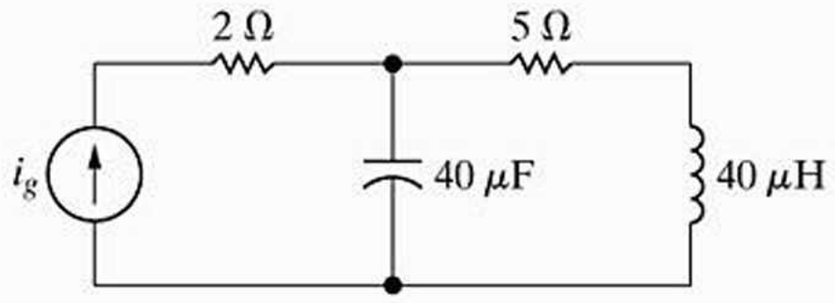
d) $v = 180 \operatorname{sen}(\omega t + 220°)$ V,
   $i = 10 \cos(\omega t + 20°)$ A.

10.3* a) Um estudante universitário está preparando café enquanto ouve um jogo de seu time no rádio. Ao mesmo tempo, seu colega de quarto está assistindo à TV. Todos esses eletrodomésticos são alimentados por um ramo de circuito de 120 V, protegido por um disjuntor de 20 A. Se o colega de quarto ligar um aquecedor portátil o disjuntor será acionado?

b) O colega de quarto poderá usar o aquecedor se a cafeteira estiver desligada?

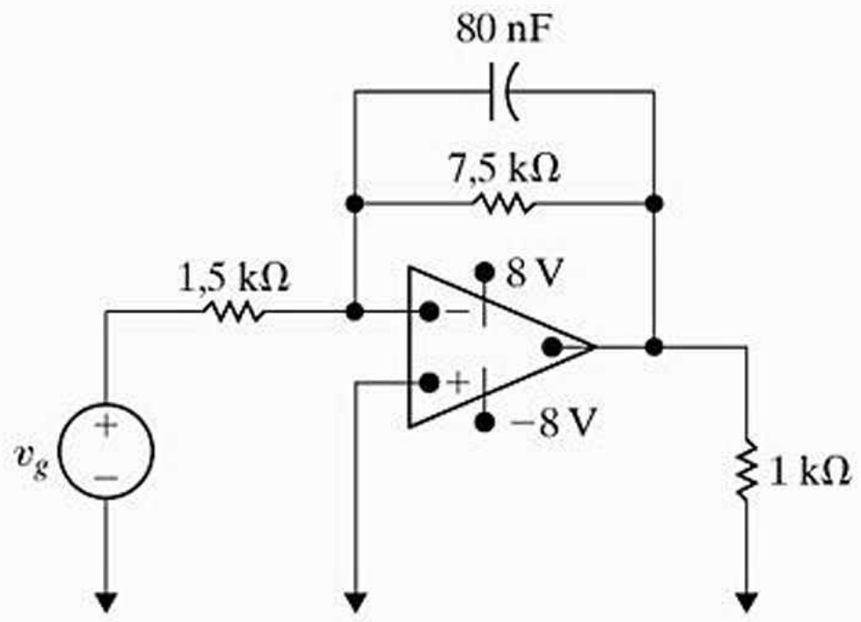
10.4 PSPICE Determine a potência média fornecida pela fonte de corrente ideal no circuito da Figura P10.4 se $i_g = 30 \cos 25.000t$ mA.

Figura P10.4



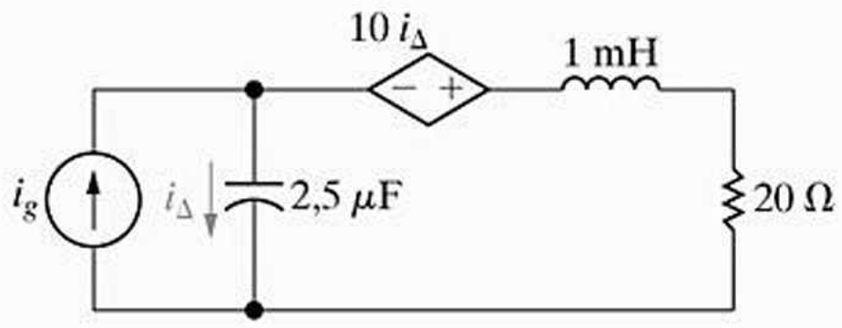
10.5 PSPICE O amp op no circuito da Figura P10.5 é ideal. Calcule a potência média fornecida ao resistor de 1 kΩ quando $v_g = 4 \cos 5.000t$ V.

Figura P10.5



10.6 PSPICE Determine a potência média dissipada no resistor de 20 Ω no circuito da Figura P10.6 se $i_g = 15 \cos 10.000t$ A.

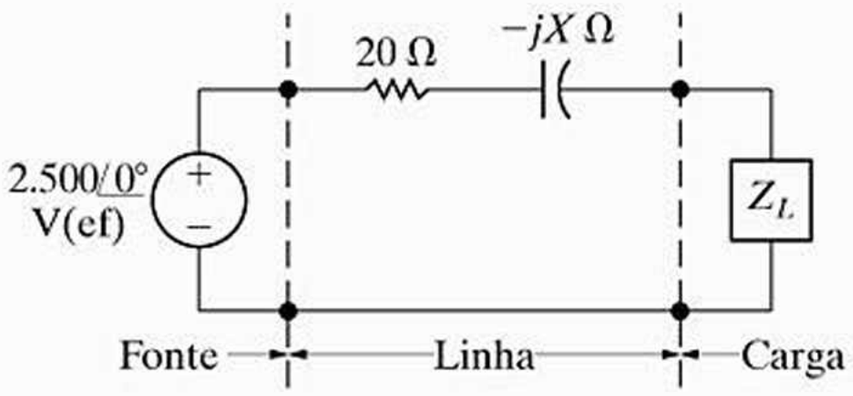
Figura P10.6



10.7 A impedância da carga da Figura P10.7 absorve 40 kW e 30 kVAR. A fonte de tensão senoidal fornece 50 kW.

a) Determine os valores da reatância capacitiva da linha que satisfarão essas restrições.
b) Para cada valor da reatância da linha determinada em (a), mostre que a energia reativa fornecida é igual à absorvida.

Figura P10.7



10.8 Uma carga consistindo de um resistor de 1.350 Ω em paralelo com um indutor de 405 mH está ligada aos terminais de uma fonte de tensão senoidal $v_g = 90 \cos 2.500t$ V.

a) Qual é o valor de pico da potência instantânea fornecida pela fonte?
b) Qual é o valor de pico da potência instantânea absorvida pela fonte?
c) Qual é a potência média fornecida à carga?
d) Qual é a potência reativa fornecida à carga?
e) A carga absorve ou fornece energia reativa?
f) Qual é o fator de potência da carga?
g) Qual é o fator reativo da carga?

10.9 a) Calcule a potência ativa e a potência reativa associadas a cada elemento do circuito da Figura P9.56.
b) Verifique se a potência média gerada é igual à potência média absorvida.
c) Verifique se a potência reativa gerada é igual à potência reativa absorvida.

10.10 Repita o Problema 10.9 para o circuito da Figura P9.57.

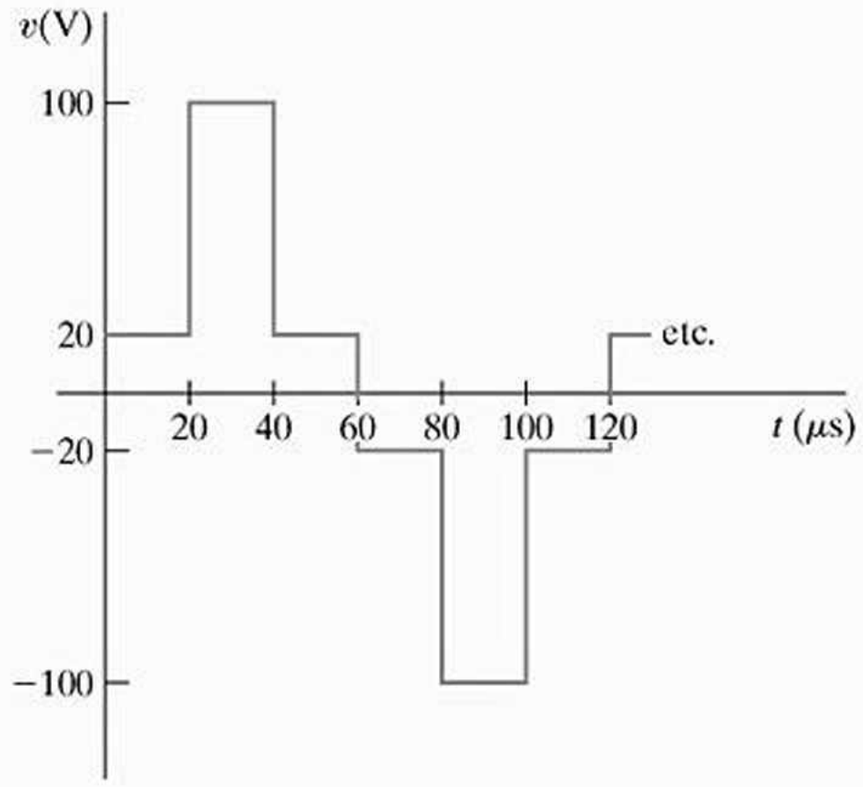
Seção 10.3

10.11 Uma tensão cc igual a V_{cc} V é aplicada a um resistor de R Ω. Uma tensão senoidal igual a v_f V também é aplicada a um resistor de R Ω. Mostre que a tensão cc fornecerá a mesma energia em T segundos (onde T é o período da tensão senoidal) que a tensão senoidal, desde que V_{cc} seja igual ao valor eficaz de v_f. (*Sugestão:* Iguale as duas expressões para a energia fornecida ao resistor.)

10.12 a) Um computador pessoal com monitor e teclado absorve 60 W em 110 V (ef). Calcule o valor eficaz da corrente conduzida por seu cabo de alimentação.
b) A potência nominal de uma impressora a laser é 80 W a 110 V (ef). Se essa impressora for ligada à mesma tomada do computador do item (a), qual será o valor eficaz da corrente fornecida pela tomada?

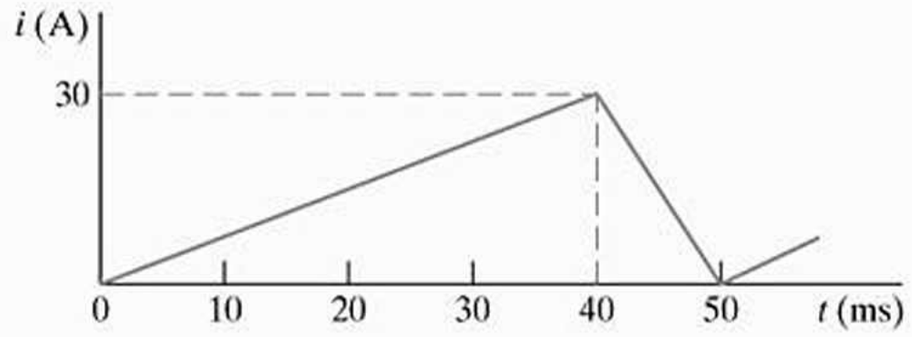
10.13* a) Determine o valor eficaz da tensão periódica da Figura P10.13.
b) Se essa tensão for aplicada aos terminais de um resistor de 12 Ω, qual será a potência média dissipada pelo resistor?

Figura P10.13



10.14 Determine o valor eficaz da corrente periódica da Figura P10.14.

Figura P10.14

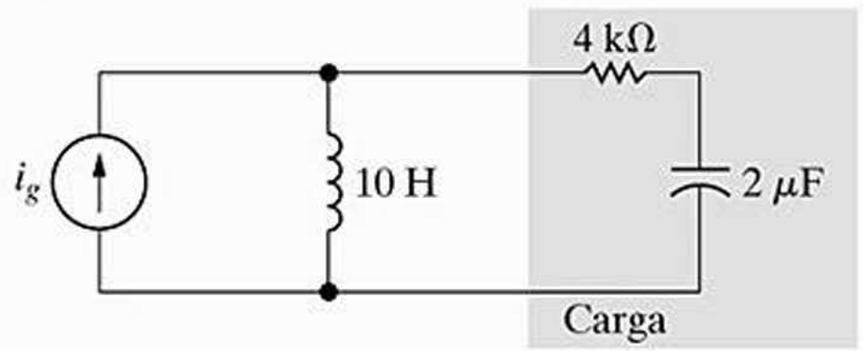


10.15 A corrente periódica da Figura P10.14 dissipa uma potência média de 24 kW em um resistor. Qual é o valor do resistor?

Seções 10.4–10.5

10.16 PSPICE Determine a potência média, a potência reativa e a potência aparente absorvidas pela carga no circuito da Figura P10.16 se $i_g = 30 \cos 100t$ mA.

Figura P10.16



10.17* PSPICE a) Determine a potência média, a potência reativa e a potência aparente fornecidas pela fonte de tensão no circuito da Figura P10.17 se $v_g = 50 \cos 10^5 t$ V.

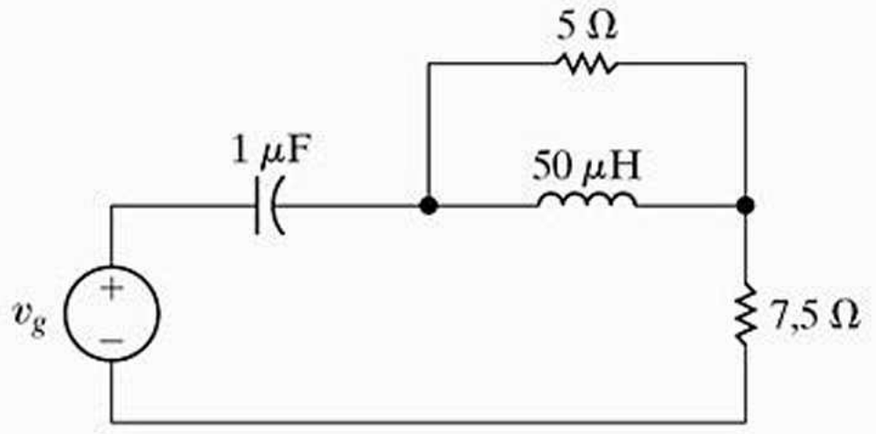
b) Verifique sua resposta em (a) mostrando que

$$P_{\text{forn}} = \Sigma P_{\text{abs}}.$$

c) Verifique sua resposta em (a) mostrando que

$$Q_{\text{forn}} = \Sigma Q_{\text{abs}}.$$

Figura P10.17



10.18 A tensão $\mathbf{V}_g$ do circuito no domínio da freqüência da Figura P10.18 é 340 $\angle 0°$ V (ef).

a) Determine a potência média e a potência reativa para a fonte de tensão.

b) A fonte de tensão está absorvendo ou fornecendo potência média?

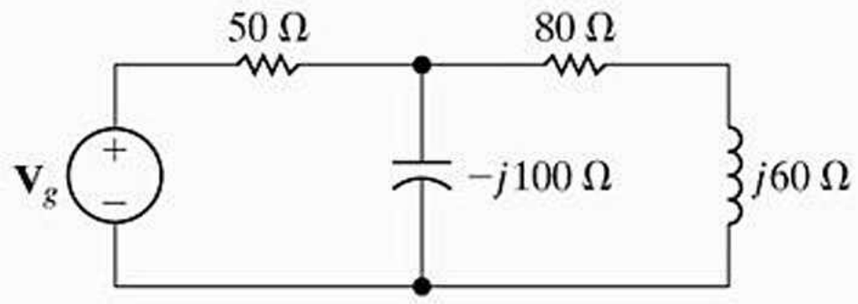
c) A fonte de tensão está absorvendo ou fornecendo potência reativa?

d) Determine a potência média e a potência reativa associadas à impedância de cada ramo no circuito.

e) Verifique o equilíbrio entre a potência média fornecida e a absorvida.

f) Verifique o equilíbrio entre as potências reativas fornecidas e absorvidas.

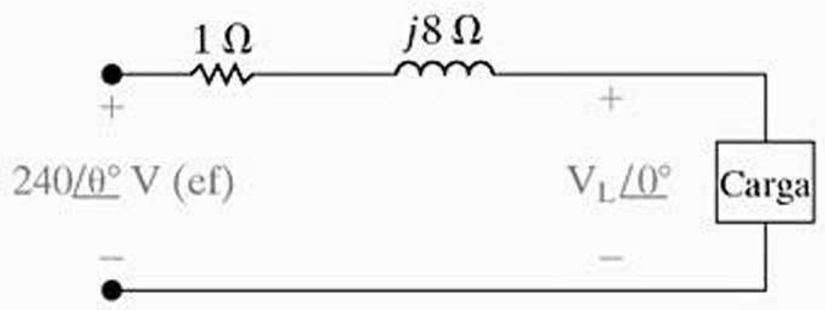
Figura P10.18



10.19 a) Determine V_L (ef) e θ para o circuito da Figura P10.19 se a carga absorver 250 VA, com um fator de potência atrasado de 0,6.

b) Construa um diagrama fasorial de cada solução obtida em (a).

Figura P10.19



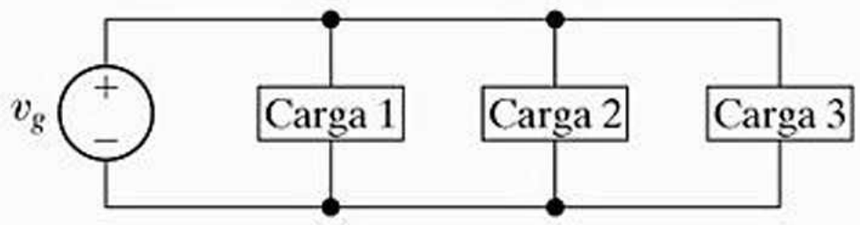
10.20 Duas cargas de 660 V (ef) estão ligadas em paralelo. Ambas absorvem uma potência média total de 52.800 W, com um fator de potência adiantado de 0,8. Uma das cargas absorve 40 kVA, com um fator de potência atrasado de 0,96. Qual é o fator de potência da outra carga?

10.21* As três cargas do circuito da Figura P10.21 podem ser descritas da seguinte forma: a carga 1 é um resistor de 12 Ω em série com um indutor de 15 mH; a carga 2 é um capacitor de 16 μF em série com um resistor de 80 Ω; e a carga 3 é um resistor de 400 Ω em série com a combinação em paralelo de um indutor de 20 H e um capacitor de 5 μF. A freqüência da fonte de tensão é 60 Hz.

a) Determine o fator de potência e o fator reativo de cada carga.

b) Determine o fator de potência e o fator reativo da carga composta vista pela fonte de tensão.

Figura P10.21

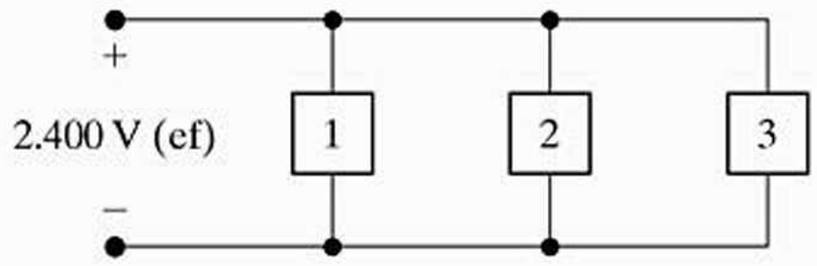


10.22* Três cargas estão ligadas em paralelo a uma linha de 2.400 V (ef), como mostra a Figura P10.22. A carga 1 absorve 18 kW e 24 kVAR. A carga 2 absorve 60 kVA, com um fp adiantado de 0,6. A carga 3 absorve 18 kW, com um fator de potência igual à unidade.

a) Determine a impedância equivalente das três cargas em paralelo.

b) Determine o fator de potência da carga equivalente, vista dos terminais de entrada da linha.

Figura P10.22



10.23 As três cargas no Problema 10.22 são alimentadas por uma linha que tem uma impedância em série de $0{,}2 + j1{,}6\ \Omega$, como mostra a Figura P10.23.

a) Calcule o valor eficaz da tensão ($\mathbf{V}_f$) na extremidade da linha ligada à fonte.

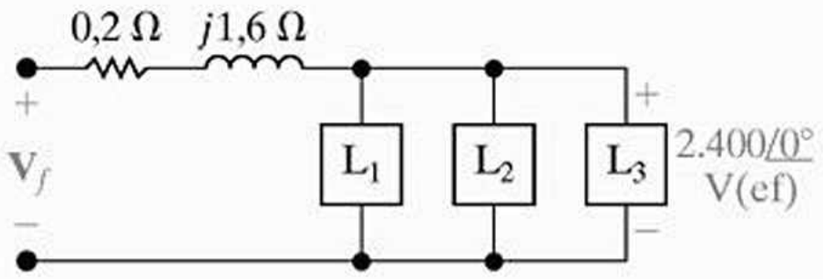
b) Calcule a potência média e a potência reativa associadas à impedância de linha.

c) Calcule a potência média e a potência reativa na extremidade da linha ligada à carga.

d) Calcule a eficiência (η) da linha se a eficiência for definida como

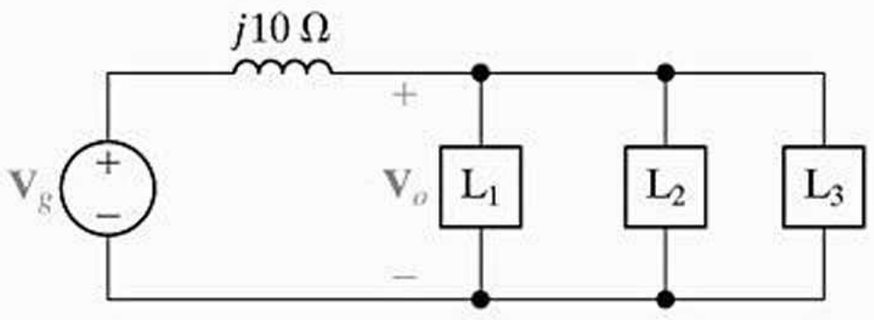
$$\eta = (P_{\text{carga}}/P_{\text{fonte}}) \times 100$$

Figura P10.23



10.24 As três cargas em paralelo no circuito da Figura P10.24 podem ser descritas da seguinte forma: a carga 1 está absorvendo uma potência média de 24 kW e 18 kVAR de potência reativa; a carga 2 está absorvendo uma potência média de 48 kW e gerando 30 kVAR de potência reativa; a carga 3 consiste em um resistor de 60 Ω em paralelo com uma reatância indutiva de 480 Ω. Determine o valor eficaz do módulo de $\mathbf{V}_g$ e seu ângulo de fase se $\mathbf{V}_o = 2.400\angle 0°$ V(ef).

Figura P10.24



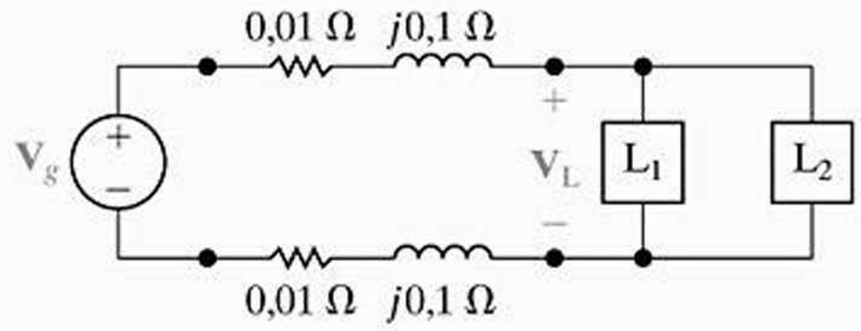
10.25 As duas cargas mostradas na Figura P10.25 podem ser descritas da seguinte forma: a carga 1 absorve uma potência média de 24,96 kW e uma potência reativa de 47,04 kVAR; a carga 2 tem uma impedância de $5 - j5\ \Omega$. A tensão nos terminais das cargas é $480\sqrt{2}\cos 120\pi t$ V.

a) Determine o valor eficaz da tensão da fonte.

b) De quantos microssegundos é a diferença de fase entre a tensão da carga e a tensão da fonte?

c) A tensão da carga está adiantada ou atrasada em relação à tensão da fonte?

Figura P10.25

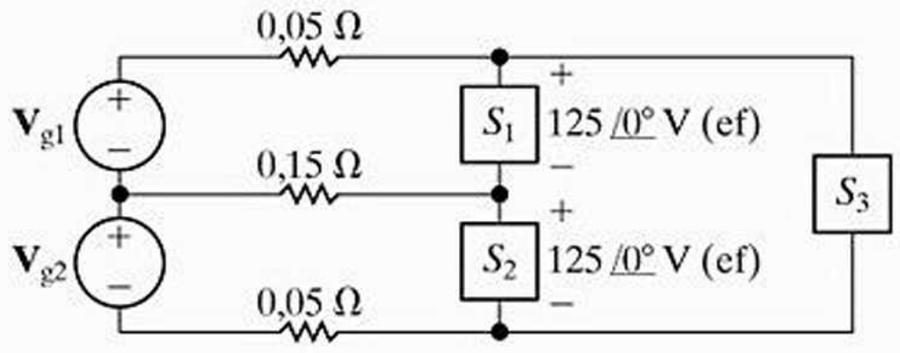


10.26 As três cargas no circuito da Figura P10.26 são $S_1 = 5 + j2$ kVA, $S_2 = 3{,}75 + j1{,}5$ kVA e $S_3 = 8 + j0$ kVA.

a) Calcule a potência complexa associada a cada fonte de tensão, $\mathbf{V}_{g1}$ e $\mathbf{V}_{g2}$.

b) Verifique se o total das potências ativa e reativa fornecido pela fonte é igual ao total das potências ativa e reativa absorvido pela rede.

Figura P10.26



10.27 As três cargas no circuito da Figura P10.27 são descritas da seguinte forma: a carga 1 está absorvendo 1,8 kW e 600 VAR; a carga 2 absorve 1,5 kVA, com um fp adiantado de 0,8; a carga 3 é um resistor de 12 Ω em paralelo com um indutor que tem uma reatância de 48 Ω.

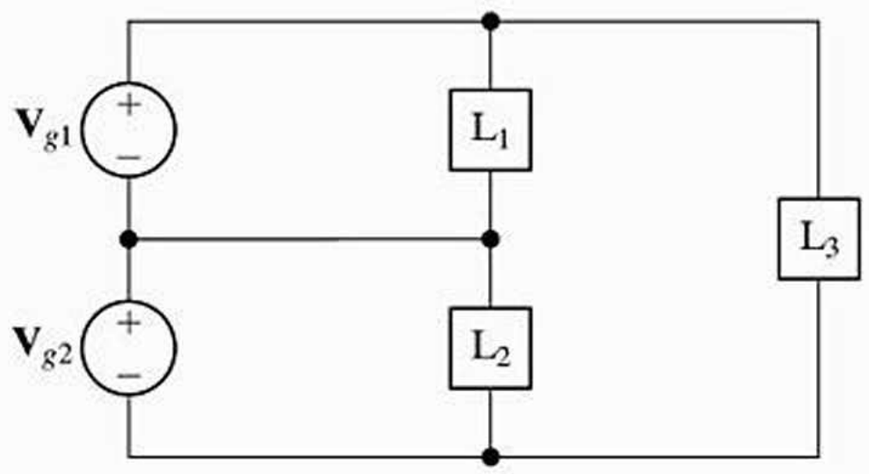
a) Calcule a potência média e a potência reativa fornecida por cada fonte se $\mathbf{V}_{g1} = \mathbf{V}_{g2} = 120\angle 0°$ V (ef).

b) Verifique seus cálculos demonstrando que os resultados são consistentes com os requisitos

$$\Sigma P_{\text{forn}} = \Sigma P_{\text{abs}}$$

$$\Sigma Q_{\text{forn}} = \Sigma Q_{\text{abs}}.$$

Figura P10.27

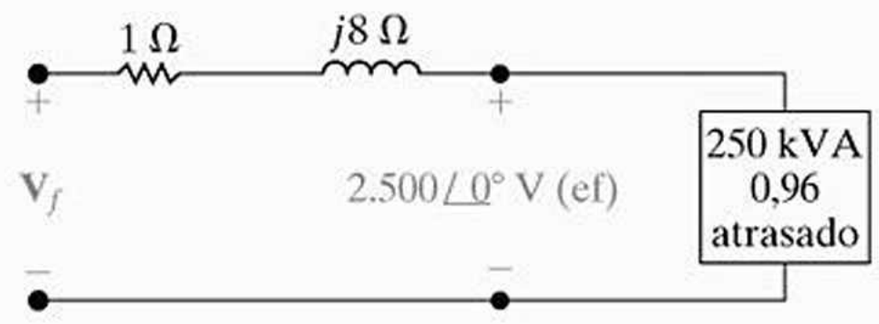


10.28 Suponha que o circuito da Figura P10.27 represente um circuito de distribuição residencial no qual as impedâncias dos condutores são desprezíveis e $\mathbf{V}_{g1} = \mathbf{V}_{g2} = 120\angle 0°$ V (ef). As três cargas no circuito são L_1 (uma cafeteira, uma frigideira e um cozinhador de ovos); L_2 (um secador de cabelo, uma lâmpada de bronzeamento artificial, um ventilador

e uma máquina de lavar roupa automática) e L_3 (um aquecedor de recuperação rápida e um fogão elétrico com forno). Admita que todos esses eletrodomésticos estejam em funcionamento ao mesmo tempo. Os condutores do circuito são protegidos por disjuntores de 100 A. A energia elétrica, para essa residência, será interrompida? Explique.

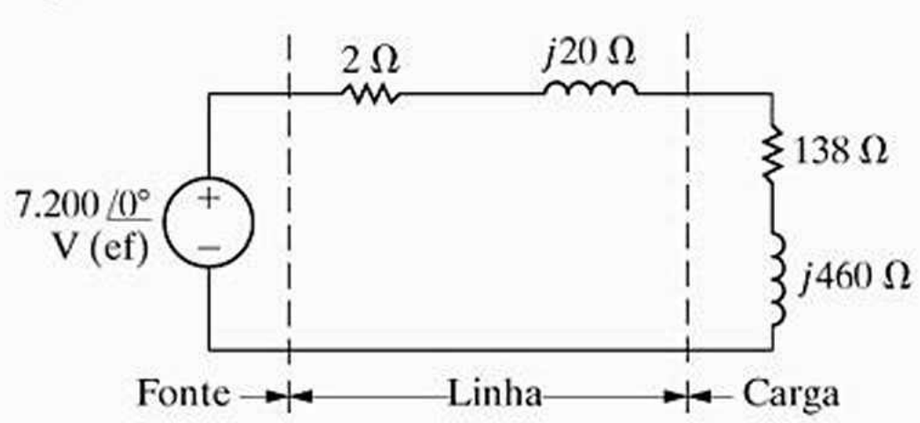
10.29 A queda de tensão de regime permanente ao longo da linha de transmissão da Figura P10.29 é excessiva. Um capacitor é colocado em paralelo com a carga de 250 kVA e ajustado até que a tensão de regime permanente no início da linha tenha a mesma magnitude que a tensão na carga, isto é, 2.500 V (ef). A carga de 250 kVA está operando com um fator de potência atrasado de 0,96. Calcule o valor do capacitor, em microfarads, se o circuito estiver operando em 60 Hz. Quando selecionar o capacitor, não se esqueça da necessidade de manter a perda de energia da linha em um nível razoável.

Figura P10.29



10.30 a) Determine a potência média dissipada na linha na Figura P10.30.
b) Determine a reatância capacitiva que, quando ligada em paralelo com a carga, fará com que esta se comporte como uma carga puramente resistiva.
c) Qual é a impedância equivalente da carga em (b)?
d) Determine a potência média dissipada na linha quando a reatância capacitiva está ligada à carga.
e) Expresse a perda de potência em (d) como uma porcentagem da perda de potência determinada em (a).

Figura P10.30



10.31 Um grupo de pequenos eletrodomésticos em um sistema de 60 Hz absorve 25 kVA, com um fp atrasado de 0,96 quando funcionam em 125 V (ef). A impedância do cabo que alimenta os eletrodomésticos é 0,006 + *j*0,048 Ω. A tensão nos terminais da carga é 125 V (ef).
a) Qual é a tensão eficaz na outra extremidade do cabo?
b) Qual é a perda de potência média no cabo?
c) Qual é o valor do capacitor (em microfarads) a ser instalado nos terminais da carga para corrigir o fator de potência da carga para o valor unitário?
d) Após a instalação do capacitor, qual será a tensão eficaz na outra extremidade do cabo se a tensão na carga for mantida em 125 V (ef)?
e) Qual é a perda de potência média no cabo para o item (d)?

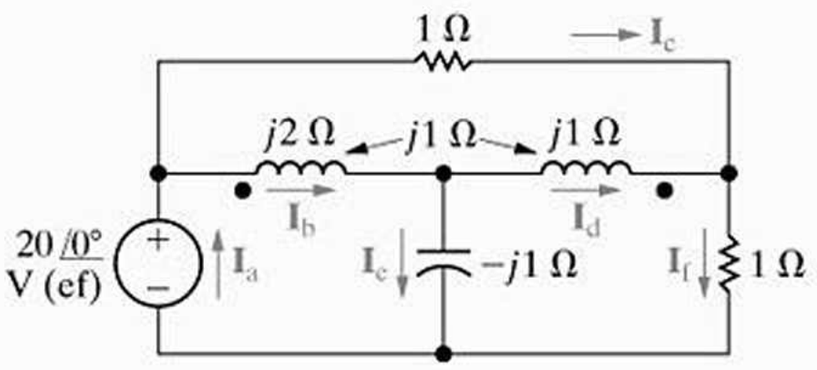
10.32 Uma fábrica absorve 1.800 kW, com um fator de potência atrasado de 0,6. Uma carga adicional de fator de potência variável deve ser instalada na fábrica. A nova carga absorverá 600 kW de potência ativa. O fator de potência da carga adicionada deve ser ajustado de modo que o fator de potência global da fábrica seja de 0,96 atrasado.
a) Especifique a potência reativa associada à carga adicionada.
b) A carga adicionada absorve ou fornece potência reativa?
c) Qual é o fator de potência da carga adicional?
d) Admita que a tensão de entrada na fábrica seja 4.800 V (ef). Qual é o valor eficaz da corrente que alimenta a fábrica antes da adição da carga?
e) Qual é o valor eficaz da corrente que alimenta a fábrica após a adição da carga?

10.33 Suponha que a fábrica descrita no Problema 10.32 seja alimentada por uma linha cuja impedância é 0,02 + *j*0,16 Ω. A tensão na fábrica é mantida a 4.800 V (ef).
a) Determine a perda de potência média na linha antes e depois da adição da carga.
b) Determine o valor da tensão no início da linha antes e depois da adição da carga.

10.34 Considere o circuito descrito no Problema 9.76.
a) Qual é o valor eficaz da tensão na carga?
b) Qual porcentagem da potência média produzida pela fonte real é fornecida à carga?

10.35 a) Determine as seis correntes de ramo $\mathbf{I}_a$ — $\mathbf{I}_f$ no circuito da Figura P10.35.
b) Determine a potência complexa em cada ramo do circuito.
c) Confirme seus cálculos verificando se a potência média fornecida é igual à potência média dissipada.
d) Confirme seus cálculos verificando se a potência reativa gerada é igual à potência reativa absorvida.

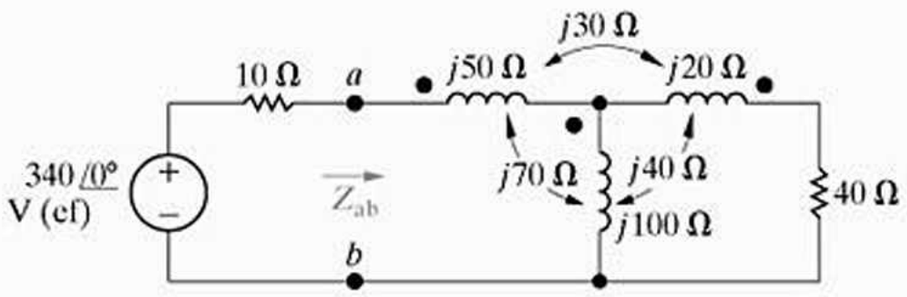
Figura P10.35



10.36 a) Determine a potência média fornecida ao resistor de 40 Ω no circuito da Figura P10.36.

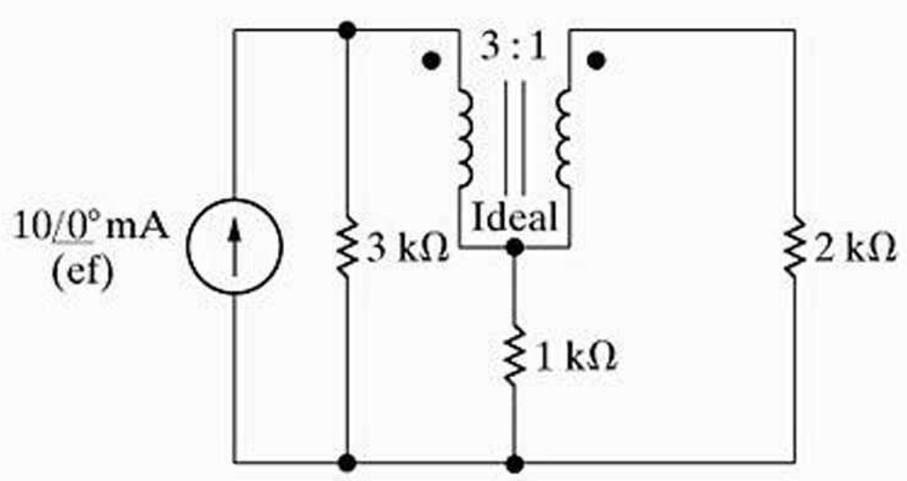
b) Determine a potência média produzida pela fonte de tensão senoidal ideal.
c) Determine Z_{ab}.
d) Mostre que a potência média fornecida é igual à potência média dissipada.

Figura P10.36



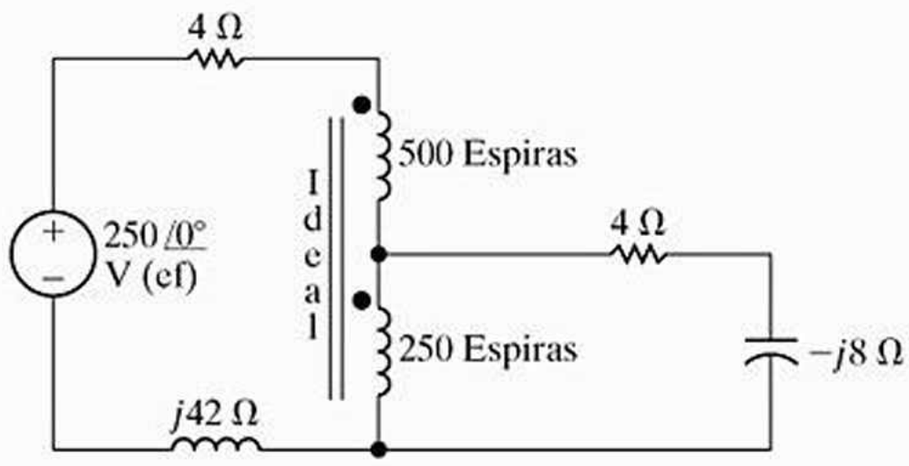
10.37 a) Determine a potência média fornecida pela fonte de corrente senoidal no circuito da Figura P10.37.
b) Determine a potência média fornecida ao resistor de 1 kΩ.

Figura P10.37



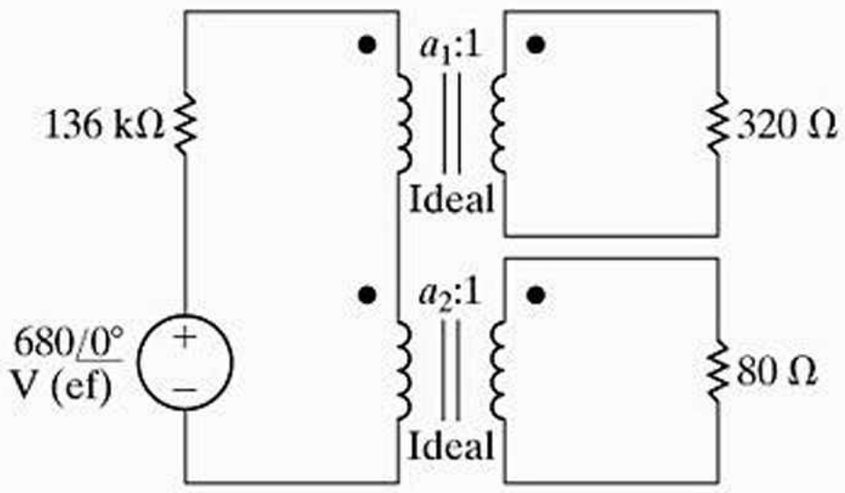
10.38 a) Determine a potência média dissipada em cada resistor no circuito da Figura P10.38.
b) Confirme sua resposta demonstrando que a potência total fornecida é igual à potência total absorvida.

Figura P10.38



10.39 A fonte de tensão senoidal no circuito da Figura P10.39 está fornecendo uma tensão eficaz de 680 V. A carga de 80 Ω está absorvendo 16 vezes mais potência média do que a carga de 320 Ω. As duas cargas estão casadas com a fonte senoidal, cuja impedância interna é de 136 $\angle 0°$ kΩ.
a) Especifique os valores numéricos de a_1 e a_2.
b) Calcule a potência fornecida à carga de 80 Ω.
c) Calcule o valor eficaz da tensão no resistor de 320 Ω.

Figura P10.39

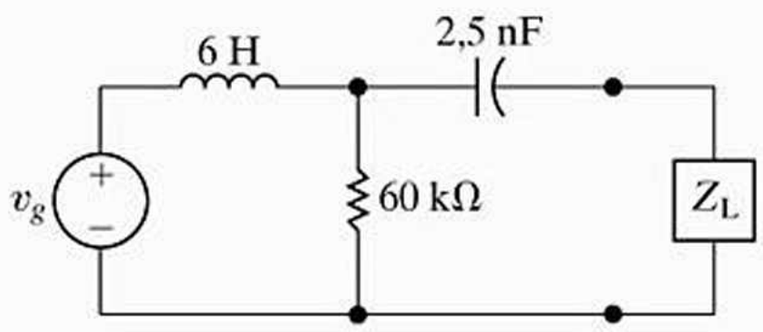


Seção 10.6

10.40 Prove que, se apenas o módulo da impedância da carga puder variar, a maior potência média será transferida à carga quando $|Z_L| = |Z_{Th}|$. (*Sugestão:* ao deduzir a expressão para a potência média da carga, escreva a impedância de carga (Z_L) na forma $Z_L = |Z_L| \cos\theta + j|Z_L| \operatorname{sen}\theta$ e observe que somente $|Z_L|$ é variável.)

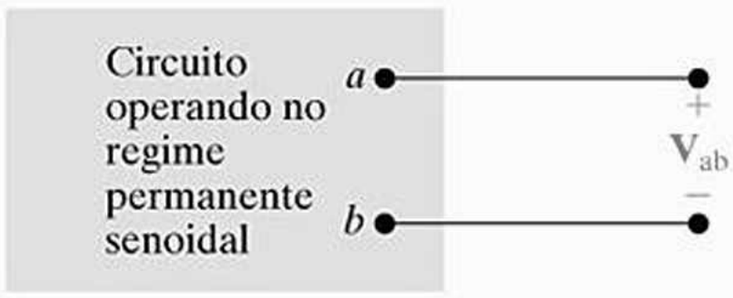
10.41* a) Determine a impedância de carga para o circuito da Figura P10.41 que resultará na máxima transferência de potência média à carga se $\omega = 10$ krad/s.
b) Determine a máxima potência média fornecida à carga na parte (a) se $v_g = 90 \cos 10.000t$ V.

Figura P10.41



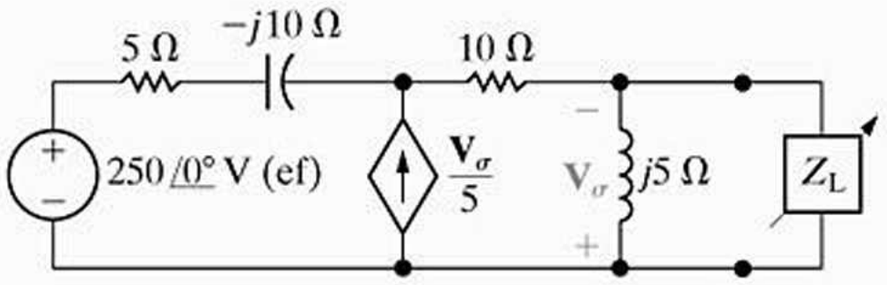
10.42 A tensão fasorial $\mathbf{V}_{ab}$ no circuito da Figura P10.42 é 480 $\angle 0°$ V (ef) quando nenhuma carga externa está ligada aos terminais *a,b*. Quando uma carga de impedância 100 + *j*0 Ω é ligada aos terminais *a,b*, o valor de $\mathbf{V}_{ab}$ é 240 − *j*80 V (ef).
a) Determine a impedância que deve ser ligada aos terminais *a,b* para a máxima transferência de potência média.
b) Determine a máxima potência média transferida à carga de (a).

Figura P10.42



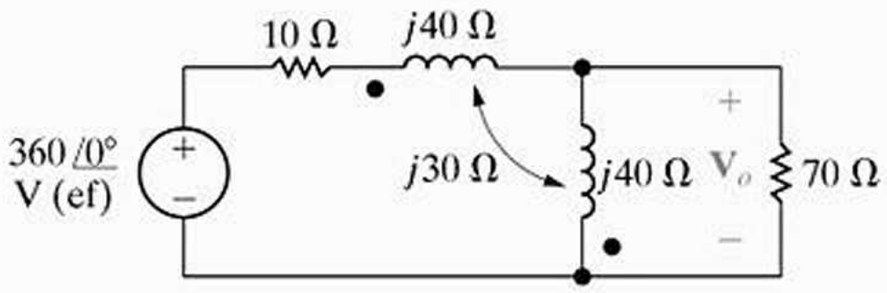
10.43 A impedância de carga Z_L no circuito da Figura P10.43 é ajustada até que seja fornecida a ela a máxima potência média.
a) Determine a máxima potência média fornecida a Z_L.
b) Qual porcentagem da potência total produzida no circuito é fornecida a Z_L?

Figura P10.43



10.44* Para o circuito no domínio da freqüência na Figura P10.44, calcule:
a) o valor eficaz do módulo de $\mathbf{V}_o$.
b) a potência média dissipada no resistor de 70 Ω.
c) a porcentagem da potência média gerada pela fonte de tensão ideal que é fornecida ao resistor de 70 Ω.

Figura P10.44

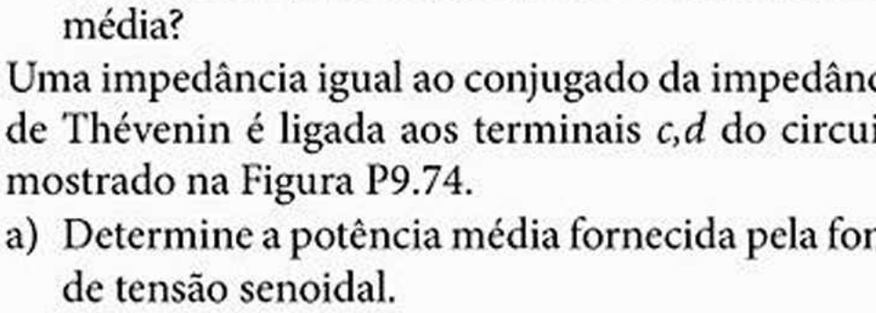


10.45* O resistor de 70 Ω no circuito da Figura P10.44 é substituído por uma impedância variável Z_o. Admita que Z_o seja ajustada para transferência de máxima potência média.
a) Qual é a máxima potência média fornecida a Z_o?
b) Qual é a potência média fornecida pela fonte de tensão ideal quando Z_o absorve a máxima potência média?

10.46 Uma impedância igual ao conjugado da impedância de Thévenin é ligada aos terminais *c,d* do circuito mostrado na Figura P9.74.
a) Determine a potência média fornecida pela fonte de tensão senoidal.
b) Que porcentagem da potência fornecida pela fonte é dissipada no transformador linear?

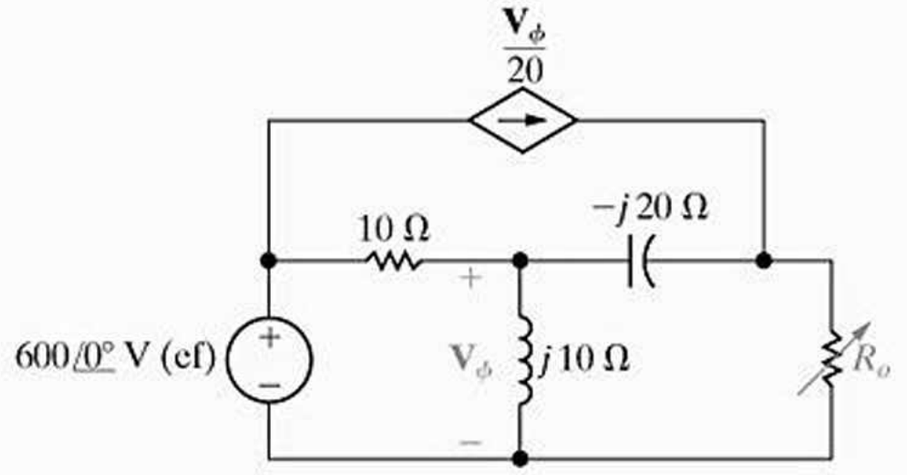
10.47 O resistor variável no circuito da Figura P10.47 é ajustado até que a potência média que ele absorve seja máxima.
a) Determine *R*.
b) Determine a máxima potência média.

Figura P10.47



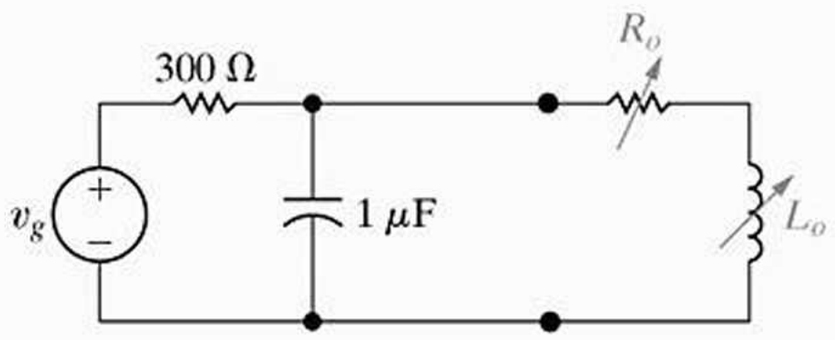
10.48 O resistor variável R_o no circuito da Figura P10.48 é ajustado até que ele absorva máxima potência média.
a) Qual é o valor de R_o em ohms?
b) Calcule a potência média fornecida a R_o.
c) Se R_o for substituído por uma impedância variável Z_o, qual será a máxima potência média a ser fornecida a Z_o?
d) Em (c), qual porcentagem da potência produzida pelo circuito é fornecida à carga Z_o?

Figura P10.48



10.49* PSPICE O valor de pico da tensão da fonte senoidal do circuito da Figura P10.49 é $150\sqrt{2}$ V, e seu período é 200π μs. O resistor de carga pode variar de 0 a 20 Ω e o indutor de carga pode variar de 1 a 8 mH.
a) Calcule a potência média fornecida à carga quando R_o = 10 Ω e L_o = 6 mH.
b) Determine os valores de R_o e L_o que resultarão na maior potência média transferida a R_o.
c) Qual é a maior potência média em (b)? Ela é maior do que a potência em (a)?
d) Se não houver restrições a R_o e L_o, qual será a máxima potência média que pode ser fornecida a uma carga?
e) Quais são o valores de R_o e L_o para a condição em (d)?
f) A potência média calculada em (d) é maior do que a calculada em (c)?

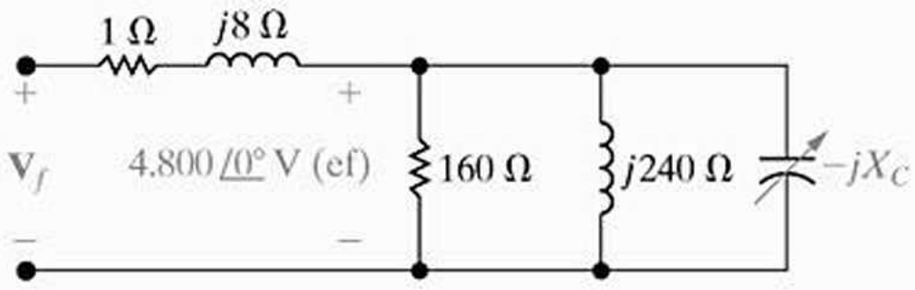
Figura P10.49



10.50* PSPICE
a) Admita que, na Figura P10.49, R_o possa variar entre 0 e 50 Ω. Repita (b) e (c) do Problema 10.49.
b) A nova potência média calculada em (a) é maior do que a determinada no Problema 10.49(a)?
c) A nova potência média calculada em (a) é menor do que a determinada no Problema 10.49(d)?

10.51 A tensão no início da linha de transmissão da Figura P10.51 é ajustada de modo que o valor eficaz da tensão na carga seja sempre 4.800 V. O capacitor variável é ajustado até que a potência média dissipada na resistência da linha seja mínima.
a) Se a freqüência da fonte senoidal for 60 Hz, qual será o valor da capacitância em microfarads?
b) Se o capacitor for eliminado do circuito, qual será o aumento percentual de $\mathbf{V}_f$ necessário para manter 4.800 V na carga?
c) Se o capacitor for eliminado do circuito, qual será o aumento percentual das perdas na linha?

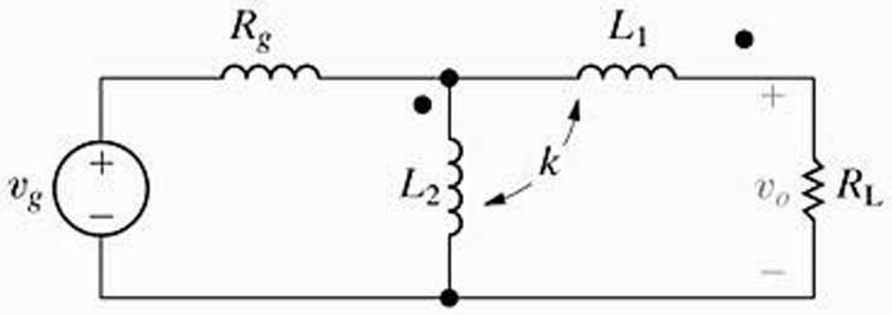
Figura P10.51



10.52 Os valores dos parâmetros do circuito da Figura P10.52 são $L_1 = 40$ mH; $L_2 = 10$ mH; $k = 0{,}75$; $R_g = 20\ \Omega$ e $R_L = 140\ \Omega$. Se $v_g = 240\sqrt{2}\cos 4.000$, determine

a) o valor eficaz de v_o;
b) a potência média fornecida a R_L;
c) a porcentagem da potência média gerada pela fonte de tensão ideal que é fornecida a R_L.

Figura P10.52



10.53 Admita que o resistor de carga (R_L) no circuito da Figura P10.52 seja ajustável.

a) Qual é o valor de R_L para máxima transferência de potência média a R_L?
b) Qual é o valor da máxima potência transferida?

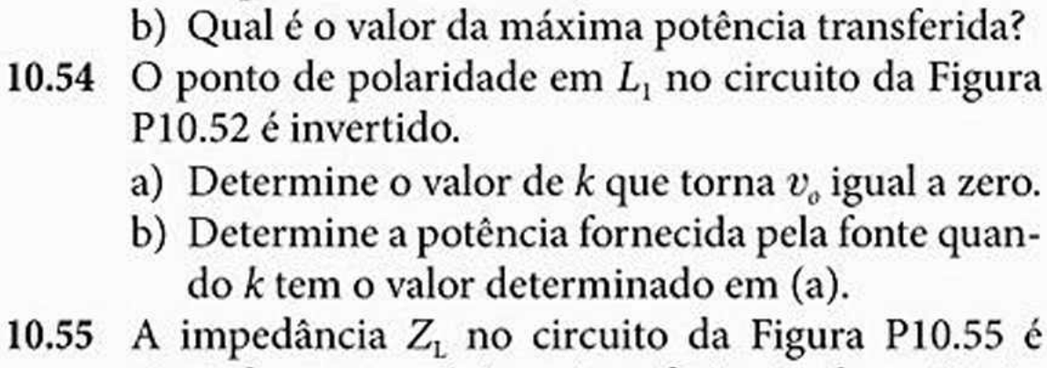
10.54 O ponto de polaridade em L_1 no circuito da Figura P10.52 é invertido.

a) Determine o valor de k que torna v_o igual a zero.
b) Determine a potência fornecida pela fonte quando k tem o valor determinado em (a).

10.55 A impedância Z_L no circuito da Figura P10.55 é ajustada para máxima transferência de potência média a Z_L. A impedância interna da fonte de tensão senoidal é $8 + j56\ \Omega$.

a) Qual é a máxima potência média fornecida a Z_L?
b) Qual porcentagem da potência média fornecida ao transformador linear é fornecida a Z_L?

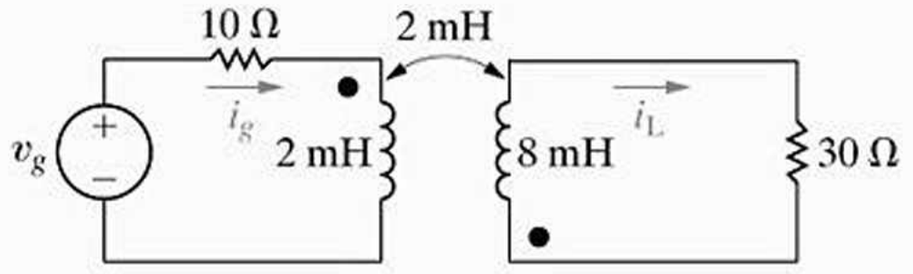
Figura P10.55



10.56 PSPICE a) Determine a expressão de regime permanente para as correntes i_g e i_L no circuito da Figura P10.56 quando $v_g = 70 \cos 5.000t$ V.

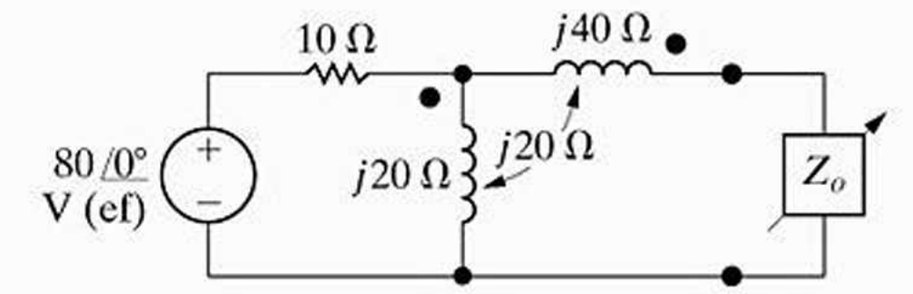
b) Determine o coeficiente de acoplamento.
c) Determine a energia armazenada nos enrolamentos magneticamente acoplados em $t = 100\pi\ \mu$s e $t = 200\pi\ \mu$s.
d) Determine a potência fornecida ao resistor de 30 Ω.
e) Se o resistor de 30 Ω for substituído por um resistor variável R_L, qual será o valor de R_L para que ele absorva a máxima potência média?
f) Qual é a máxima potência média em (e)?
g) Admita que o resistor de 30 Ω seja substituído por uma impedância variável Z_L. Qual é o valor de Z_L que fará com que ela absorva a máxima potência média?
h) Qual é a máxima potência média em (g)?

Figura P10.56



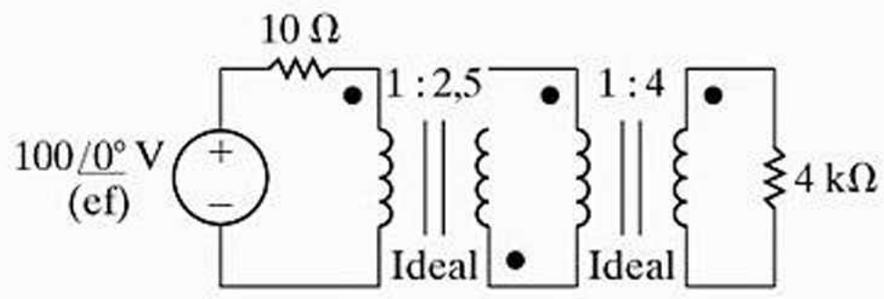
10.57 Determine a impedância vista pela fonte de tensão ideal no circuito da Figura P10.57 quando Z_o for ajustada para máxima transferência de potência média a Z_o.

Figura P10.57



10.58* Determine a potência média fornecida ao resistor de 4 kΩ no circuito da Figura P10.58.

Figura P10.58



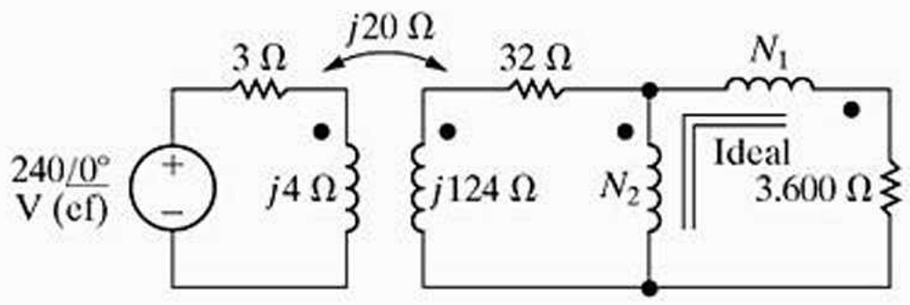
10.59* O transformador ideal ligado à carga de 4 kΩ no Problema 10.58 é substituído por um transformador ideal cuja razão entre espiras é 1:a.

a) Qual é o valor de a para o máximo fornecimento de potência média ao resistor de 4 kΩ?
b) Qual é a máxima potência média?

10.60 a) Se N_1 for igual a 1.500 espiras, quantas espiras deve ter o enrolamento N_2 do transformador ideal no circuito apresentado na Figura P10.60 para que seja fornecida máxima potência média à carga de 3.600 Ω?

b) Determine a potência média fornecida ao resistor de 3.600 Ω.
c) Qual porcentagem da potência média fornecida pela fonte de tensão ideal é dissipada no transformador linear?

Figura P10.60



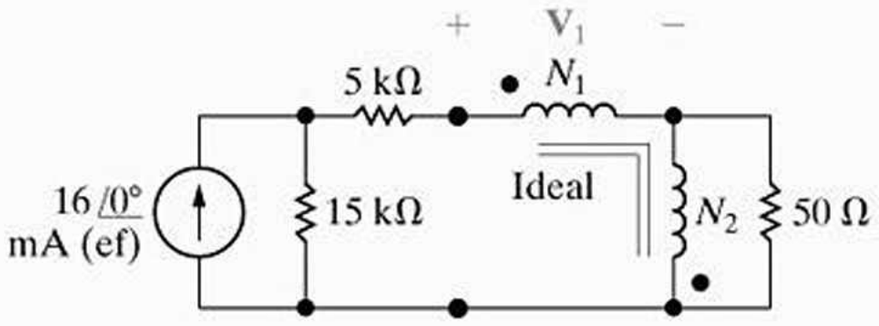
10.61 a) Se N_1 for igual a 2.520 espiras, quantas espiras devem ser colocadas no enrolamento N_2 do transformador ideal no circuito da Figura P10.61 de modo que seja fornecida máxima potência média à carga de 50 Ω ?

b) Determine a potência média fornecida à carga de 50 Ω.

c) Determine a tensão $\mathbf{V}_1$.

d) Qual porcentagem da potência produzida pela fonte de corrente ideal é fornecida ao resistor de 50 Ω?

Figura P10.61



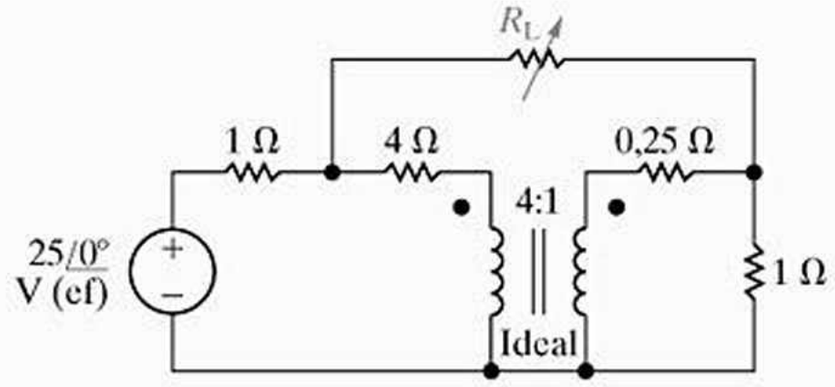
10.62 PSPICE O resistor variável R_L no circuito da Figura P10.62 é ajustado de forma a absorver máxima potência média.

a) Determine a máxima potência média.

b) Qual porcentagem da potência média produzida pela fonte de tensão ideal é fornecida a R_L quando este está absorvendo máxima potência média?

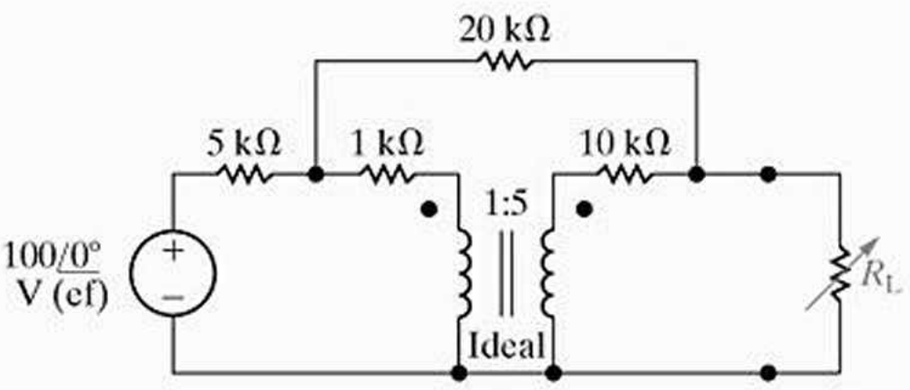
c) Teste sua solução mostrando que a potência fornecida pela fonte de tensão ideal é igual à potência dissipada no circuito.

Figura P10.62



10.63 PSPICE Repita o Problema 10.62 para o circuito da Figura P10.63.

Figura P10.63



10.64 A fonte de tensão senoidal no circuito da Figura P10.64 está operando em uma freqüência de 50 krad/s. A reatância capacitiva variável do circuito é ajustada até que a potência média fornecida ao resistor de 160 Ω seja a maior possível.

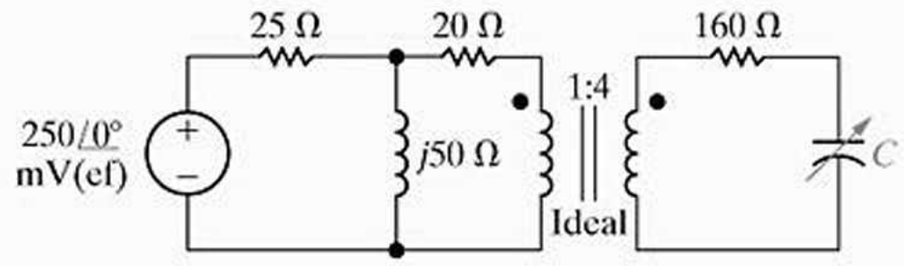
a) Determine o valor de C em microfarads.

b) Quando C tiver o valor determinado em (a), qual será a potência média fornecida ao resistor de 160 Ω?

c) Substitua o resistor de 160 Ω por um resistor variável R_o. Especifique o valor de R_o de modo que lhe seja fornecida máxima potência média.

d) Qual é a máxima potência média que pode ser fornecida a R_o?

Figura P10.64

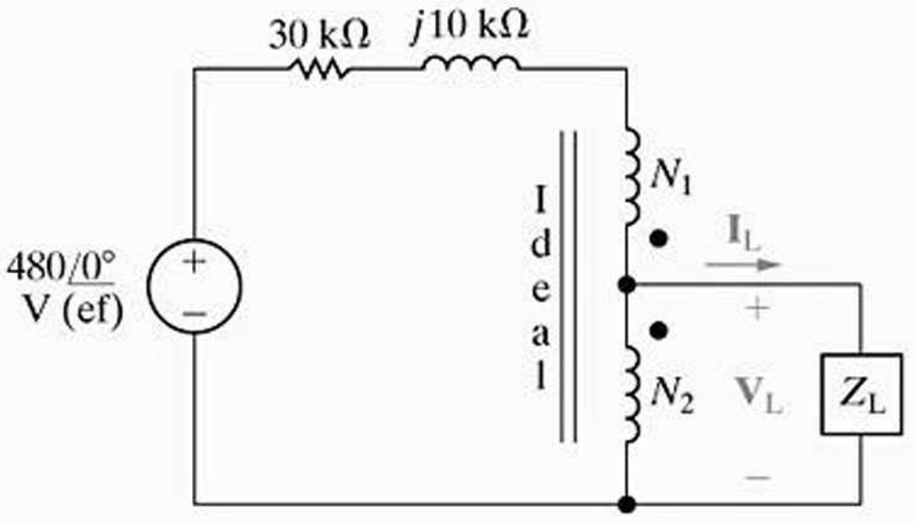


10.65 A impedância de carga no circuito da Figura P10.65 é ajustada até que máxima potência média seja transferida para Z_L.

a) Especifique o valor de Z_L se $N_1 = 15.000$ espiras e $N_2 = 5.000$ espiras.

b) Especifique os valores de $\mathbf{I}_L$ e $\mathbf{V}_L$ quando Z_L estiver absorvendo máxima potência média.

Figura P10.65



Seções 10.1–10.6

10.66* PERSPECTIVA PRÁTICA O secador de cabelo apresentado na Perspectiva Prática é alimentado por uma tensão senoidal 120 V (ef), 60 Hz. Ele deve dissipar 250 W na posição de temperatura BAIXA, 500 W na posição de temperatura MÉDIA e 1.000 W na posição de temperatura ALTA.

a) Determine o valor para o resistor R_2 usando a especificação para a posição de temperatura MÉDIA e a Figura 10.31.

b) Determine o valor para o resistor R_2 usando a especificação para a posição de temperatura MÉDIA, os resultados da parte (a) e a Figura 10.30.

c) A especificação para a posição de temperatura ALTA é cumprida?

10.67* PERSPECTIVA PRÁTICA PSPICE Como vimos no Problema 10.66, somente duas especificações independentes de potência podem ser feitas quando o secador for composto de dois resistores.

a) Mostre que a expressão para a posição de temperatura ALTA (P_A) é

$$P_A = \frac{P_M^2}{P_M - P_B},$$

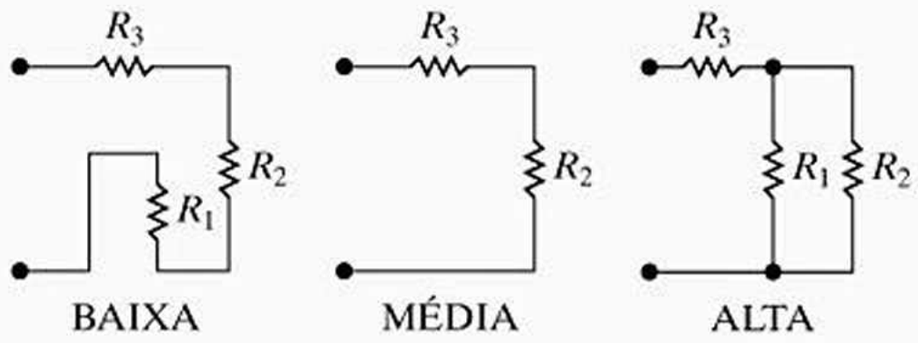
onde P_M = potência nominal para temperatura MÉDIA e P_B = potência nominal para temperatura BAIXA.

b) Se $P_B = 250$ W e $P_M = 750$ W, qual deve ser a P_A?

10.68* PERSPECTIVA PRÁTICA PSPICE Especifique os valores de R_1 e R_2 no circuito do secador de cabelo da Figura 10.29 se P_B for 240 W e P_A for 1.000 W. Admita que a tensão fornecida seja 120 V (ef). (*Sugestão:* resolva o Problema 10.67 antes.)

10.69 PERSPECTIVA PRÁTICA PSPICE Se um terceiro resistor for adicionado ao circuito do secador de cabelo da Figura 10.29, é possível elaborar três especificações independentes. Se o resistor R_3 for adicionado em série com um fusível, então as potências BAIXA, MÉDIA e ALTA serão as mostradas nos diagramas de circuito apresentados na Figura P10.69. Se as três posições de potência forem 600 W, 900 W e 1.200 W, respectivamente, quando ligado a uma tensão de 120 V (ef), quais valores de resistores devem ser usados?

Figura P10.69



10.70 PERSPECTIVA PRÁTICA PROBLEMA DE PROJETO PSPICE Você tem de elaborar um novo projeto para o secador de cabelo descrito no Problema 10.66 para ser usado na Inglaterra. A tensão na Inglaterra é 220 V (ef). Quais valores de resistores você usaria para atender às mesmas especificações de potência?

CAPÍTULO

11

Circuitos trifásicos equilibrados

SUMÁRIO DO CAPÍTULO

11.1 **Tensões trifásicas equilibradas**

11.2 **Fontes de tensão trifásicas**

11.3 **Análise do circuito Y-Y**

11.4 **Análise do circuito Y-Δ**

11.5 **Cálculos de potência em circuitos trifásicos equilibrados**

11.6 **Medição de potência média em circuitos trifásicos**

✔ OBJETIVOS DO CAPÍTULO

1 Saber analisar um circuito trifásico equilibrado Y-Y.

2 Saber analisar um circuito trifásico equilibrado Y-Δ.

3 Saber calcular a potência (média, reativa e complexa) em qualquer circuito trifásico.

A geração, transmissão, distribuição e utilização de grandes blocos de energia elétrica são feitas por meio de circuitos trifásicos. A análise abrangente desses sistemas constitui, por si só, uma área de estudo; tal análise não pode ser feita em um único capítulo. Felizmente, entender apenas o comportamento de regime permanente senoidal de circuitos trifásicos é suficiente para engenheiros que não são especialistas em sistemas de potência. Definimos o que significa um circuito equilibrado mais adiante em nossa discussão. As mesmas técnicas de análise de circuitos discutidas em capítulos anteriores podem ser aplicadas a circuitos trifásicos equilibrados ou desequilibrados. Neste capítulo, usamos essas técnicas para formular vários princípios simplificadores para a análise de circuitos trifásicos equilibrados.

Por questão de economia, os sistemas trifásicos normalmente são projetados para operar no estado equilibrado. Assim, neste tratamento introdutório, é justificável considerar apenas os circuitos equilibrados. A análise de circuitos trifásicos desequilibrados, que você encontrará se estudar sistemas de potência em cursos mais avançados, depende muito do entendimento de circuitos equilibrados.

A estrutura básica de um sistema trifásico consiste em fontes de tensão ligadas a cargas por meio de transformadores e linhas de transmissão. Para analisar tal circuito, podemos reduzi-lo a uma fonte de tensão ligada a uma carga por uma linha. A exclusão do transformador simplifica a discussão sem prejudicar o entendimento básico dos cálculos envolvidos. A Figura 11.1 mostra um circuito básico. A característica fundamental de um circuito trifásico equilibrado é que sua fonte é um conjunto de tensões trifásicas equilibradas. Começamos considerando essas tensões e, então, passamos para as relações entre tensão e corrente para circuitos Y-Y e Y-Δ. Após considerarmos tensão e corrente nesses circuitos, concluímos com seções sobre cálculos e medição de potência.

Perspectiva prática

Transmissão e distribuição de energia elétrica

Neste capítulo, apresentamos circuitos projetados para operar com grandes blocos de energia elétrica. São os circuitos usados para transportar energia elétrica das usinas geradoras até clientes industriais e residenciais. Apresentamos o circuito típico utilizado para clientes residenciais nos Estados Unidos como perspectiva de projeto no Capítulo 9. Agora, voltamos ao tipo de circuito utilizado para fornecer energia elétrica a toda uma unidade residencial.

Uma das restrições impostas ao projeto e operação de uma concessionária de energia elétrica é o requisito de que ela mantenha o valor de tensão eficaz na residência do cliente. Seja com carga leve às três horas da madrugada, seja com carga pesada no meio da tarde de um dia quente e úmido, a concessionária é obrigada a fornecer a mesma tensão eficaz. Lembre-se de que, no Capítulo 10, dissemos que um capacitor pode ser considerado como uma fonte de energia reativa. Portanto, uma técnica para manter os níveis de tensão de uma concessionária é inserir capacitores em locais estratégicos na rede de distribuição. A idéia que fundamenta essa técnica é usar os capacitores para fornecer energia reativa próximos das cargas que dela necessitam, em vez de enviá-los por meio de linhas diretamente a partir de um gerador. Ilustraremos esse conceito depois de apresentar a análise de circuitos trifásicos equilibrados.



Figura 11.1 ▲ Circuito trifásico básico.

11.1 Tensões trifásicas equilibradas

Um conjunto de tensões trifásicas equilibradas consiste em três tensões senoidais que têm amplitudes e freqüências idênticas, mas estão defasadas umas em relação às outras por exatamente 120°. As três fases são tradicionalmente chamadas de *a*, *b* e *c*, e a fase *a* é tomada como a fase de referência. As três tensões são designadas *tensão de fase a*, *tensão de fase b* e *tensão de fase c*.

Há apenas duas relações de fase possíveis entre a tensão de fase *a* e as tensões de fase *b* e *c*. Uma das possibilidades é a tensão de fase *b* estar 120° atrasada em relação à tensão de fase *a*, caso em que a tensão de fase *c* deve estar 120° adiantada em relação à tensão de fase *a*. Essa relação entre fases é conhecida como *seqüência de fase abc* (ou *positiva*). Outra possibilidade é a tensão de fase *b* estar 120° adiantada em relação à tensão de fase *a*, caso em que a tensão de fase *c* deve estar 120° atrasada em relação à tensão de fase *a*. Essa relação é conhecida como *seqüência de fase acb* (ou *negativa*). Em notação fasorial, os dois conjuntos possíveis de tensões de fase equilibradas são

$$\mathbf{V}_a = V_m \angle 0°,$$
$$\mathbf{V}_b = V_m \angle -120°,$$
$$\mathbf{V}_c = V_m \angle +120°, \quad (11.1)$$

e

$$\mathbf{V}_a = V_m \angle 0°,$$
$$\mathbf{V}_b = V_m \angle +120°,$$
$$\mathbf{V}_c = V_m \angle -120°. \quad (11.2)$$

As Equações 11.1 referem-se à seqüência *abc*, ou positiva. As Equações 11.2 referem-se à seqüência *acb*, ou negativa. A Figura 11.2 mostra os diagramas fasoriais dos conjuntos de tensões nas equações 11.1 e 11.2. A seqüência de fases é a ordem, em sentido horário, dos índices a partir de $\mathbf{V}_a$. O fato de um circuito trifásico poder ter uma de duas seqüências de fases deve ser levado em conta sempre que dois desses circuitos operarem em paralelo. Os circuitos só podem operar em paralelo se tiverem a mesma seqüência de fases.

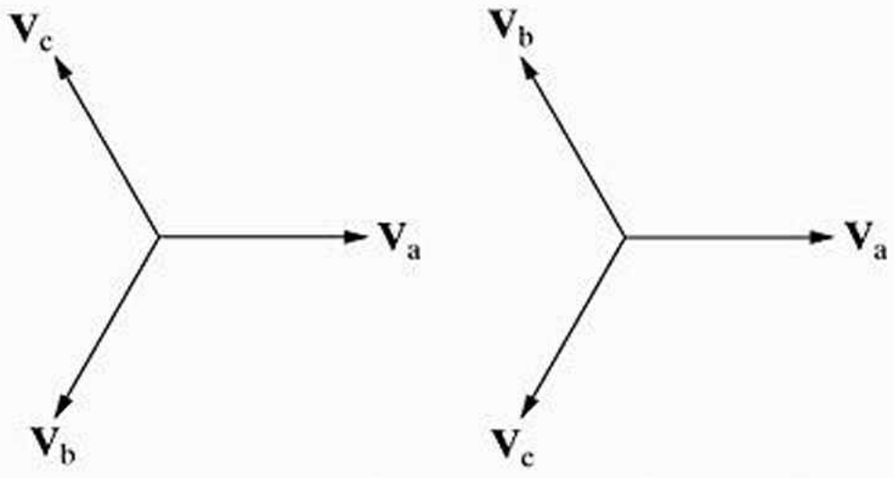


Figura 11.2 ▲ Diagramas fasoriais de um conjunto de tensões trifásicas equilibradas. (a) Seqüência *abc* (positiva). (b) Seqüência *acb* (negativa).

Outra característica importante de um conjunto de tensões trifásicas equilibradas é que a soma das três tensões é zero. Assim, pelas Equações 11.1 ou pelas Equações 11.2,

$$\mathbf{V}_a + \mathbf{V}_b + \mathbf{V}_c = 0. \quad (11.3)$$

Como a soma das tensões fasoriais é zero, a soma das tensões instantâneas também é zero; isto é,

$$v_a + v_b + v_c = 0. \quad (11.4)$$

Agora que conhecemos a natureza de um conjunto de tensões trifásicas equilibradas, podemos mostrar o primeiro princípio simplificador a que aludimos na introdução deste capítulo: se conhecermos a seqüência de fases e uma das tensões do conjunto, conheceremos o conjunto inteiro. Assim, no caso de um sistema trifásico equilibrado, podemos nos concentrar na determinação da tensão (ou corrente) referente a uma fase, pois, conhecida a grandeza referente a uma fase, conhecemos as referentes às outras.

NOTA: Avalie sua compreensão a respeito de tensões trifásicas resolvendo os problemas 11.1 e 11.2, apresentados no final deste capítulo.

11.2 Fontes de tensão trifásicas

Uma fonte de tensão trifásica é um gerador com três enrolamentos separados e distribuídos ao longo da periferia do estator. Cada enrolamento constitui uma fase do gerador. O rotor do gerador é um eletroímã acionado a uma velocidade síncrona por uma máquina matriz, como uma turbina a vapor ou a gás. A rotação do eletroímã induz uma tensão senoidal em cada enrolamento. Os enrolamentos de fase são projetados de modo que as tensões senoidais induzidas neles tenham amplitudes iguais e estejam 120° defasadas umas das outras. Como os enrolamentos de fase são estacionários em relação ao eletroímã rotativo, a freqüência da tensão induzida em cada enrolamento é a mesma. A Figura 11.3 mostra a estrutura interna de uma fonte trifásica de dois pólos.

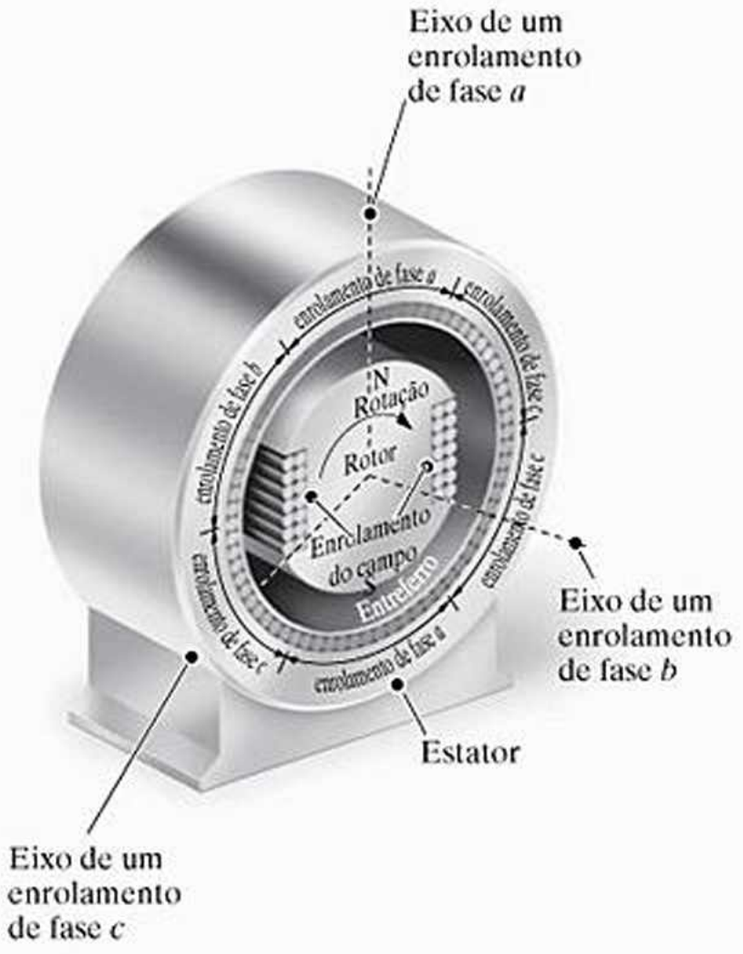


Figura 11.3 ◀ Estrutura de uma fonte de tensão trifásica.

Há duas maneiras de interligar os enrolamentos de fase para formar uma fonte trifásica: uma configuração (Y) ou delta (Δ). A Figura 11.4 mostra ambas as configurações, utilizando fontes de tensão ideais para modelar os enrolamentos de fase do gerador trifásico. O terminal comum na fonte ligada em Y, rotulado como *n* na Figura 11.4(a), é denominado *terminal neutro* da fonte. O terminal neutro pode ou não estar disponível para ligações externas.

Às vezes, a impedância de cada enrolamento de fase é tão pequena (em comparação com outras impedâncias do circuito) que não precisamos levá-la em conta para modelar o gerador; neste caso, o modelo consiste exclusivamente de fontes de tensão ideais, como na Figura 11.4. Contudo, se a impedância de cada enrolamento de fase não for desprezível, colocamos a impedância do enrolamento em série com uma fonte de tensão senoidal ideal. Como todos os enrolamentos do gerador são constituídos da mesma forma, admitimos que suas impedâncias sejam idênticas. A impedância do enrolamento de um gerador trifásico é indutiva. A Figura 11.5 mostra um modelo de tal gerador, no qual R_w é a resistência do enrolamento e X_w é sua reatância indutiva.

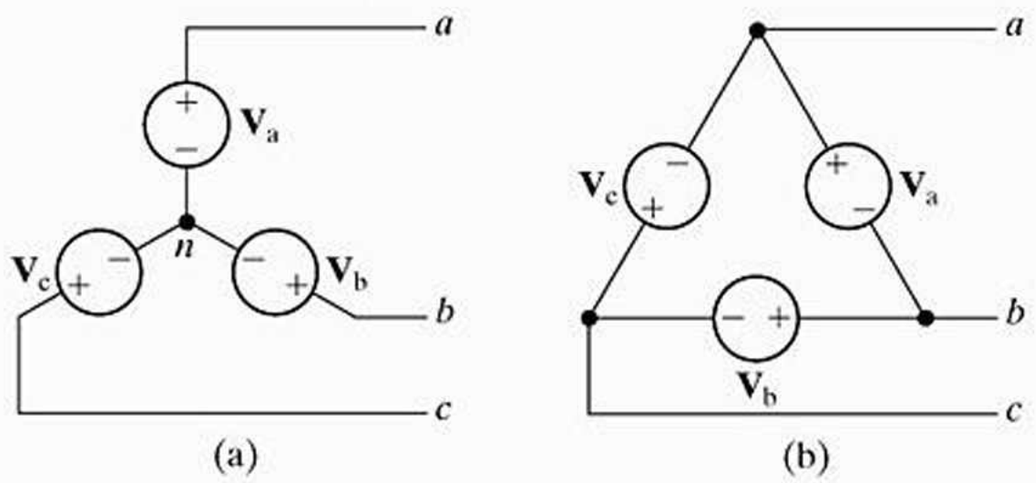


Figura 11.4 ▲ Duas ligações básicas de uma fonte trifásica ideal. (a) Fonte ligada em Y. (b) Fonte ligada em Δ.

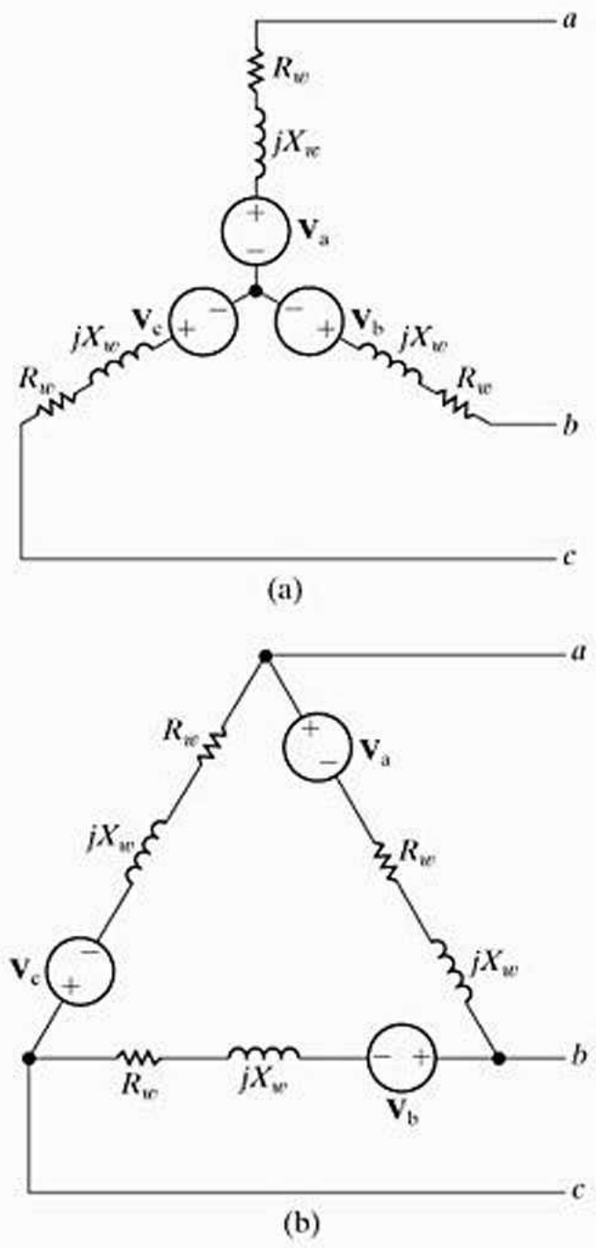


Figura 11.5 ▲ Modelo de uma fonte trifásica com impedância de enrolamento: (a) Fonte ligada em Y e (b) Fonte ligada em Δ.

Como as fontes e cargas trifásicas podem estar ligadas em Y ou em Δ, o circuito básico na Figura 11.1 apresenta as quatro configurações possíveis:

Fonte	Carga
Y	Y
Y	Δ
Δ	Y
Δ	Δ

Começamos analisando o circuito Y-Y. Como os três arranjos restantes podem ser reduzidos a um circuito equivalente Y-Y, a análise do circuito Y-Y é a chave para resolver todos os arranjos trifásicos equilibrados. Depois de analisar o arranjo Y-Y, ilustraremos a redução do arranjo Y-Δ a um arranjo Y-Y equivalente, deixando para você a análise dos arranjos Δ-Y e Δ-Δ nos problemas ao final do capítulo.

11.3 Análise do circuito Y-Y

A Figura 11.6 ilustra um circuito Y-Y geral, no qual incluímos um quarto condutor que liga o neutro da fonte ao neutro da carga. Um quarto condutor só é possível no arranjo Y-Y. (Adiante falaremos mais sobre isso.) Por conveniência, transformamos as ligações em Y em 'ligações em T tombado'. Na Figura 11.6, Z_{ga}, Z_{gb} e Z_{gc} representam a impedância interna associada a cada enrolamento de fase do gerador; Z_{la}, Z_{lb} e Z_{lc} representam a impedância das linhas que ligam uma fase da fonte a uma fase da carga; Z_0 é a impedância do condutor neutro que liga o neutro da fonte ao neutro da carga; e Z_A, Z_B e Z_C representam a impedância de cada fase da carga.

Podemos descrever esse circuito com uma única equação de tensões de nó. Usando o neutro da fonte como nó de referência e denominando $\mathbf{V}_N$ a tensão entre os nós N e n, obtemos a seguinte equação das tensões de nó:

$$\frac{\mathbf{V}_N}{Z_0} + \frac{\mathbf{V}_N - \mathbf{V}_{a'n}}{Z_A + Z_{la} + Z_{ga}} + \frac{\mathbf{V}_N - \mathbf{V}_{b'n}}{Z_B + Z_{lb} + Z_{gb}} + \frac{\mathbf{V}_N - \mathbf{V}_{c'n}}{Z_C + Z_{lc} + Z_{gc}} = 0. \tag{11.5}$$

Essa é a equação geral para qualquer circuito com a configuração Y-Y representada na Figura 11.6. Mas podemos simplificar a Equação 11.5 significativamente se, ago-

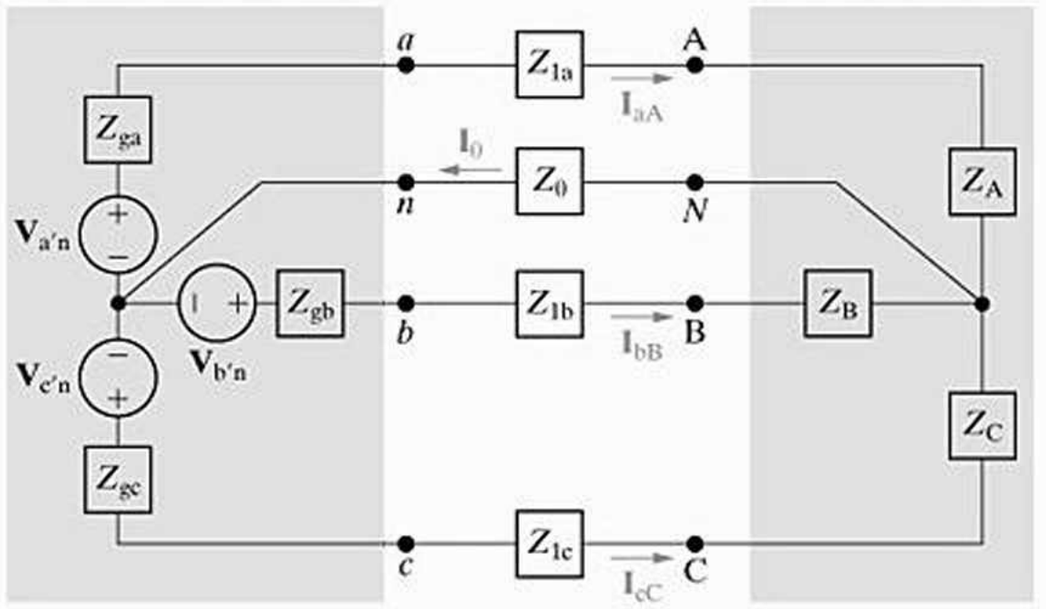


Figura 11.6 ▲ Sistema trifásico Y-Y.

ra, considerarmos a definição formal de um circuito trifásico equilibrado. Tal circuito satisfaz os seguintes critérios:

1. As fontes de tensão formam um conjunto de tensões trifásicas equilibradas. Na Figura 11.6, isso significa que $\mathbf{V}_{a'n}$, $\mathbf{V}_{b'n}$ e $\mathbf{V}_{c'n}$ são um conjunto de tensões trifásicas equilibradas.
2. A impedância de cada fase da fonte de tensão é a mesma. Na Figura 11.6, isso significa que $Z_{ga} = Z_{gb} = Z_{gc}$.
3. A impedância do condutor em cada linha (ou fase) é a mesma. Na Figura 11.6, isso significa que $Z_{1a} = Z_{1b} = Z_{1c}$.
4. A impedância de cada fase da carga é a mesma. Na Figura 11.6, isso significa que $Z_A = Z_B = Z_C$.

(Condições para um circuito trifásico equilibrado)

Não há nenhuma restrição quanto à impedância do condutor neutro; seu valor não tem nenhum efeito quer o sistema seja equilibrado quer seja desequilibrado.

Se o circuito na Figura 11.6 é equilibrado, podemos reescrever a Equação 11.5 como

$$\mathbf{V}_N\left(\frac{1}{Z_0} + \frac{3}{Z_\phi}\right) = \frac{\mathbf{V}_{a'n} + \mathbf{V}_{b'n} + \mathbf{V}_{c'n}}{Z_\phi}, \qquad (11.6)$$

onde

$$Z_\phi = Z_A + Z_{1a} + Z_{ga} = Z_B + Z_{1b} + Z_{gb} = Z_C + Z_{1c} + Z_{gc}.$$

O lado direito da Equação 11.6 é zero porque, por hipótese, o numerador é um conjunto de tensões trifásicas equilibradas e Z_ϕ não é zero. O único valor de $\mathbf{V}_N$ que satisfaz a Equação 11.6 é zero. Portanto, para um circuito trifásico equilibrado,

$$\mathbf{V}_N = 0. \qquad (11.7)$$

A Equação 11.7 é de extrema importância. Se $\mathbf{V}_N$ for zero, não há nenhuma diferença de potencial entre o neutro da fonte, *n*, e o neutro da carga, *N*; portanto, a corrente no condutor neutro é zero. Daí, podemos eliminar o condutor neutro de um circuito equilibrado na configuração Y-Y ($\mathbf{I}_0 = 0$) ou substituí-lo por um curto-circuito perfeito entre os nós *n* e *N* ($\mathbf{V}_N = 0$). Ambos os equivalentes são convenientes na modelagem de circuitos trifásicos equilibrados.

Examinamos, agora, o efeito do equilíbrio das fases sobre as três correntes de linha. Com relação à Figura 11.6, quando o sistema está equilibrado, as três correntes de linha são:

$$\mathbf{I}_{aA} = \frac{\mathbf{V}_{a'n} - \mathbf{V}_N}{Z_A + Z_{1a} + Z_{ga}} = \frac{\mathbf{V}_{a'n}}{Z_\phi}, \qquad (11.8)$$

$$\mathbf{I}_{bB} = \frac{\mathbf{V}_{b'n} - \mathbf{V}_N}{Z_B + Z_{1b} + Z_{gb}} = \frac{\mathbf{V}_{b'n}}{Z_\phi}, \qquad (11.9)$$

$$\mathbf{I}_{cC} = \frac{\mathbf{V}_{c'n} - \mathbf{V}_N}{Z_C + Z_{1c} + Z_{gc}} = \frac{\mathbf{V}_{c'n}}{Z_\phi}. \qquad (11.10)$$

Vemos que as três correntes de linha formam um conjunto equilibrado de correntes trifásicas; isto é, a amplitude e a freqüência da corrente em cada linha são iguais à amplitude e à freqüência das correntes nas outras duas linhas e estão 120° defasadas em relação a elas. Assim, se calcularmos a corrente $\mathbf{I}_{aA}$ e soubermos qual é a seqüência de fase, poderemos determinar facilmente $\mathbf{I}_{bB}$ e $\mathbf{I}_{cC}$. Esse procedimento é semelhante ao utilizado para determinar as tensões de fase *b* e *c* a partir da tensão de fase *a* da fonte.

Podemos usar a Equação 11.8 para construir um circuito equivalente para a fase *a* do circuito Y-Y equilibrado. De acordo com essa equação, a corrente da fase *a* é simplesmente a tensão da fase *a* do gerador dividida pela impedância total na fase *a* do circuito. Assim, a Equação 11.8 descreve o circuito simples mostrado na Figura 11.7, no qual o condutor neutro foi substituído por um curto-circuito perfeito. O circuito na Figura 11.7 é chamado de *circuito monofásico equivalente* de um circuito trifásico equilibrado. Por causa das relações estabelecidas entre fases, uma vez resolvido esse circuito, é fácil expressar as tensões e correntes nas outras duas fases. Por isso, desenhar um circuito monofásico equivalente é uma importante primeira etapa na análise de um circuito trifásico.

Uma advertência: a corrente no condutor neutro da Figura 11.7 é $\mathbf{I}_{aA}$, que não é a corrente no condutor neutro do circuito trifásico equilibrado, cujo valor real é

$$\mathbf{I}_o = \mathbf{I}_{aA} + \mathbf{I}_{bB} + \mathbf{I}_{cC}. \qquad (11.11)$$

Assim, o circuito mostrado na Figura 11.7 fornece o valor correto da corrente de linha, mas apenas a componente da fase *a* da corrente de neutro. Sempre que esse circuito monofásico equivalente for aplicável, as correntes de linha formarão um conjunto trifásico equilibrado e a soma do lado direito da Equação 11.11 será zero.

Conhecida a corrente de linha da Figura 11.7, calcular quaisquer tensões de interesse é relativamente simples. De particular interesse é a relação entre as tensões fase-fase e as tensões fase-neutro. Estabelecemos essa relação nos terminais da carga, mas nossas observações também se aplicam aos terminais da fonte. As tensões fase-fase nos terminais da carga podem ser vistas na Figura 11.8. Elas são $\mathbf{V}_{AB}$, $\mathbf{V}_{BC}$ e $\mathbf{V}_{CA}$, onde a notação de índice duplo indica uma queda de tensão entre o primeiro e o segundo nós. (Como estamos supondo o circuito equilibrado, omitimos o condutor neutro da Figura 11.8.)

As tensões fase-neutro são $\mathbf{V}_{AN}$, $\mathbf{V}_{BN}$ e $\mathbf{V}_{CN}$. Agora, podemos descrever as tensões fase-fase em termos das tensões fase-neutro usando a lei das tensões de Kirchhoff:

$$\mathbf{V}_{AB} = \mathbf{V}_{AN} - \mathbf{V}_{BN}, \qquad (11.12)$$

$$\mathbf{V}_{BC} = \mathbf{V}_{BN} - \mathbf{V}_{CN}, \qquad (11.13)$$

$$\mathbf{V}_{CA} = \mathbf{V}_{CN} - \mathbf{V}_{AN}. \qquad (11.14)$$

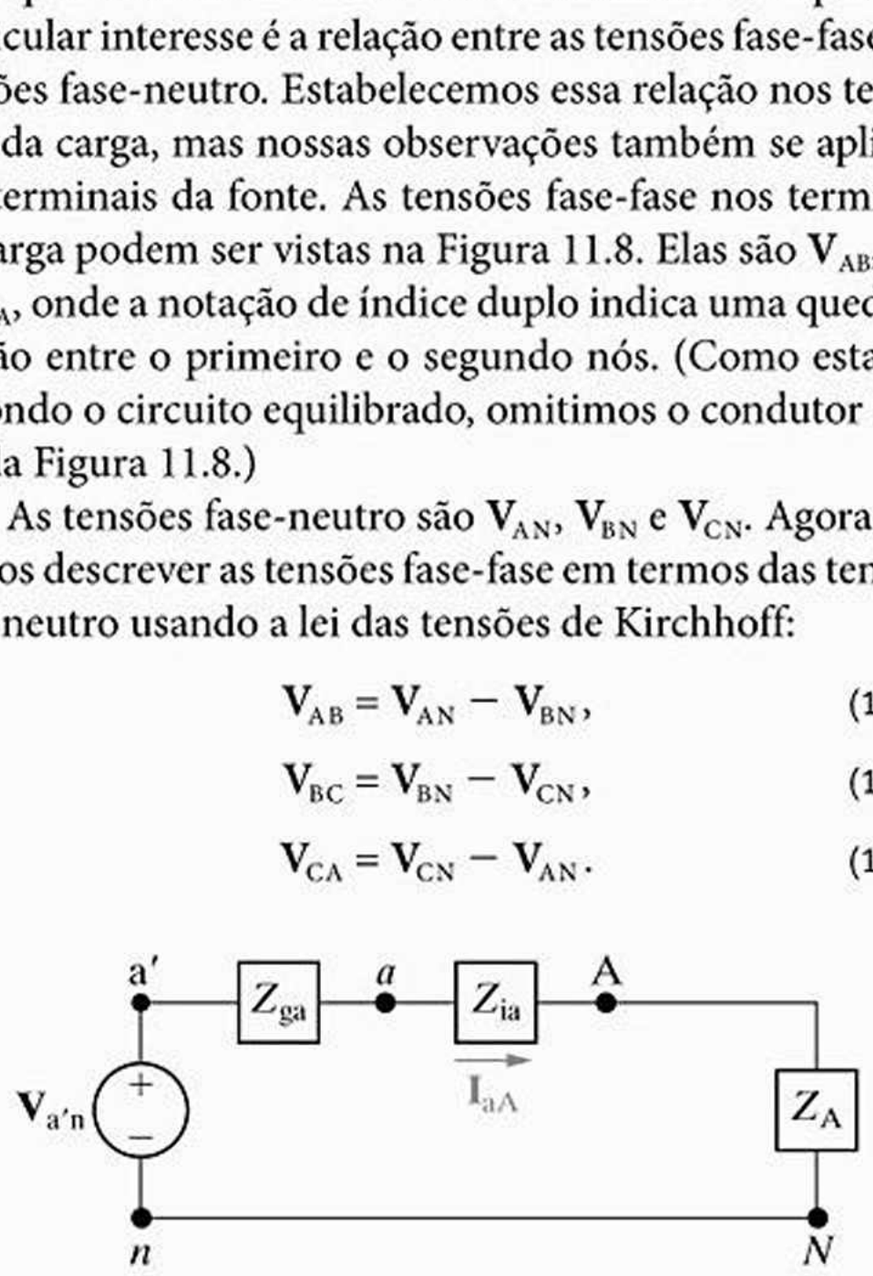


Figura 11.7 ▲ Circuito monofásico equivalente.

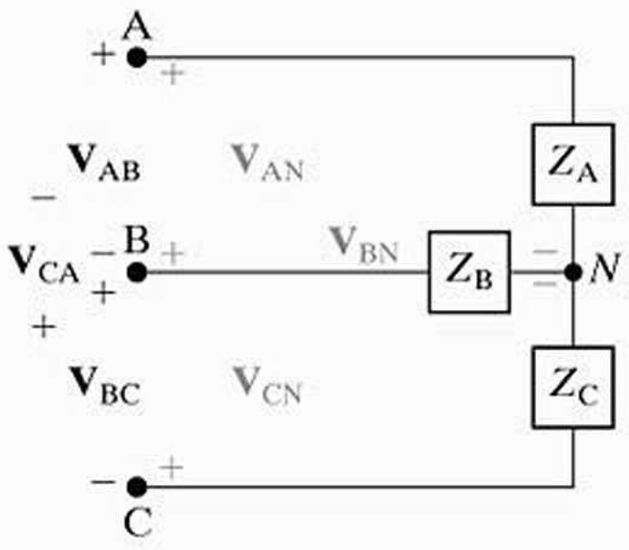


Figura 11.8 ▲ Tensões fase-fase e fase-neutro.

Para mostrar a relação entre as tensões fase-fase e as tensões fase-neutro, admitimos uma seqüência positiva, ou *abc*. Usando a tensão fase-neutro da fase *a* como referência,

$$\mathbf{V}_{AN} = V_\phi \angle 0^\circ, \tag{11.15}$$

$$\mathbf{V}_{BN} = V_\phi \angle -120^\circ, \tag{11.16}$$

$$\mathbf{V}_{CN} = V_\phi \angle +120^\circ, \tag{11.17}$$

onde V_ϕ representa o módulo da tensão fase-neutro. Substituindo as equações 11.15–11.17 nas equações 11.12–11.14, respectivamente, temos

$$\mathbf{V}_{AB} = V_\phi \angle 0^\circ - V_\phi \angle -120^\circ = \sqrt{3} V_\phi \angle 30^\circ, \tag{11.18}$$

$$\mathbf{V}_{BC} = V_\phi \angle -120^\circ - V_\phi \angle 120^\circ = \sqrt{3} V_\phi \angle -90^\circ, \tag{11.19}$$

$$\mathbf{V}_{CA} = V_\phi \angle 120^\circ - V_\phi \angle 0^\circ = \sqrt{3} V_\phi \angle 150^\circ. \tag{11.20}$$

As equações 11.18–11.20 revelam que

1. O módulo da tensão fase-fase é $\sqrt{3}$ vezes o módulo da tensão fase-neutro.
2. As tensões fase-fase formam um conjunto equilibrado de tensões trifásicas.
3. O conjunto de tensões fase-fase está 30° adiantado em relação ao conjunto de tensões fase-neutro.

Fica a cargo do leitor demonstrar que, para uma seqüência negativa, a única diferença é que o conjunto de tensões fase-fase está 30° atrasado em relação ao conjunto de tensões fase-neutro. Os diagramas fasoriais mostrados na Figura 11.9 resumem essas observações. Nesse caso, mais uma vez aparece um princípio simplificador na análise de um sistema equilibrado: se você souber qual é a tensão fase-neutro em algum ponto do circuito, poderá determinar com facilidade a tensão fase-fase no mesmo ponto e vice-versa.

Façamos, agora, uma pausa para comentar a terminologia. *Tensão de linha* refere-se à tensão entre qualquer par de fases; *tensão de fase* refere-se à tensão em uma única fase.[1] *Corrente de linha* refere-se à corrente em uma única linha; *corrente de fase* refere-se à corrente em uma única fase. Observe que, em uma ligação em Δ, a tensão de linha e a tensão de fase são idênticas e, em uma ligação em Y, a corrente de linha e a corrente de fase são idênticas.

Como sistemas trifásicos são projetados para lidar com grandes blocos de energia elétrica, todas as especificações de tensão e corrente são dadas em valores eficazes. Quando são dadas tensões nominais, elas referem-se especificamente à tensão de linha. Por isso, quando dizemos que a tensão nominal de uma linha de transmissão trifásica é 345 kV, o valor nominal da tensão eficaz fase-fase é 345.000 V. Neste capítulo, expressamos todas as tensões e correntes em valores eficazes.

Por fim, a letra grega phi (ϕ) é amplamente utilizada na literatura para designar uma quantidade por fase. Assim, $\mathbf{V}_\phi$, $\mathbf{I}_\phi$, Z_ϕ, P_ϕ e Q_ϕ são interpretadas como tensão de fase, corrente de fase, impedância de fase, potência de fase e potência reativa de fase, respectivamente.

O Exemplo 11.1 mostra como usar as observações que fizemos até aqui para resolver um circuito Y-Y trifásico equilibrado.

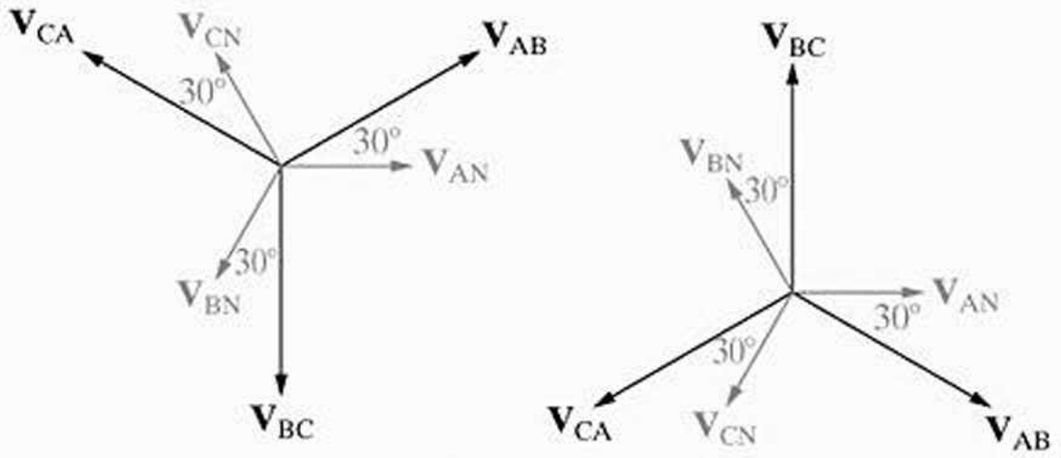


Figura 11.9 ▲ Diagramas fasoriais mostrando a relação entre tensões fase-fase e tensões fase-neutro em um sistema equilibrado. (a) Seqüência *abc*. (b) Seqüência *acb*.

Exemplo 11.1 Análise de um circuito Y-Y

Um gerador trifásico equilibrado, ligado em Y, com seqüência de fases positiva tem uma impedância de 0,2 + *j*0,5 Ω/ϕ e uma tensão a vazio de 120 V/ϕ. O gerador alimenta uma carga trifásica equilibrada, ligada em Y, com uma impedância de 39 + *j*28 Ω/ϕ. A impedância da linha que liga o gerador à carga é 0,8 + *j*1,5 Ω/ϕ. A tensão a vazio da fase *a* do gerador é tomada como fasor de referência.

a) Construa o circuito equivalente da fase *a* do sistema.

b) Calcule as três correntes de linha $\mathbf{I}_{aA}$, $\mathbf{I}_{bB}$ e $\mathbf{I}_{cC}$.

c) Calcule as três tensões de fase na carga, $\mathbf{V}_{AN}$, $\mathbf{V}_{BN}$ e $\mathbf{V}_{CN}$.

d) Calcule as tensões de linha $\mathbf{V}_{AB}$, $\mathbf{V}_{BC}$ e $\mathbf{V}_{CA}$, nos terminais da carga.

e) Calcule as tensões de fase nos terminais do gerador, $\mathbf{V}_{an}$, $\mathbf{V}_{bn}$ e $\mathbf{V}_{cn}$.

f) Calcule as tensões de linha $\mathbf{V}_{ab}$, $\mathbf{V}_{bc}$ e $\mathbf{V}_{ca}$, nos terminais do gerador.

g) Repita (a) — (f) para uma seqüência de fases negativa.

[1] Entende-se por 'tensão em uma única fase' ou 'tensão de fase' o seguinte: (a) quando se referir à carga, isso significa 'tensão nos terminais de cada uma das cargas constituintes da carga trifásica, independentemente da forma de ligação'; (b) quando se referir a fonte, isso significa 'tensão nos terminais de cada uma das três fontes que constituem a fonte trifásica, independemente da forma de ligação'. (N.RT.)

Solução

a) A Figura 11.10 mostra o circuito monofásico equivalente.

b) A corrente de linha da fase *a* é

$$\mathbf{I}_{aA} = \frac{120\angle 0^\circ}{(0{,}2 + 0{,}8 + 39) + j(0{,}5 + 1{,}5 + 28)}$$

$$= \frac{120\angle 0^\circ}{40 + j30}$$

$$= 2{,}4\angle -36{,}87^\circ \text{ A}.$$

Para uma seqüência de fases positiva,

$$\mathbf{I}_{bB} = 2{,}4\angle -156{,}87^\circ \text{ A},$$

$$\mathbf{I}_{cC} = 2{,}4\angle 83{,}13^\circ \text{ A}.$$

c) A tensão de fase no terminal *A* da carga é

$$\mathbf{V}_{AN} = (39 + j28)(2{,}4\angle -36{,}87^\circ)$$

$$= 115{,}22\angle -1{,}19^\circ \text{ V}.$$

Para uma seqüência de fases positiva,

$$\mathbf{V}_{BN} = 115{,}22\angle -121{,}19^\circ \text{ V},$$

$$\mathbf{V}_{CN} = 115{,}22\angle 118{,}81^\circ \text{ V}.$$

d) Para uma seqüência de fases positiva, as tensões de linha estão 30° adiantadas em relação às tensões de fase; portanto,

$$\mathbf{V}_{AB} = (\sqrt{3}\angle 30^\circ)\mathbf{V}_{AN}$$

$$= 199{,}58\angle 28{,}81^\circ \text{ V},$$

$$\mathbf{V}_{BC} = 199{,}58\angle -91{,}19^\circ \text{ V},$$

$$\mathbf{V}_{CA} = 199{,}58\angle 148{,}81^\circ \text{ V}.$$

e) A tensão de fase no terminal *a* da fonte é

$$\mathbf{V}_{an} = 120 - (0{,}2 + j0{,}5)(2{,}4\angle -36{,}87^\circ)$$

$$= 120 - 1{,}29\angle 31{,}33^\circ$$

$$= 118{,}90 - j0{,}67$$

$$= 118{,}90\angle -0{,}32^\circ \text{ V}.$$

Para uma seqüência de fases positiva,

$$\mathbf{V}_{bn} = 118{,}90\angle -120{,}32^\circ \text{ V},$$

$$\mathbf{V}_{cn} = 118{,}90\angle 119{,}68^\circ \text{ V}.$$

f) As tensões de linha nos terminais da fonte são

$$\mathbf{V}_{ab} = (\sqrt{3}\angle 30^\circ)\mathbf{V}_{an}$$

$$= 205{,}94\angle 29{,}68^\circ \text{ V},$$

$$\mathbf{V}_{bc} = 205{,}94\angle -90{,}32^\circ \text{ V},$$

$$\mathbf{V}_{ca} = 205{,}94\angle 149{,}68^\circ \text{ V}.$$

g) Mudar a seqüência de fases não tem nenhum efeito sobre o circuito monofásico equivalente. As três correntes de linha são

$$\mathbf{I}_{aA} = 2{,}4\angle -36{,}87^\circ \text{ A},$$

$$\mathbf{I}_{bB} = 2{,}4\angle 83{,}13^\circ \text{ A},$$

$$\mathbf{I}_{cC} = 2{,}4\angle -156{,}87^\circ \text{ A}.$$

As tensões de fase na carga são

$$\mathbf{V}_{AN} = 115{,}22\angle -1{,}19^\circ \text{ V},$$

$$\mathbf{V}_{BN} = 115{,}22\angle 118{,}81^\circ \text{ V},$$

$$\mathbf{V}_{CN} = 115{,}22\angle -121{,}19^\circ \text{ V}.$$

Para uma seqüência de fases negativa, as tensões de linha estão 30° atrasadas em relação às tensões de fase:

$$\mathbf{V}_{AB} = (\sqrt{3}\angle -30^\circ)\mathbf{V}_{AN}$$

$$= 199{,}58\angle -31{,}19^\circ \text{ V},$$

$$\mathbf{V}_{BC} = 199{,}58\angle 88{,}81^\circ \text{ V},$$

$$\mathbf{V}_{CA} = 199{,}58\angle -151{,}19^\circ \text{ V}.$$

As tensões de fase nos terminais do gerador são

$$\mathbf{V}_{an} = 118{,}90\angle -0{,}32^\circ \text{ V},$$

$$\mathbf{V}_{bn} = 118{,}90\angle 119{,}68^\circ \text{ V},$$

$$\mathbf{V}_{cn} = 118{,}90\angle -120{,}32^\circ \text{ V}.$$

As tensões de linha nos terminais do gerador são

$$\mathbf{V}_{ab} = (\sqrt{3}\angle -30^\circ)\mathbf{V}_{an}$$

$$= 205{,}94\angle -30{,}32^\circ \text{ V},$$

$$\mathbf{V}_{bc} = 205{,}94\angle 89{,}68^\circ \text{ V},$$

$$\mathbf{V}_{ca} = 205{,}94\angle -150{,}32^\circ \text{ V}.$$

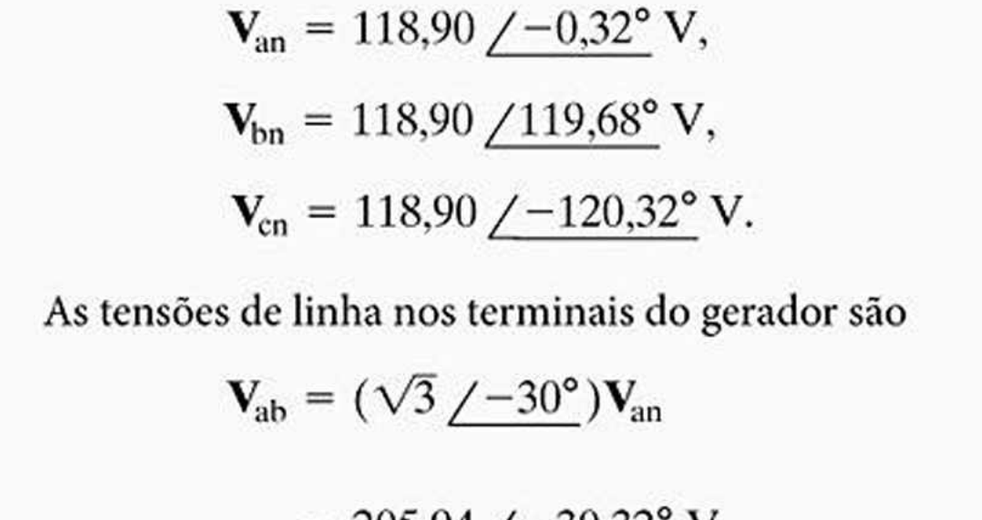


Figura 11.10 ▲ Circuito monofásico equivalente para o Exemplo 11.1.

✔ PROBLEMAS PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 1 — Saber analisar um circuito trifásico equilibrado Y-Y

11.1 A tensão de A a N em um circuito trifásico equilibrado é $240 \angle -30°$ V. Se a seqüência de fases for positiva, qual será o valor de $\mathbf{V}_{BC}$?

Resposta: $415{,}69 \angle -120°$ V.

11.2 A tensão da fase c de um sistema trifásico equilibrado ligado em Y é $450 \angle -25°$ V. Se a seqüência de fases for negativa, qual será o valor de $\mathbf{V}_{AB}$?

Resposta: $779{,}42 \angle 65°$ V.

11.3 A tensão de fase nos terminais de uma carga trifásica equilibrada ligada em Y é 2.400 V. A carga tem uma impedância de $16 + j12\ \Omega/\phi$ e é alimentada por uma linha que tem uma impedância de $0{,}10 + j0{,}80\ \Omega/\phi$. A fonte, ligada em Y na outra extremidade de envio da linha, tem uma seqüência de fases acb e uma impedância interna de $0{,}02 + j0{,}16\ \Omega/\phi$. Use a tensão da fase a na carga como referência e calcule (a) as correntes de linha $\mathbf{I}_{aA}$, $\mathbf{I}_{bB}$ e $\mathbf{I}_{cC}$; (b) as tensões de linha na fonte, $\mathbf{V}_{ab}$, $\mathbf{V}_{bc}$ e $\mathbf{V}_{ca}$; e (c) as tensões fase-neutro a vazio da fonte, $\mathbf{V}_{a'n}$, $\mathbf{V}_{b'n}$ e $\mathbf{V}_{c'n}$.

Resposta:

(a) $\mathbf{I}_{aA} = 120 \angle -36{,}87°$ A,
$\mathbf{I}_{bB} = 120 \angle 83{,}13°$ A,
$\mathbf{I}_{cC} = 120 \angle -156{,}87°$ A;

(b) $\mathbf{V}_{ab} = 4.275{,}02 \angle -28{,}38°$ V,
$\mathbf{V}_{bc} = 4.275{,}02 \angle 91{,}62°$ V,
$\mathbf{V}_{ca} = 4.275{,}02 \angle -148{,}38°$ V;

(c) $\mathbf{V}_{a'n} = 2.482{,}05 \angle 1{,}93°$ V,
$\mathbf{V}_{b'n} = 2.482{,}05 \angle 121{,}93°$ V,
$\mathbf{V}_{c'n} = 2.482{,}05 \angle -118{,}07°$ V.

11.4 Análise do circuito Y-Δ

Se a carga em um circuito trifásico estiver ligada em delta, ela pode ser transformada em Y por meio de uma transformação delta-Y, discutida na Seção 9.6. Quando a carga é equilibrada, a impedância de cada braço do Y é um terço da impedância de cada lado do delta, ou

$$Z_Y = \frac{Z_\Delta}{3}, \tag{11.21}$$

(Relação entre impedância trifásica ligada em delta e ligada em Y)

que decorre diretamente das equações 9.51–9.53. Depois de a carga em Δ ter sido substituída pelo Y equivalente, a fase a pode ser modelada pelo circuito monofásico equivalente mostrado na Figura 11.11.

Usamos esse circuito para calcular as correntes de linha e, então, utilizamos as correntes de linha para determinar as correntes em cada perna da carga original em Δ. A relação entre as correntes de linha e as correntes em cada perna do delta podem ser calculadas usando o circuito mostrado na Figura 11.12.

Quando uma carga (ou fonte) está ligada em delta, a corrente em cada perna do delta é a corrente de fase e a tensão em cada perna é a tensão de fase. A Figura 11.12 mostra que, na configuração em Δ, a tensão de fase é idêntica à tensão de linha.

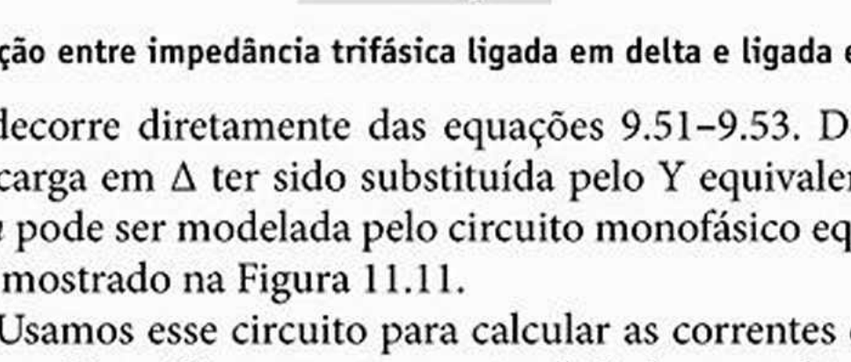


Figura 11.11 ▲ Circuito monofásico equivalente.

Para demonstrar a relação entre as correntes de fase e as correntes de linha, admitimos uma seqüência de fases positiva e representamos o módulo da corrente de fase por I_ϕ. Então,

$$\mathbf{I}_{AB} = I_\phi \angle 0°, \tag{11.22}$$

$$\mathbf{I}_{BC} = I_\phi \angle -120°, \tag{11.23}$$

$$\mathbf{I}_{CA} = I_\phi \angle 120°. \tag{11.24}$$

Ao escrevermos essas equações, selecionamos $\mathbf{I}_{AB}$ arbitrariamente como fasor de referência.

Podemos escrever as correntes de linha em termos das correntes de fase pela aplicação direta da lei das correntes de Kirchhoff:

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_{aA} &= \mathbf{I}_{AB} - \mathbf{I}_{CA} \\ &= I_\phi \angle 0° - I_\phi \angle 120° \\ &= \sqrt{3} I_\phi \angle -30°,\end{aligned} \tag{11.25}$$

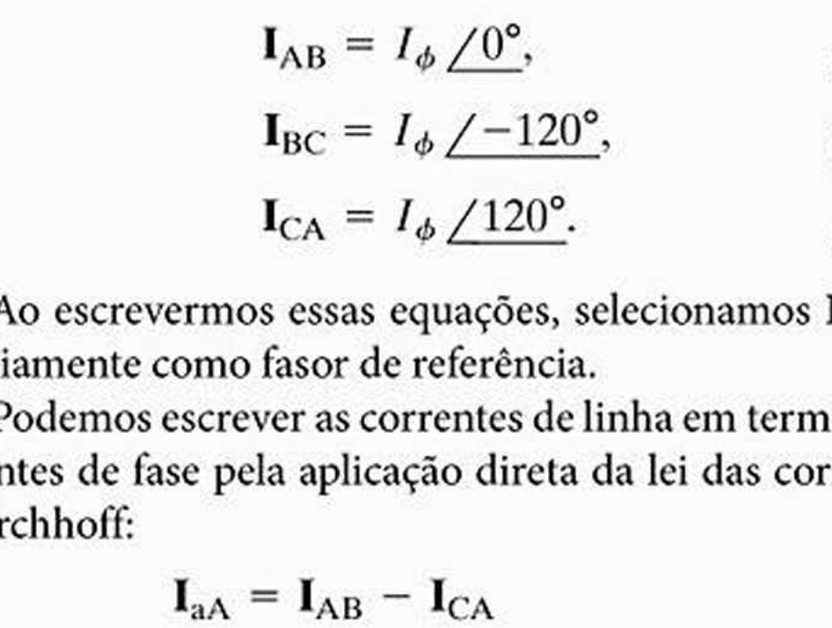


Figura 11.12 ▲ Circuito utilizado para estabelecer a relação entre correntes de linha e correntes de fase em uma carga equilibrada ligada em Δ.

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_{bB} &= \mathbf{I}_{BC} - \mathbf{I}_{AB}\\ &= I_\phi \angle -120^\circ - I_\phi \angle 0^\circ\\ &= \sqrt{3} I_\phi \angle -150^\circ, \end{aligned} \tag{11.26}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_{cC} &= \mathbf{I}_{CA} - \mathbf{I}_{BC}\\ &= I_\phi \angle 120^\circ - I_\phi \angle -120^\circ\\ &= \sqrt{3} I_\phi \angle 90^\circ. \end{aligned} \tag{11.27}$$

Comparando as equações 11.25–11.27 com as equações 11.22–11.24, percebemos que o módulo das correntes de linha é $\sqrt{3}$ vezes o módulo das correntes de fase e que o conjunto de correntes de linha está 30° atrasado em relação ao conjunto de correntes de fase.

Deixamos a cargo do leitor verificar que, para uma seqüência de fases negativa, as correntes de linha são $\sqrt{3}$ vezes maiores do que as correntes de fase e estão 30° adiantadas em relação às correntes de fase. Assim, temos mais um princípio simplificador para calcular correntes de linha por meio das correntes de fase (ou vice-versa) quando se trata de uma carga trifásica equilibrada ligada em Δ. A Figura 11.13 resume esse princípio. O Exemplo 11.2 ilustra os cálculos envolvidos na análise de um circuito trifásico equilibrado que tem uma fonte ligada em Y e carga ligada em Δ.

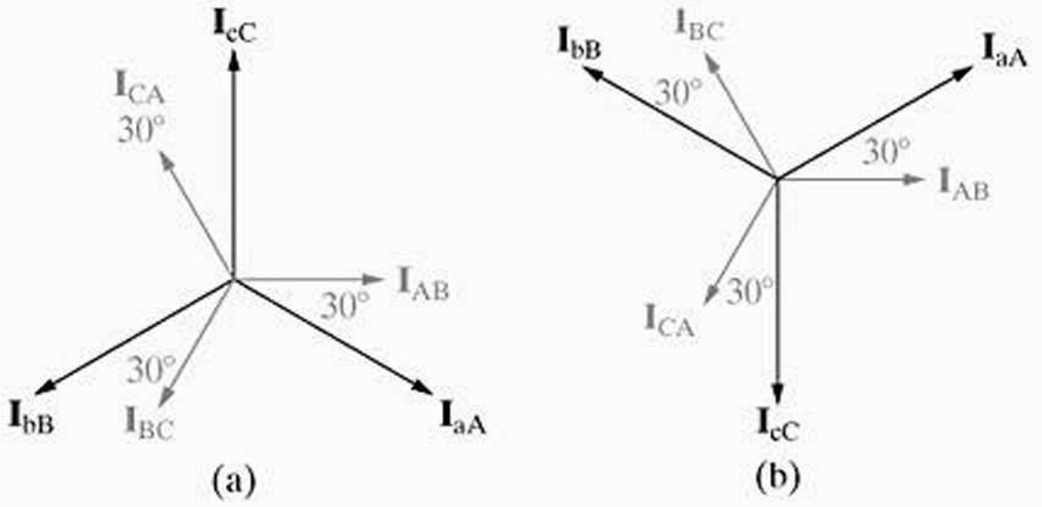


Figura 11.13 ▲ Diagramas fasoriais mostrando a relação entre correntes de linha e correntes de fase em uma carga ligada em Δ. (a) Seqüência positiva. (b) Seqüência negativa.

Exemplo 11.2 Análise de um circuito Y-delta

A fonte ligada em Y no Exemplo 11.1 alimenta uma carga ligada em Δ por meio de uma linha de distribuição cuja impedância é $0{,}3 + j0{,}9\ \Omega/\phi$. A impedância de carga é $118{,}5 + j85{,}8\ \Omega/\phi$. Use a tensão a vazio da fase *a* do gerador como referência.

a) Construa um circuito monofásico equivalente do sistema trifásico.
b) Calcule as correntes de linha $\mathbf{I}_{aA}$, $\mathbf{I}_{bB}$ e $\mathbf{I}_{cC}$.
c) Calcule as tensões de fase nos terminais da carga.
d) Calcule as correntes de fase da carga.
e) Calcule as tensões de linha nos terminais da fonte.

Solução

a) A Figura 11.14 mostra o circuito monofásico equivalente. A impedância da carga do Y equivalente é

$$\frac{118{,}5 + j85{,}8}{3} = 39{,}5 + j28{,}6\ \Omega/\phi.$$

b) A corrente de linha da fase *a* é

$$\mathbf{I}_{aA} = \frac{120 \angle 0^\circ}{(0{,}2 + 0{,}3 + 39{,}5) + j(0{,}5 + 0{,}9 + 28{,}6)}$$

$$= \frac{120 \angle 0^\circ}{40 + j30} = 2{,}4 \angle -36{,}87^\circ \text{ A}.$$

Daí,

$$\mathbf{I}_{bB} = 2{,}4 \angle -156{,}87^\circ \text{ A},$$

$$\mathbf{I}_{cC} = 2{,}4 \angle 83{,}13^\circ \text{ A}.$$

c) Como a carga está ligada em Δ, as tensões de fase são as mesmas que as tensões de linha. Para calcular as tensões de linha, primeiro calculamos $\mathbf{V}_{AN}$:

$$\mathbf{V}_{AN} = (39{,}5 + j28{,}6)(2{,}4 \angle -36{,}87^\circ)$$

$$= 117{,}04 \angle -0{,}96^\circ \text{ V}.$$

Como a seqüência de fases é positiva, a tensão de linha $\mathbf{V}_{AB}$ é

$$\mathbf{V}_{AB} = (\sqrt{3} \angle 30^\circ)\, \mathbf{V}_{AN}$$

$$= 202{,}72 \angle 29{,}04^\circ \text{ V}.$$

Portanto,

$$\mathbf{V}_{BC} = 202{,}72 \angle -90{,}96^\circ \text{ V},$$

$$\mathbf{V}_{CA} = 202{,}72 \angle 149{,}04^\circ \text{ V}.$$

d) As correntes de fase da carga podem ser calculadas diretamente pelas correntes de linha:

$$\mathbf{I}_{AB} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \angle 30^\circ\right) \mathbf{I}_{aA}$$

$$= 1{,}39 \angle -6{,}87^\circ \text{ A}.$$

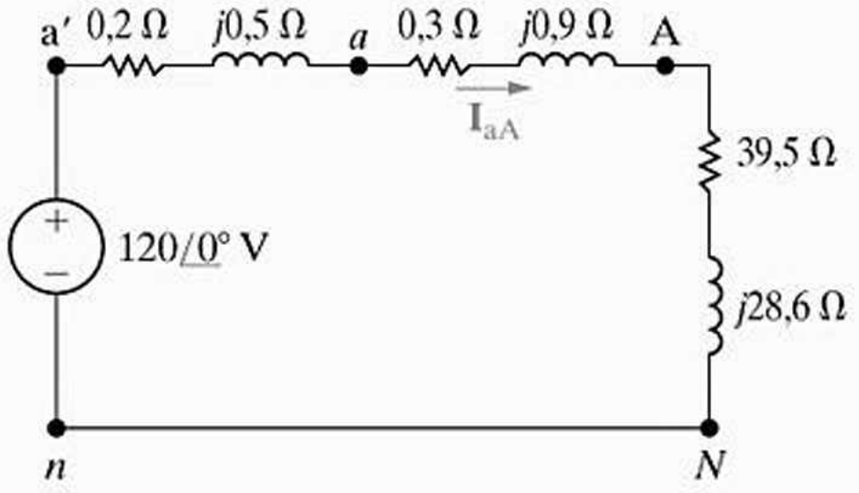


Figura 11.14 ▲ Circuito monofásico equivalente para o Exemplo 11.2.

Conhecida $\mathbf{I}_{AB}$, também conhecemos as outras correntes de fase da carga:

$$\mathbf{I}_{BC} = 1{,}39 \angle -126{,}87° \text{ A},$$
$$\mathbf{I}_{CA} = 1{,}39 \angle 113{,}13° \text{ A}.$$

Observe que podemos confirmar o cálculo de $\mathbf{I}_{AB}$ usando a $\mathbf{V}_{AB}$ que calculamos antes e a impedância da carga ligada em Δ; isto é,

$$\mathbf{I}_{AB} = \frac{\mathbf{V}_{AB}}{Z_\phi} = \frac{202{,}72 \angle 29{,}04°}{118{,}5 + j85{,}8}$$
$$= 1{,}39 \angle -6{,}87° \text{ A}.$$

e) Para calcular a tensão de linha nos terminais da fonte, em primeiro lugar calculamos $\mathbf{V}_{an}$. A Figura 11.14 mostra que $\mathbf{V}_{an}$ é a queda de tensão na impedância de linha somada à impedância da carga, portanto,

$$\mathbf{V}_{an} = (39{,}8 + j29{,}5)(2{,}4 \angle -36{,}87°)$$
$$= 118{,}90 \angle -0{,}32° \text{ V}.$$

A tensão de linha $\mathbf{V}_{ab}$ é

$$\mathbf{V}_{ab} = (\sqrt{3} \angle 30°)\mathbf{V}_{an},$$

ou

$$\mathbf{V}_{ab} = 205{,}94 \angle 29{,}68° \text{ V}.$$

Portanto,

$$\mathbf{V}_{bc} = 205{,}94 \angle -90{,}32° \text{ V},$$
$$\mathbf{V}_{ca} = 205{,}94 \angle 149{,}68° \text{ V}.$$

✔ PROBLEMAS PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 2 — Saber analisar um circuito trifásico equilibrado Y-Δ

11.4 A corrente $\mathbf{I}_{CA}$ em uma carga trifásica equilibrada ligada em Δ é $8 \angle -15°$ A. Se a seqüência de fases for positiva, qual será o valor de $\mathbf{I}_{cC}$?

Resposta: $13{,}86 \angle -45°$ A.

11.5 Uma carga trifásica equilibrada ligada em Δ é alimentada por um circuito trifásico equilibrado. A referência para a corrente de linha da fase *b* é no sentido da carga. O valor da corrente na fase *b* é $12 \angle 65°$ A. Se a seqüência de fases for negativa, qual será o valor de $\mathbf{I}_{AB}$?

Resposta: $6{,}93 \angle -85°$ A.

11.6 A tensão de linha $\mathbf{V}_{AB}$ nos terminais de uma carga trifásica equilibrada ligada em Δ é $4.160 \angle 0°$ V. A corrente de linha $\mathbf{I}_{aA}$ é $69{,}28 \angle -10°$ A.
a) Calcule a impedância por fase da carga se a seqüência de fases for positiva.
b) Repita (a) para uma seqüência de fases negativa.

Resposta: (a) $104 \angle -20° \ \Omega$; (b) $104 \angle +40° \ \Omega$.

11.7 A tensão de linha nos terminais de uma carga equilibrada ligada em Δ é 110 V. Cada fase da carga consiste em um resistor de 3,667 Ω em paralelo com uma impedância indutiva de 2,75 Ω. Qual é o módulo da corrente na linha que alimenta a carga?

Resposta: 86,60 A.

NOTA: Tente resolver também os problemas 11.14–11.16, apresentados no final do capítulo.

11.5 Cálculos de potência em circuitos trifásicos equilibrados

Até aqui, limitamos nossa análise de circuitos trifásicos equilibrados à determinação de correntes e tensões. Agora, discutiremos cálculos de potência trifásica. Começamos considerando a potência média fornecida a uma carga equilibrada ligada em Y.

Potência média em uma carga equilibrada ligada em Y

A Figura 11.15 mostra uma carga ligada em Y e as correntes e tensões pertinentes. Calculamos a potência média associada a qualquer uma das fases usando as técnicas apresentadas no Capítulo 10. Tomando a Equação 10.21 como ponto de partida, expressamos a potência média associada à fase *a* como

$$P_A = |\mathbf{V}_{AN}||\mathbf{I}_{aA}| \cos(\theta_{vA} - \theta_{iA}) \tag{11.28}$$

onde θ_{vA} e θ_{iA} são os ângulos de fase de $\mathbf{V}_{AN}$ e $\mathbf{I}_{aA}$, respectivamente. Usando a notação apresentada na Equação 11.28, podemos determinar a potência associada às fases *b* e *c*:

$$P_B = |\mathbf{V}_{BN}||\mathbf{I}_{bB}| \cos(\theta_{vB} - \theta_{iB}) \tag{11.29}$$

$$P_C = |\mathbf{V}_{CN}||\mathbf{I}_{cC}| \cos(\theta_{vC} - \theta_{iC}) \tag{11.30}$$

Nas equações 11.28 — 11.30, todas as correntes e tensões fasoriais são escritas em termos do valor eficaz da função senoidal que elas representam.

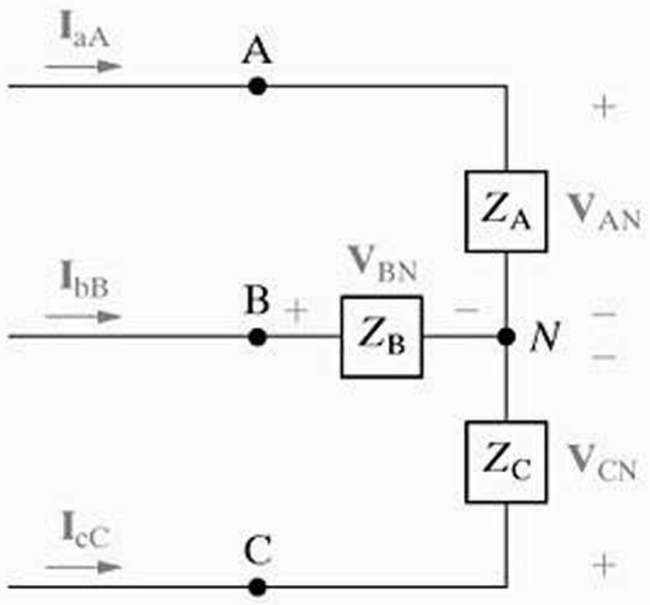


Figura 11.15 ▲ Carga equilibrada, utilizada para ilustrar os cálculos de potência média em circuitos trifásicos.

Em um sistema trifásico equilibrado, o módulo de cada tensão fase-neutro é o mesmo, assim como o módulo de cada corrente de fase. O argumento das funções co-seno também é o mesmo para todas as três fases. Enfatizamos essas observações apresentando a seguinte notação:

$$V_\phi = |\mathbf{V}_{AN}| = |\mathbf{V}_{BN}| = |\mathbf{V}_{CN}|, \tag{11.31}$$

$$I_\phi = |\mathbf{I}_{aA}| = |\mathbf{I}_{bB}| = |\mathbf{I}_{cC}|, \tag{11.32}$$

e

$$\theta_\phi = \theta_{vA} - \theta_{iA} = \theta_{vB} - \theta_{iB} = \theta_{vC} - \theta_{iC}. \tag{11.33}$$

Além do mais, para um sistema equilibrado, a potência fornecida a cada fase da carga é a mesma,

$$P_A = P_B = P_C = P_\phi = V_\phi I_\phi \cos\theta_\phi, \tag{11.34}$$

onde P_ϕ representa a potência média por fase.

A potência média total fornecida à carga equilibrada ligada em Y é simplesmente três vezes a potência por fase, ou

$$P_T = 3P_\phi = 3V_\phi I_\phi \cos\theta_\phi. \tag{11.35}$$

Também é desejável expressar a potência total em termos dos valores eficazes da tensão e corrente de linha. Se representarmos os módulos da tensão de linha e da corrente de linha por V_L e I_L, respectivamente, podemos modificar a Equação 11.35 da seguinte forma:

$$P_T = 3\left(\frac{V_L}{\sqrt{3}}\right) I_L \cos\theta_\phi = \sqrt{3} V_L I_L \cos\theta_\phi. \tag{11.36}$$

(Potência ativa total em uma carga trifásica equilibrada)

Para deduzirmos a Equação 11.36 levamos em conta que, em uma carga equilibrada ligada em Y, o módulo da tensão de fase é o módulo da tensão de linha dividido por $\sqrt{3}$ e que o módulo da corrente de linha é igual ao módulo da corrente de fase. Quando usar a Equação 11.36 para calcular a potência total fornecida à carga, lembre-se de que θ_ϕ é o ângulo de fase entre a tensão de fase e a corrente de fase.

Potência complexa em uma carga equilibrada ligada em Y

Também podemos calcular a potência reativa e a potência complexa associadas a qualquer uma das fases de uma carga ligada em Y, usando as técnicas apresentadas no Capítulo 10. Para uma carga equilibrada, as expressões para a potência reativa são

$$Q_\phi = V_\phi I_\phi \operatorname{sen}\theta_\phi \tag{11.37}$$

$$Q_T = 3Q_\phi = \sqrt{3} V_L I_L \operatorname{sen}\theta_\phi. \tag{11.38}$$

(Potência reativa total em uma carga trifásica equilibrada)

A Equação 10.29 é a base para expressar a potência complexa associada a qualquer fase. Para uma carga equilibrada,

$$S_\phi = \mathbf{V}_{AN}\mathbf{I}_{aA}^* = \mathbf{V}_{BN}\mathbf{I}_{bB}^* = \mathbf{V}_{CN}\mathbf{I}_{cC}^* = \mathbf{V}_\phi \mathbf{I}_\phi^*, \tag{11.39}$$

onde $\mathbf{V}_\phi$ e $\mathbf{I}_\phi$ representam a tensão e a corrente de uma mesma fase. Assim, em geral,

$$S_\phi = P_\phi + jQ_\phi = \mathbf{V}_\phi \mathbf{I}_\phi^*, \tag{11.40}$$

$$S_T = 3S_\phi = \sqrt{3} V_L I_L \angle\theta_\phi^\circ. \tag{11.41}$$

(Potência complexa total em uma carga trifásica equilibrada)

Cálculos de potência em uma carga equilibrada ligada em delta

Se a carga estiver ligada em Δ, o cálculo de potência — reativa ou complexa — é basicamente o mesmo que para uma carga ligada em Y.

A Figura 11.16 mostra uma carga ligada em Δ, com as correntes e tensões pertinentes. A potência associada a cada fase é

$$P_A = |\mathbf{V}_{AB}||\mathbf{I}_{AB}| \cos(\theta_{vAB} - \theta_{iAB}), \tag{11.42}$$

$$P_B = |\mathbf{V}_{BC}||\mathbf{I}_{BC}| \cos(\theta_{vBC} - \theta_{iBC}), \tag{11.43}$$

$$P_C = |\mathbf{V}_{CA}||\mathbf{I}_{CA}| \cos(\theta_{vCA} - \theta_{iCA}). \tag{11.44}$$

Para uma carga equilibrada,

$$|\mathbf{V}_{AB}| = |\mathbf{V}_{BC}| = |\mathbf{V}_{CA}| = V_\phi, \tag{11.45}$$

$$|\mathbf{I}_{AB}| = |\mathbf{I}_{BC}| = |\mathbf{I}_{CA}| = I_\phi, \tag{11.46}$$

$$\theta_{vAB} - \theta_{iAB} = \theta_{vBC} - \theta_{iBC} = \theta_{vCA} - \theta_{iCA} = \theta_\phi, \tag{11.47}$$

e

$$P_A = P_B = P_C = P_\phi = V_\phi I_\phi \cos\theta_\phi. \tag{11.48}$$

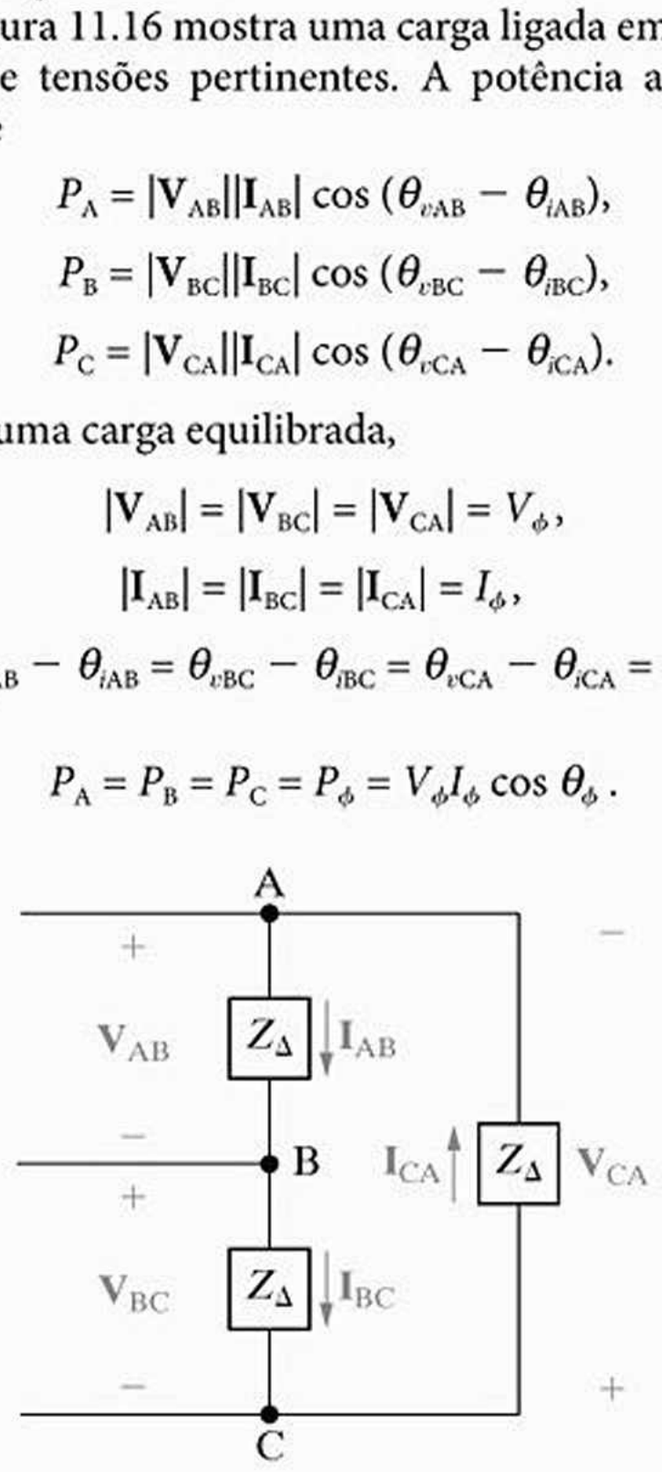


Figura 11.16 ▲ Carga ligada em Δ utilizada para ilustrar cálculos de potência em circuitos trifásicos.

Observe que a Equação 11.48 é idêntica à Equação 11.34. Assim, em uma carga equilibrada, independentemente de ser ligada em Y ou em Δ, a potência média por fase é igual ao produto do valor eficaz da tensão de fase pelo valor eficaz da corrente de fase e pelo co-seno do ângulo entre a tensão e a corrente de fase.

A potência total fornecida a uma carga equilibrada ligada em Δ é

$$P_T = 3P_\phi = 3V_\phi I_\phi \cos\theta_\phi$$

$$= 3V_L\left(\frac{I_L}{\sqrt{3}}\right)\cos\theta_\phi$$

$$= \sqrt{3}V_L I_L \cos\theta_\phi. \quad (11.49)$$

Observe que a Equação 11.49 é idêntica à Equação 11.36. As expressões para potência reativa e potência complexa também têm a mesma forma que as desenvolvidas para a carga em Y:

$$Q_\varphi = V_\phi I_\phi \operatorname{sen}\theta_\phi; \quad (11.50)$$

$$Q_T = 3Q_\phi = 3V_\phi I_\phi \operatorname{sen}\theta_\phi; \quad (11.51)$$

$$S_\phi = P_\phi + jQ_\phi = \mathbf{V}_\phi \mathbf{I}_\phi^*; \quad (11.52)$$

$$S_T = 3S_\phi = \sqrt{3}V_L I_L \angle\theta_\phi. \quad (11.53)$$

Potência instantânea em circuitos trifásicos

Embora nossa preocupação primária seja o cálculo de potências média, reativa e complexa, o cálculo da potência instantânea total também é importante. Em um circuito trifásico equilibrado, essa potência tem uma propriedade interessante: ela não varia com o tempo! Assim, o torque desenvolvido no eixo de um motor trifásico é constante, o que, por sua vez, significa menos vibração nas máquinas acionadas por motores trifásicos.

Tomemos a tensão instantânea fase-neutro, v_{AN}, como referência e, como antes, θ_ϕ como ângulo de fase $\theta_{vA} - \theta_{iA}$. Então, para uma seqüência de fases positiva, a potência instantânea em cada fase é

$$p_A = v_{AN}i_{aA} = V_m I_m \cos\omega t \cos(\omega t - \theta_\phi),$$

$$p_B = v_{BN}i_{bB} = V_m I_m \cos(\omega t - 120°)\cos(\omega t - \theta_\phi - 120°),$$

$$p_C = v_{CN}i_{cC} = V_m I_m \cos(\omega t + 120°)\cos(\omega t - \theta_\phi + 120°),$$

onde V_m e I_m representam o valor de pico da tensão de fase e da corrente de linha, respectivamente. A potência instantânea total é a soma das potências instantâneas de fase, o que se reduz a $1{,}5V_m I_m \cos\theta_\phi$; isto é,

$$p_T = p_A + p_B + p_C = 1{,}5V_m I_m \cos\theta_\phi.$$

Observe que esse resultado é consistente com a Equação 11.35, visto que $V_m = \sqrt{2}V_\phi$ e $I_m = \sqrt{2}I_\phi$ (veja o Problema 11.29, apresentado no final do capítulo).

Os exemplos 11.3 — 11.5 ilustram cálculos de potência em circuitos trifásicos equilibrados.

Exemplo 11.3 Cálculo da potência em um circuito trifásico Y-Y

a) Calcule a potência média por fase fornecida à carga ligada em Y do Exemplo 11.1.
b) Calcule a potência média total fornecida à carga.
c) Calcule a potência média total dissipada na linha.
d) Calcule a potência média total dissipada no gerador.
e) Calcule a potência reativa total absorvida pela carga.
f) Calcule a potência complexa total fornecida pela fonte.

Solução

a) Pelo Exemplo 11.1, $V_\phi = 115{,}22$ V, $I_\phi = 2{,}4$ A e $\theta_\phi = -1{,}19 - (-36{,}87) = 35{,}68°$.

Portanto,

$$P_\phi = (115{,}22)(2{,}4)\cos 35{,}68°$$
$$= 224{,}64 \text{ W}.$$

A potência média por fase também pode ser calculada por $I_\phi^2 R_\phi$, ou

$$P_\phi = (2{,}4)^2(39) = 224{,}64 \text{ W}.$$

b) A potência média total fornecida à carga é $P_T = 3P_\phi = 673{,}92$ W. Como calculamos a tensão de linha no Exemplo 11.1, podemos usar também a Equação 11.36:

$$P_T = \sqrt{3}(199{,}58)(2{,}4)\cos 35{,}68°$$
$$= 673{,}92 \text{ W}.$$

c) A potência média total dissipada na linha é

$$P_{linha} = 3(2{,}4)^2(0{,}8) = 13{,}824 \text{ W}.$$

d) A potência média dissipada internamente no gerador é

$$P_{ger} = 3(2{,}4)^2(0{,}2) = 3{,}456 \text{ W}.$$

e) A potência reativa total absorvida pela carga é

$$Q_T = \sqrt{3}(199{,}58)(2{,}4)\operatorname{sen}35{,}68°$$
$$= 483{,}84 \text{ VAR}.$$

f) A potência complexa total associada à fonte é

$$S_T = 3S_\phi = -3(120)(2{,}4)\angle 36{,}87°$$
$$= -691{,}20 - j518{,}40 \text{ VA}.$$

O sinal negativo indica que a potência média e a potência reativa estão sendo fornecidas ao circuito. Verificamos esse resultado calculando a potência média e a potência reativa absorvidas pelo circuito:

$$P = 673{,}92 + 13{,}824 + 3{,}456$$
$$= 691{,}20 \text{ W (confere)}$$

$$Q = 483{,}84 + 3(2{,}4)^2(1{,}5) + 3(2{,}4)^2(0{,}5)$$
$$= 483{,}84 + 25{,}92 + 8{,}64$$
$$= 518{,}40 \text{ VAR (confere)}.$$

Exemplo 11.4 Cálculo da potência em um circuito trifásico Y-delta

a) Calcule a potência complexa total fornecida à carga ligada em Δ do Exemplo 11.2.
b) Qual porcentagem da potência média disponível no início da linha é fornecida à carga?

Solução

a) Usando os valores da fase *a* da solução do Exemplo 11.2, obtemos

$$\mathbf{V}_\phi = \mathbf{V}_{AB} = 202{,}72 \angle 29{,}04° \text{ V},$$
$$\mathbf{I}_\phi = \mathbf{I}_{AB} = 1{,}39 \angle -6{,}87° \text{ A}.$$

Usando as equações 11.52 e 11.53, temos

$$S_T = 3(202{,}72 \angle 29{,}04°)(1{,}39 \angle 6{,}87°)$$
$$= 682{,}56 + j494{,}21 \text{ VA}.$$

b) A potência média disponível no início da linha de distribuição é igual à potência média fornecida à carga mais a potência média dissipada na linha; assim

$$P_{\text{início}} = 682{,}56 + 3(2{,}4)^2(0{,}3)$$
$$= 687{,}74 \text{ W}.$$

A porcentagem da potência média que chega à carga é 682,56/687,74, ou 99,25%. Aproximadamente 100% da potência média disponível no início da linha é fornecida à carga, pois a impedância da linha é muito pequena em comparação com a impedância da carga.

Exemplo 11.5 Cálculo da potência trifásica com uma carga de tipo não especificado

Uma carga trifásica equilibrada requer 480 kW a um fator de potência atrasado de 0,8. A carga é alimentada por uma linha de impedância 0,005 + *j*0,025 Ω/*ϕ*. A tensão de linha nos terminais da carga é 600 V.

a) Construa um circuito monofásico equivalente do sistema.
b) Calcule o módulo da corrente de linha.
c) Calcule o módulo da tensão de linha no início.
d) Calcule o fator de potência no início da linha.

Solução

a) A Figura 11.17 mostra o circuito monofásico equivalente. Selecionamos arbitrariamente a tensão fase-neutro na carga como referência.

b) A corrente de linha $\mathbf{I}^*_{aA}$ é dada por

$$\left(\frac{600}{\sqrt{3}}\right)\mathbf{I}^*_{aA} = (160 + j120)10^3,$$

ou

$$\mathbf{I}^*_{aA} = 577{,}35 \angle 36{,}87° \text{ A}.$$

Portanto, $\mathbf{I}_{aA} = 577{,}35 \angle -36{,}87°$ A. O módulo da corrente de linha é o módulo de $\mathbf{I}_{aA}$:

$$I_L = 577{,}35 \text{ A}.$$

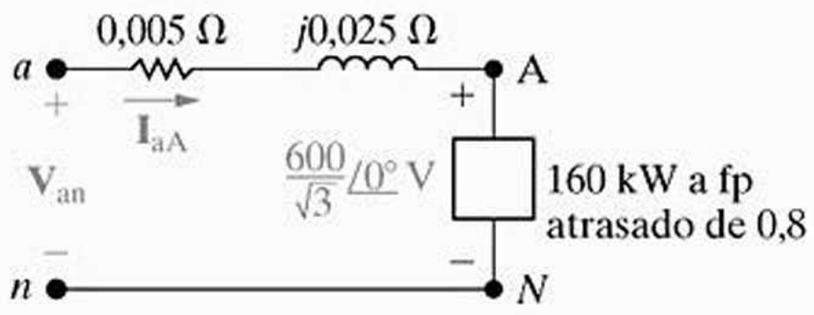


Figura 11.17 ▲ Circuito monofásico equivalente para o Exemplo 11.5

Obtemos uma solução alternativa para IL pela expressão

$$P_T = \sqrt{3}V_L I_L \cos\theta_p$$
$$= \sqrt{3}(600)I_L(0{,}8)$$
$$= 480.000 \text{ W};$$
$$I_L = \frac{480.000}{\sqrt{3}(600)(0{,}8)} = \frac{1.000}{\sqrt{3}} = 577{,}35 \text{ A}.$$

c) Para calcular o módulo da tensão de linha no início da linha, em primeiro lugar calculamos $\mathbf{V}_{an}$. Pela Figura 11.17,

$$\mathbf{V}_{an} = \mathbf{V}_{AN} + Z_\ell \mathbf{I}_{aA}$$
$$= \frac{600}{\sqrt{3}} + (0{,}005 + j0{,}025)(577{,}35 \angle -36{,}87°)$$
$$= 357{,}51 \angle 1{,}57° \text{ V}.$$

Assim,

$$V_L = \sqrt{3}|\mathbf{V}_{an}|$$
$$= 619{,}23 \text{ V}.$$

d) O fator de potência no início da linha é o co-seno do ângulo entre $\mathbf{V}_{an}$ e $\mathbf{I}_{aA}$:

$$\text{fp} = \cos[1{,}57° - (-36{,}87°)]$$
$$= \cos 38{,}44°$$
$$= 0{,}783 \text{ atrasado}.$$

Um método alternativo para o cálculo do fator de potência é calcular, em primeiro lugar, a potência complexa no início da linha:

$$S_\phi = (160 + j120)10^3 + (577{,}35)^2(0{,}005 + j0{,}025)$$
$$= 161{,}67 + j128{,}33 \text{ kVA}$$
$$= 206{,}41 \angle 38{,}44° \text{ kVA}.$$

O fator de potência é

$$\begin{aligned} \text{fp} &= \cos 38{,}44° \\ &= 0{,}783 \text{ atrasado.} \end{aligned}$$

Por fim, se calcularmos a potência complexa total no início da linha depois do cálculo do módulo da corrente de linha, podemos usar este valor para calcular V_L. Isto é,

$$\sqrt{3}V_L I_L = 3(206{,}41) \times 10^3,$$

$$V_L = \frac{3(206{,}41) \times 10^3}{\sqrt{3}(577{,}35)},$$

$$= 619{,}23 \text{ V}.$$

✔ PROBLEMAS PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 3 — Saber calcular a potência (média, reativa e complexa) em qualquer circuito trifásico

11.8 A potência trifásica média nominal da unidade central de processamento (CPU) de um computador de grande porte é 22.659 W. A tensão nominal de linha do circuito que alimenta o computador é 208 V (ef). A corrente de linha é 73,8 A (ef). O computador absorve potência reativa.

a) Calcule a potência reativa magnetizadora total absorvida pela CPU.
b) Calcule o fator de potência.

Resposta: (a)13.909,50 VAR; (b) 0,852 atrasado.

11.9 A potência complexa associada a cada fase de uma carga equilibrada é 384 + *j*288 kVA. A tensão de linha nos terminais da carga é 4.160 V.

a) Qual é o módulo da corrente de linha que alimenta a carga?
b) A carga está ligada em delta e a impedância de cada fase consiste em uma resistência em paralelo com uma reatância. Calcule R e X.
c) A carga está ligada em Y e a impedância de cada fase consiste em uma resistência em série com uma reatância. Calcule R e X.

Resposta: (a) 199,95 A;
(b) $R = 45{,}07\ \Omega$, $X = 60{,}09\ \Omega$;
(c) $R = 9{,}61\ \Omega$, $X = 7{,}21\ \Omega$.

NOTA: Tente resolver também os problemas 11.24 e 11.25, apresentados no final deste capítulo.

11.6 Medição de potência média em circuitos trifásicos

O instrumento básico utilizado para medir potência em circuitos trifásicos é o wattímetro. O instrumento contém duas bobinas: a primeira, denominada *bobina de corrente*, é estacionária e projetada para conduzir uma corrente proporcional à corrente de carga. A segunda, denominada *bobina de potencial*, é móvel e conduz uma corrente proporcional à tensão de carga. As características importantes do wattímetro são mostradas na Figura 11.18.

A deflexão do ponteiro ligado à bobina móvel é proporcional ao produto entre o valor eficaz da corrente na bobina de corrente, o valor eficaz da tensão nos terminais da bobina de potencial e o co-seno do ângulo de fase entre a tensão e a corrente. A direção de deflexão do ponteiro depende do sentido instantâneo da corrente na bobina de corrente e da polaridade da tensão aplicada à bobina de potencial. Assim, cada bobina tem um terminal com uma marca de polaridade — normalmente um sinal positivo (+) — porém, às vezes é utilizado o sinal (±), de dupla polaridade. O wattímetro deflete no sentido do crescimento da escala quando (1) o terminal marcado da bobina de corrente estiver do lado da fonte e (2) o terminal marcado da bobina de potencial estiver ligado à mesma linha em que a bobina de corrente foi inserida.

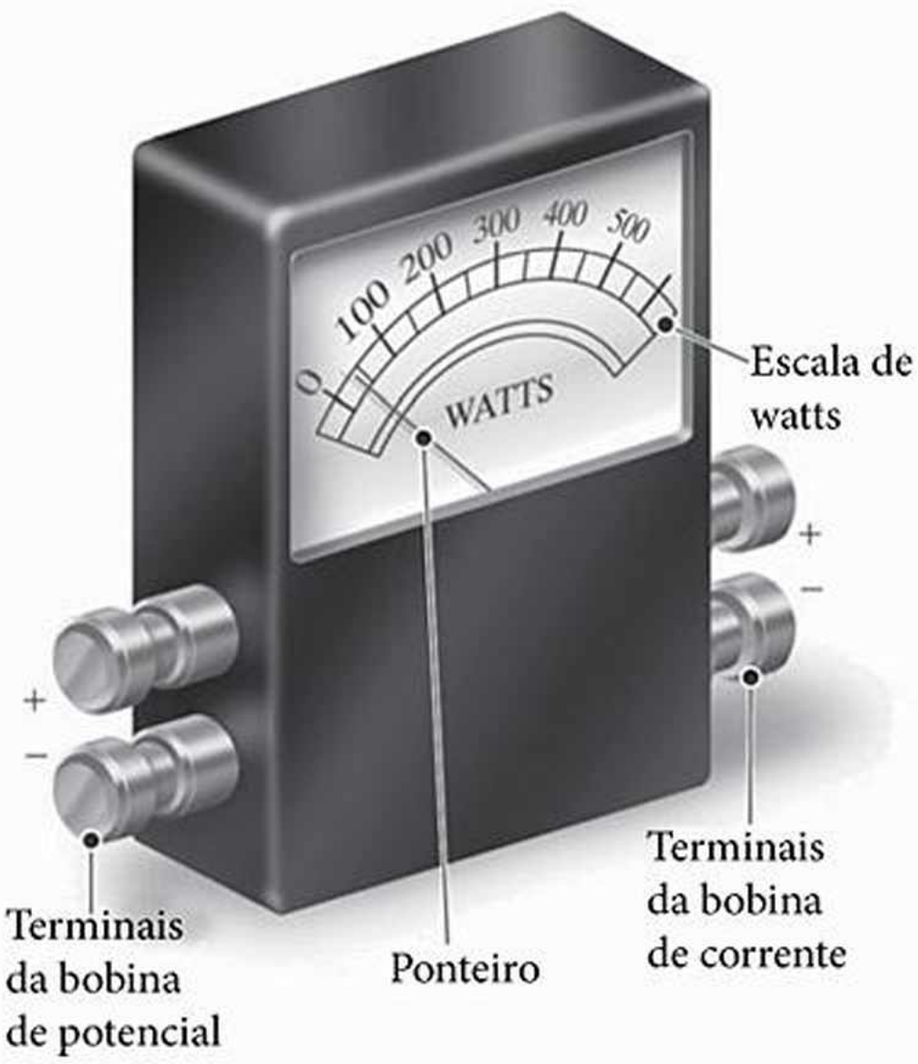


Figura 11.18 ▲ Principais características de um wattímetro típico.

O método de dois wattímetros

Considere um circuito geral no interior de uma caixa alimentado por n condutores. Essa situação é mostrada na Figura 11.19.

Se desejarmos medir a potência total nos terminais do circuito, precisamos conhecer $n - 1$ correntes e tensões. Isso porque, se escolhermos um dos terminais como referência, haverá somente $n - 1$ tensões independentes. Da mesma maneira, somente $n - 1$ correntes independentes podem existir nos n condutores que entram na caixa. Assim, a potência total é a soma de $n - 1$ produtos; isto é, $p = v_1 i_1 + v_2 i_2 + \ldots + v_{n-1} i_{n-1}$.

Por essa observação geral, podemos ver que, para um circuito de três condutores, equilibrado ou não, precisamos de apenas dois wattímetros para medir a potência total. Para um circuito de quatro condutores, precisamos de três wattímetros se o circuito trifásico não for equilibrado, mas de apenas dois wattímetros se ele for equilibrado, pois, nesse caso, não há nenhuma corrente no neutro. Assim, somente dois wattímetros são necessários para medir a potência média total em qualquer sistema trifásico equilibrado.

O método de dois wattímetros reduz-se a determinar o módulo e o sinal algébrico da potência média indicada por cada wattímetro. Podemos descrever o problema básico em relação ao circuito mostrado na Figura 11.20, em que os dois wattímetros são indicados pelos retângulos sombreados W_1 e W_2. As notações *bc* e *bp* das bobinas representam bobina de corrente e bobina de potencial, respectivamente.

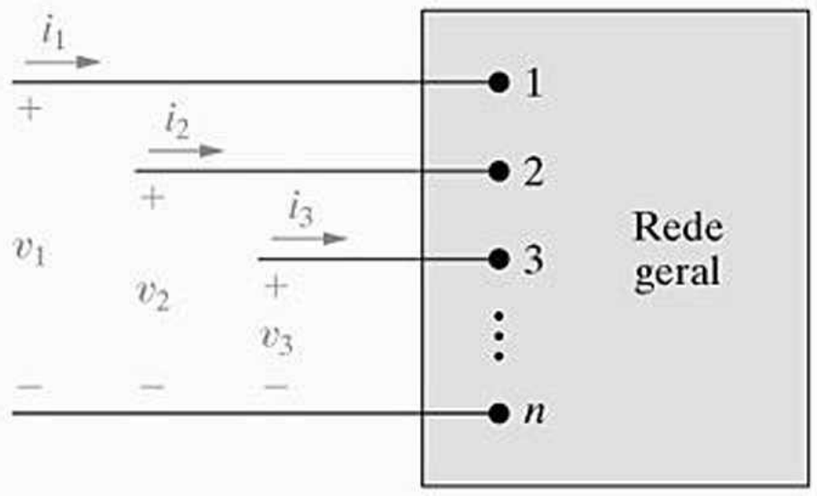


Figura 11.19 ▲ Circuito geral alimentado por n condutores.

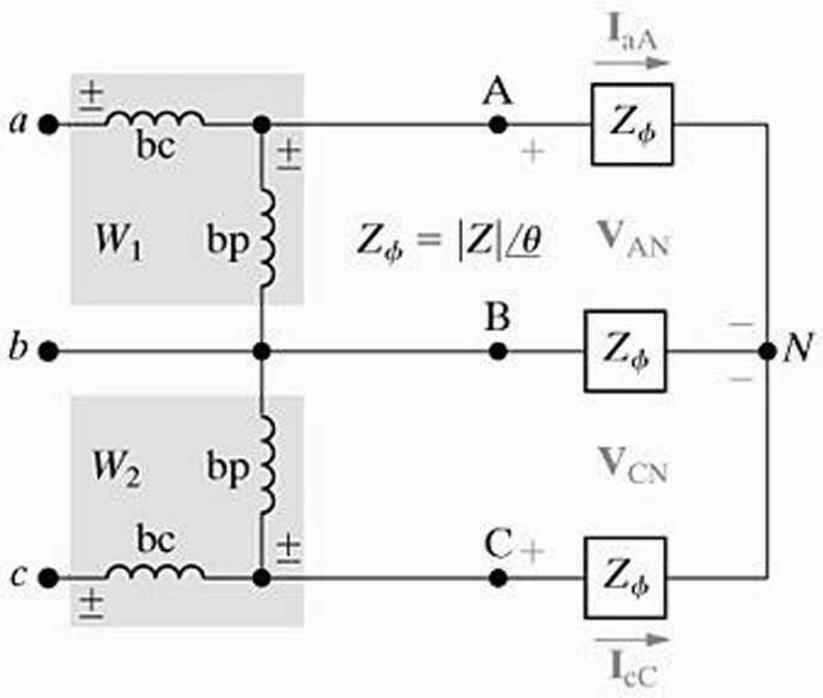


Figura 11.20 ▲ Circuito utilizado para analisar o método de dois wattímetros para medir a potência média fornecida a uma carga equilibrada.

Optamos por inserir as bobinas de corrente dos wattímetros nas linhas aA e cC. Assim, a linha bB é a linha de referência para as duas bobinas de potencial. A carga está ligada em Y e a impedância de carga por fase é designada $Z_\phi = |Z|\angle\theta$. Essa é uma representação geral, porque qualquer carga ligada em Δ pode ser representada por seu circuito equivalente em Y; ademais, no caso equilibrado, o ângulo da impedância θ não é afetado pela transformação Δ-Y.

Escreveremos, agora, equações gerais para as leituras dos dois wattímetros. Admitamos que a corrente conduzida pela bobina de potencial seja desprezível em comparação com a corrente de linha medida pela bobina de corrente. Admitamos ainda que as cargas possam ser modeladas por elementos passivos, de modo que o ângulo de fase da impedância da carga (θ na Figura 11.20) fique entre −90° (capacitância pura) e +90° (indutância pura). Por fim, admitamos uma seqüência de fases positiva.

Por nossa discussão introdutória da deflexão do ponteiro do wattímetro, podemos ver que o wattímetro 1 responderá ao produto de $|\mathbf{V}_{AB}|$ por $|\mathbf{I}_{aA}|$ e pelo co-seno do ângulo entre $\mathbf{V}_{AB}$ e $\mathbf{I}_{aA}$. Chamando essa leitura de W_1, podemos escrever

$$W_1 = |\mathbf{V}_{AB}||\mathbf{I}_{aA}| \cos\theta_1$$

$$= V_L I_L \cos\theta_1 . \tag{11.54}$$

Decorre que

$$W_2 = |\mathbf{V}_{CB}||\mathbf{I}_{cC}| \cos\theta_2$$

$$= V_L I_L \cos\theta_2 . \tag{11.55}$$

Na Equação 11.54, θ_1 é o ângulo de fase entre $\mathbf{V}_{AB}$ e $\mathbf{I}_{aA}$ e, na Equação 11.55, θ_2 é o ângulo de fase entre $\mathbf{V}_{CB}$ e $\mathbf{I}_{cC}$.

Para calcular W_1 e W_2, expressamos θ_1 e θ_2 em termos do ângulo da impedância θ, que também é o mesmo que o ângulo de fase entre a tensão e a corrente de fase. Para uma seqüência de fases positiva,

$$\theta_1 = \theta + 30° = \theta_\phi + 30°, \tag{11.56}$$

$$\theta_2 = \theta - 30° = \theta_\phi - 30°. \tag{11.57}$$

A dedução das equações 11.56 e 11.57 fica para o leitor, como exercício (veja o Problema 11.32, apresentado no final do capítulo). Quando substituímos as equações 11.56 e 11.57 nas equações 11.54 e 11.55, respectivamente, obtemos

$$W_1 = V_L I_L \cos(\theta_\phi + 30°), \tag{11.58}$$

$$W_2 = V_L I_L \cos(\theta_\phi - 30°). \tag{11.59}$$

Para determinar a potência total, somamos W_1 e W_2; assim,

$$P_T = W_1 + W_2 = 2V_L I_L \cos\theta_\phi \cos 30°$$

$$= \sqrt{3} V_L I_L \cos\theta_\phi, \tag{11.60}$$

que é a expressão para a potência média em um circuito trifásico. Portanto, confirmamos que a soma das leituras dos dois wattímetros resulta na potência média total.

Um exame mais detalhado das equações 11.58 e 11.59 revela o seguinte sobre os dois wattímetros:

1. Se o fator de potência for maior que 0,5, as leituras dos dois wattímetros serão positivas.
2. Se o fator de potência for igual a 0,5, a leitura de um dos wattímetros será zero.
3. Se o fator de potência for menor que 0,5, a leitura de um dos wattímetros será negativa.
4. Inverter a seqüência de fases causará a inversão das leituras dos dois wattímetros.

Essas observações são ilustradas no exemplo a seguir e nos problemas 11.43–11.51, apresentados no final do capítulo.

Exemplo 11.6 Cálculo de leituras de wattímetros em circuitos trifásicos

Calcule a leitura de cada wattímetro no circuito da Figura 11.20 se a tensão de fase na carga for 120 V e (a) $Z_\phi = 8 + j6\ \Omega$; (b) $Z_\phi = 8 - j6\ \Omega$; (c) $Z_\phi = 5 + j5\sqrt{3}\ \Omega$ e (d) $Z_\phi = 10\ \angle -75°\ \Omega$. (e) Verifique, para os itens (a)–(d), se a soma das leituras dos wattímetros é igual à potência média fornecida à carga.

Solução

a) $Z_\phi = 10\ \angle 36{,}87°\ \Omega$, $V_L = 120\sqrt{3}$ V,
$I_L = 120/10 = 12$ A.

$$W_1 = (120\sqrt{3})(12)\cos(36{,}87° + 30°) = 979{,}75 \text{ W},$$

$$W_2 = (120\sqrt{3})(12)\cos(36{,}87° - 30°) = 2.476{,}25 \text{ W}.$$

b) $Z_\phi = 10\ \angle -36{,}87°\ \Omega$, $V_L = 120\sqrt{3}$ V,
$I_L = 120/10 = 12$ A.

$$W_1 = (120\sqrt{3})(12)\cos(-36{,}87° + 30°) = 2.476{,}25 \text{ W},$$

$$W_2 = (120\sqrt{3})(12)\cos(-36{,}87° - 30°) = 979{,}75 \text{ W}.$$

c) $Z_\phi = 5(1 + j\sqrt{3}) = 10\ \angle 60°\ \Omega$, $V_L = 120\sqrt{3}$ V,
$I_L = 12$ A.

$$W_1 = (120\sqrt{3})(12)\cos(60° + 30°) = 0,$$

$$W_2 = (120\sqrt{3})(12)\cos(60° - 30°)$$

d) $Z_\phi = 10\ \angle -75°\ \Omega$, $V_L = 120\sqrt{3}$ V,
$I_L = 12$ A.

$$W_1 = (120\sqrt{3})(12)\cos(-75° + 30°) = 1.763{,}63 \text{ W},$$

$$W_2 = (120\sqrt{3})(12)\cos(-75° - 30°) = -645{,}53 \text{ W}.$$

e) $P_T(\text{a}) = 3(12)^2(8) = 3.456$ W

$$W_1 + W_2 = 979{,}75 + 2.476{,}25 = 3.456 \text{ W}$$

$$P_T(\text{b}) = P_T(\text{a}) = 3.456 \text{ W}$$

$$W_1 + W_2 = 2.476{,}25 + 979{,}75 = 3.456 \text{ W}$$

$$P_T(\text{c}) = 3(12)^2(5) = 2.160 \text{ W}$$

$$W_1 + W_2 = 0 + 2.160 = 2.160 \text{ W}$$

$$P_T(\text{d}) = 3(12)^2(2{,}5882) = 1.118{,}10 \text{ W}$$

$$W_1 + W_2 = 1.763{,}63 - 645{,}53 = 1.118{,}10 \text{ W}$$

NOTA: Avalie o que entendeu do método de dois wattímetros tentando resolver os problemas 11.41 e 11.42, apresentados no final deste capítulo.

Perspectiva prática

Transmissão e distribuição de energia elétrica

No início deste capítulo, destacamos a obrigação que as concessionárias de energia elétrica têm de manter o valor eficaz da tensão fornecida a seus clientes. Embora o desvio aceitável em relação ao valor nominal possa variar de país para país, para a finalidade da discussão admitiremos uma tolerância aceitável de ± 5,8%. Portanto, uma tensão eficaz nominal de 120 V poderia variar entre 113 e 127 V. Destacamos também que capacitores colocados em posições estratégicas no sistema poderiam ser utilizados para manter os níveis de tensão.

O circuito mostrado na Figura 11.21 representa uma subestação de um sistema de distribuição. Admitiremos que o sistema seja equilibrado, que a tensão fase-fase na subestação seja 13,8 kV, que a impedância de fase da linha de distribuição seja $0{,}6 + j4{,}8\Omega$ e que a carga na subestação às três horas da tarde de um dia quente e úmido de verão seja 3,6 MW e 3,6 MVAR.

Usando a tensão fase-neutro na subestação como referência, o circuito monofásico equivalente para o sistema na Figura 11.21 é mostrado na Figura 11.22. A corrente de linha

pode ser calculada pela expressão para a potência complexa na subestação. Assim,

$$\frac{13.800}{\sqrt{3}}\mathbf{I}_{aA}^{*} = (1{,}2 + j1{,}2)10^{6}.$$

Decorre que

$$\mathbf{I}_{aA}^{*} = 150{,}61 + j150{,}61 \text{ A}$$

ou

$$\mathbf{I}_{aA} = 150{,}61 - j150{,}61 \text{ A}.$$

A tensão fase-neutro na usina geradora é

$$\mathbf{V}_{an} = \frac{13.800}{\sqrt{3}}\angle 0° + (0{,}6 + j4{,}8)(150{,}61 - j150{,}61)$$

$$= 8.780{,}74 + j632{,}58$$

$$= 8.803{,}50\angle 4{,}12° \text{ V}.$$

Assim, o módulo da tensão de linha na usina geradora é

$$|\mathbf{V}_{ab}| = \sqrt{3}(8803{,}50) = 15.248{,}11 \text{ V}.$$

Estamos admitindo que a concessionária deva manter o nível de tensão entre ±5,8% do valor nominal. Isso significa que o módulo da tensão fase-fase na usina geradora não deve exceder 14,6 kV nem ser menor do que 13 kV. Portanto, o módulo da tensão de linha calculado poderia causar problemas para os clientes.

Quando um banco de capacitores é ligado ao barramento da subestação para compensar a energia reativa fornecida à carga, a corrente de linha $\mathbf{I}_{aA}$ torna-se

$$\mathbf{I}_{aA} = 150{,}61 + j0 \text{ A}$$

Assim, a tensão na usina geradora necessária para manter uma tensão fase-fase de 13.800 V na subestação é

$$\mathbf{V}_{an} = \frac{13.800}{\sqrt{3}}\angle 0° + (0{,}6 + j4{,}8)(150{,}61 + j0)$$

$$= 8.057{,}80 + j722{,}94$$

$$= 8.090{,}17\angle 5{,}13° \text{ V}.$$

Daí,

$$|\mathbf{V}_{ab}| = \sqrt{3}\,(8.090{,}17) = 14.012{,}58\,V.$$

Esse nível de tensão está dentro da faixa admissível de 13 kV a 14,6 kV.

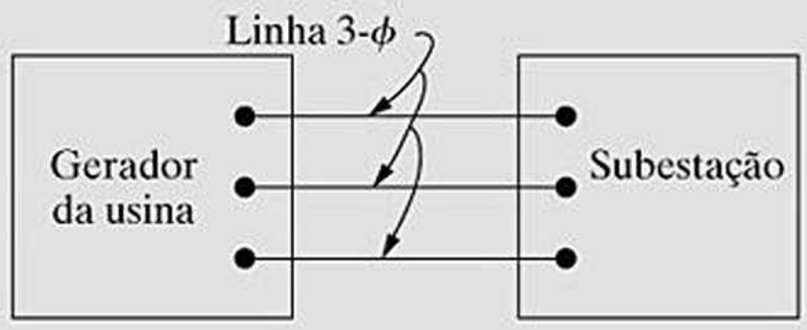


Figura 11.21 ▲ Subestação ligada a uma usina geradora por uma linha trifásica.

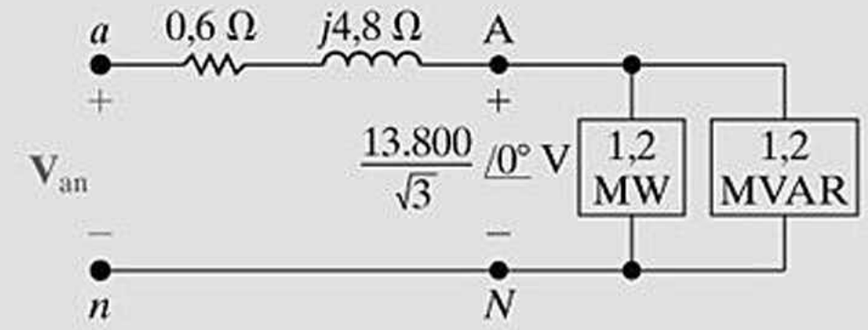


Figura 11.22 ▲ Circuito monofásico equivalente para o sistema na Figura 11.21.

NOTA: Avalie o que entendeu dessa "Perspectiva prática" tentando resolver os problemas 11.52(a) – (b) e 11.53 – 11.55, apresentados no final deste capítulo.

Resumo

- A primeira etapa ao analisar circuitos trifásicos equilibrados é transformar quaisquer ligações em Δ em ligações em Y, de modo que o circuito global tenha a configuração Y-Y.
- Um *circuito monofásico equivalente* é utilizado para calcular a corrente de linha e a tensão de fase em uma das fases do circuito Y-Y. Normalmente, a fase *a* é escolhida para essa finalidade.
- Uma vez conhecidas a corrente de linha e a tensão de fase no circuito equivalente da fase *a*, podemos determinar qualquer corrente ou tensão em um circuito trifásico equilibrado, com base nos seguintes fatos:
  - As correntes e tensões das fases *b* e *c* são idênticas à corrente e tensão da fase *a*, exceto por um deslocamento de fase de 120°. Em um circuito de seqüência positiva, a grandeza da fase *b* está 120° atrasada em relação à grandeza da fase *a*, e a grandeza da fase *c* está 120° adiantada em relação à grandeza da fase *a*. No caso de um circuito de seqüência negativa, as fases *b* e *c* são intercambiadas em relação à fase *a*.
- O conjunto das tensões de linha está ±30° defasado em relação ao conjunto de tensões de fase. O sinal positivo ou negativo corresponde à seqüência positiva e à seqüência negativa, respectivamente.
- Em um circuito Y-Y, o módulo de uma tensão de linha é $\sqrt{3}$ vezes o módulo de uma tensão de fase.
- O conjunto de correntes de linha está ±30° defasado em relação ao conjunto de correntes de fase em fontes e cargas ligadas em Δ. O sinal positivo ou negativo corresponde à seqüência positiva e à seqüência negativa, respectivamente.

- O módulo de uma corrente de linha é $\sqrt{3}$ vezes o módulo de uma corrente de fase em uma fonte ou carga ligada em Δ.

- As técnicas para calcular a potência média, a potência reativa e a potência complexa por fase são idênticas às apresentadas no Capítulo 10.
- As potências ativa, reativa e complexa totais podem ser determinadas multiplicando-se a quantidade correspondente por fase por 3 ou usando as expressões baseadas em correntes de linha e tensões de linha, como dadas pelas equações 11.36, 11.38 e 11.41.
- A potência instantânea total em um circuito trifásico equilibrado é constante e igual a 1,5 vez a potência média por fase.
- Um wattímetro mede a potência média fornecida a uma carga usando uma bobina de corrente ligada em série com a carga e uma bobina de potencial ligada em paralelo com a carga.
- A potência média total em um circuito trifásico equilibrado pode ser medida somando as leituras de dois wattímetros ligados em duas fases diferentes do circuito.

Problemas

Todas as tensões fasoriais nos problemas a seguir são expressas em termos do valor eficaz.

Seção 11.1

11.1* Qual é a seqüência de fase de cada um dos seguintes conjuntos de tensões?

a) $v_a = 120 \cos(\omega t + 54°)$ V,
$v_b = 120 \cos(\omega t - 66°)$ V,
$v_c = 120 \cos(\omega t + 174°)$ V.

b) $v_a = 3.240 \cos(\omega t - 26°)$ V,
$v_b = 3.240 \cos(\omega t + 94°)$ V,
$v_c = 3.240 \cos(\omega t - 146°)$ V.

11.2* Para cada conjunto de tensões, diga se as tensões formam ou não um conjunto trifásico equilibrado. Se o conjunto for equilibrado, diga se a seqüência de fases é positiva ou negativa. Se o conjunto não for equilibrado, explique por quê.

a) $v_a = 339 \cos 377t$ V,
$v_b = 339 \cos(377t - 120°)$ V,
$v_c = 339 \cos(377t + 120°)$ V.

b) $v_a = 622 \operatorname{sen} 377t$ V,
$v_b = 622 \operatorname{sen}(377t - 240°)$ V,
$v_c = 622 \operatorname{sen}(377t + 240°)$ V.

c) $v_a = 933 \operatorname{sen} 377t$ V,
$v_b = 933 \operatorname{sen}(377t + 240°)$ V,
$v_c = 933 \cos(377t + 30°)$ V.

d) $v_a = 170 \operatorname{sen}(\omega t + 60°)$ V,
$v_b = 170 \operatorname{sen}(\omega t + 180°)$ V,
$v_c = 170 \cos(\omega t - 150°)$ V.

e) $v_a = 339 \cos(\omega t + 30°)$ V,
$v_b = 339 \cos(\omega t - 90°)$ V,
$v_c = 393 \cos(\omega t + 240°)$ V.

f) $v_a = 3.394 \operatorname{sen}(\omega t + 70°)$ V,
$v_b = 3.394 \cos(\omega t - 140°)$ V,
$v_c = 3.394 \cos(\omega t + 180°)$ V.

11.3 Verifique se a Equação 11.3 é válida para a Equação 11.1 ou para a Equação 11.2.

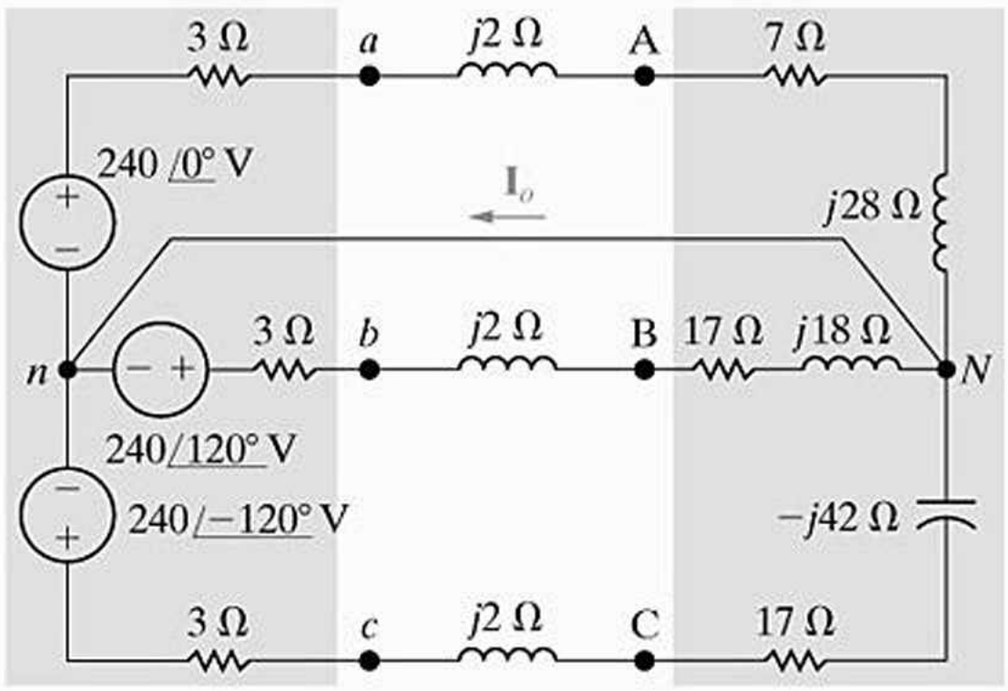
Seção 11.2

11.4 Consulte o circuito da Figura 11.5(b). Admita que não haja ligações externas aos terminais *a,b,c*. Admita ainda que os três enrolamentos sejam de um gerador trifásico equilibrado. Que corrente circulará no gerador ligado em Δ?

Seção 11.3

11.5 PSPICE
a) O circuito na Figura P11.5 é ou não um sistema trifásico equilibrado? Explique.
b) Determine $\mathbf{I}_o$.

Figura P11.5



11.6 PSPICE
a) Determine $\mathbf{I}_o$ no circuito da Figura P11.6.
b) Determine $\mathbf{V}_{AN}$.
c) Determine $\mathbf{V}_{AB}$.
d) O circuito é ou não um sistema trifásico equilibrado?

11.7 PSPICE Determine o valor eficaz de $\mathbf{I}_o$ no circuito trifásico não equilibrado da Figura P11.7.

11.8* As expressões no domínio do tempo para as três tensões fase-neutro nos terminais de uma carga ligada em Y são

$$v_{AN} = 7.967 \cos \omega t \text{ V},$$
$$v_{BN} = 7.967 \cos(\omega t + 120°) \text{ V},$$
$$v_{CN} = 7.967 \cos(\omega t - 120°) \text{ V}.$$

Quais são as expressões no domínio do tempo para as três tensões fase-fase v_{AB}, v_{BC} e v_{CA}?

11.9* O módulo da tensão de linha nos terminais de uma carga equilibrada ligada em Y é 12.800 V. A impedância de carga é $216 + j63\ \Omega/\phi$. A carga é alimentada por uma linha cuja impedância é $0{,}25 + j2\ \Omega/\phi$.

a) Qual é o módulo da corrente de linha?
b) Qual é o módulo da tensão de linha na fonte?

Figura P11.6

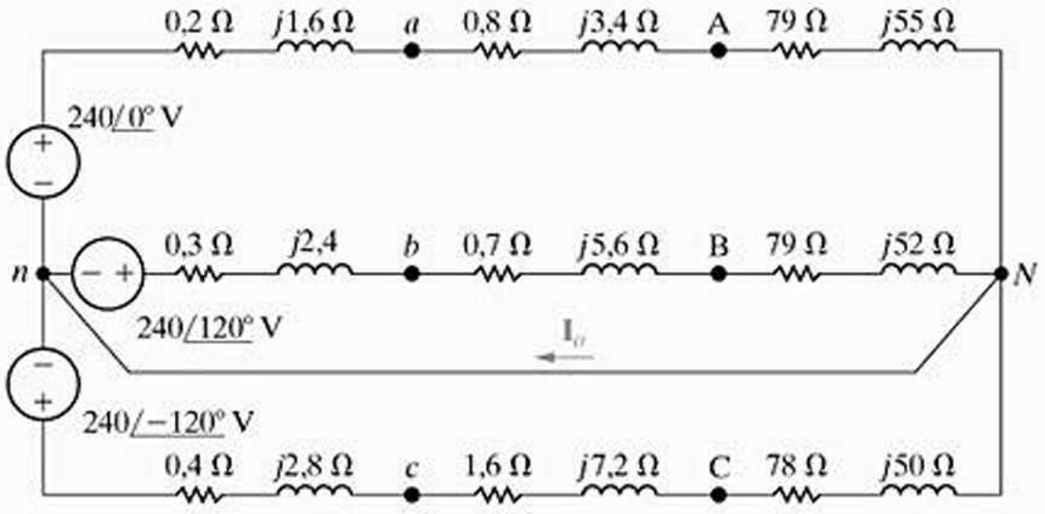
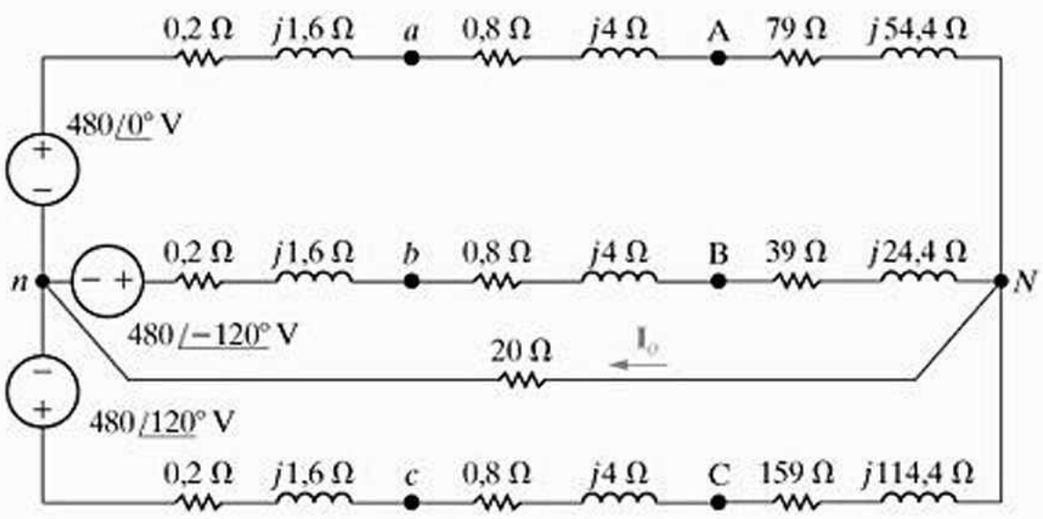


Figura P11.7



11.10* O módulo da tensão de fase de uma fonte trifásica ideal equilibrada ligada em Y é 4.800 V. A fonte está ligada a uma carga equilibrada ligada em Y por uma linha de distribuição que tem uma impedância de $2 + j16\ \Omega/\phi$. A impedância de carga é $190 + j40\ \Omega/\phi$. A seqüência de fases da fonte é *acb*. Use a tensão da fase *a* da fonte como referência. Calcule o módulo e o ângulo de fase das seguintes grandezas: (a) as três correntes de linha, (b) as três tensões de linha na fonte, (c) as três tensões de fase na carga e (d) as três tensões de linha na carga.

11.11 Um circuito trifásico equilibrado tem as seguintes características:

- Ligado em Y-Y;
- A tensão de linha na fonte, $\mathbf{V}_{ab}$, é $120\sqrt{3}\angle 0°$ V;
- A seqüência de fases é positiva;
- A impedância de linha é $2 + j3\ \Omega/\phi$;
- A impedância de carga é $28 + j37\ \Omega/\phi$.

a) Desenhe o circuito monofásico equivalente para a fase *a*.
b) Calcule a corrente de linha na fase *a*.
c) Calcule a tensão de linha na carga.

Seção 11.4

11.12 Uma carga equilibrada ligada em Δ tem uma impedância de $360 + j105\ \Omega/\phi$. A carga é alimentada por uma linha cuja impedância é $0{,}1 + j1\ \Omega/\phi$. A tensão de fase nos terminais da carga é 33 kV. A seqüência de fases é positiva. Use $\mathbf{V}_{AB}$ como referência.

a) Calcule as três correntes de fase da carga.
b) Calcule as três correntes de linha.
c) Calcule as três tensões de linha no início da linha.

11.13 Uma carga equilibrada ligada em Y tem uma impedância de $96 - j28\ \Omega/\phi$ e está ligada em paralelo com uma carga equilibrada ligada em Δ cuja impedância é $144 + j42\ \Omega/\phi$. As cargas em paralelo são alimentadas por uma linha com uma impedância de $j1{,}5\ \Omega/\phi$. O módulo da tensão fase-neutro da carga em Y é 7.500 V.

a) Calcule o módulo da corrente na linha que alimenta as cargas.
b) Calcule o módulo da corrente de fase na carga ligada em Δ.
c) Calcule o módulo da corrente de fase na carga ligada em Y.
d) Calcule o módulo da tensão de linha no início da linha.

11.14* Um circuito trifásico equilibrado é caracterizado da seguinte forma:

- Está ligado em Y;
- A tensão da fonte na fase *b* é $20\angle -90°$ V;
- A seqüência de fases da fonte é *acb*;
- A impedância de linha é $1 + j3\ \Omega/\phi$;
- A impedância de carga é $117 - j99\ \Omega/\phi$.

a) Desenhe o equivalente monofásico para a fase *a*.
b) Calcule a corrente de linha na fase *a*.
c) Calcule a tensão de linha na carga trifásica.

11.15* Em um sistema trifásico equilibrado, a fonte é equilibrada, ligada em Y, com uma seqüência de fases *abc* e uma tensão de linha $\mathbf{V}_{ab} = 208\angle 50°$ V. A carga é ligada em Y, equilibrada, em paralelo com uma carga em Δ, equilibrada. A impedância de fase da carga em Y é $4 + j3\ \Omega/\phi$ e a impedância de fase da carga em Δ é $3 - j9\ \Omega/\phi$. A impedância de linha é $1{,}4 + j0{,}8\ \Omega/\phi$. Desenhe o circuito monofásico equivalente e use-o para calcular a tensão de linha na carga.

11.16* Uma fonte trifásica equilibrada ligada em Y, com seqüência *abc*, fornece energia a uma carga trifásica, equilibrada, ligada em Δ, cuja impedância é $12 + j9\ \Omega/\phi$. A tensão da fonte na fase *a* é $120\angle 80°$ V. A impedância de linha é $1 + j1\ \Omega/\phi$. Desenhe o circuito monofásico equivalente para a fase *a* e use-o para determinar a corrente na fase *a* da carga.

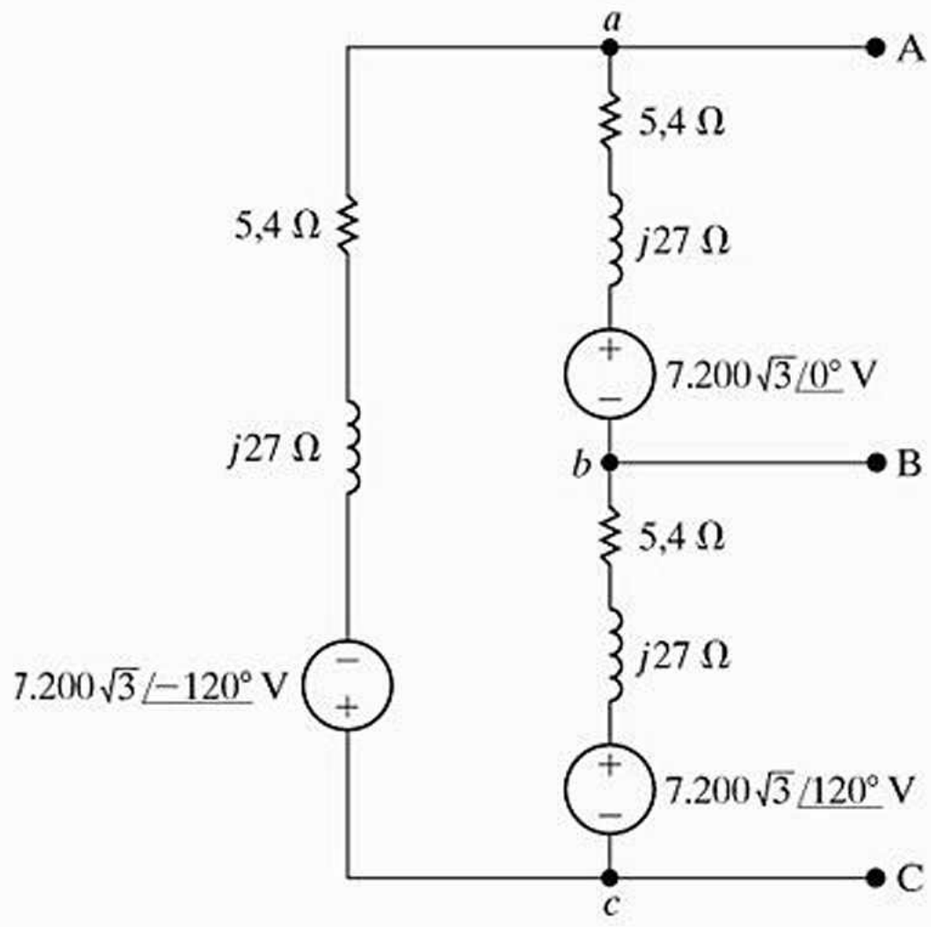
11.17 A Figura P11.17 mostra uma fonte trifásica, equilibrada, ligada em Δ.

a) Determine o circuito equivalente ligado em Y.
b) Mostre que o circuito equivalente ligado em Y fornece a mesma tensão de circuito aberto da fonte original ligada em Δ.
c) Aplique um curto-circuito externo aos terminais

A, B e C. Use a fonte ligada em Δ para determinar as três correntes de linha $\mathbf{I}_{aA}$, $\mathbf{I}_{bB}$ e $\mathbf{I}_{cC}$.

d) Repita (c), mas use a fonte equivalente em Y para determinar as três correntes de linha.

Figura P11.17



11.18 A fonte ligada em Δ do Problema 11.17 é ligada a uma carga em Y por meio de uma linha de distribuição trifásica equilibrada. A impedância de carga é 957 + *j*259 Ω/ϕ e a impedância de linha é 1,2 + *j*12 Ω/ϕ.

a) Construa um circuito monofásico equivalente do sistema.
b) Determine o módulo da tensão de linha nos terminais da carga.
c) Determine o módulo da corrente de fase na fonte em Δ.
d) Determine o módulo da tensão de linha nos terminais da fonte.

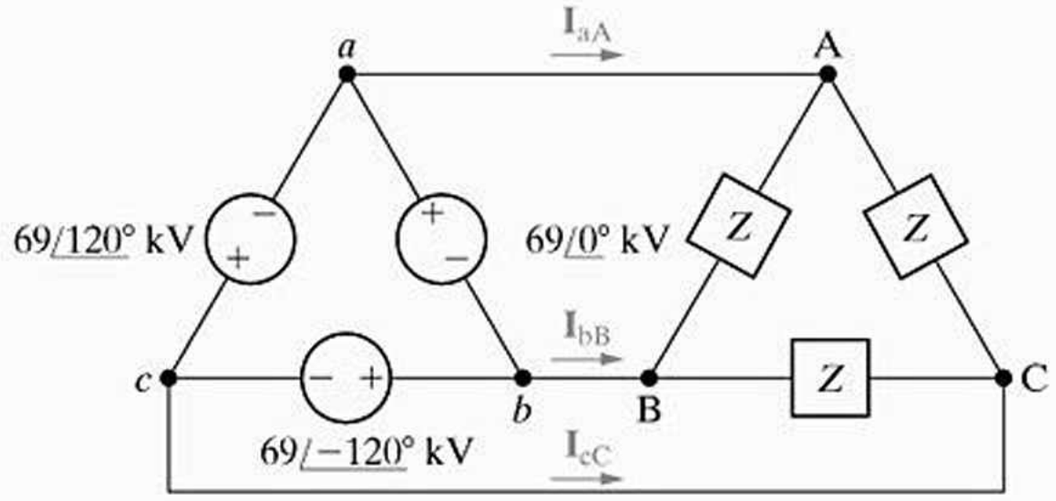
11.19 Um gerador trifásico ligado em Δ tem uma impedância interna de 0,6 + *j*4,8 Ω/ϕ. Quando o gerador opera a vazio, o módulo de sua tensão terminal é 34.500 V. O gerador alimenta uma carga ligada em Δ por meio de uma linha de transmissão com uma impedância de 0,8 + *j*6,4 Ω/ϕ. A impedância de carga por fase é 2.877 − *j*864 Ω.

a) Construa um circuito monofásico equivalente.
b) Calcule o módulo da corrente de linha.
c) Calcule o módulo da tensão de linha nos terminais da carga.
d) Calcule o módulo da tensão de linha nos terminais da fonte.
e) Calcule o módulo da corrente de fase na carga.
f) Calcule o módulo da corrente de fase na fonte.

11.20 A impedância *Z* no circuito trifásico equilibrado da Figura P11.20 é 600 + *j*450 Ω. Determine

a) $\mathbf{I}_{AB}$, $\mathbf{I}_{BC}$ e $\mathbf{I}_{CA}$,
b) $\mathbf{I}_{aA}$, $\mathbf{I}_{bB}$ e $\mathbf{I}_{cC}$,
c) $\mathbf{I}_{ba}$, $\mathbf{I}_{cb}$ e $\mathbf{I}_{ac}$.

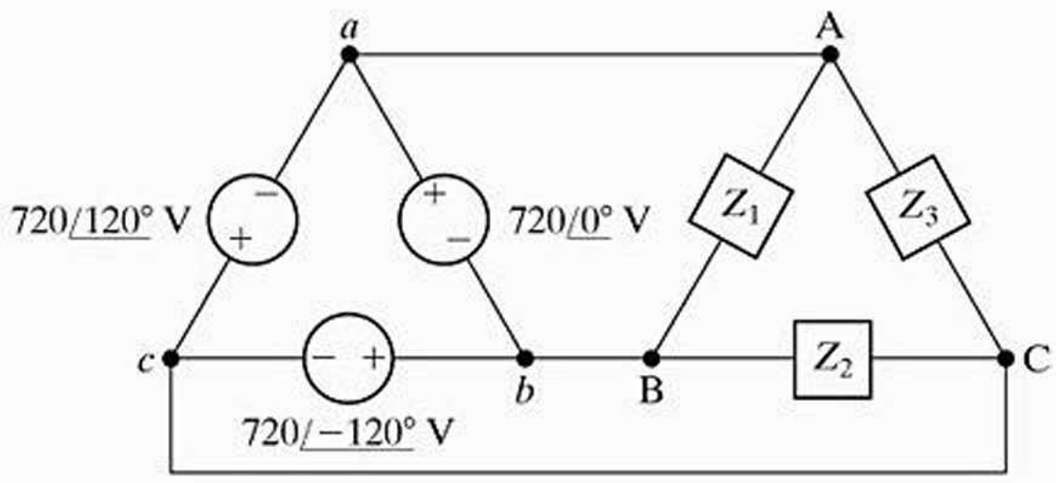
Figura P11.20



11.21 PSPICE Para o circuito mostrado na Figura P11.21, determine

a) as correntes de fase $\mathbf{I}_{AB}$, $\mathbf{I}_{BC}$ e $\mathbf{I}_{CA}$
b) as correntes de linha $\mathbf{I}_{aA}$, $\mathbf{I}_{bB}$ e $\mathbf{I}_{cC}$ quando $Z_1 = 4{,}8 + j1{,}4\ \Omega$, $Z_2 = 16 - j12\ \Omega$ e $Z_3 = 25 + j25\ \Omega$.

Figura P11.21



Seção 11.5

11.22 Uma fonte trifásica equilibrada está fornecendo 90 kVA, com um fator de potência atrasado de 0,8, a duas cargas paralelas equilibradas ligadas em Y. A impedância da linha de distribuição que liga a fonte à carga é desprezível. A carga 1 é puramente resistiva e absorve 60 kW. Determine a impedância por fase da carga 2, se a tensão de linha for 415,69 V e os componentes da impedância estiverem em série.

11.23 A potência aparente total de um sistema trifásico equilibrado, ligado em Δ-Y, é 3.600 VA. A tensão de linha é 208 V. Se a impedância de linha for desprezível e o ângulo do fator de potência da carga for 25°, determine a impedância da carga.

11.24* Em um sistema trifásico equilibrado, a fonte tem uma seqüência *abc*, é ligada em Y e $\mathbf{V}_{an} = 120\angle 20°$ V. A fonte alimenta duas cargas, ambas ligadas em Y. A impedância da carga 1 é 8 + *j*6 Ω/ϕ. A potência complexa para a fase *a* da carga 2 é $600\angle 36°$ VA. Determine a potência complexa total fornecida pela fonte.

11.25* Uma fonte trifásica de seqüência positiva ligada em Y fornece 14 kVA com um fator de potência atrasado de 0,75 a uma combinação em paralelo de uma carga ligada em Y e uma carga ligada em Δ. A carga ligada em Y absorve 9 kVA a um fator de potência atrasado de 0,6 e conduz uma corrente na fase *a* de $10\angle -30°$ A.

a) Determine a potência complexa por fase da carga ligada em Δ.
b) Determine o módulo da tensão de linha.

11.26 Calcule a potência complexa em cada fase da carga não equilibrada do Problema 11.21.

11.27 Três cargas trifásicas equilibradas estão ligadas em paralelo. A carga 1 está ligada em Y e tem uma impedância de $300 + j100\ \Omega/\phi$; a carga 2 está ligada em Δ e tem uma impedância de $5.400 - j2.700\ \Omega/\phi$; e a carga 3 absorve $112{,}32 + j95{,}04$ kVA. As cargas são alimentadas por uma linha de distribuição com uma impedância de $1 + j10\ \Omega/\phi$. O módulo da tensão fase-neutro na carga é 7,2 kV.

a) Calcule a potência complexa total no início da linha.

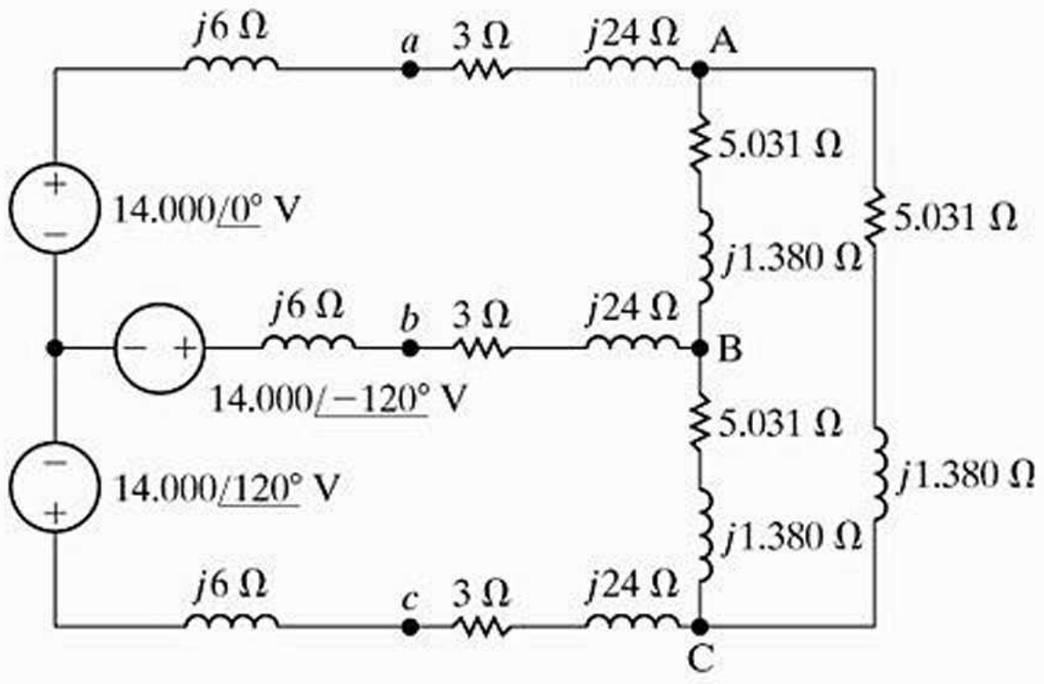
b) Qual porcentagem da potência média no início da linha é fornecida às cargas?

11.28 PSPICE

a) Determine o valor eficaz e o ângulo de fase de $\mathbf{I}_{CA}$ no circuito da Figura P11.28.

b) Qual porcentagem da potência média fornecida pela fonte trifásica é dissipada na carga trifásica?

Figura P11.28



11.29 Mostre que a potência instantânea total em um circuito trifásico equilibrado é constante e igual a $1{,}5V_mI_m \cos\theta_\phi$, onde V_m e I_m representam as máximas amplitudes da tensão de fase e corrente de fase, respectivamente.

11.30 Uma linha de distribuição trifásica equilibrada tem uma impedância de $1 + j5\ \Omega/\phi$. Essa linha é utilizada para alimentar três cargas trifásicas equilibradas que estão ligadas em paralelo. As três cargas são L_1 = 75 kVA com um fp adiantado de 0,96, L_2 = 150 kVA a um fp atrasado de 0,80 e L_3 = 168 kW e 36 kVAR. O módulo da tensão de linha nos terminais das cargas é $2500\sqrt{3}$ V.

a) Qual é o módulo da tensão de linha no início da linha?

b) Qual é a eficiência percentual da linha de distribuição em relação à potência média?

11.31 Os três componentes de computador descritos a seguir estão instalados como partes de uma central de computação. Cada componente é uma carga trifásica equilibrada com tensão nominal de 208 V. Calcule (a) o módulo da corrente de linha que alimenta esses três componentes e (b) o fator de potência da carga combinada.

- Disco rígido: 5,742 kW com um fp atrasado de 0,82
- Drive de CD/DVD: 18,566 kVA com um fp atrasado de 0,93
- CPU: corrente de linha 81,6 A, 11,623 kVAR

11.32 Uma linha trifásica tem uma impedância de $0{,}5 + j4\ \Omega/\phi$. A linha alimenta duas cargas trifásicas equilibradas ligadas em paralelo. A primeira carga está absorvendo um total de 691,2 kW e fornecendo 201,6 kVAR. A segunda carga está ligada em Δ e tem uma impedância de $622{,}08 + j181{,}44\ \Omega/\phi$. A tensão fase-neutro na carga é 7.200 V. Qual é o módulo da tensão de linha no início da linha?

11.33 Um motor de indução trifásico de 200 hp disponível no comércio funciona com uma eficiência de 96% e um fator de potência atrasado de 0,92 funcionando a plena carga. O motor é alimentado por uma rede trifásica cuja tensão de linha nominal é 208 V.

a) Qual é o módulo da corrente de linha fornecida pela rede? (1 hp = 746 W.)

b) Calcule a potência reativa fornecida ao motor.

11.34 A tensão fase-neutro nos terminais da carga trifásica equilibrada da Figura P11.34 é 480 V. A carga está absorvendo 60 kVA a um fp atrasado de 0,8.

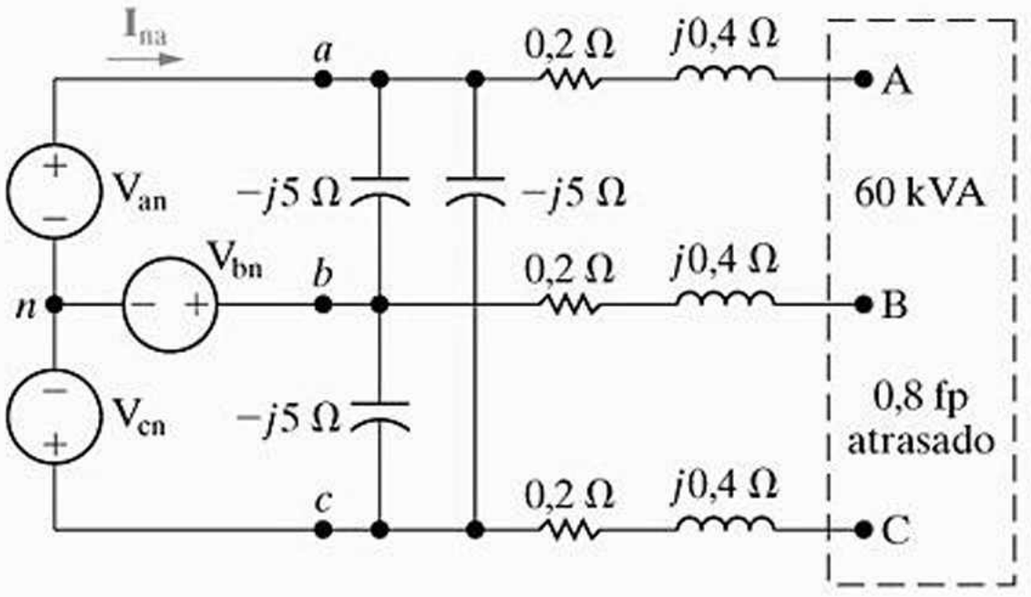
a) Use $\mathbf{V}_{AN}$ como referência e expresse $\mathbf{I}_{na}$ na forma polar.

b) Calcule a potência complexa associada à fonte trifásica ideal.

c) Verifique se a potência média total fornecida é igual à potência média total absorvida.

d) Verifique se a potência reativa total fornecida é igual à potência reativa total absorvida.

Figura P11.34



11.35 Uma fonte trifásica equilibrada está fornecendo 1.800 kVA com um fp adiantado de 0,96 a duas cargas paralelas equilibradas ligadas em Y. A impedância da linha de distribuição que liga a fonte à carga é desprezível. A potência associada à carga 1 é $192 + j1.464$ kVA.

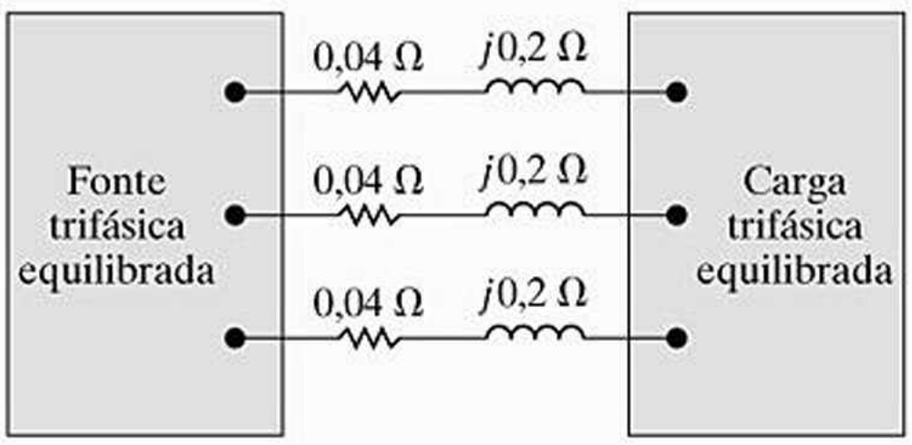
a) Determine a impedância por fase da carga 2 se a tensão de linha for $6400\sqrt{3}$ V e os componentes da impedância estiverem em série.
b) Repita (a) com os componentes da impedância em paralelo.

11.36 Uma carga trifásica equilibrada absorve 190,44 kVA com um fator de potência adiantado de 0,8 quando a tensão de linha nos terminais da carga é 13.800 V. Determine quatro circuitos equivalentes que podem ser utilizados para modelar essa carga.

11.37 A fonte trifásica equilibrada de seqüência positiva na Figura P11.37 fornece 78 kVA com um fator de potência adiantado de 0,8. A tensão de linha na fonte é $208\sqrt{3}$ V.

a) Determine o módulo da tensão de linha na carga.
b) Determine a potência complexa total nos terminais da carga.

Figura P11.37



11.38 A potência total fornecida a uma carga trifásica equilibrada quando está funcionando a uma tensão de linha de $6.600\sqrt{3}$ V é 1.188 kW com um fator de potência atrasado de 0,6. A impedância da linha de distribuição que alimenta a carga é de $0{,}5 + j4\ \Omega/\phi$. Sob essas condições de funcionamento, a queda do módulo da tensão de linha entre o início e o final da linha (terminal da carga) é excessiva. Para compensar, um banco de capacitores ligados em Δ é inserido em paralelo com a carga. O banco de capacitores é projetado para fornecer 1.920 kVAR de potência reativa alimentado por uma tensão de linha de $6.600\sqrt{3}$ V

a) Qual será a magnitude da tensão no início da linha quando a tensão de linha nos terminais da carga for $6.600\sqrt{3}$ V e o banco de capacitores estiver desligado?
b) Repita (a) com o banco de capacitores ligado.
c) Qual é a eficiência percentual da linha em relação à potência média em (a)?
d) Qual é a eficiência em (b)?
e) Se o sistema estiver funcionando com uma freqüência de 60 Hz, qual será o valor de cada capacitor em microfarads?

11.39 Um banco de capacitores equilibrados em delta está ligado em paralelo com a carga descrita no Problema para Avaliação 11.9. Isso é equivalente a colocar um capacitor em paralelo com a carga em cada fase. Assim, a tensão de linha nos terminais permanece em 4.160 V. O circuito está funcionando com uma freqüência de 60 Hz. Os capacitores são ajustados de modo que o módulo da corrente de linha que alimenta a combinação em paralelo da carga com o banco de capacitores esteja em seu mínimo.

a) Qual é o valor de cada capacitor em microfarads?
b) Repita (a) para capacitores ligados em Y.
c) Qual é o módulo da corrente de linha?

Seção 11.6

11.40 Deduza as equações 11.56 e 11.57.

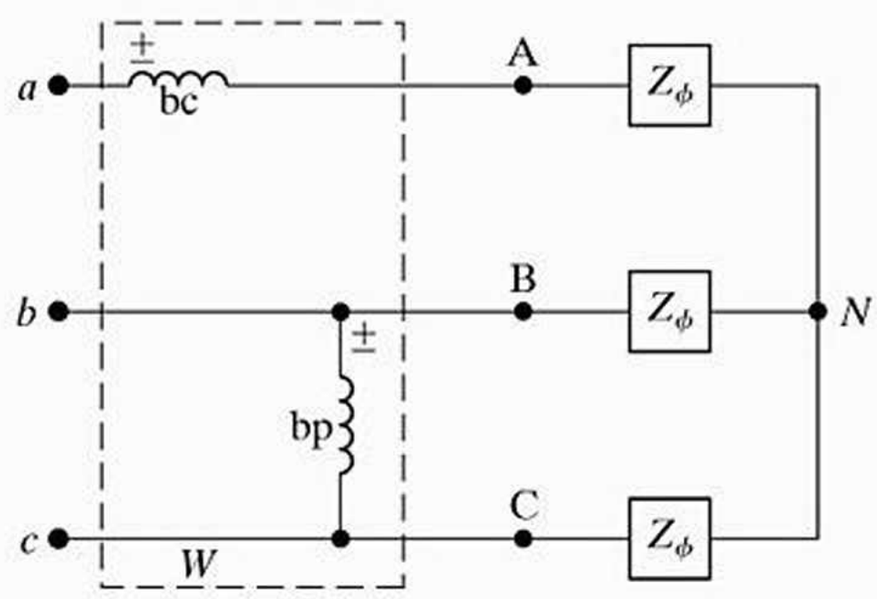
11.41* O método de dois wattímetros é utilizado para medir a potência absorvida pela carga no Exemplo 11.1. Calcule a leitura de cada wattímetro.

11.42* Os dois wattímetros na Figura 11.20 podem ser utilizados para calcular a potência reativa total da carga.

a) Prove essa afirmação, mostrando que
$$\sqrt{3}(W_2 - W_1) = \sqrt{3}V_L I_L \operatorname{sen}\theta_\phi.$$
b) Calcule a potência reativa total usando as leituras dos wattímetros para cada uma das cargas no Exemplo 11.6. Verifique seus cálculos, definindo a potência reativa total diretamente da tensão e impedância dadas.

11.43 No circuito trifásico equilibrado da Figura P11.43, a bobina de corrente do wattímetro está ligada à linha aA e a bobina de potencial do wattímetro está ligada às linhas *b* e *c*. Mostre que a leitura do wattímetro multiplicada por $\sqrt{3}$ é igual à potência reativa total associada à carga. A seqüência de fases é positiva.

Figura P11.43



11.44 A tensão fase-neutro no circuito da Figura P11.43 é 720 V, a seqüência de fases é positiva e a impedância de carga é $96 + j72\ \Omega/\phi$.

a) Determine a leitura do wattímetro.
b) Determine a potência reativa total associada à carga.

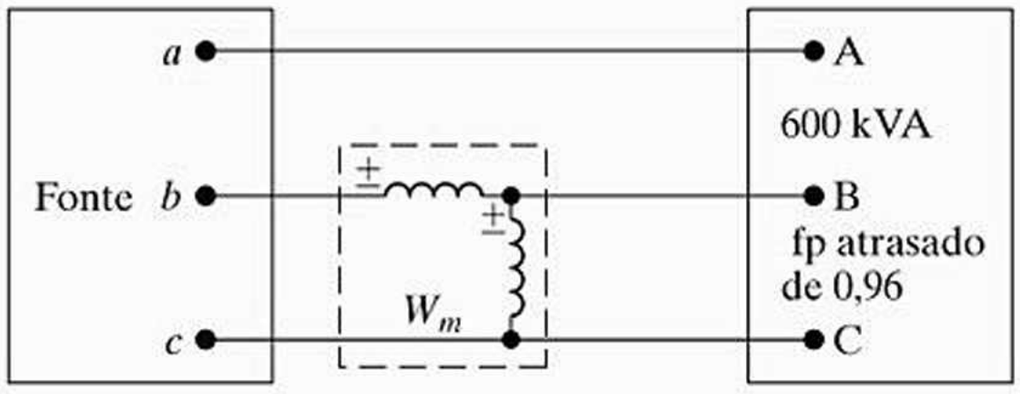
11.45 a) Calcule a potência complexa associada a cada fase da carga equilibrada no Problema 11.20.
b) Se o método de dois wattímetros for utilizado para medir a potência média fornecida à carga, especifique a leitura de cada medidor.

11.46 A carga trifásica equilibrada mostrada na Figura P11.46 é alimentada por uma fonte trifásica, equili-

brada, de seqüência positiva, ligada em Y. A impedância da linha que liga a fonte à carga é desprezível. A tensão fase-neutro da fonte é 4.800 V.

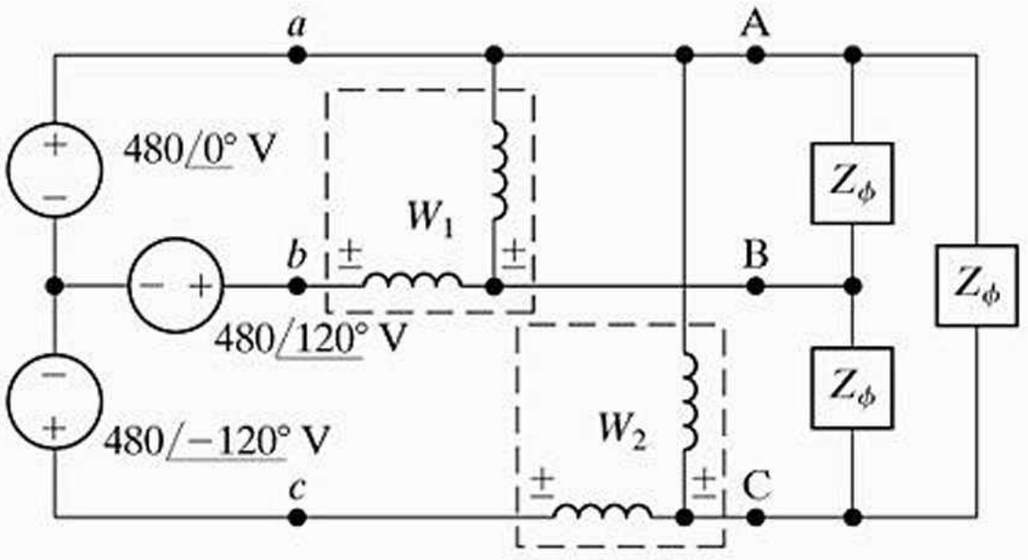
a) Determine a leitura do wattímetro em watts.
b) Explique como você deveria conectar um segundo wattímetro ao circuito de modo que os dois wattímetros medissem a potência total.
c) Determine a leitura do segundo wattímetro.
d) Verifique se a soma das leituras dos dois wattímetros é igual à potência média total fornecida à carga.

Figura P11.46



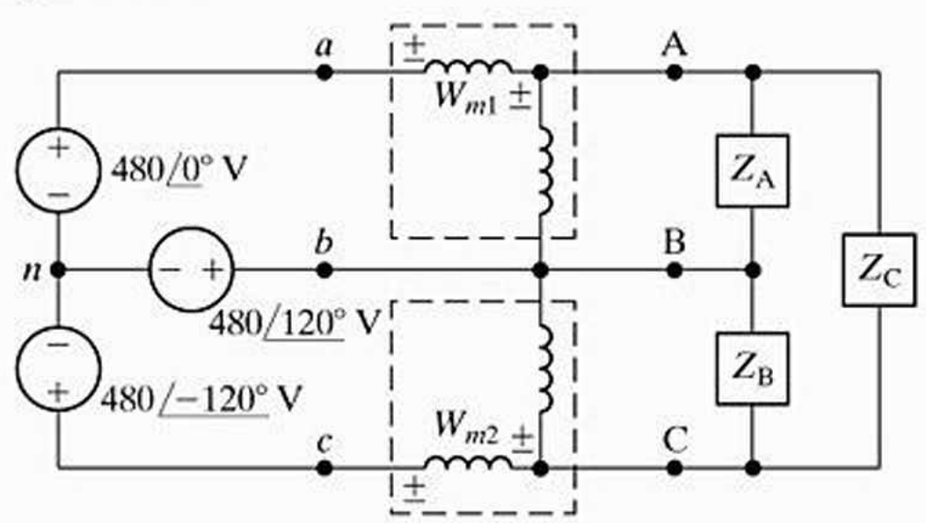
11.47 a) Determine a leitura de cada wattímetro no circuito da Figura P11.47. O valor de Z_ϕ é $60 \angle 30°\ \Omega$.
b) Verifique se a soma das leituras dos wattímetros é igual à potência média total fornecida à carga ligada em Δ.

Figura P11.47



11.48 a) Determine a leitura de cada wattímetro no circuito mostrado na Figura P11.48 se $Z_A = 60 \angle -30°\ \Omega$, $Z_B = 24 \angle 30°\ \Omega$ e $Z_C = 80 \angle 0°\ \Omega$.
b) Mostre que a soma das leituras dos wattímetros é igual à potência média total fornecida à carga trifásica não equilibrada.

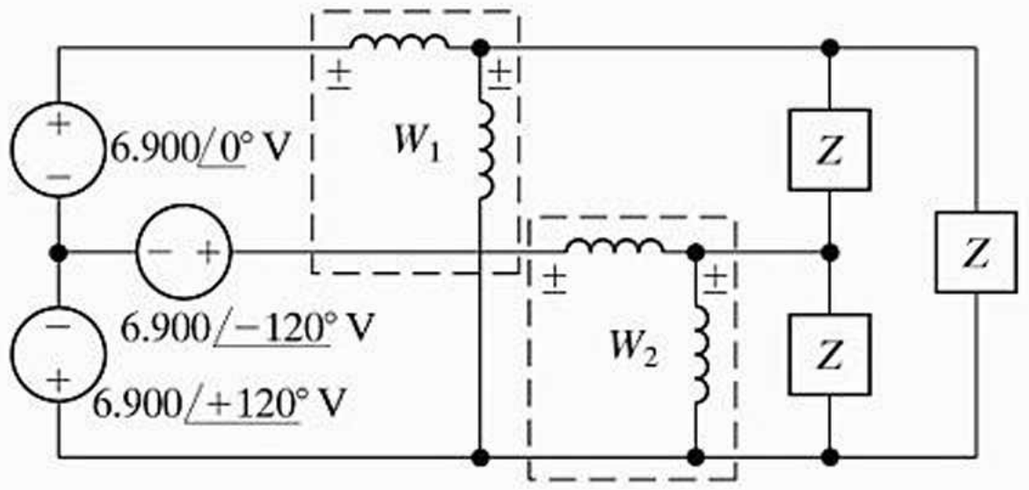
Figura P11.48



11.49 As leituras dos wattímetros no circuito da Figura 11.20 são as seguintes: $W_1 = 114.291{,}64$ W e $W_2 = 618.486{,}24$ W. O módulo da tensão de linha é $7.600\sqrt{3}$ V. A seqüência de fases é positiva. Determine Z_ϕ.

11.50 a) Determine a leitura de cada wattímetro no circuito da Figura P11.50 quando $Z = 276 - j207\ \Omega$.
b) Verifique se a soma das leituras dos dois wattímetros é igual à potência total fornecida à carga.
c) Verifique se $\sqrt{3}(W_1 - W_2)$ é igual à potência reativa total fornecida à carga.

Figura P11.50



11.51 O método de dois wattímetros é utilizado para medir a potência fornecida à carga não equilibrada no Problema 11.21. A bobina de corrente do wattímetro 1 é colocada na linha aA e a do wattímetro 2 é colocada na linha bB.

a) Determine a leitura do wattímetro 1.
b) Determine a leitura do wattímetro 2.
c) Mostre que a soma das leituras dos dois wattímetros é igual à potência total fornecida à carga não equilibrada.

Seções 11.1–11.6

11.52* PERSPECTIVA PRÁTICA Refira-se ao exemplo da Perspectiva Prática:

a) Construa o triângulo de potências para a carga da subestação antes da ligação dos capacitores ao barramento.
b) Repita (a) após a ligação dos capacitores ao barramento.
c) Usando a tensão fase-neutro na subestação como referência, construa um diagrama fasorial que represente a relação entre $\mathbf{V}_{AN}$ e $\mathbf{V}_{an}$ antes da adição dos capacitores.
d) Admita uma seqüência de fases positiva e construa um diagrama fasorial que demonstre a relação entre $\mathbf{V}_{AB}$ e $\mathbf{V}_{ab}$.

11.53* PERSPECTIVA PRÁTICA Consulte o exemplo da Perspectiva Prática. Admita que a freqüência seja 60 Hz.

a) Qual o valor de cada capacitor se eles estiverem ligados em delta?
b) Qual o valor de cada capacitor se eles estiverem ligados em Y?

11.54* PERSPECTIVA PRÁTICA No exemplo da Perspectiva Prática, o que acontece na tensão do gerador se a tensão na subestação for mantida em 13,8 kV, a carga da subestação for reduzida a zero e o banco de capacitores permanecer ligado?

11.55* PERSPECTIVA PRÁTICA No exemplo da Perspectiva Prática, calcule a perda total na linha em kW antes e depois da ligação dos capacitores ao barramento da subestação.

11.56 PERSPECTIVA PRÁTICA Admita que a carga no barramento da subestação, no exemplo da Perspectiva Prática, caia para 240 kW e 600 kVAR. Admita também que os capacitores permaneçam ligados à subestação.

a) Qual é o módulo da tensão fase-fase na usina geradora para manter a tensão fase-fase de 13,8 kV na subestação?
b) Esse nível de tensão causará problemas para outros clientes?

11.57 PERSPECTIVA PRÁTICA No Problema 11.56, admita que, quando a carga é reduzida para 240 kW e 600 kVAR, o banco de capacitores seja desativado. Admita também que a tensão fase-fase na subestação seja mantida em 13,8 kV.

a) Qual é o módulo da tensão fase-fase na usina geradora?
b) O nível de tensão determinado em (a) está dentro da faixa de variação aceitável?
c) Qual é a perda total na linha em kW quando os capacitores permanecem na linha depois de a carga ser reduzida para 240 + *j*600 kVA?
d) Qual é a perda total na linha em kW quando os capacitores são retirados depois de a carga ser reduzida para 240 + *j*600 kVA?
e) Com base em seus cálculos, você recomendaria desligar os capacitores depois de a carga ser reduzida para 240 + *j*600 kVA? Explique.

CAPÍTULO

12

Introdução à transformada de Laplace

SUMÁRIO DO CAPÍTULO

12.1 **Definição da transformada de Laplace**

12.2 **A função degrau**

12.3 **A função impulso**

12.4 **Transformadas funcionais**

12.5 **Transformadas operacionais**

12.6 **Uma aplicação da transformada de Laplace**

12.7 **Transformadas inversas**

12.8 **Pólos e zeros de *F(s)***

12.9 **Teoremas do valor inicial e do valor final**

✔ OBJETIVOS DO CAPÍTULO

1. Saber calcular a transformada de Laplace de uma função usando sua definição, a tabela de transformadas de Laplace e/ou uma tabela de transformadas operacionais.
2. Saber calcular a transformada inversa de Laplace usando a expansão por frações parciais e a tabela de transformadas de Laplace.
3. Entender e saber como usar o teorema do valor inicial e o teorema do valor final.

Apresentamos agora uma técnica analítica poderosa amplamente usada para estudar o comportamento de circuitos lineares de parâmetros concentrados. O método é baseado na transformada de Laplace, cuja definição matemática é dada na Seção 12.1. Antes disso, precisamos explicar por que é necessária outra técnica analítica. Em primeiro lugar, queremos considerar o comportamento transitório de circuitos descritos por mais do que uma única equação diferencial de tensões de nó ou correntes de malha. Em outras palavras, queremos considerar circuitos com múltiplos nós e circuitos com múltiplas malhas que são descritos por sistemas de equações diferenciais lineares.

Em segundo lugar, queremos determinar a resposta transitória de circuitos com fontes de sinal cuja variação seja mais complexa do que os casos simples considerados nos capítulos 7 e 8. Terceiro, podemos usar a transformada de Laplace para apresentar o conceito da função de transferência como uma ferramenta para analisar a resposta senoidal de regime permanente de um circuito quando a freqüência da fonte senoidal varia. Discutimos a função de transferência no Capítulo 13. Por fim, queremos relacionar, de modo sistemático, o comportamento de um circuito no domínio do tempo com seu comportamento no domínio da freqüência. Usar a transformada de Laplace nos proporcionará um entendimento mais amplo das funções desempenhadas pelos circuitos.

Neste capítulo, introduzimos a transformada de Laplace, discutimos suas características pertinentes e apresentamos um método sistemático para passar do domínio da freqüência para o domínio do tempo.

12.1 Definição da transformada de Laplace

A *transformada de Laplace* de uma função é dada pela expressão

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt, \tag{12.1}$$

(Transformada de Laplace)

onde o símbolo $\mathcal{L}\{f(t)\}$ é lido 'a transformada de Laplace de $f(t)$'.

A transformada de Laplace de $f(t)$ também é representada por $F(s)$; isto é,

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}. \tag{12.2}$$

Essa notação enfatiza que, quando a integral na Equação 12.1 é avaliada, a expressão resultante é uma função de s. Em nossas aplicações, t representa o domínio do tempo e, como o expoente de e na integral da Equação 12.1 deve ser adimensional, s deve ter a dimensão do recíproco do tempo, ou freqüência. A transformada de Laplace transforma o problema do domínio do tempo em domínio da freqüência. Depois de obtida a expressão para a incógnita no domínio da freqüência, executamos a transformação inversa, voltando ao domínio do tempo.

Se a idéia que fundamenta a transformada de Laplace lhe parecer estranha, considere outra transformada matemática muito conhecida. Logaritmos são usados para transformar um problema de multiplicação ou divisão, tal como A = BC, em um problema mais simples de adição ou subtração: log A = log BC = log B + log C. Antilogaritmos são usados para executar o processo inverso. O fasor é outra transformada; como aprendemos no Capítulo 9, ele converte um sinal senoidal em um número complexo para facilitar o cálculo algébrico de valores de circuitos. Depois de determinarmos o valor fasorial de um sinal, nós o transformamos de volta à sua expressão no domínio do tempo. Esses dois exemplos destacam o aspecto essen-

cial de transformadas matemáticas: elas são projetadas para criar um novo domínio que facilite as manipulações matemáticas. Depois de determinarmos a incógnita no novo domínio, fazemos a transformação inversa, de volta ao domínio original. Em análise de circuitos, usamos a transformada de Laplace para transformar um conjunto de equações integrais/diferenciais no domínio do tempo para um conjunto de equações algébricas no domínio da freqüência. Por conseguinte, reduzimos a solução de uma quantidade desconhecida à manipulação de um conjunto de equações algébricas.

Antes de ilustrarmos algumas das propriedades importantes da transformada de Laplace, queremos fazer alguns comentários gerais. Em primeiro lugar, observe que a integral na Equação 12.1 é imprópria porque o limite superior é infinito. Assim, enfrentamos imediatamente a questão de saber se a integral converge ou não. Em outras palavras, uma dada função $f(t)$ tem uma transformada de Laplace? É óbvio que as funções de maior interesse usadas em engenharia possuem transformadas de Laplace; caso contrário, não estaríamos interessados na transformada. Em análise de circuitos lineares, excitamos circuitos com fontes que têm transformadas de Laplace. Funções excitação, do tipo t^t ou e^{t^2}, que não possuem transformadas de Laplace, não têm, aqui, aplicação.

Em segundo lugar, como o limite inferior da integral é zero, a transformada de Laplace ignora $f(t)$ para valores negativos de t. Em outras palavras, $F(s)$ é determinada pelo comportamento de $f(t)$ somente para valores positivos de t. Para enfatizar que o limite inferior é zero, a Equação 12.1 costuma ser denominada *transformada de Laplace unilateral.* Na transformada de Laplace bilateral, o limite inferior é $-\infty$. Aqui, não usamos a forma bilateral; portanto, fica entendido que $F(s)$ é uma transformada unilateral.

Outro ponto a respeito do limite inferior se refere à situação em que $f(t)$ tem uma descontinuidade na origem. Se $f(t)$ for contínua na origem – como na Figura 12.1(a) – $f(0)$ não é ambígua. Todavia, se $f(t)$ tiver uma descontinuidade finita na origem – como na Figura 12.1(b) –, surge a questão se a integral da transformada de Laplace deve incluir ou excluir a descontinuidade. Em outras palavras, devemos tomar 0^- como o limite inferior e incluir a descontinuidade, ou devemos excluir a descontinuidade tomando 0^+ como o limite inferior? (Usamos a notação 0^- e 0^+ para designar os valores de t imediatamente à esquerda ou à direita da origem, respectivamente.) Na verdade, podemos escolher qualquer um deles, contanto que sejamos consistentes. Por razões que explicaremos mais adiante, escolhemos 0^- como o limite inferior.

Como estamos usando 0^- como o limite inferior, observamos imediatamente que a integração de 0^- a 0^+ é zero. A única exceção a essa regra é quando a descontinuidade na origem é uma função impulso, uma situação que discutiremos na Seção 12.3. Agora, o ponto importante é que as duas funções mostradas na Figura 12.1 têm a mesma transformada de Laplace unilateral porque não há nenhuma função impulso na origem.

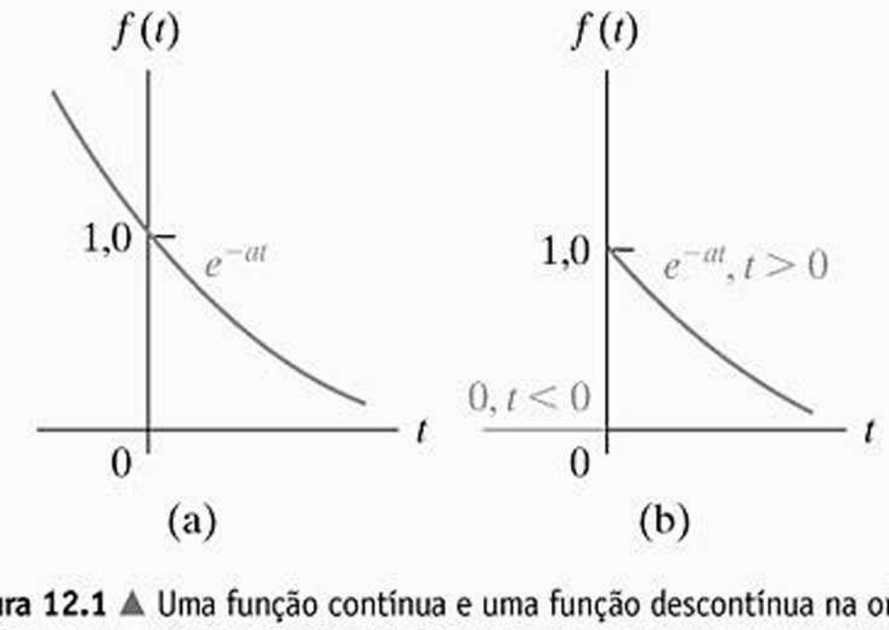


Figura 12.1 ▲ Uma função contínua e uma função descontínua na origem. (a) $f(t)$ é contínua na origem. (b) $f(t)$ é descontínua na origem.

A transformada de Laplace unilateral ignora $f(t)$ para $t < 0^-$. O que acontece antes de 0^- é definido pelas condições iniciais. Assim, usamos a transformada de Laplace para prever a resposta a uma perturbação que ocorre após o estabelecimento das condições iniciais.

Na discussão a seguir, dividimos as transformadas de Laplace em dois tipos: transformadas funcionais e transformadas operacionais. A *transformada funcional* é a transformada de Laplace de uma função específica como sen ωt, t, e^{-at} e assim por diante. A *transformada operacional* define uma propriedade matemática geral da transformada de Laplace, tal como determinar a transformada da derivada de $f(t)$. Contudo, antes de considerarmos transformadas funcionais e transformadas operacionais, precisamos apresentar a função degrau e a função impulso.

12.2 A função degrau

Em engenharia, encontramos funções que têm uma descontinuidade na origem. Por exemplo, sabemos por discussões anteriores do comportamento transitório que operações de chaveamento provocam mudanças abruptas em correntes e tensões. Tratamos dessas descontinuidades matematicamente ao introduzir a função degrau e a função impulso.

A Figura 12.2 ilustra a função degrau. Ela é zero para $t < 0$ e apresenta um valor constante não nulo para $t > 0$. O símbolo para a função degrau é $Ku(t)$. Assim, a definição matemática da *função degrau* é

$$\begin{aligned} Ku(t) &= 0, & t &< 0, \\ Ku(t) &= K, & t &> 0. \end{aligned} \tag{12.3}$$

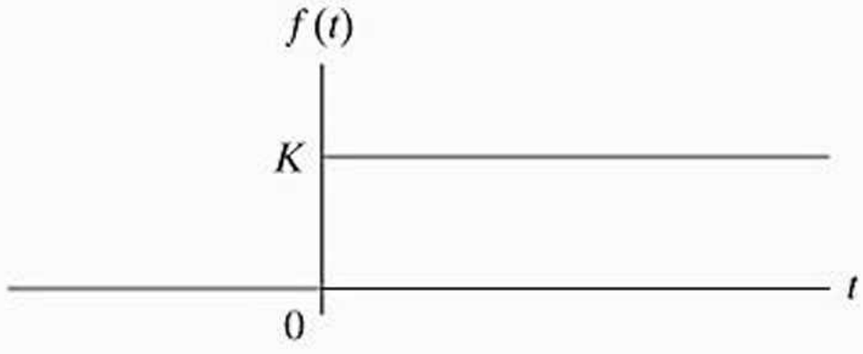


Figura 12.2 ▲ Função degrau.

Se K for 1, a função definida pela Equação 12.3 é chamada *função degrau unitário.*

A função degrau não é definida em $t = 0$. Em situações em que precisamos definir a transição entre 0^- e 0^+, admitimos que ela seja linear e que

$$Ku(0) = 0{,}5K. \tag{12.4}$$

Como antes, 0^- e 0^+ representam pontos simétricos arbitrariamente próximos da esquerda e da direita da origem. A Figura 12.3 ilustra a transição linear de 0^- a 0^+.

Uma descontinuidade pode ocorrer a qualquer tempo, não só em $t = 0$; por exemplo, no chaveamento seqüencial. Um degrau que ocorra em $t = a$ é expresso como $Ku(t - a)$. Assim,

$$\begin{aligned} Ku(t-a) &= 0, & t &< a, \\ Ku(t-a) &= K, & t &> a. \end{aligned} \tag{12.5}$$

Se $a > 0$, o degrau ocorre à direita da origem, e se $a < 0$, o degrau ocorre à esquerda da origem. A Figura 12.4 ilustra a Equação 12.5. Observe que a função degrau é 0, quando seu argumento $(t - a)$ é negativo, e é K quando seu argumento é positivo.

Uma função degrau que seja igual a K para $t < a$ é escrita como $Ku(a - t)$. Assim,

$$\begin{aligned} Ku(a-t) &= K, & t &< a, \\ Ku(a-t) &= 0, & t &> a. \end{aligned} \tag{12.6}$$

A descontinuidade está à esquerda da origem quando $a < 0$. A Equação 12.6 é mostrada na Figura 12.5.

Uma aplicação da função degrau se dá na expressão matemática de uma função que só não é zero durante um intervalo finito de tempo. Um exemplo útil em análise de circuitos é um pulso de largura finita que podemos criar somando duas funções degrau. A função $K[u(t - 1) - u(t - 3)]$ tem o valor K para $1 < t < 3$ e o valor 0 em todos os outros instantes. Assim, ela é um pulso de largura finita de altura K, que começa em $t = 1$ e termina em $t = 3$. Ao definirmos esse pulso usando funções degrau, é útil pensar na função degrau $u(t - 1)$ como a função que 'liga' o valor constante K em $t = 1$, e na função degrau $-u(t - 3)$ como a função que 'desliga' o valor constante K em $t = 3$. No Exemplo 12.1, usamos funções degrau para ligar e desligar funções lineares em tempos determinados.

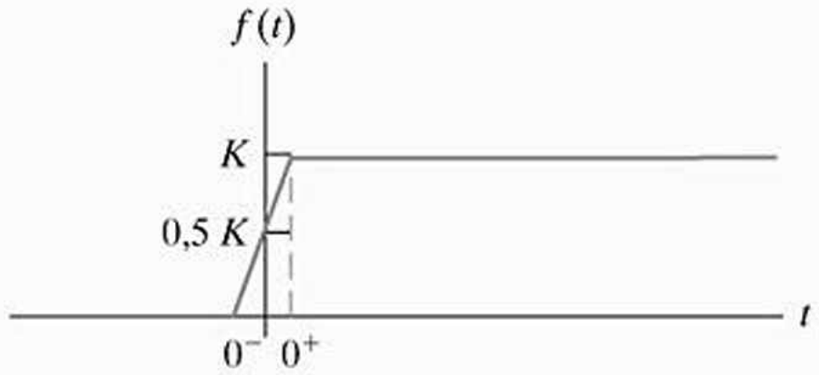


Figura 12.3 ▲ Aproximação linear para função degrau.

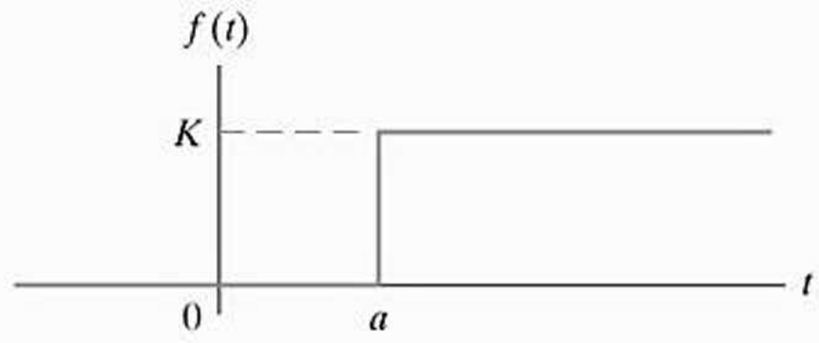


Figura 12.4 ▲ Função degrau ocorrendo em $t = a$ quando $a > 0$.

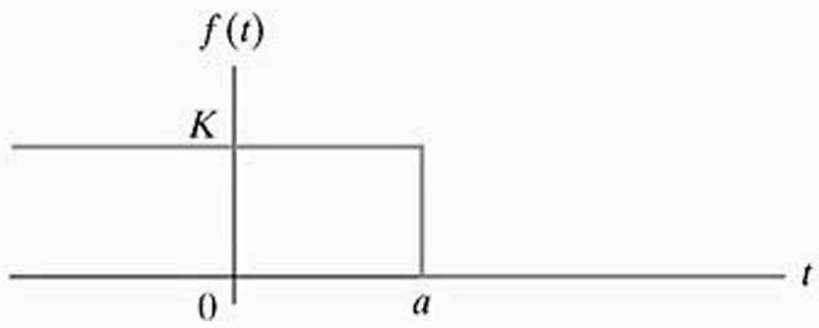


Figura 12.5 ▲ Função escalonada $Ku(a - t)$para $a > 0$.

Exemplo 12.1 Uso das funções degrau para representar uma função de duração finita

Use funções degrau para escrever a expressão para a função ilustrada na Figura 12.6.

Solução

A função mostrada na Figura 12.6 é composta por segmentos lineares com pontos de inflexão em 0, 1, 3 e 4 s. Para construir essa função, precisamos adicionar e subtrair funções lineares de inclinação adequada. Usamos a função degrau para iniciar e terminar esses segmentos lineares nos tempos adequados. Em outras palavras, usamos a função degrau para ligar e desligar uma linha reta com as seguintes equações: $+2t$, ligada em $t = 0$ e desligada em $t = 1$; $-2t + 4$, ligada em $t = 1$, desligada em $t = 3$, e $+2t - 8$, ligada em $t = 3$ e desligada em $t = 4$. Esses segmentos de reta e suas equações são mostrados na Figura 12.7. A expressão para $f(t)$ é

$$\begin{aligned} f(t) = {} & 2t[u(t) - u(t-1)] + (-2t+4)[u(t-1) - u(t-3)] \\ & + (2t-8)[u(t-3) - u(t-4)]. \end{aligned}$$

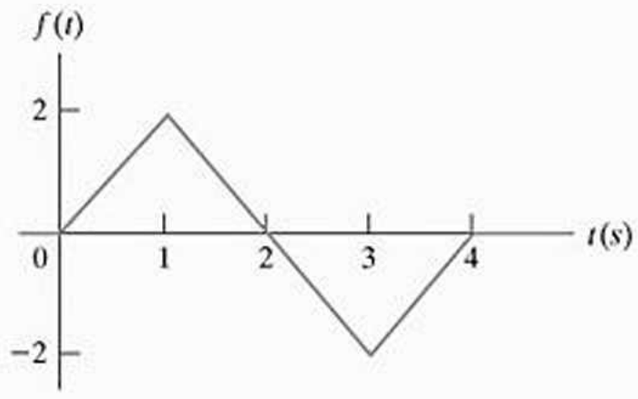


Figura 12.6 ◀ Função para o Exemplo 12.1.

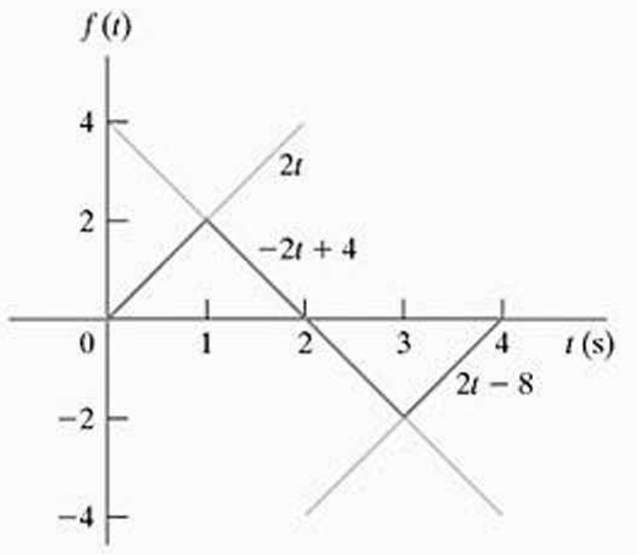


Figura 12.7 ◀ Definição dos três segmentos de reta ligados e desligados por funções degrau para formar a função mostrada na Figura 12.6.

NOTA: Avalie o que você entendeu sobre a função degrau tentando resolver os problemas 12.1 *e* 12.2, *apresentados no final deste capítulo.*

12.3 A função impulso

Quando temos uma descontinuidade finita em uma função, como a ilustrada na Figura 12.1(b), a derivada da função não é definida no ponto de descontinuidade. O conceito de uma função impulso[1] nos permite definir a derivada em uma descontinuidade e, assim, definir a transformada de Laplace dessa derivada. Um *impulso* é um sinal de amplitude infinita e duração zero. Tais sinais não existem na natureza, mas alguns sinais de tensão e corrente se aproximam muito dessa definição e, portanto, achamos que o modelo matemático de um impulso é útil. Tensões e correntes impulsivas ocorrem em análise de circuitos por causa de operações de chaveamento ou porque o circuito é excitado por uma fonte impulsiva. Analisaremos essas situações no Capítulo 13; aqui, discutiremos a definição da função impulso de modo geral.

Para definir a derivada de uma função em uma descontinuidade, em primeiro lugar, admitimos que a função varie linearmente na descontinuidade, como mostra a Figura 12.8, onde observamos que, quando $\epsilon \to 0$, ocorre uma descontinuidade abrupta na origem. Quando diferenciamos a função, a derivada entre $+\epsilon$ e $-\epsilon$ é constante e tem um valor de $1/2\epsilon$. Para $t > \epsilon$, a derivada é $-ae^{-a(t-\epsilon)}$. A Figura 12.9 mostra essas observações em forma de gráfico. Quando ϵ aproxima-se de zero, o valor de $f'(t)$ entre $\pm\epsilon$ aproxima-se de infinito. Ao mesmo tempo, sua duração aproxima-se de zero. Além disso, a área sob $f'(t)$ entre $\pm\epsilon$ permanece constante quando $\epsilon \to 0$. Neste exemplo, a área é igual à unidade. Quando ϵ aproxima-se de zero, dizemos que a função entre $\pm\epsilon$ aproxima-se de uma *função impulso unitária*, denotada por $\delta(t)$. Assim, a derivada de $f(t)$ na origem aproxima-se de uma função impulso unitária quando ϵ aproxima-se de zero, ou

$$f'(0) \to \delta(t) \text{ quando } \epsilon \to 0$$

Se a área sob a curva da função impulso for diferente da unidade, a função impulso é denotada por $K\delta(t)$, onde K é a área. K costuma ser denominada a *intensidade* da função impulso.

Para resumir, uma função impulso é criada por uma função de parâmetro variável cujo parâmetro aproxima-se de zero. A função de parâmetro variável deve exibir as três características seguintes, à medida que o parâmetro aproxima-se de zero:

1. A amplitude aproxima-se de infinito.
2. A duração da função aproxima-se de zero.
3. A área sob a função de parâmetro variável permanece constante à medida que o parâmetro varia.

Há muitas funções de parâmetro variável que possuem as características mencionadas. Na Figura 12.8, usamos uma função linear $f(t) = 0{,}5t/\epsilon + 0{,}5$. Outro exemplo de uma função de parâmetro variável é a função exponencial:

$$f(t) = \frac{K}{2\epsilon} e^{-|t|/\epsilon}. \tag{12.7}$$

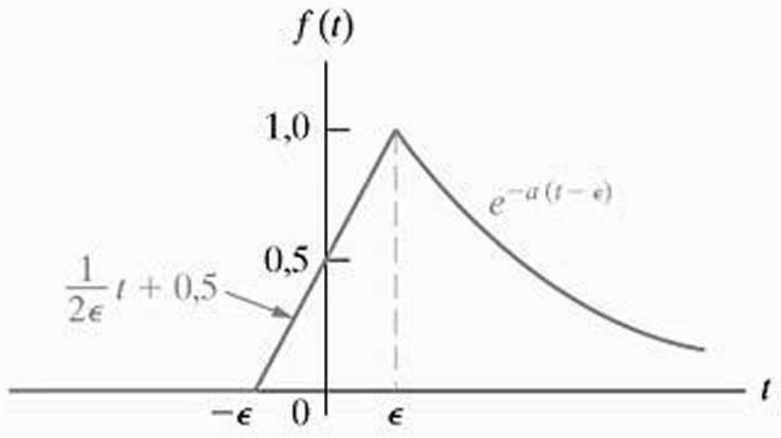


Figura 12.8 ▲ Visão ampliada da descontinuidade na Figura 12.1(b), admitindo uma transição linear entre $-\epsilon$ e $+\epsilon$.

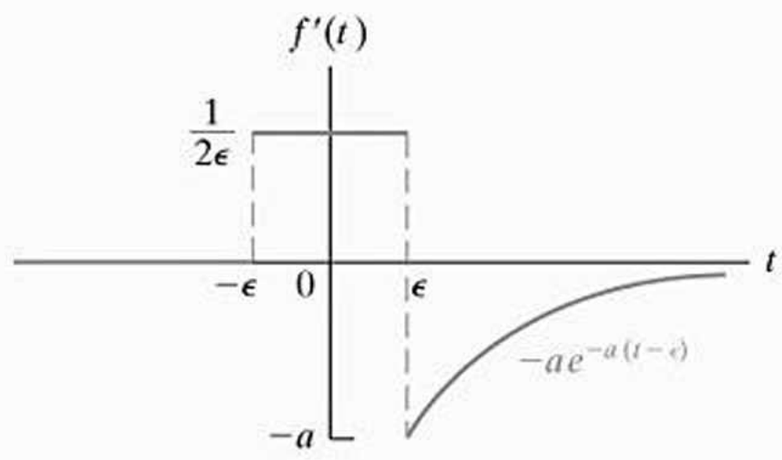


Figura 12.9 ▲ Derivada da função mostrada na Figura 12.8.

À medida que ϵ aproxima-se de zero, a função torna-se infinita na origem e, ao mesmo tempo, cai a zero em uma fração infinitesimal de tempo. A Figura 12.10 ilustra o caráter de $f(t)$ à medida que $\epsilon \to 0$. Para mostrar que uma função impulso é criada à medida que $\epsilon \to 0$, também precisamos mostrar que a área sob a função é independente de ϵ. Assim,

$$\begin{aligned}\text{Área} &= \int_{-\infty}^{0} \frac{K}{2\epsilon} e^{t/\epsilon}\,dt + \int_{0}^{\infty} \frac{K}{2\epsilon} e^{-t/\epsilon}\,dt \\ &= \frac{K}{2\epsilon} \cdot \frac{e^{t/\epsilon}}{1/\epsilon}\bigg|_{-\infty}^{0} + \frac{K}{2\epsilon} \cdot \frac{e^{-t/\epsilon}}{-1/\epsilon}\bigg|_{0}^{\infty} \\ &= \frac{K}{2} + \frac{K}{2} = K,\end{aligned} \tag{12.8}$$

que nos diz que a área sob a curva é constante e igual a K unidades. Portanto, à medida que $\epsilon \to 0$, $f(t) \to K\delta(t)$.

Em termos matemáticos, a *função impulso* é definida como

$$\int_{-\infty}^{\infty} K\delta(t)dt = K; \tag{12.9}$$

$$\delta(t) = 0, \qquad t \neq 0. \tag{12.10}$$

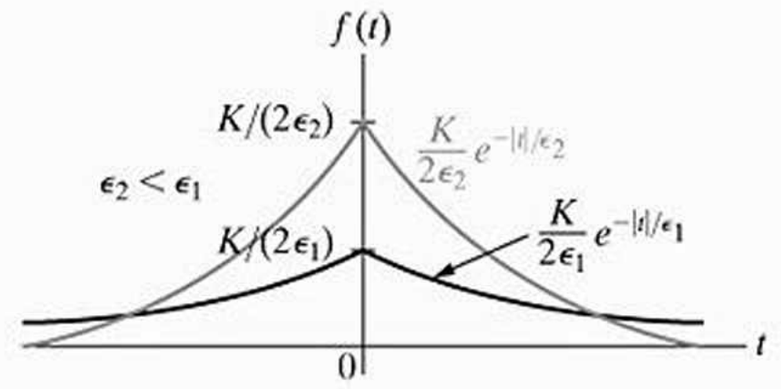


Figura 12.10 ▲ Função de parâmetro variável usada para gerar uma função impulso.

[1] A função impulso também é conhecida como função delta de Dirac.

A Equação 12.9 estabelece que a área sob a função impulso é constante. Essa área representa a intensidade do impulso. A Equação 12.10 afirma que o impulso é zero em todos os lugares, exceto em t = 0. Um impulso que ocorre em $t = a$ é denotado por $K\delta(t - a)$.

O símbolo gráfico para a função impulso é uma seta. A intensidade do impulso é dada entre parênteses, ao lado da ponta da seta. A Figura 12.11 mostra os impulsos $K\delta(t)$ e $K\delta(t - a)$.

Uma propriedade importante da função impulso é a *propriedade de filtragem*, que é expressa como

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - a)\,dt = f(a), \tag{12.11}$$

onde admite-se que a função $f(t)$ é contínua em $t = a$; isto é, no local do impulso. A Equação 12.11 mostra que a função impulso filtra tudo, exceto o valor de $f(t)$ em $t = a$. A validade da Equação 12.11 decorre do fato de que $\delta(t - a)$ é zero em todos os pontos, exceto em $t = a$ e, por conseguinte, a integral pode ser escrita

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - a)\,dt = \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} f(t)\delta(t - a)\,dt. \tag{12.12}$$

Contudo, como $f(t)$ é contínua em a, ela assume o valor $f(a)$ à medida que $t \to a$, portanto

$$\begin{aligned} I &= \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} f(a)\delta(t - a)\,dt = f(a)\int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} \delta(t - a)\,dt \\ &= f(a). \end{aligned} \tag{12.13}$$

Usamos essa propriedade de filtragem da função impulso para determinar sua transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t)e^{-st}\,dt = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t)dt = 1, \tag{12.14}$$

que é um importante par de transformadas de Laplace muito usado em análise de circuitos.

Podemos definir também as derivadas da função impulso e a transformada de Laplace dessas derivadas. Discutimos a derivada de primeira ordem, junto com a sua transformada e, então, enunciamos os resultados para as derivadas de ordens mais altas.

A função da Figura 12.12(a) gera uma função impulso quando $\epsilon \to 0$. A Figura 12.12(b) mostra a derivada dessa função geradora, que é definida como a derivada do impulso $[\delta'(t)]$ quando $\epsilon \to 0$.

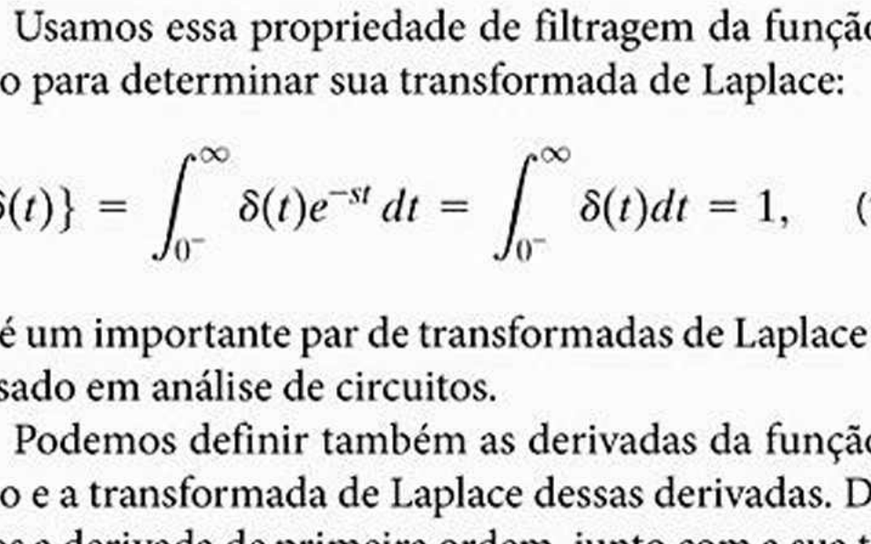


Figura 12.11 ▲ Representação gráfica do impulso $K\delta(t)$ e $K\delta(t - a)$.

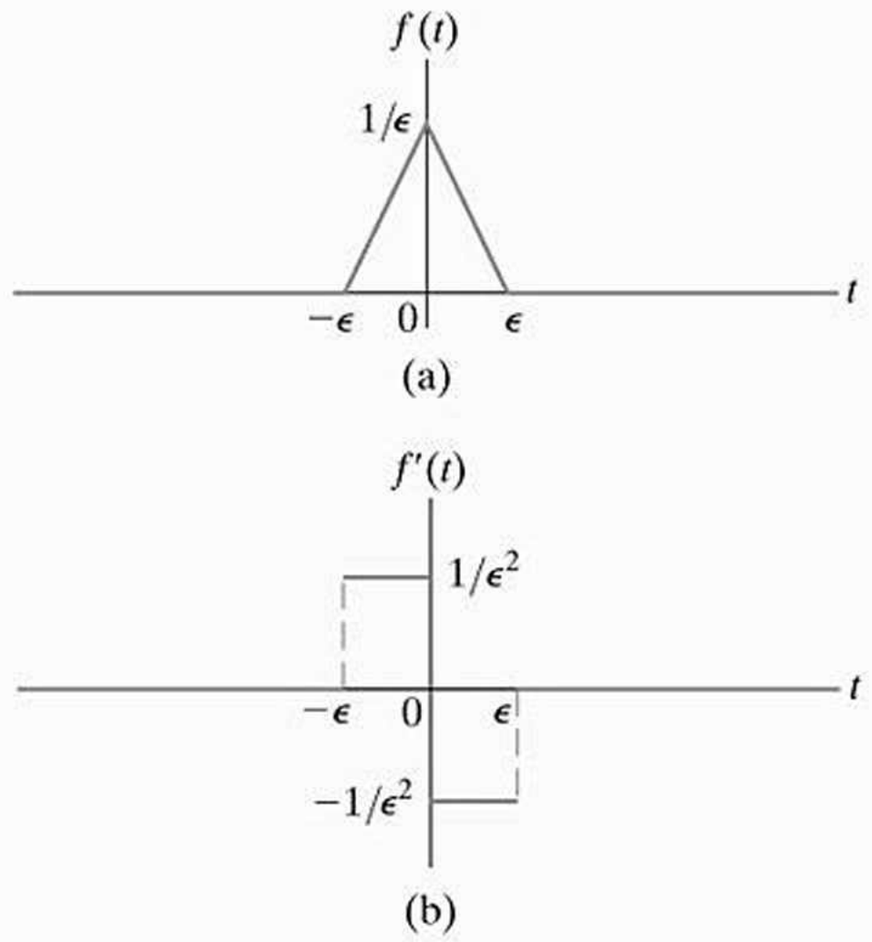


Figura 12.12 ▲ Derivada de primeira ordem da função impulso. (a) Função geradora do impulso usada para definir a derivada de primeira ordem. (b) Derivada de primeira ordem da função geradora do impulso que tende para $\delta(t)$ quando $\epsilon \to 0$.

A derivada da função impulso às vezes é denominada função momento, ou dubleto unitário.

Para determinar a transformada de Laplace de $\delta'(t)$, simplesmente aplicamos a integral definidora à função mostrada na Figura 12.12(b) e, após integrar, fazemos $\epsilon \to 0$. Então,

$$\begin{aligned} L\{\delta'(t)\} &= \lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_{-\epsilon}^{0^-} \frac{1}{\epsilon^2}e^{-st}\,dt + \int_{0^+}^{\epsilon}\left(-\frac{1}{\epsilon^2}\right)e^{-st}\,dt\right] \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{e^{s\epsilon} + e^{-s\epsilon} - 2}{s\epsilon^2} \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{se^{s\epsilon} - se^{-s\epsilon}}{2\epsilon s} \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{s^2e^{s\epsilon} + s^2e^{-s\epsilon}}{2s} = s. \end{aligned} \tag{12.15}$$

Na dedução da Equação 12.15, tivemos de usar a regra de l'Hôpital duas vezes para avaliar a forma indeterminada 0/0.

Derivadas de ordens mais altas podem ser geradas de maneira semelhante à usada para gerar a derivada de primeira ordem (veja o Problema 12.11) e, então, a integral definidora pode ser usada para determinar sua transformada de Laplace. Para a derivada de n-ésima ordem da função impulso, constatamos que sua transformada de Laplace é simplesmente s^n; isto é,

$$\mathcal{L}\{\ \delta^{(n)}(t)\ \} = s^n. \tag{12.16}$$

Por fim, uma função impulso pode ser considerada a derivada de uma função degrau; isto é,

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}. \tag{12.17}$$

A Figura 12.13 apresenta a interpretação gráfica da Equação 12.17. A função mostrada na Figura 12.13(a) aproxima-se de uma função degrau unitário à medida que $\epsilon \to 0$. A função mostrada na Figura 12.13(b) – a derivada da função da Figura 12.13(a) – aproxima-se de um impulso unitário à medida que $\epsilon \to 0$.

A função impulso é um conceito de extrema utilidade em análise de circuitos e falaremos mais sobre ela nos capítulos seguintes. Apresentamos o conceito aqui para podermos incluir descontinuidades na origem em nossa definição da transformada de Laplace.

NOTA: Avalie o que você entendeu da função impulso tentando resolver os problemas 12.5–12.7, *apresentados no final deste capítulo.*

12.4 Transformadas funcionais

Uma transformada funcional é simplesmente a transformada de Laplace de uma dada função de t. Como estamos limitando nossa introdução à transformada de Laplace unilateral, todas as funções consideradas são zero para $t < 0^-$.

Determinamos um par de transformadas funcionais na Seção 12.3, na qual mostramos que a transformada de Laplace da função impulso unitária é igual a 1; veja a Equação 12.14. Um segundo exemplo é a função degrau unitário da Figura 12.13(a), onde

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt = \int_{0^+}^{\infty} 1e^{-st}dt = \frac{e^{-st}}{-s}\bigg|_{0^+}^{\infty} = \frac{1}{s}. \tag{12.18}$$

A Equação 12.18 mostra que a transformada de Laplace da função degrau unitário é $1/s$.

A transformada de Laplace da função exponencial decrescente da Figura 12.14 é

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \int_{0^+}^{\infty} e^{-at}e^{-st}\,dt = \int_{0^+}^{\infty} e^{-(a+s)t}\,dt = \frac{1}{s+a}. \tag{12.19}$$

Quando deduzimos as equações 12.18 e 12.19, usamos o fato de que a integração de 0^- a 0^+ é zero.

Um terceiro exemplo de determinação de uma transformada funcional é a função senoidal mostrada na Figura 12.15. A expressão de $f(t)$ para $t > 0^-$ é sen ωt; portanto, a expressão para a transformada de Laplace é

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\operatorname{sen}\omega t\} &= \int_{0^-}^{\infty} (\operatorname{sen}\omega t)e^{-st}\,dt \\ &= \int_{0^-}^{\infty} \left(\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}\right)e^{-st}\,dt \\ &= \int_{0^-}^{\infty} \frac{e^{-(s-j\omega)t} - e^{-(s+j\omega)t}}{2j}\,dt \\ &= \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega}\right) \\ &= \frac{\omega}{s^2+\omega^2}.\end{aligned} \tag{12.20}$$

A Tabela 12.1 apresenta uma lista abreviada de pares de transformadas de Laplace. Ela inclui as funções de maior interesse para um curso introdutório de circuitos elétricos.

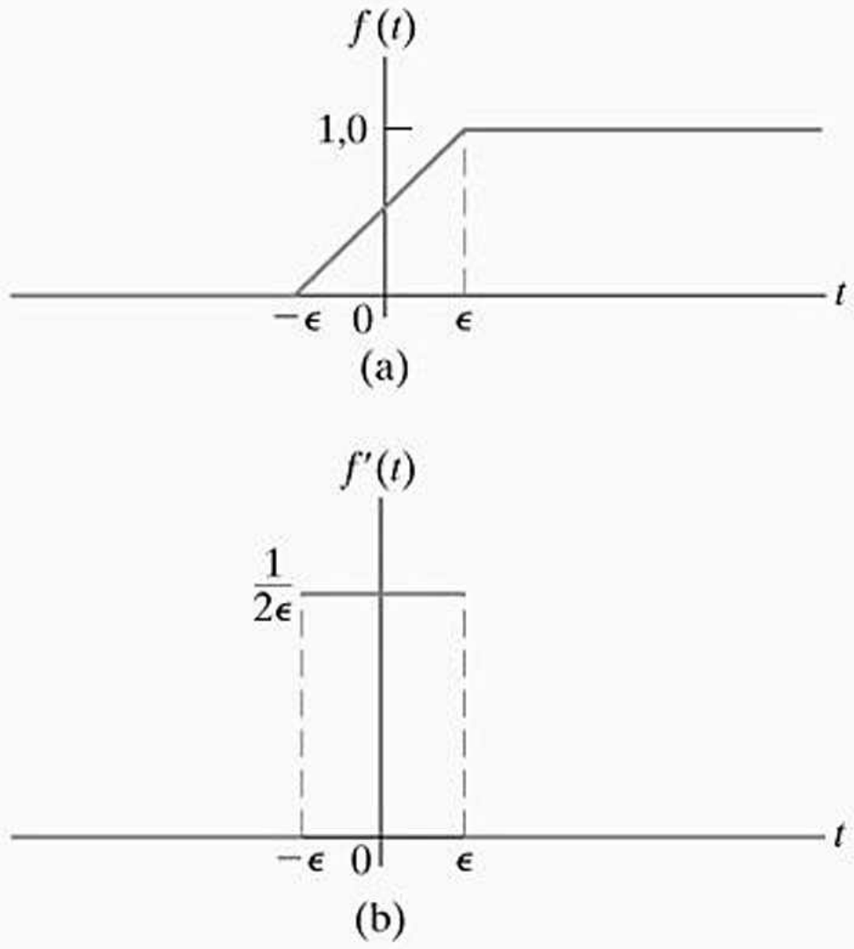


Figura 12.13 ▲ Função impulso como a derivada da função degrau: (a) $f(t) \to u(t)$ à medida que $\epsilon \to 0$; e (b) $f'(t) \to \delta(t)$ à medida que $\epsilon \to 0$.

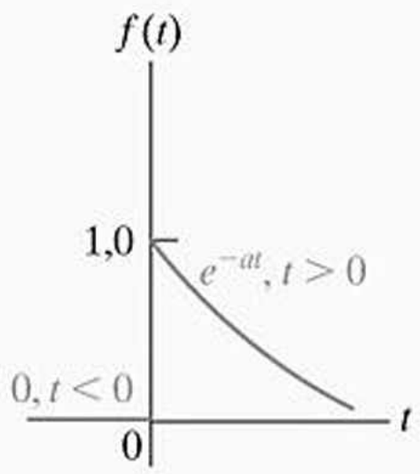


Figura 12.14 ▲ Função exponencial decrescente.

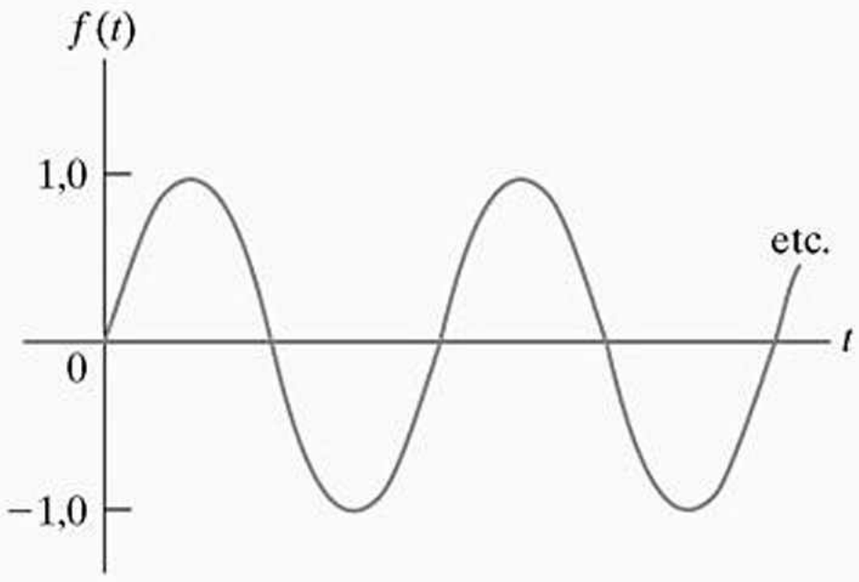


Figura 12.15 ▲ Função senoidal para $t > 0$.

TABELA 12.1 Lista abreviada de pares de transformadas de Laplace

Tipo	$f(t)$ $(t > 0^-)$	$F(s)$
(impulso)	$\delta(t)$	1
(degrau)	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
(rampa)	t	$\frac{1}{s^2}$
(exponencial)	e^{-at}	$\frac{1}{s + a}$
(seno)	$\text{sen } \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
(co-seno)	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
(rampa amortecida)	te^{-at}	$\frac{1}{(s + a)^2}$
(seno amortecido)	$e^{-at} \text{sen } \omega t$	$\frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$
(co-seno amortecido)	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}$

12.5 Transformadas operacionais

Transformadas operacionais indicam como operações matemáticas realizadas em $f(t)$ ou $F(s)$ são convertidas para o domínio oposto. As operações de interesse primário são (1) multiplicação por uma constante; (2) adição (subtração); (3) diferenciação; (4) integração; (5) deslocamento no domínio do tempo; (6) deslocamento no domínio da freqüência e (7) mudança de escala.

Multiplicação por uma constante

Pela definição da transformada de Laplace, se

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s),$$

então

$$\mathcal{L}\{K f(t)\} = K F(s). \quad (12.21)$$

Assim, multiplicar $f(t)$ por uma constante corresponde a multiplicar $F(s)$ pela mesma constante.

Adição (subtração)

A adição (subtração) no domínio do tempo corresponde à adição (subtração) no domínio da freqüência. Assim, se

$$\mathcal{L}\{f_1(t)\} = F_1(s),$$

$$\mathcal{L}\{f_2(t)\} = F_2(s),$$

$$\mathcal{L}\{f_3(t)\} = F_3(s),$$

então

$$\mathcal{L}\{f_1(t) + f_2(t) - f_3(t)\} = F_1(s) + F_2(s) - F_3(s), \quad (12.22)$$

que é deduzida pela simples substituição da soma algébrica de funções no domínio do tempo na equação integral de definição.

Diferenciação

Diferenciar no domínio do tempo corresponde a multiplicar $F(s)$ por s e, então, subtrair o valor inicial de $f(t)$ — isto é, $f(0^-)$ — desse produto:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0^-), \quad (12.23)$$

que é obtida diretamente da definição da transformada de Laplace, ou

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = \int_{0^-}^{\infty} \left[\frac{df(t)}{dt}\right] e^{-st}\, dt. \quad (12.24)$$

Avaliamos a integral na Equação 12.24 integrando por partes. Fazendo $u = e^{-st}$ e $dv = [df(t)/dt]\, dt$, obtemos

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = e^{-st} f(t)\Big|_{0^-}^{\infty} - \int_{0^-}^{\infty} f(t)(-se^{-st} dt). \quad (12.25)$$

Como estamos admitindo que $f(t)$ possui transformada de Laplace, a avaliação de $e^{-st} f(t)$ em $t = \infty$ é zero. Portanto, o lado direito da Equação 12.25 se reduz a

$$-f(0^-) + s\int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt = sF(s) - f(0^-).$$

✔ PROBLEMA PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 1 — Saber calcular a transformada de Laplace de uma função usando a definição de transformada de Laplace

12.1 Use a equação definidora da transformada de Laplace para

a) determinar a transformada de Laplace de $\cosh \beta t$;

b) determinar a transformada de Laplace de $\text{senh } \beta t$.

Resposta: (a) $s/(s^2 - \beta^2)$; (b) $\beta/(s^2 - \beta^2)$.

NOTA: Tente resolver também o Problema 12.13, *apresentado no final deste capítulo.*

Essa observação conclui a dedução da Equação 12.23. Ela é um resultado importante porque estabelece que a diferenciação no domínio do tempo reduza-se a uma operação algébrica no domínio da freqüência.

Determinamos a transformada de Laplace de derivadas de ordens mais altas usando a Equação 12.23 como ponto de partida. Por exemplo, para determinar a transformada de Laplace da derivada de segunda ordem de $f(t)$, em primeiro lugar, fazemos

$$g(t) = \frac{df(t)}{dt}. \tag{12.26}$$

Agora, usamos a Equação 12.23 para escrever

$$G(s) = sF(s) - f(0^-). \tag{12.27}$$

Porém, como

$$\frac{dg(t)}{dt} = \frac{d^2f(t)}{dt^2},$$

escrevemos

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dg(t)}{dt}\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right\} = sG(s) - g(0^-). \tag{12.28}$$

Combinando as equações 12.26, 12.27 e 12.28 obtemos

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right\} = s^2F(s) - sf(0^-) - \frac{df(0^-)}{dt}. \tag{12.29}$$

Determinamos a transformada de Laplace da derivada de ordem n aplicando sucessivamente o processo precedente, o que leva ao resultado geral

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^nf(t)}{dt^n}\right\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0^-) - s^{n-2}\frac{df(0^-)}{dt} - s^{n-3}\frac{d^2f(0^-)}{dt^2} - \cdots - \frac{d^{n-1}f(0^-)}{dt^{n-1}}. \tag{12.30}$$

Integração

A integração no domínio do tempo corresponde a dividir por s no domínio da freqüência. Como antes, estabelecemos a relação pela integral definidora:

$$\mathcal{L}\left\{\int_{0^-}^{t} f(x)\,dx\right\} = \int_{0^-}^{\infty}\left[\int_{0^-}^{t} f(x)\,dx\right]e^{-st}\,dt. \tag{12.31}$$

Avaliamos a integral do lado direito da Equação 12.31 integrando por partes fazendo, em primeiro lugar,

$$u = \int_{0^-}^{t} f(x)\,dx,$$

$$dv = e^{-st}\,dt.$$

Então,

$$du = f(t)\,dt,$$

$$v = -\frac{e^{-st}}{s}.$$

A integração por partes resulta em

$$\mathcal{L}\left\{\int_{0^-}^{t} f(x)\,dx\right\} = -\frac{e^{-st}}{s}\int_{0^-}^{t} f(x)\,dx\Bigg|_{0^-}^{\infty} + \int_{0^-}^{\infty}\frac{e^{-st}}{s}f(t)\,dt. \tag{12.32}$$

O primeiro termo do lado direito da Equação 12.32 é zero nos limites superior e inferior. O valor no limite inferior é obviamente zero, ao passo que o valor no limite superior é zero porque estamos admitindo que $f(t)$ tenha uma transformada de Laplace. O segundo termo do lado direito da Equação 12.32 é $F(s)/s$; assim,

$$\mathcal{L}\left\{\int_{0^-}^{t} f(x)\,dx\right\} = \frac{F(s)}{s}, \tag{12.33}$$

o que revela que a operação de integração no domínio do tempo é transformada na operação algébrica de multiplicar por $1/s$ no domínio da freqüência. As equações 12.33 e 12.30 formam a base da afirmação que fizemos antes, isto é, a transformada de Laplace transforma um conjunto de equações integrais/diferenciais em um conjunto de equações algébricas.

Deslocamento no domínio do tempo

Dada uma função qualquer $f(t)u(t)$, podemos representar essa mesma função deslocada no tempo de uma constante a, como $f(t-a)u(t-a)$.[2] O deslocamento no domínio do tempo corresponde à multiplicação por uma exponencial no domínio da freqüência. Assim,

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s),\ a > 0. \tag{12.34}$$

Por exemplo, sabendo que

$$\mathcal{L}\{tu(t)\} = \frac{1}{s^2},$$

a Equação 12.34 permite escrever diretamente a transformada de Laplace de $(t-a)u(t-a)$:

$$\mathcal{L}\{(t-a)u(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s^2}.$$

A Equação 12.34 decorre da definição da transformada de Laplace:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{(t-a)u(t-a)\} &= \int_{0^-}^{\infty} u(t-a)f(t-a)e^{-st}\,dt \\ &= \int_{a}^{\infty} f(t-a)e^{-st}\,dt.\end{aligned} \tag{12.35}$$

Quando escrevemos a Equação 12.35, lançamos mão do fato de que $u(t-a) = 1$ para $t > a$. Agora, mudamos a variável de integração. Especificamente, fazemos $x = t - a$. Então, $x = 0$ quando $t = a$, $x = \infty$ quando $t = \infty$ e $dx = dt$.

[2] Observe que sempre multiplicamos qualquer função arbitrária $f(t)$ pela função degrau unitário $u(t)$ para garantir que a função resultante seja definida apenas para tempos positivos.

Assim, escrevemos a integral da Equação 12.35 como

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = \int_0^\infty f(x)e^{-s(x+a)}\,dx$$

$$= e^{-sa}\int_0^\infty f(x)e^{-sx}\,dx = e^{-as}F(s),$$

que é o que nos propusemos a provar.

Deslocamento no domínio da freqüência

O deslocamento no domínio da freqüência corresponde a multiplicar por uma exponencial no domínio do tempo:

$$\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\} = F(s+a), \qquad (12.36)$$

o que decorre da definição da transformada de Laplace. A dedução da Equação 12.36 fica para o Problema 12.16.

Podemos usar a relação da Equação 12.36 para deduzir novos pares de transformadas. Assim, sabendo que

$$\mathcal{L}\{\cos \omega t\} = \frac{s}{s^2+\omega^2},$$

usamos a Equação 12.36 para deduzir que

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\cos \omega t\} = \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}.$$

Mudança de escala

A propriedade de mudança de escala se refere à relação entre $f(t)$ e $F(s)$ quando a variável tempo é multiplicada por uma constante positiva:

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right), \quad a>0, \qquad (12.37)$$

cuja dedução deixamos para o Problema 12.22. A propriedade de mudança de escala é particularmente útil em trabalhos experimentais, em especial quando tais mudanças no tempo são feitas para facilitar a construção de um modelo para o sistema sob investigação.

Usamos a Equação 12.37 para formular novos pares de transformadas. Assim, sabendo que

$$\mathcal{L}\{\cos t\} = \frac{s}{s^2+1},$$

deduzimos, pela Equação 12.37, que

$$\mathcal{L}\{\cos \omega t\} = \frac{1}{\omega}\frac{s/\omega}{(s/\omega)^2+1} = \frac{s}{s^2+\omega^2}.$$

A Tabela 12.2 dá uma lista abreviada de transformadas operacionais.

NOTA: Avalie o que você entendeu dessas transformadas operacionais tentando resolver os problemas 12.24 *e* 12.25, *apresentados no final deste capítulo.*

TABELA 12.2 Lista abreviada de transformadas operacionais

Operação	$f(t)$	$F(s)$
Multiplicação por uma constante	$Kf(t)$	$KF(s)$
Adição/subtração	$f_1(t)+f_2(t)-f_3(t)+\ldots$	$f_1(s)+f_2(s)-f_3(s)+\ldots$
Derivada de primeira ordem (tempo)	$\frac{df(t)}{dt}$	$sF(s)-f(0^-)$
Derivada de segunda ordem (tempo)	$\frac{d^2f(t)}{dt^2}$	$s^2F(s)-sf(0^-)-\frac{df(0^-)}{dt}$
Derivada de ordem n (tempo)	$\frac{d^nf(t)}{dt^n}$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0^-)-s^{n-2}\frac{df(0^-)}{dt}-s^{n-3}\frac{df^2(0^-)}{dt^2}-\ldots-\frac{d^{n-1}f(0^-)}{dt^{n-1}}$
Integral em relação ao tempo	$\int_0^t f(x)\,dx$	$\frac{F(s)}{s}$
Deslocamento no tempo	$f(t-a)u(t-a),\ a>0$	$e^{-as}F(s)$
Deslocamento na freqüência	$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
Mudança de escala	$f(at),\ a>0$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
Derivada de primeira ordem (em s)	$tf(t)$	$-\frac{dF(s)}{ds}$
Derivada de ordem n (em s)	$t^nf(t)$	$(-1)^n\frac{d^nF(s)}{ds^n}$
Integral (em s)	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(u)\,du$

✔ PROBLEMA PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 1 — Saber calcular a transformada de Laplace de uma função usando a definição de transformada de Laplace

12.2 Use a transformada operacional adequada da Tabela 12.2 para determinar a transformada de Laplace de cada função:

a) t^2e^{-at}; b) $\dfrac{d}{dt}(e^{-at}\operatorname{senh}\beta t)$; c) $t\cos\omega t$.

Resposta:

(a) $\dfrac{2}{(s+a)^3}$; (b) $\dfrac{\beta s}{(s+a)^2-\beta^2}$; (c) $\dfrac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$.

NOTA: Tente resolver também os problemas 11.17 *e* 11.18, *do capítulo anterior.*

12.6 Uma aplicação da transformada de Laplace

Vamos, agora, ilustrar como usar a transformada de Laplace para resolver as equações integrais/diferenciais ordinárias que descrevem o comportamento de circuitos de parâmetros concentrados. Considere o circuito mostrado na Figura 12.16. Admitimos que não haja nenhuma energia inicial armazenada no circuito no instante em que a chave, que curto-circuita a fonte de corrente cc, é aberta. O problema é determinar a expressão de $v(t)$, quando $t \geq 0$.

Começamos escrevendo a equação integral/diferencial que $v(t)$ deve satisfazer. Precisamos de somente uma única equação nodal para descrever o circuito. Somando as correntes que saem do nó superior do circuito obtemos a equação:

$$\frac{v(t)}{R} + \frac{1}{L}\int_0^t v(x)\,dx + C\frac{dv(t)}{dt} = I_{cc}u(t). \quad (12.38)$$

Observe que, ao escrevermos a Equação 12.38, representamos a abertura da chave por uma fonte de corrente em forma de degrau que varia de zero a I_{cc}.

Depois da obtenção das equações integrais/diferenciais (neste exemplo, apenas uma), transformamos as equações para o domínio da freqüência. Não percorreremos todas as etapas da transformação detalhadamente porque, no Capítulo 13, veremos como evitá-las e como gerar as equações diretamente no domínio da freqüência. Ainda que brevemente, usamos três transformadas operacionais e uma transformada funcional na Equação 12.38 para obter

$$\frac{V(s)}{R} + \frac{1}{L}\frac{V(s)}{s} + C[sV(s) - v(0^-)] = I_{cc}\left(\frac{1}{s}\right), \quad (12.39)$$

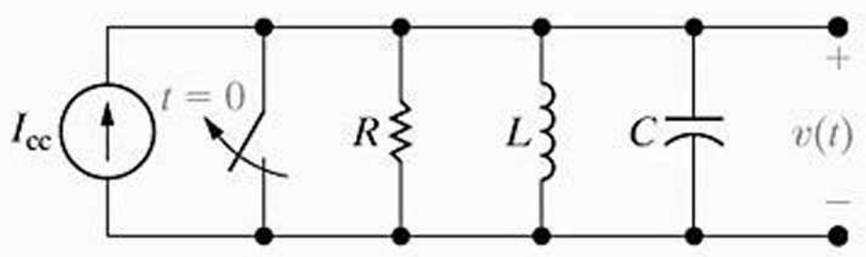


Figura 12.16 ▲ Circuito *RLC* em paralelo.

uma equação algébrica na qual $V(s)$ é a variável desconhecida. Estamos admitindo que os parâmetros de circuito R, L e C, bem como a corrente da fonte, I_{cc}, sejam conhecidos; a tensão inicial no capacitor, $v(0^-)$, é zero porque a energia inicial armazenada no circuito é zero. Assim, reduzimos o problema à resolução de uma equação algébrica.

Em seguida, resolvemos as equações algébricas (novamente, só uma neste caso) determinando o valor das incógnitas. Resolvendo a Equação 12.39, obtemos

$$V(s)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{sL} + sC\right) = \frac{I_{cc}}{s},$$

$$V(s) = \frac{I_{cc}/C}{s^2 + (1/RC)s + (1/LC)}. \quad (12.40)$$

Para determinarmos $v(t)$, temos de efetuar a transformada inversa de $V(s)$. Denotamos essa operação inversa

$$v(t) = \mathcal{L}^{-1}\{V(s)\}. \quad (12.41)$$

A etapa seguinte da análise é determinar a transformada inversa da expressão no domínio da freqüência; esse será o assunto da Seção 12.7. Naquela seção, apresentaremos também uma etapa final, crítica: verificar a validade da expressão resultante no domínio do tempo. A necessidade de tal verificação não é exclusiva da transformada de Laplace; engenheiros conscienciosos e prudentes sempre testam qualquer solução calculada para assegurar-se de que ela faz sentido em termos do comportamento conhecido do sistema.

Simplificar a notação agora é vantajoso. Portanto, fazemos isso eliminando o t entre parênteses nas expressões no domínio do tempo e o s entre parênteses nas expressões no domínio da freqüência. Usamos letras minúsculas para todas as variáveis no domínio do tempo e letras maiúsculas para as variáveis correspondentes no domínio da freqüência. Assim,

$$\mathcal{L}\{v\} = V \text{ ou } v = \mathcal{L}^{-1}\{V\},$$

$$\mathcal{L}\{i\} = I \text{ ou } i = \mathcal{L}^{-1}\{I\},$$

$$\mathcal{L}\{f\} = F \text{ ou } f = \mathcal{L}^{-1}\{F\},$$

e assim por diante.

NOTA: Avalie o que você entendeu deste assunto tentando resolver o Problema 12.26, *apresentado no final deste capítulo.*

12.7 Transformadas inversas

A expressão para $V(s)$ na Equação 12.40 é uma função *racional* de s; isto é, uma expressão que pode ser expressa na forma de uma razão entre dois polinômios em s, tal que nenhuma potência não inteira de s apareça nos polinômios. De fato, para circuitos lineares, de parâmetros concentrados, cujos componentes têm valores constantes, as expressões no domínio da freqüência para as tensões e correntes desconhecidas são sempre funções racionais de s. (Você pode verificar essa observação resolvendo os problemas 12.27–12.30.) Se pudermos executar transformadas inversas de funções racionais de s, poderemos calcular as expressões para o domínio do tempo das tensões e das correntes. A finalidade desta seção é apresentar uma técnica sistemática e direta para determinar a transformada inversa de uma função racional.

Em geral, precisamos determinar a transformada inversa de uma função cuja forma é

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}. \tag{12.42}$$

Os coeficientes a e b são constantes reais e os expoentes m e n são inteiros positivos. A razão $N(s)/D(s)$ é denominada uma *função racional própria,* se $m > n$, e uma *função racional imprópria,* se $m \leq n$. Somente uma função racional própria pode ser expandida como uma soma de frações parciais. Essa restrição não causa nenhum problema, como mostramos no final desta seção.

Expansão por frações parciais: funções racionais próprias

Uma função racional própria é expandida em uma soma de frações parciais escrevendo-se um termo ou uma série de termos para cada raiz de $D(s)$. Assim, $D(s)$ deve estar em forma fatorada antes de podermos realizar uma expansão por frações parciais. Para cada raiz distinta de $D(s)$ aparece um único termo na soma de frações parciais. Para cada raiz múltipla de $D(s)$, de multiplicidade r, a expansão contém r termos. Por exemplo, na função racional

$$\frac{s+6}{s(s+3)(s+1)^2},$$

o denominador tem quatro raízes. Duas dessas raízes são distintas – ou seja, em $s = 0$ e $s = -3$. Uma raiz múltipla, de multiplicidade 2, ocorre em $s = -1$. Assim, a expansão por frações parciais dessa função toma a forma

$$\frac{s+6}{s(s+3)(s+1)^2} \equiv \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+3} + \frac{K_3}{(s+1)^2} + \frac{K_4}{s+1}. \tag{12.43}$$

A técnica das frações parciais para determinar transformadas inversas se baseia na associação de uma função $f(t)$ a cada termo da soma de frações parciais. Pela Tabela 12.1 você poderá verificar que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+6}{s(s+3)(s+1)^2}\right\}$$

$$= (K_1 + K_2e^{-3t} + K_3te^{-t} + K_4e^{-t})u(t). \tag{12.44}$$

Agora só falta estabelecer uma técnica para determinar os coeficientes (K_1, K_2, K_3, ...) gerados por uma expansão por frações parciais. Esse problema pode assumir quatro formas gerais. Especificamente, as raízes de $D(s)$ são (1) reais e distintas; (2) complexas e distintas; (3) reais e repetidas ou (4) complexas e repetidas. Antes de considerarmos cada situação, há alguns comentários gerais que precisamos fazer.

Usamos o sinal de identidade ≡ na Equação 12.43 para enfatizar que expandir uma função racional em uma soma de frações parciais estabelece uma identidade. Por isso, ambos os lados da equação devem ser o mesmo para todos os valores da variável s. Além disso, a relação de identidade deve ser válida quando ambos os lados estiverem sujeitos à mesma operação matemática. Essas características são úteis para determinar os coeficientes, como veremos.

Não se esqueça de verificar se a função racional é própria. Essa verificação é importante porque nada no procedimento para determinar os vários K's nos alertará quanto a resultados absurdos se a função racional for imprópria. Apresentamos um procedimento para verificar a validade dos K's, mas você poderá evitar um trabalho inútil habituando-se a perguntar a si mesmo: "$F(s)$ é uma função racional própria?"

Expansão por frações parciais: raízes reais distintas de $D(s)$

Em primeiro lugar, consideramos a determinação dos coeficientes em uma expansão por frações parciais quando todas as raízes de $D(s)$ são reais e distintas. Para determinar o K associado a um termo que surge por causa de uma raiz simples de $D(s)$, multiplicamos ambos os lados da identidade por um fator igual ao denominador do termo desejado. Então, avaliamos ambos os lados da identidade quando s for igual à raiz correspondente ao fator multiplicador, sendo o lado direito o K desejado e o lado esquerdo seu valor numérico. Por exemplo,

$$F(s) = \frac{96(s+5)(s+12)}{s(s+8)(s+6)} \equiv \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+8} + \frac{K_3}{s+6}. \tag{12.45}$$

Para determinar o valor de K_1, multiplicamos ambos os lados por s e, então, avaliamos ambos os lados em $s = 0$:

$$\left.\frac{96(s+5)(s+12)}{(s+8)(s+6)}\right|_{s=0} \equiv K_1 + \left.\frac{K_2 s}{s+8}\right|_{s=0} + \left.\frac{K_3 s}{s+6}\right|_{s=0},$$

ou

$$\frac{96(5)(12)}{8(6)} \equiv K_1 = 120. \tag{12.46}$$

Para determinar o valor de K_2, multiplicamos ambos os lados por $s + 8$ e, então, avaliamos ambos os lados em $s = -8$:

$$\left.\frac{96(s+5)(s+12)}{s(s+6)}\right|_{s=-8}$$

$$\equiv \left.\frac{K_1(s+8)}{s}\right|_{s=-8} + K_2 + \left.\frac{K_3(s+8)}{(s+6)}\right|_{s=-8},$$

ou

$$\frac{96(-3)(4)}{(-8)(-2)} = K_2 = -72. \tag{12.47}$$

Então K_3 é

$$\left.\frac{96(s+5)(s+12)}{s(s+8)}\right|_{s=-6} = K_3 = 48. \tag{12.48}$$

Pela Equação 12.45 e pelos valores obtidos para as constantes,

$$\frac{96(s+5)(s+12)}{s(s+8)(s+6)} \equiv \frac{120}{s} + \frac{48}{s+6} - \frac{72}{s+8}. \tag{12.49}$$

Neste ponto, é uma boa idéia testar o resultado para se proteger contra erros de cálculo. Como já mencionamos, uma expansão por frações parciais cria uma identidade; assim, ambos os lados da Equação 12.49 devem ter o mesmo valor para todos os valores de s. A escolha de valores de teste é completamente livre; daí, escolhemos valores fáceis de verificar. Por exemplo, na Equação 12.49, os valores –5 e –12 são interessantes porque anulam o lado esquerdo da equação. Fazendo $s = -5$, temos

$$\frac{120}{-5} + \frac{48}{1} - \frac{72}{3} = -24 + 48 - 24 = 0,$$

e para $s = -12$, temos

$$\frac{120}{-12} + \frac{48}{-6} - \frac{72}{-4} = -10 - 8 + 18 = 0.$$

Agora, confiantes de que os valores numéricos das várias constantes estejam corretos, prosseguimos na determinação da transformada inversa:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{96(s+5)(s+12)}{s(s+8)(s+6)}\right\} = (120 + 48e^{-6t} - 72e^{-8t})u(t). \tag{12.50}$$

Expansão por frações parciais: raízes complexas distintas de $D(s)$

A única diferença entre determinar os coeficientes associados a raízes complexas distintas e determinar os associados a raízes reais distintas é que, para os primeiros, a álgebra envolve números complexos. Ilustramos o método expandindo a função racional:

$$F(s) = \frac{100(s+3)}{(s+6)(s^2+6s+25)}. \tag{12.51}$$

Começamos observando que $F(s)$ é uma função racional própria. Em seguida, devemos determinar as raízes do termo quadrático $s^2 + 6s + 25$:

$$s^2 + 6s + 25 = (s + 3 - j4)(s + 3 + j4). \tag{12.52}$$

Com o denominador na forma fatorada, prosseguimos como antes:

$$\frac{100(s+3)}{(s+6)(s^2+6s+25)} \equiv$$

$$\frac{K_1}{s+6} + \frac{K_2}{s+3-j4} + \frac{K_3}{s+3+j4}. \tag{12.53}$$

Para determinar K_1, K_2 e K_3, usamos o mesmo processo de antes:

$$K_1 = \left.\frac{100(s+3)}{s^2+6s+25}\right|_{s=-6} = \frac{100(-3)}{25} = -12, \tag{12.54}$$

$$K_2 = \left.\frac{100(s+3)}{(s+6)(s+3+j4)}\right|_{s=-3+j4} = \frac{100(j4)}{(3+j4)(j8)}$$

$$= 6 - j8 = 10e^{j53.13°}, \tag{12.55}$$

$$K_3 = \left.\frac{100(s+3)}{(s+6)(s+3-j4)}\right|_{s=-3-j4} = \frac{100(-j4)}{(3-j4)(-j8)}$$

$$= 6 + j8 = 10e^{j53.13°}. \tag{12.56}$$

✔ PROBLEMA PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 2 — Saber calcular a transformada inversa de Laplace usando a expansão por frações parciais e a tabela de transformadas de Laplace

12.3 Determine $f(t)$ se

$$F(s) = \frac{6s^2 + 26s + 26}{(s+1)(s+2)(s+3)}.$$

Resposta: $f(t) = (3e^{-t} + 2e^{-2t} + e^{-3t})u(t)$.

12.4 Determine $f(t)$ se

$$F(s) = \frac{7s^2 + 63s + 134}{(s+3)(s+4)(s+5)}.$$

Resposta: $f(t) = (4e^{-3t} + 6e^{-4t} - 3e^{-5t})u(t)$.

NOTA: Tente resolver também os problemas 12.40(*a*) *e* (*b*), *apresentados no final deste capítulo.*

Então

$$\frac{100(s+3)}{(s+6)(s^2+6s+25)} = \frac{-12}{s+6} + \frac{10\angle -53{,}13^\circ}{s+3-j4} + \frac{10\angle 53{,}13^\circ}{s+3+j4}. \quad (12.57)$$

Mais uma vez, precisamos fazer algumas observações. Em primeiro lugar, em circuitos fisicamente realizáveis, raízes complexas sempre aparecem em pares conjugados. Em segundo lugar, os coeficientes associados a esses pares também são conjugados. Observe, por exemplo, que K_3 (Equação 12.56) é o conjugado de K_2 (Equação 12.55). Assim, para raízes complexas conjugadas, na verdade você só precisa calcular metade dos coeficientes.

Antes de executarmos a transformação inversa da Equação 12.57, verificamos numericamente a expansão por frações parciais. O valor $s = -3$ é interessante porque reduz a zero o lado esquerdo:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{-12}{3} + \frac{10\angle -53{,}13^\circ}{-j4} + \frac{10\angle 53{,}13^\circ}{j4} \\ &= -4 + 2{,}5\angle 36{,}87^\circ + 2{,}5\angle -36{,}87^\circ \\ &= -4 + 2{,}0 + j1{,}5 + 2{,}0 - j1{,}5 = 0. \end{aligned}$$

Agora, prosseguimos com a transformação inversa da Equação 12.57:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{100(s+3)}{(s+6)(s^2+6s+25)}\right\} = (-12e^{-6t} + 10e^{-j53{,}13^\circ}e^{-(3-j4)t} + 10e^{j53{,}13^\circ}e^{-(3+j4)t})u(t). \quad (12.58)$$

Em geral, não é desejável que a função no domínio do tempo contenha componentes imaginários. Felizmente, como os termos que envolvem componentes imaginários sempre aparecem em pares conjugados, podemos eliminá-los simplesmente somando os pares:

$$\begin{aligned} &10e^{-j53{,}13^\circ}e^{-(3-j4)t} + 10e^{j53{,}13^\circ}e^{-(3-j4)t} \\ &= 10e^{-3t}(e^{j(4t-53{,}13^\circ)} + e^{-j(4t-53{,}13^\circ)}) \\ &= 20e^{-3t}\cos(4t - 53{,}13^\circ), \end{aligned} \quad (12.59)$$

o que nos habilita a simplificar a Equação 12.58:

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{100(s+3)}{(s+6)(s^2+6s+25)}\right\} \\ &= [-12e^{-6t} + 20e^{-3t}\cos(4t - 53{,}13^\circ)]u(t). \end{aligned} \quad (12.60)$$

Como raízes complexas distintas aparecem freqüentemente na análise de circuitos lineares de parâmetros concentrados, precisamos resumir esses resultados com um novo par de transformadas. Sempre que $D(s)$ contiver raízes complexas distintas – isto é, fatores da forma $(s + \alpha - j\beta)$ $(s + \alpha + j\beta)$ – um par de termos da forma

$$\frac{K}{s+\alpha-j\beta} + \frac{K^*}{s+\alpha+j\beta} \quad (12.61)$$

aparece na expansão por frações parciais, onde o coeficiente da fração parcial é, em geral, um número complexo. Na forma polar,

$$K = |K|e^{j\theta} = |K|\angle\theta^\circ, \quad (12.62)$$

onde |K| denota o módulo do coeficiente complexo. Então

$$K^* = |K|e^{-j\theta} = |K|\angle -\theta^\circ. \quad (12.63)$$

A transformada inversa dos pares de conjugados complexos da Equação 12.61 é sempre

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{s+\alpha-j\beta} + \frac{K^*}{s+\alpha+j\beta}\right\} \\ &= 2|K|e^{-\alpha t}\cos(\beta t + \theta). \end{aligned} \quad (12.64)$$

Ao aplicar a Equação 12.64, é importante observar que K é definido como o coeficiente associado ao denominador $s + \alpha - j\beta$ e que K^* é definido como o coeficiente associado ao denominador $s + \alpha + j\beta$.

Expansão por frações parciais: raízes reais repetidas de $D(s)$

Para determinar os coeficientes associados aos termos gerados por uma raiz múltipla de multiplicidade r, multiplicamos ambos os lados da identidade pela raiz múltipla elevada à sua potência de ordem r. Determinamos a constante que aparece acima do fator elevado à potência r avaliando ambos os lados da identidade na raiz múltipla. Para determinar os $(r - 1)$ coeficientes restantes, diferenciamos ambos os lados da identidade $(r - 1)$ vezes. Ao final de cada diferenciação, avaliamos ambos os lados da identidade na

✔ PROBLEMA PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 2 — Saber calcular a transformada inversa de Laplace usando a expansão por frações parciais e a tabela de transformadas de Laplace

12.5 Determine $f(t)$ se $F(s) = \dfrac{10(s^2+119)}{(s+5)(s^2+10s+169)}$. **Resposta**: $f(t) = (10e^{-5t} - 8{,}33e^{-5t}\operatorname{sen} 12t)u(t)$.

NOTA: Tente resolver também os problemas 12.40(*c*) *e* (*d*)*, apresentados no final deste capítulo.*

raiz múltipla. O lado direito é sempre o K desejado e o lado esquerdo é sempre seu valor numérico. Por exemplo,

$$\frac{100(s+25)}{s(s+5)^3} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{(s+5)^3} + \frac{K_3}{(s+5)^2} + \frac{K_4}{s+5}. \tag{12.65}$$

Determinamos K_1 como já descrevemos antes; isto é,

$$K_1 = \left.\frac{100(s+25)}{(s+5)^3}\right|_{s=0} = \frac{100(25)}{125} = 20. \tag{12.66}$$

Para determinar K_2, multiplicamos ambos os lados por $(s+5)^3$, então avaliamos ambos os lados em -5:

$$\left.\frac{100(s+25)}{s}\right|_{s=-5} = \left.\frac{K_1(s+5)^3}{s}\right|_{s=-5} + K_2 + K_3(s+5)|_{s=-5} + \left. K_4(s+5)^2\right|_{s=-5}, \tag{12.67}$$

$$\frac{100(20)}{(-5)} = K_1 \times 0 + K_2 + K_3 \times 0 + K_4 \times 0$$

$$= K_2 = -400. \tag{12.68}$$

Para determinar K_3, em primeiro lugar, temos de multiplicar ambos os lados da Equação 12.65 por $(s+5)^3$. Em seguida, diferenciamos ambos os lados uma vez em relação a s e, então, avaliamos em $s = -5$.

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{100(s+25)}{s}\right]_{s=-5} = \frac{d}{ds}\left[\frac{K_1(s+5)^3}{s}\right]_{s=-5} + \frac{d}{ds}[K_2]_{s=-5} + \frac{d}{ds}[K_3(s+5)]_{s=-5} + \frac{d}{ds}[K_4(s+5)^2]_{s=-5}, \tag{12.69}$$

$$100\left[\frac{s-(s+25)}{s^2}\right]_{s=-5} = K_3 = -100. \tag{12.70}$$

Para determinar K_4, em primeiro lugar, multiplicamos ambos os lados da Equação 12.65 por $(s+5)^3$. Em seguida, diferenciamos ambos os lados duas vezes em relação a s e, então, avaliamos ambos os lados em $s = -5$. Após simplificarmos a derivada de primeira ordem, a derivada de segunda ordem torna-se

$$100\frac{d}{ds}\left[-\frac{25}{s^2}\right]_{s=-5} = K_1\frac{d}{ds}\left[\frac{(s+5)^2(2s-5)}{s^2}\right]_{s=-5} + 0 + \frac{d}{ds}[K_3]_{s=-5} + \frac{d}{ds}[2K_4(s+5)]_{s=-5},$$

ou

$$-40 = 2K_4 \tag{12.71}$$

Resolvendo a Equação 12.71 obtemos

$$K_4 = -20. \tag{12.72}$$

Então

$$\frac{100(s+25)}{s(s+5)^3} = \frac{20}{s} - \frac{400}{(s+5)^3} - \frac{100}{(s+5)^2} - \frac{20}{s+5}. \tag{12.73}$$

Neste ponto, podemos verificar nossa expansão, testando ambos os lados da Equação 12.73 em $s = -25$. Observe que ambos os lados da Equação 12.73 são iguais a zero quando $s = -25$, e isso nos dá confiança na correção da expansão por frações parciais. A transformada inversa da Equação 12.73 resulta em

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{100(s+25)}{s(s+5)^3}\right\} = [20 - 400t^2e^{-5t} - 100te^{-5t} - 20e^{-5t}]u(t). \tag{12.74}$$

Expansão por frações parciais: raízes complexas repetidas de $D(s)$

Tratamos raízes complexas repetidas do mesmo modo que as raízes reais repetidas; a única diferença é que a álgebra envolve números complexos. Lembre-se de que raízes complexas sempre aparecem em pares conjugados e de que os coeficientes associados ao par conjugado também são conjugados, portanto somente metade deles precisa ser avaliada. Por exemplo,

$$F(s) = \frac{768}{(s^2+6s+25)^2}. \tag{12.75}$$

✔ PROBLEMA PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 2 — Saber calcular a transformada inversa de Laplace usando a expansão por frações parciais e a tabela de transformadas de Laplace

12.6 Determine $f(t)$ se $F(s) = \dfrac{(4s^2+7s+1)}{s(s+1)^2}$. **Resposta**: $f(t) = (1 + 2te^{-t} + 3e^{-t})u(t)$.

NOTA: Tente resolver também os problemas 12.41(*a*), (*b*), *e* (*d*), *apresentados no final deste capítulo.*

Após fatorar o polinômio do denominador, escrevemos

$$F(s) = \frac{768}{(s+3-j4)^2(s+3+j4)^2}$$

$$= \frac{K_1}{(s+3-j4)^2} + \frac{K_2}{s+3-j4}$$

$$+ \frac{K_1^*}{(s+3+j4)^2} + \frac{K_2^*}{s+3+j4}. \quad (12.76)$$

Precisamos agora avaliar somente K_1 e K_2, porque K_1^* e K_2^* são valores conjugados. O valor de K_1 é

$$K_1 = \left.\frac{768}{(s+3+j4)^2}\right|_{s=-3+j4}$$

$$= \frac{768}{(j8)^2} = -12. \quad (12.77)$$

O valor de K_2 é

$$K_2 = \frac{d}{ds}\left[\frac{768}{(s+3+j4)^2}\right]_{s=-3+j4}$$

$$= -\left.\frac{2(768)}{(s+3+j4)^3}\right|_{s=-3+j4}$$

$$= -\frac{2(768)}{(j8)^3}$$

$$= -j3 = 3\angle -90^\circ. \quad (12.78)$$

Pelas equações 12.77 e 12.78,

$$K_1^* = -12, \quad (12.79)$$

$$K_2^* = j3 = 3\angle 90^\circ. \quad (12.80)$$

Agrupamos agora a expansão por frações parciais por termos conjugados para obter

$$F(s) = \left[\frac{-12}{(s+3-j4)^2} + \frac{-12}{(s+3+j4)^2}\right]$$

$$+ \left(\frac{3\angle -90^\circ}{s+3-j4} + \frac{3\angle 90^\circ}{s+3+j4}\right). \quad (12.81)$$

Escrevemos, então, a transformada inversa de $F(s)$:

$$f(t) = [-24te^{-3t}\cos 4t + 6e^{-3t}\cos(4t - 90^\circ)]u(t). \quad (12.82)$$

Observe que, se $F(s)$ tiver uma raiz real a de multiplicidade r em seu denominador, o termo correspondente na expansão por frações parciais é da forma

$$\frac{K}{(s+a)^r}.$$

A transformada inversa desse termo é

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{(s+a)^r}\right\} = \frac{Kt^{r-1}e^{-at}}{(r-1)!}u(t). \quad (12.83)$$

Se $F(s)$ tiver uma raiz complexa de $\alpha + j\beta$ de multiplicidade r em seu denominador, o termo correspondente na expansão por frações parciais é o par conjugado

$$\frac{K}{(s+\alpha-j\beta)^r} + \frac{K^*}{(s+\alpha+j\beta)^r}.$$

A transformada inversa desse par é

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{(s+\alpha-j\beta)^r} + \frac{K^*}{(s+\alpha+j\beta)^r}\right\}$$

$$= \left[\frac{2|K|t^{r-1}}{(r-1)!}e^{-\alpha t}\cos(\beta t + \theta)\right]u(t). \quad (12.84)$$

As equações 12.83 e 12.84 são as que nos possibilitam obter, por inspeção, a transformada inversa de qualquer expansão por frações parciais. Uma observação adicional sobre essas duas equações: na maioria dos problemas de análise de circuitos, raramente r é maior do que 2. Assim, a transformada inversa de uma função racional pode ser tratada com quatro pares de transformadas. A Tabela 12.3 apresenta uma lista desses pares.

TABELA 12.3 Quatro pares de transformadas úteis

Número do par	Natureza das raízes	$F(s)$	$f(t)$
1	Reais e distintas	$\frac{K}{s+a}$	$Ke^{-at}u(t)$
2	Reais e repetidas	$\frac{K}{(s+a)^2}$	$Kte^{-at}u(t)$
3	Complexas e distintas	$\frac{K}{s+\alpha-j\beta} + \frac{K^*}{s+\alpha+j\beta}$	$2\lvert K\rvert e^{-at}\cos(\beta t + \theta)u(t)$
4	Complexas e repetidas	$\frac{K}{(s+\alpha-j\beta)^2} + \frac{K^*}{(s+\alpha+j\beta)^2}$	$2t\lvert K\rvert e^{-at}\cos(\beta t + \theta)u(t)$

Nota: Nos pares 1 e 2, K é uma quantidade real, ao passo que, nos pares 3 e 4, K é a quantidade complexa $|K|\angle\theta$.

✔ PROBLEMA PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 2 — Saber calcular a transformada inversa de Laplace usando a expansão por frações parciais e a tabela de transformadas de Laplace

12.7 Determine $f(t)$ se $F(s) = \dfrac{40}{(s^2 + 4s + 5)^2}$. **Resposta**: $f(t) = (-20te^{-2t}\cos t + 20e^{-2t}\operatorname{sen} t)u(t)$.

NOTA: Tente resolver também o Problema 12.41(*e*)*, apresentado no final deste capítulo.*

Expansão por frações parciais: funções racionais impróprias

Concluiremos a discussão da expansão por frações parciais voltando a uma observação feita no início desta seção, ou seja, que as funções racionais impróprias não constituem um problema sério para determinar transformadas inversas. Uma função racional imprópria pode sempre ser expressa como um polinômio somado a uma função racional própria. Calculamos, então, a transformada inversa do polinômio, por meio da função impulso e suas derivadas. A transformada inversa da função racional própria é calculada pelas técnicas esboçadas nesta seção. Para ilustrar o procedimento, usamos a função

$$F(s) = \frac{s^4 + 13s^3 + 66s^2 + 200s + 300}{s^2 + 9s + 20}. \quad (12.85)$$

Dividindo o numerador pelo denominador até que o resto seja uma função racional própria, obtemos

$$F(s) = s^2 + 4s + 10 + \frac{30s + 100}{s^2 + 9s + 20}, \quad (12.86)$$

em que o termo $(30s + 100)/(s^2 + 9s + 20)$ é o resto.

Em seguida, expandimos a função racional própria em uma soma de frações parciais:

$$\frac{30s + 100}{s^2 + 9s + 20} = \frac{30s + 100}{(s + 4)(s + 5)} = \frac{-20}{s + 4} + \frac{50}{s + 5}. \quad (12.87)$$

Substituindo a Equação 12.87 na Equação 12.86, obtemos

$$F(s) = s^2 + 4s + 10 - \frac{20}{s + 4} + \frac{50}{s + 5}. \quad (12.88)$$

Agora podemos obter a transformada inversa da Equação 12.88 por inspeção. Daí

$$f(t) = \frac{d^2\delta(t)}{dt^2} + 4\frac{d\delta(t)}{dt} + 10\delta(t) - (20e^{-4t} - 50e^{-5t})u(t). \quad (12.89)$$

12.8 Pólos e zeros de $F(s)$

A função racional da Equação 12.42 também pode ser expressa como a razão entre dois polinômios fatorados. Em outras palavras, podemos escrever $F(s)$ como

$$F(s) = \frac{K(s + z_1)(s + z_2)\cdots(s + z_n)}{(s + p_1)(s + p_2)\cdots(s + p_m)}, \quad (12.90)$$

onde K é a constante a_n/b_m. Por exemplo, também podemos escrever a função

$$F(s) = \frac{8s^2 + 120s + 400}{2s^4 + 20s^3 + 70s^2 + 100s + 48}$$

como

$$F(s) = \frac{8(s^2 + 15s + 50)}{2(s^4 + 10s^3 + 35s^2 + 50s + 24)} = \frac{4(s + 5)(s + 10)}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)(s + 4)}. \quad (12.91)$$

✔ PROBLEMAS PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 2 — Saber calcular a transformada inversa de Laplace usando a expansão por frações parciais e a tabela de transformadas de Laplace

12.8 Determine $f(t)$ se $F(s) = \dfrac{(5s^2 + 29s + 32)}{(s + 2)(s + 4)}$. **Resposta**: $f(t) = 5\delta(t) - (3e^{-2t} - 2e^{-4t})u(t)$.

12.9 Determine $f(t)$ se $F(s) = \dfrac{(2s^3 + 8s^2 + 2s - 4)}{(s^2 + 5s + 4)}$. **Resposta**: $f(t) = 2\dfrac{d\delta(t)}{dt} - 2\delta(t) + 4e^{-4t}u(t)$.

NOTA: Tente resolver também o Problema 12.42(*c*)*, apresentado no final deste capítulo.*

As raízes do polinômio do denominador, isto é, $-p_1$, $-p_2$, $-p_3$,..., $-p_m$ são denominadas os *pólos de* $F(s)$; elas são os valores de s nos quais $F(s)$ torna-se infinitamente grande. Na função descrita pela Equação 12.91, os pólos de $F(s)$ são –1, –2, –3 e –4.

As raízes do polinômio do numerador, isto é, $-z_1$, $-z_2$, $-z_3$,..., $-z_n$ são denominadas os *zeros de* $F(s)$; elas são os valores de s nos quais $F(s)$ torna-se zero. Na função descrita pela Equação 12.91, os zeros de $F(s)$ são –5 e –10.

No que vem a seguir, você com certeza concordará que visualizar os pólos e zeros de $F(s)$ como pontos sobre um plano complexo s é útil. Um plano complexo é necessário porque as raízes dos polinômios podem ser complexas. No plano complexo s, usamos o eixo horizontal para representar a ponte real de s e o eixo vertical para representar a ponte imaginária de s.

Como exemplo de representação gráfica de pólos e zeros, considere a função

$$F(s) = \frac{10(s + 5)(s + 3 - j4)(s + 3 + j4)}{s(s + 10)(s + 6 - j8)(s + 6 + j8)}. \quad (12.92)$$

Os pólos de $F(s)$ estão em 0, –10, $-6 + j8$ e $-6 - j8$. Os zeros estão em –5, $-3 + j4$ e $-3 - j4$. A Figura 12.17 mostra os pólos e zeros representados no plano s, onde X representa pólos e O representa zeros.

Observe que os pólos e zeros para a Equação 12.90 são finitos. $F(s)$ também pode ter um pólo de ordem r ou um zero de ordem r no infinito. Por exemplo, a função descrita pela Equação 12.91 tem um pólo de segunda ordem no infinito porque, para grandes valores de s, a função reduz-se a $4/s^2$ e $F(s) = 0$ quando $s = \infty$. Neste livro, estamos interessados nos pólos e zeros finitos. Por conseguinte, quando nos referirmos aos pólos e zeros de uma função racional de s, estamos nos referindo aos pólos e zeros finitos.

12.9 Teoremas do valor inicial e do valor final

Os teoremas do valor inicial e do valor final são úteis porque nos possibilitam determinar, a partir de $F(s)$, o comportamento de $f(t)$ em 0 e no ∞. Daí, podemos verificar os valores inicial e final de $f(t)$ para ver se estão de acordo com o comportamento conhecido do circuito, antes mesmo de determinar a transformada inversa de $F(s)$.

O teorema do valor inicial afirma que

$$\lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s), \quad (12.93)$$

(Teorema do valor inicial)

e o teorema do valor final afirma que

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s). \quad (12.94)$$

(Teorema do valor final)

O teorema do valor inicial baseia-se na premissa de que $f(t)$ não contém nenhuma função impulso. Na Equação 12.94, temos de acrescentar a restrição de que o teorema só é válido se os pólos de $F(s)$, exceto um pólo de primeira ordem na origem, estiverem localizados na metade esquerda do plano s.

Para provar a Equação 12.93, começamos com a transformada operacional da derivada de primeira ordem:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = sF(s) - f(0^-) = \int_{0^-}^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st}\, dt. \quad (12.95)$$

Agora, tomamos o limite quando $s \to \infty$

$$\lim_{s \to \infty} [sF(s) - f(0^-)] = \lim_{s \to \infty} \int_{0^-}^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st}\, dt. \quad (12.96)$$

Observe que o lado direito da Equação 12.96 pode ser escrito como

$$\lim_{s \to \infty} \left(\int_{0^-}^{0^+} \frac{df}{dt} e^{0} dt + \int_{0^+}^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st}\, dt \right).$$

Quando $s \to \infty$, $(df/dt)e^{-st} \to 0$; daí, a segunda integral se anula no limite. A primeira integral reduz-se a $f(0^+) - f(0^-)$, que é independente de s. Assim, o lado direito da Equação 12.96 torna-se

$$\lim_{s \to \infty} \int_{0^-}^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st}\, dt = f(0^+) - f(0^-). \quad (12.97)$$

Como $f(0^-)$ é independente de s, o lado esquerdo da Equação 12.96 pode ser escrito

$$\lim_{s \to \infty} [sF(s) - f(0^-)] = \lim_{s \to \infty} [sF(s)] - f(0^-). \quad (12.98)$$

Pelas equações 12.97 e 12.98,

$$\lim_{s \to \infty} sF(s) = f(0^+) = \lim_{t \to 0^+} f(t),$$

o que conclui a prova do teorema do valor inicial.

A prova do teorema do valor final também começa com a Equação 12.95. Agora, tomamos o limite quando $s \to 0$:

$$\lim_{s \to 0} [sF(s) - f(0^-)] = \lim_{s \to 0} \left(\int_{0^-}^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st}\, dt \right). \quad (12.99)$$

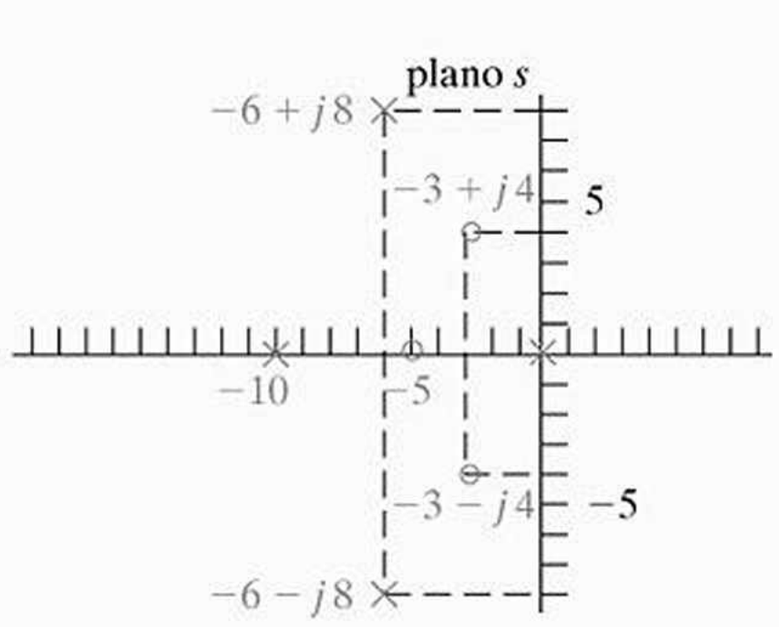


Figura 12.17 ▲ Representação gráfica de pólos e zeros no plano s.

Como a integração é em relação a t e a operação de limite é em relação a s, o lado direito da Equação 12.99 reduz-se a

$$\lim_{s\to 0}\left(\int_{0^-}^{\infty}\frac{df}{dt}e^{-st}\,dt\right)=\int_{0^-}^{\infty}\frac{df}{dt}dt. \qquad (12.100)$$

Como o limite superior da integral é infinito, ela também pode ser escrita na forma de um limite:

$$\int_{0^-}^{\infty}\frac{df}{dt}dt=\lim_{t\to\infty}\int_{0^-}^{t}\frac{df}{dy}dy, \qquad (12.101)$$

onde usamos y como o símbolo de integração para evitar confusão com o limite superior da integral. Calculando a integral, teremos

$$\lim_{t\to\infty}[f(t)-f(0^-)]=\lim_{t\to\infty}[f(t)]-f(0^-). \qquad (12.102)$$

Substituindo a Equação 12.102 na Equação 12.99, obtemos

$$\lim_{s\to 0}[sF(s)]-f(0^-)=\lim_{t\to\infty}[f(t)]-f(0^-). \qquad (12.103)$$

Como $f(0^-)$ se cancela, a Equação 12.103 reduz–se ao teorema do valor final, ou seja,

$$\lim_{s\to 0}sF(s)=\lim_{t\to\infty}f(t).$$

O teorema do valor final é útil somente se $f(\infty)$ existir. Essa condição só é válida se todos os pólos de $F(s)$, exceto um pólo simples na origem, estiverem dentro da metade esquerda do plano s.

A aplicação dos teoremas do valor inicial e do valor final

Para ilustrar a aplicação dos teoremas do valor inicial e do valor final, nós os aplicamos a uma função que utilizamos anteriormente para mostrar a expansão por frações parciais. Considere o par de transformadas dado pela Equação 12.60. O teorema do valor inicial dá

$$\lim_{s\to\infty}sF(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{100s^2[1+(3/s)]}{s^3[1+(6/s)][1+(6/s)+(25/s^2)]}=0,$$

$$\lim_{t\to 0^+}f(t)=[-12+20\cos(-53{,}13^\circ)](1)=-12+12=0.$$

O teorema do valor final dá

$$\lim_{s\to 0}sF(s)=\lim_{s\to 0}\frac{100s(s+3)}{(s+6)(s^2+6s+25)}=0,$$

$$\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{t\to\infty}[-12e^{-6t}+20e^{-3t}\cos(4t-53{,}13^\circ)]u(t)=0.$$

Quando aplicamos os teoremas à Equação 12.60, já tínhamos a expressão no domínio do tempo e estávamos apenas testando nosso entendimento. Mas o real valor dos teoremas do valor inicial e do valor final está na capacidade de testar as expressões no domínio da freqüência antes de resolver a transformada inversa. Por exemplo, considere a expressão para $V(s)$ dada pela Equação 12.40. Embora não possamos calcular $v(t)$ até que os parâmetros do circuito sejam especificados, podemos verificar se $V(s)$ fornece os valores corretos de $v(0^+)$ e $v(\infty)$. Sabemos, pelo enunciado do problema, que $v(0^+)$ é zero. Também sabemos que $v(\infty)$ deve ser zero, pois o indutor ideal em regime permanente contínuo curto-circuito a fonte de corrente cc. Por fim, sabemos que os pólos de $V(s)$ devem estar localizados na metade esquerda do plano s porque R, L e C são constantes positivas. Daí os pólos de $sV(s)$ também encontrarem-se na metade esquerda do plano s.

Aplicando o teorema do valor inicial, obtemos

$$\lim_{s\to\infty}sV(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{s(I_{cc}/C)}{s^2[1+1/(RCs)+1/(LCs^2)]}=0.$$

Aplicando o teorema do valor final, obtemos

$$\lim_{s\to 0}sV(s)=\lim_{s\to 0}\frac{s(I_{cc}/C)}{s^2+(s/RC)+(1/LC)}=0.$$

A expressão calculada para $V(s)$ fornece corretamente os valores inicial e final de $v(t)$.

✔ PROBLEMA PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 3 — Entender e saber como usar o teorema do valor inicial e o teorema do valor final

12.10 Use os teoremas do valor inicial e do valor final para determinar os valores inicial e final de $f(t)$ nos Problemas para Avaliação 12.4, 12.6 e 12.7.

Resposta: 7, 0; 4, 1 e 0, 0.

NOTA: Tente resolver também o Problema 12.47, *apresentado no final deste capítulo.*

Resumo

- A *transformada de Laplace* é uma ferramenta para converter equações no domínio do tempo em equações no domínio da freqüência, de acordo com a definição geral:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_0^{\infty}f(t)e^{-st}\,dt=F(s),$$

onde $f(t)$ é a expressão no domínio do tempo e $F(s)$ é a expressão no domínio da freqüência.

- A *função degrau* $Ku(t)$ descreve uma função que passa de um nível constante para outro em algum ponto no tempo. K é a amplitude do degrau; se $K = 1$, $Ku(t)$ é a *função degrau unitário*.
- A *função impulso* é definida por

$$\int_{-\infty}^{\infty} K\delta(t)dt = K,$$

$$\delta(t) = 0, \qquad t \neq 0.$$

K é a intensidade do impulso; se $K = 1$, $K\delta(t)$ é a *função impulso unitário*.

- Uma *transformada funcional* é a transformada de Laplace de uma função específica. Pares de transformadas funcionais importantes estão resumidos na Tabela 12.1.
- *Transformadas operacionais* definem as propriedades matemáticas gerais da transformada de Laplace. Pares de transformadas operacionais importantes estão resumidos na Tabela 12.2.
- Em circuitos lineares de parâmetros concentrados, $F(s)$ é uma função racional de s.
- Se $F(s)$ for uma função racional própria, a transformada inversa será determinada por uma expansão por frações parciais.
- Se $F(s)$ for uma função racional imprópria, sua transformada inversa poderá ser determinada expressando-a antes como uma soma de um polinômio e uma função racional própria.
- $F(s)$ pode ser expressa como a razão entre dois polinômios fatorados. As raízes do denominador são denominadas *pólos* e representadas por X no gráfico do plano complexo s. As raízes do numerador são denominadas *zeros* e são representadas por 0 no gráfico do plano complexo s.
- O teorema do valor inicial estabelece que

$$\lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s).$$

O teorema só é válido se $f(t)$ não contiver nenhuma função impulso.

- O teorema do valor final estabelece que

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0^+} sF(s).$$

O teorema só é válido se os pólos de $F(s)$, exceto um pólo de primeira ordem na origem, estiverem na metade esquerda do plano s.

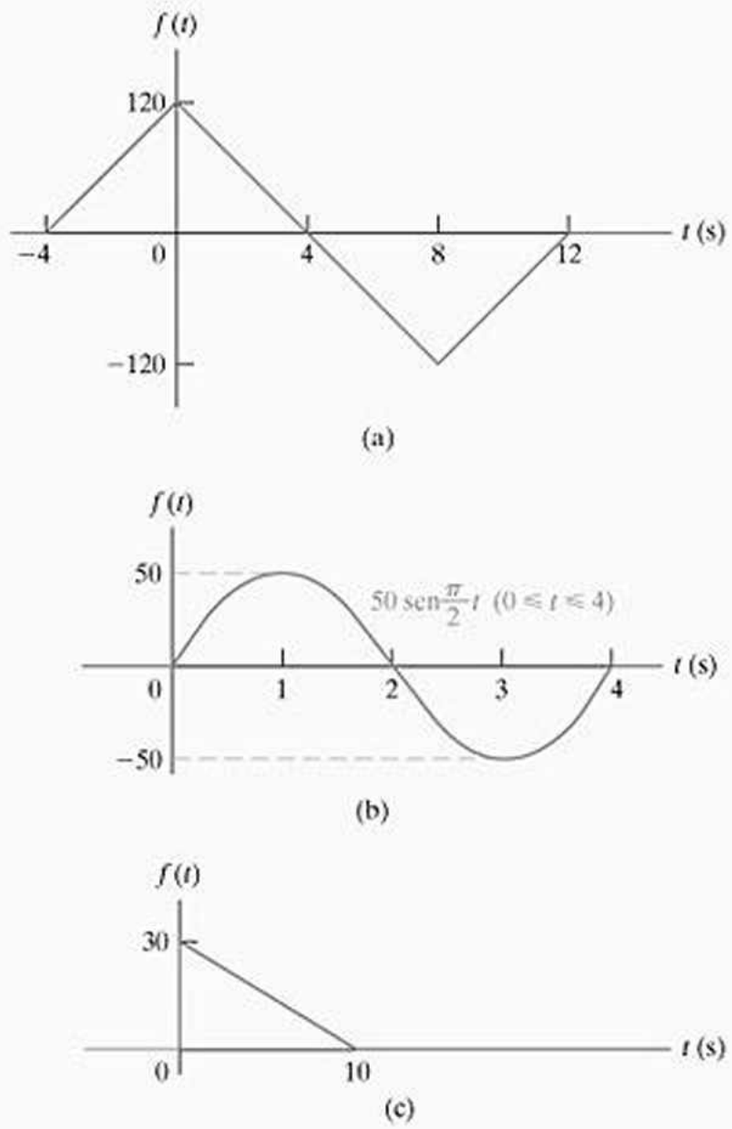
- Os teoremas do valor inicial e do valor final nos permitem prever os valores inicial e final de $f(t)$ a partir da expressão no domínio da freqüência.

Problemas

Seção 12.2

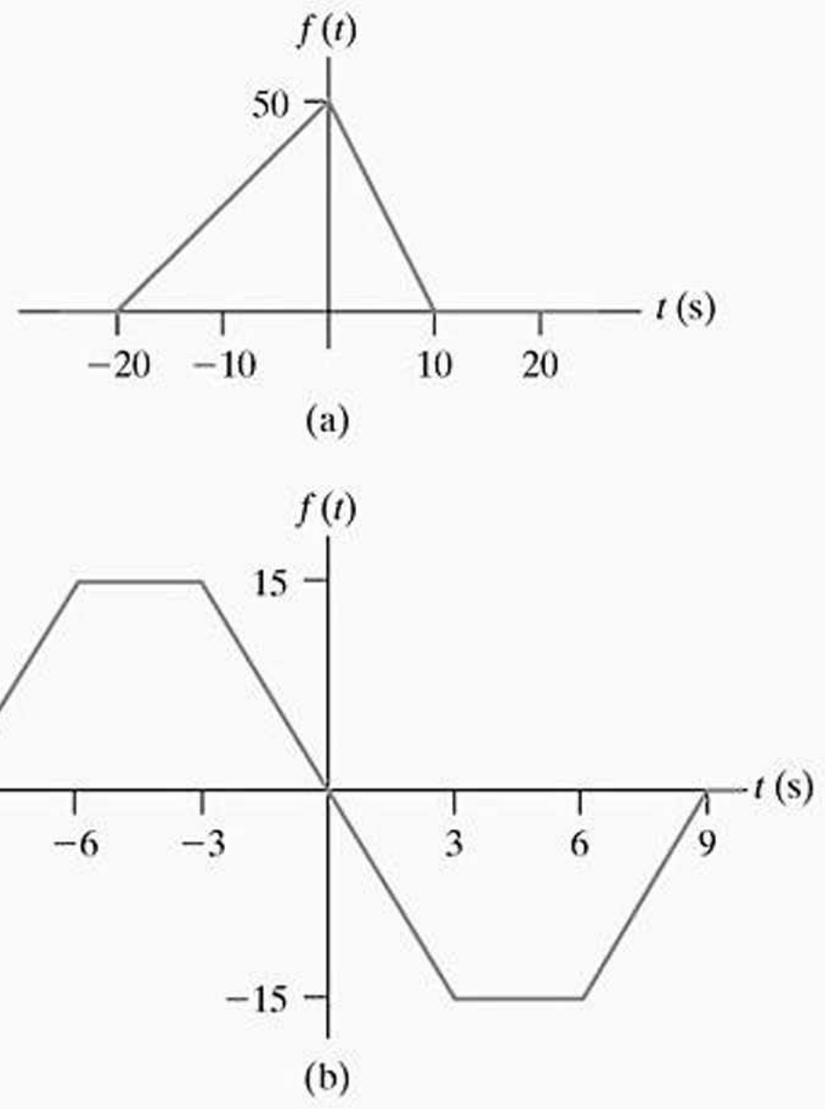
12.1* Use funções degrau para escrever a expressão para cada função mostrada.

Figura P12.1



12.2* Use funções degrau para escrever a expressão para cada uma das funções mostradas na Figura P12.2.

Figura P12.2



12.3 Desenhe um gráfico de $f(t)$ para $-25\ s \leq t \leq 25\ s$ quando $f(t)$ for dada pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned} f(t) = &-(20t + 400)u(t + 20) + (40t + 400)u(t + 10) \\ &+ (400 - 40t)u(t - 10) \\ &+ (20t - 400)u(t - 20) \end{aligned}$$

12.4 As funções degrau podem ser usadas para definir uma função *janela*. Assim, $u(t-1) - u(t-4)$ define uma janela de 1 unidade de altura e 3 unidades de largura localizada no eixo do tempo entre 1 e 4.
Uma função $f(t)$ é definida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f(t) &= 0, && t \leq 0 \\ &= 30\ t, && 0 \leq t \leq 2\ \text{s} \\ &= 60, && 2\ \text{s} \leq t \leq 4\ \text{s} \\ &= 60\cos\left(\frac{\pi}{4}t - \pi\right), && 4\ \text{s} \leq t \leq 8\ \text{s}; \\ &= 30t - 300 && 8\ \text{s} \leq t \leq 10\ \text{s} \\ &= 0, && 10\ \text{s} \leq t \leq \infty \end{aligned}$$

a) Desenhe o gráfico de $f(t)$ no intervalo $-2\ s \leq t \leq 12\ s$

b) Use o conceito da função janela para escrever uma expressão para $f(t)$.

Seção 12.3

12.5* a) Calcule a área sob a função da Figura 12.12(a).

b) Qual é a duração da função quando $\epsilon = 0$?

c) Qual é o valor de $f(0)$ quando $\epsilon = 0$?

12.6* Calcule as seguintes integrais:

a) $I = \int_{-2}^{4} (t^3 + 4)[\delta(t) + 4\delta(t - 2)]\,dt.$

b) $I = \int_{-3}^{4} t^2[\delta(t) + \delta(t + 2{,}5) + \delta(t - 5)]\,dt.$

12.7* Determine $f(t)$ se

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{jt\omega}\,d\omega,$$

e

$$F(\omega) = \frac{3 + j\omega}{4 + j\omega}\pi\delta(\omega).$$

12.8 Explique por que a seguinte função gera uma função impulso quando $\epsilon \to 0$:

$$f(t) = \frac{\epsilon/\pi}{\epsilon^2 + t^2}, \quad -\infty \leq t \leq \infty.$$

12.9 Na Seção 12.3, usamos a propriedade de filtragem da função impulso para mostrar que $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$. Mostre que podemos obter o mesmo resultado determinando a transformada de Laplace do pulso retangular que existe entre $\pm\epsilon$ na Figura 12.9 e, então, determinando o limite dessa transformada quando $\epsilon \to 0$.

12.10 a) Mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t - a)\,dt = -f'(a).$$

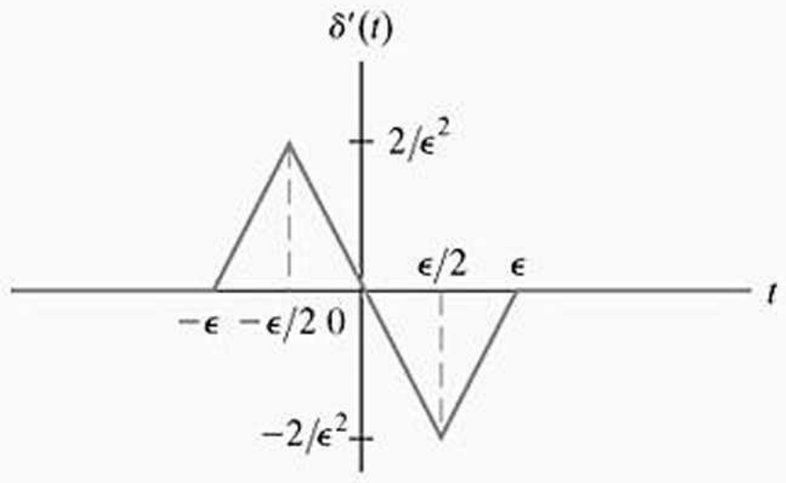
(*Sugestão:* Integre por partes.)

b) Use a fórmula em (a) para mostrar que

$$\mathcal{L}\{\delta'(t)\} = s.$$

12.11 Os pulsos triangulares mostrados na Figura P12.11 são equivalentes aos pulsos retangulares da Figura 12.12(b), pois ambos abrangem a mesma área $(1/\epsilon)$ e ambos aproximam-se de infinito proporcionalmente a $1/\epsilon^2$ à medida que $\epsilon \to 0$. Use essa representação de pulso triangular para $\delta'(t)$ para determinar a transformada de Laplace de $\delta''(t)$.

Figura P12.11



12.12 Mostre que

$$\mathcal{L}\{\delta^{(n)}(t)\} = s^n.$$

Seções 12.4–12.5

12.13* Determine a transformada de Laplace de cada uma das seguintes funções:

a) $f(t) = te^{-at}$;

b) $f(t) = \text{sen}\ \omega t$;

c) $f(t) = \text{sen}\ (\omega t + \theta)$;

d) $f(t) = t$;

e) $f(t) = \cosh(t + \theta)$.

(*Sugestão*: Veja o Problema para Avaliação 12.1.)

12.14 a) Determine a transformada de Laplace de te^{-at}.

b) Use a transformada operacional dada pela Equação 12.23 para determinar a transformada de Laplace de $\dfrac{d}{dt}(te^{-at})$.

c) Verifique o resultado obtido na parte (b) primeiro diferenciando e, então, transformando a expressão resultante.

12.15 Determine a transformada de Laplace (quando $\epsilon \to 0$) da derivada da função exponencial ilustrada na Figura 12.8, usando cada um dos dois métodos seguintes:
a) Primeiro, diferencie a função e, então, determine a transformada da função resultante.
b) Use a transformada operacional dada pela Equação 12.23.

12.16 Mostre que

$$\mathcal{L}\{e^{-at} f(t)\} = F(s + a).$$

12.17* a) Determine $\mathcal{L}\left\{\int_{0-}^{t} e^{-ax}\,dx\right\}$.

b) Determine $\mathcal{L}\left\{\int_{0-}^{t} y\,dy\right\}$.

c) Verifique os resultados de (a) e (b) primeiro integrando e, então, transformando.

12.18* a) Determine $\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}\operatorname{sen}\omega t\right\}$.

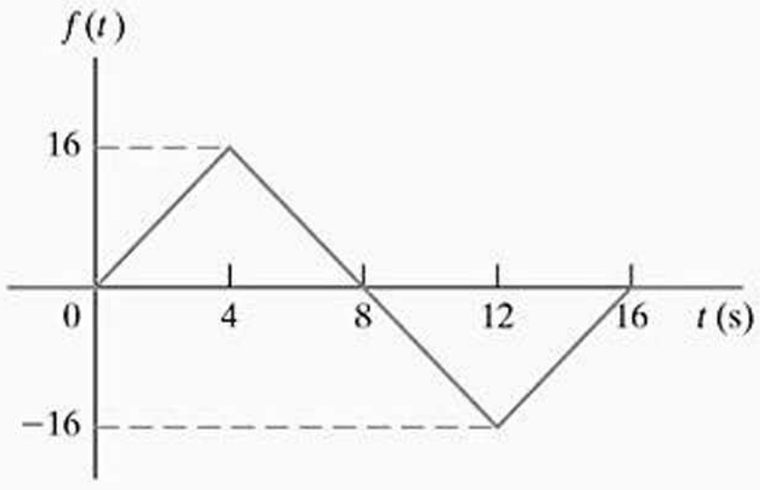
b) Determine $\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}\cos\omega t\right\}$.

c) Determine $\mathcal{L}\left\{\frac{d^3}{dt^3}t^2\right\}$.

d) Verifique os resultados das partes (a), (b) e (c) primeiro diferenciando e, então, transformando.

12.19 a) Determine a transformada de Laplace da função ilustrada na Figura P12.19.
b) Determine a transformada de Laplace da derivada de primeira ordem da função ilustrada na Figura P12.19.
c) Determine a transformada de Laplace da derivada de segunda ordem da função ilustrada na Figura P12.19.

Figura P12.19



12.20 a) Determine a transformada de Laplace de

$$\int_{0^-}^{t} x\,dx$$

primeiro integrando e, então, transformando.
b) Verifique o resultado obtido em (a) usando a transformada operacional dada pela Equação 12.33.

12.21 Determine a transformada de Laplace de cada uma das seguintes funções:
a) $f(t) = -20e^{-5(t-2)}u(t-2)$.
b) $f(t) = (8t - 8)[u(t-1) - u(t-2)] + (24 - 8t)[u(t-2) - u(t-4)] + (8t - 40)[u(t-4) - u(t-5)]$.

12.22 Mostre que

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right).$$

12.23 Determine a transformada de Laplace para (a) e (b).
a) $f(t) = \frac{d}{dt}(e^{-at}\operatorname{sen}\omega t)$.
b) $f(t) = \int_{0^-}^{t} e^{-ax}\cos\omega x\,dx$.
c) Verifique os resultados obtidos em (a) e (b) primeiro executando a operação matemática indicada e, então, determinando a transformada de Laplace.

12.24* a) Dado que $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, mostre que

$$-\frac{dF(s)}{ds} = \mathcal{L}\{tf(t)\}.$$

b) Mostre que

$$(-1)^n\frac{d^nF(s)}{ds^n} = \mathcal{L}\{t^nf(t)\}.$$

c) Use o resultado de (b) para determinar $\mathcal{L}\{t^5\}$, $\mathcal{L}\{t\operatorname{sen}\beta t\}$ e $\mathcal{L}\{te^{-t}\cosh t\}$.

12.25* a) Mostre que, se $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ e $\{f(t)/t\}$ possuir transformada de Laplace, então

$$\int_s^{\infty} F(u)du = \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}.$$

(*Sugestão:* Use a equação que define a transformada de Laplace para escrever

$$\int_s^{\infty} F(u)du = \int_s^{\infty}\left(\int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-ut}dt\right)du$$

e, então, inverta a ordem de integração.)
b) Comece com o resultado obtido no Problema 12.24(c) para $\mathcal{L}\{t\operatorname{sen}\beta t\}$ e use a transformada operacional dada em (a) deste problema para determinar $\mathcal{L}\{t\operatorname{sen}\beta t\}$.

Seção 12.6

12.26* No circuito mostrado na Figura 12.16, a fonte de corrente cc é substituída por uma fonte senoidal que fornece uma corrente de 5 cos 10t A. Os componentes do circuito são $R = 1\ \Omega$, $C = 25$ mF e $L = 625$ mH. Determine a expressão numérica para $V(s)$.

12.27 A chave no circuito da Figura P12.27 esteve aberta por um longo tempo. Em $t = 0$, ela se fecha.

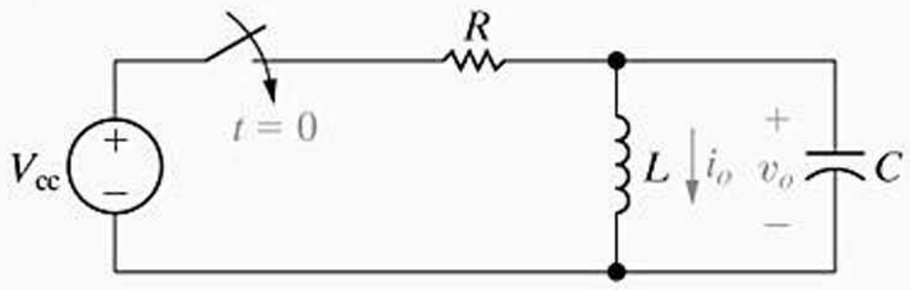
a) Deduza a equação íntegro-diferencial que governa o comportamento da tensão v_o para $t \geq 0$.
b) Mostre que

$$V_o(s) = \frac{V_{cc}/RC}{s^2 + (1/RC)s + (1/LC)}.$$

c) Mostre que

$$I_o(s) = \frac{V_{cc}(1/RLC)}{s[s^2 + (1/RC)s + (1/LC)]}.$$

Figura P12.27



12.28 Não há nenhuma energia armazenada no circuito mostrado na Figura P12.28 no momento em que a chave é aberta.

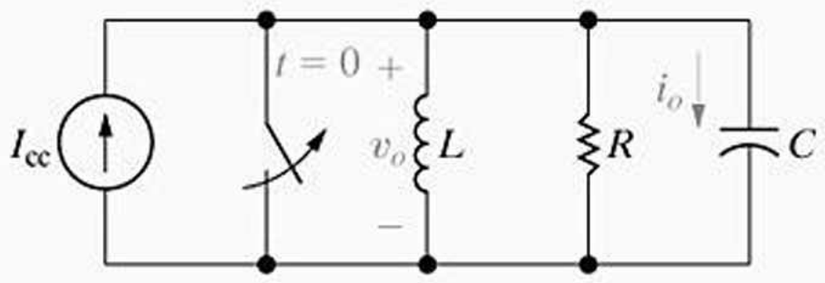
a) Deduza a equação íntegro-diferencial que governa o comportamento da tensão v_o.
b) Mostre que

$$V_o(s) = \frac{I_{cc}/C}{s^2 + (1/RC)s + (1/LC)}.$$

c) Mostre que

$$I_o(s) = \frac{sI_{cc}}{s^2 + (1/RC)s + (1/LC)}.$$

Figura P12.28

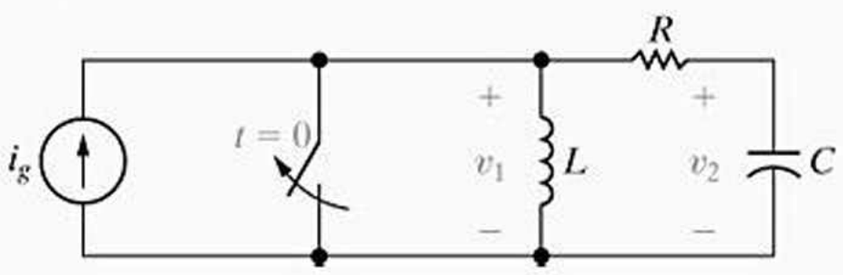


12.29 Não há nenhuma energia armazenada no circuito mostrado na Figura P12.29 no momento em que a chave é aberta.

a) Deduza as equações íntegro-diferenciais que governam o comportamento das tensões de nó v_1 e v_2.
b) Mostre que

$$V_2(s) = \frac{sI_g(s)}{C[s^2 + (R/L)s + (1/LC)]}.$$

Figura P12.29

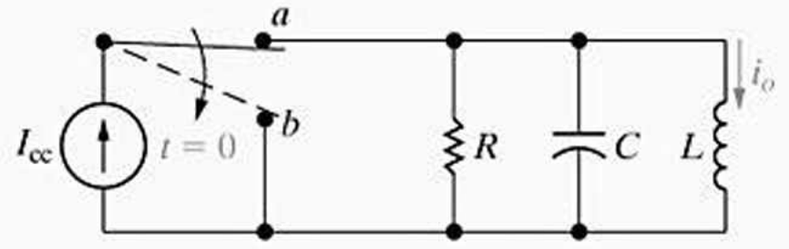


12.30 A chave no circuito da Figura P12.30 esteve na posição *a* por um longo tempo. Em $t = 0$, ela passa instantaneamente para a posição *b*.

a) Deduza a equação íntegro-diferencial que governa o comportamento da corrente i_o para $t \geq 0^+$.
b) Mostre que

$$I_o(s) = \frac{I_{cc}[s + (1/RC)]}{[s^2 + (1\ RC)s + (1\ LC)]}.$$

Figura P12.30

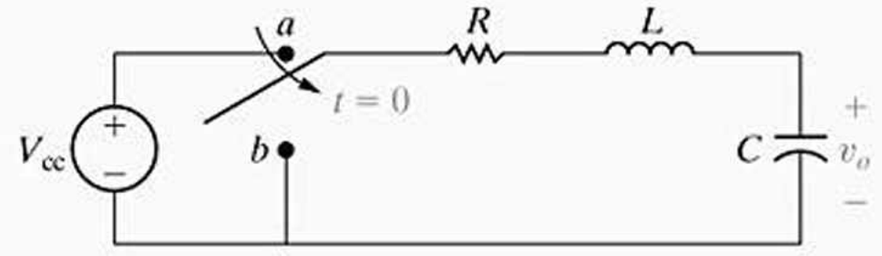


12.31 A chave no circuito da Figura P12.31 esteve na posição *a* por um longo tempo. Em $t = 0$, ela passa instantaneamente para a posição *b*.

a) Deduza a equação íntegro-diferencial que governa o comportamento da tensão v_o para $t \geq 0^+$.
b) Mostre que

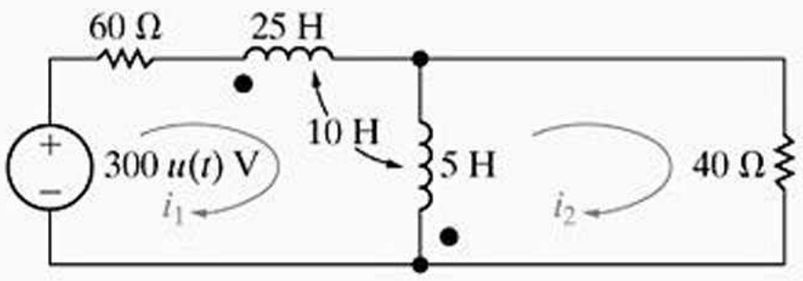
$$V_o(s) = \frac{V_{cc}[s + (R/L)]}{[s^2 + (R/L)s + (1/LC)]}.$$

Figura P12.31



12.32 PSPICE a) Escreva as duas equações diferenciais simultâneas que descrevem o comportamento do circuito mostrado na Figura P12.32 em termos das correntes de malha i_1 e i_2.
b) Determine as transformadas de Laplace das equações deduzidas em (a). Admita que a energia inicial armazenada no circuito seja zero.
c) Resolva as equações em (b) para $I_1(s)$ e $I_2(s)$.

Figura P12.32



Seção 12.7

12.33 Determine $v(t)$ no Problema 12.26.

12.34 PSPICE Os parâmetros do circuito da Figura P12.27 são $R = 10\ k\Omega$; $L = 800$ mH e $C = 100$ nF. Se V_{cc} for 70 V, determine

a) $v_o(t)$ para $t \geq 0$.
b) $i_o(t)$ para $t \geq 0$.

12.35 PSPICE Os parâmetros do circuito da Figura P12.28 têm os seguintes valores: $R = 4\ \text{k}\Omega$, $L = 2{,}5$ H, $C = 25$ nF e $I_{cc} = 3$ mA.

a) Determine $v_o(t)$ para $t \geq 0$.

b) Determine $i_o(t)$ para $t \geq 0$.

c) A solução para $i_o(t)$ faz sentido quando $t = 0$? Explique.

12.36 PSPICE Os parâmetros do circuito da Figura P12.29 são $R = 2.500\ \Omega$; $L = 500$ mH e $C = 0{,}5\ \mu$F. Se $i_g(t) = 15\,u(t)$ mA, determine $v_2(t)$.

12.37 PSPICE Os parâmetros do circuito da Figura P12.30 são $R = 50\ \Omega$, $L = 31{,}25$ mH e $C = 2\ \mu$F. Se $I_{cc} = 100$ mA, determine $i_o(t)$ para $t \geq 0$.

12.38 Os parâmetros do circuito da Figura P12.31 são $R = 5.000\ \Omega$, $L = 1$ H e $C = 0{,}25\ \mu$F. Se $V_{cc} = 15$ V, determine $v_o(t)$ para $t \geq 0$.

12.39 Use os resultados do Problema 12.32 e o circuito mostrado na Fig P12.32 para

a) Determinar $i_1(t)$ e $i_2(t)$.

b) Determinar $i_1(\infty)$ e $i_2(\infty)$.

c) As soluções para i_1 e i_2 têm sentido? Explique.

12.40* Determine $f(t)$ para cada uma das seguintes funções:

a) $$F(s) = \frac{18s^2 + 66s + 54}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)}.$$

b) $$F(s) = \frac{8s^3 + 89s^2 + 311s + 300}{s(s + 2)(s^2 + 8s + 15)}.$$

c) $$F(s) = \frac{11s^2 + 172s + 700}{(s + 2)(s^2 + 12s + 100)}.$$

d) $$F(s) = \frac{56s^2 + 112s + 5.000}{s(s^2 + 14s + 625)}.$$

12.41* Determine $f(t)$ para cada uma das seguintes funções:

a) $$F(s) = \frac{8(s^2 - 5s + 50)}{s^2(s + 10)}.$$

b) $$F(s) = \frac{10(3s^2 + 4s + 4)}{s(s + 2)^2}.$$

c) $$F(s) = \frac{s^3 - 6s^2 + 15s + 50}{s^2(s^2 + 4s + 5)}.$$

d) $$F(s) = \frac{s^2 + 6s + 5}{(s + 2)^3}.$$

e) $$F(s) = \frac{16s^3 + 72s^2 + 216s - 128}{(s^2 + 2s + 5)^2}.$$

12.42* Determine $f(t)$ para cada uma das seguintes funções:

a) $$F(s) = \frac{10s^2 + 85s + 95}{s^2 + 6s + 5}.$$

b) $$F(s) = \frac{5(s^2 + 8s + 5)}{s^2 + 4s + 5}.$$

c) $$F(s) = \frac{s^2 + 25s + 150}{s + 20}.$$

12.43 Determine $f(t)$ para cada uma das seguintes funções:

a) $$F(s) = \frac{100(s + 1)}{s^2(s^2 + 2s + 5)}.$$

b) $$F(s) = \frac{20s^2}{(s + 1)^3}.$$

c) $$F(s) = \frac{40(s + 2)}{s(s + 1)^3}.$$

d) $$F(s) = \frac{5(s + 2)^2}{s^4(s + 1)}.$$

12.44 Deduza o par de transformadas dado pela Equação 12.64.

12.45 a) Deduza o par de transformadas dado pela Equação 12.83.

b) Deduza o par de transformadas dado pela Equação 12.84.

Seções 12.8–12.9

12.46 a) Use o teorema do valor inicial para determinar o valor inicial de v no Problema 12.26.

b) O teorema do valor final pode ser usado para determinar o valor de regime permanente de v? Por quê?

12.47* Aplique os teoremas do valor inicial e do valor final a cada par de transformadas do Problema 12.40.

12.48 Aplique os teoremas do valor inicial e do valor final a cada par de transformadas do Problema 12.41.

12.49 Aplique os teoremas do valor inicial e do valor final a cada par de transformadas do Problema 12.42.

12.50 Use os teoremas do valor inicial e do valor final para verificar os valores inicial e final da corrente e da tensão no Problema 12.27.

12.51 Use os teoremas do valor inicial e do valor final para verificar os valores inicial e final da corrente e da tensão no Problema 12.28.

12.52 Use os teoremas do valor inicial e do valor final para verificar os valores inicial e final da corrente no Problema 12.30.

12.53 Aplique os teoremas do valor inicial e do valor final a cada par de transformadas do Problema 12.43.

CAPÍTULO

13

A transformada de Laplace em análise de circuitos

SUMÁRIO DO CAPÍTULO

13.1 **Elementos de circuito no domínio da freqüência**

13.2 **Análise de circuitos no domínio da freqüência**

13.3 **Exemplos**

13.4 **Função de transferência**

13.5 **Função de transferência em expansões por frações parciais**

13.6 **Função de transferência e integral de convolução**

13.7 **Função de transferência e resposta de regime permanente senoidal**

13.8 **Função impulso em análise de circuitos**

✔ OBJETIVOS DO CAPÍTULO

1 Saber transformar um circuito para o domínio da freqüência usando transformadas de Laplace; entender como representar, no domínio da freqüência, as condições iniciais em elementos que armazenam energia.

2 Saber como analisar um circuito no domínio da freqüência e saber transformar uma solução no domínio da freqüência de volta para o domínio do tempo.

3 Entender a definição e o significado da função de transferência e saber calculá-la para determinado circuito usando técnicas do domínio da freqüência.

4 Saber como usar a função de transferência de um circuito para calcular sua resposta ao impulso unitário, ao degrau unitário e seu regime permanente senoidal.

A transformada de Laplace tem duas características que a tornam uma ferramenta atraente na análise de circuitos. Em primeiro lugar, ela transforma um conjunto de equações diferenciais lineares de coeficientes constantes em um conjunto de equações algébricas lineares, que são mais fáceis de manipular. Em segundo lugar, ela incorpora os valores iniciais das correntes e tensões automaticamente nas equações algébricas. Desse modo, as condições iniciais são uma parte inerente do processo de cálculo da transformada. (Isso contrasta com a abordagem clássica da solução de equações diferenciais, em que as condições iniciais são consideradas no cálculo das constantes de integração.)

Iniciamos este capítulo mostrando como podemos prescindir da etapa de obtenção das equações íntegro-diferenciais no domínio do tempo e sua transformação para o domínio da freqüência. Na Seção 13.1, desenvolveremos modelos de circuito no domínio da freqüência para resistores, indutores e capacitores, de modo a podermos escrever as equações de qualquer circuito diretamente no domínio da freqüência. A Seção 13.2 faz uma revisão das leis de Ohm e Kirchhoff no contexto do domínio da freqüência. Depois disso, aplicaremos o método da transformada de Laplace a uma variedade de problemas de circuitos na Seção 13.3.

Técnicas analíticas e de simplificação apresentadas anteriormente para circuitos resistivos – como os métodos das correntes de malha e das tensões de nó e transformações de fonte — também podem ser usadas no domínio da freqüência. Depois de obtermos a resposta do circuito no domínio da freqüência, fazemos a transformada inversa, de volta ao domínio do tempo, usando a expansão por frações parciais (como demonstramos no capítulo anterior). Como antes, uma etapa importante da solução é a verificação das equações finais no domínio do tempo em termos das condições iniciais e dos valores finais.

Na Seção 13.4, a consideração dos sinais de entrada e saída dos circuitos no domínio da freqüência nos leva ao conceito de função de transferência. A função de transferência para determinado circuito é a razão entre a transformada de Laplace de seu sinal de saída e a transformada de Laplace de seu sinal de entrada. Nos capítulos 14 e 15, examinaremos a utilização da função de transferência como ferramenta de projeto de circuitos, mas, neste capítulo, trataremos de sua utilização como uma ferramenta analítica. Continuamos o capítulo examinando o papel da expansão por frações parciais (Seção 13.5) e da integral de convolução (Seção 13.6) no emprego da função de transferência em análise de circuitos. Concluímos com um breve exame da função impulso em análise de circuitos.

Perspectiva prática

Supressores de surto

Com o advento dos computadores pessoais, modems, máquinas de fax e outros equipamentos eletrônicos sensíveis utilizados em casa, tornou-se necessário protegê-los contra surtos de tensão que podem ocorrer em um circuito residencial devido ao chaveamento. Essa proteção, em geral, é feita por um supressor de surto, também conhecido como 'filtro de linha'.

Como o acionamento de uma chave para ligar uma lâmpada ou desligar um secador de cabelo pode causar um surto de tensão? No final deste capítulo, responderemos a essa pergunta usando técnicas de transformada de Laplace para analisar a situação. Mostraremos como um surto de tensão pode ser criado pelo desligamento de uma carga resistiva em um circuito em regime permanente senoidal.

13.1 Elementos de circuito no domínio da freqüência

O procedimento para obter um circuito equivalente no domínio da freqüência para cada elemento de circuito é simples. Em primeiro lugar, escrevemos a equação que relaciona a tensão terminal à corrente terminal no domínio do tempo. Em seguida, tomamos a transformada de Laplace dessa equação. Essa etapa gera uma relação algébrica, no domínio da freqüência, entre a corrente e a tensão. Observe que a dimensão da tensão transformada é volts-segundos, e a dimensão da corrente transformada é ampères-segundos. A razão entre tensão e corrente no domínio da freqüência tem a dimensão de volt por ampère. Uma impedância no domínio da freqüência é medida em ohms e uma admitância é medida em siemens. Por fim, construímos um modelo de circuito que satisfaz a relação entre a corrente e a tensão no domínio da freqüência. Usamos a convenção passiva em todas as deduções.

O resistor no domínio da freqüência

Comecemos com o resistor. Pela lei de Ohm,

$$v = Ri. \tag{13.1}$$

Como R é uma constante, a transformada de Laplace da Equação 13.1 é

$$V = RI, \tag{13.2}$$

onde

$$V = \mathcal{L}\{v\} \text{ e } I = \mathcal{L}\{i\}.$$

A Equação 13.2 afirma que o circuito equivalente de um resistor no domínio da freqüência é simplesmente uma resistência de R ohms que conduz uma corrente de I ampères-segundos e tem uma tensão terminal de V volts-segundos.

A Figura 13.1 mostra os circuitos do resistor nos domínios do tempo e da freqüência. Observe que passar do domínio do tempo para o domínio da freqüência não altera o valor da resistência.

O indutor no domínio da freqüência

A Figura 13.2 mostra um indutor conduzindo uma corrente inicial de I_0 ampères. A equação no domínio do tempo que relaciona a tensão terminal com a corrente terminal é

$$v = L\frac{di}{dt}. \tag{13.3}$$

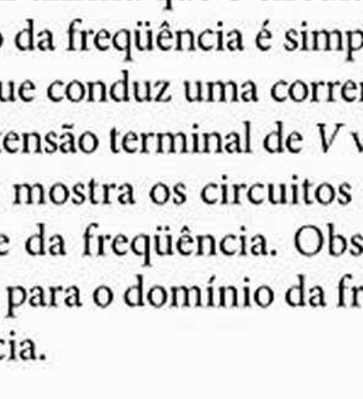


Figura 13.1 ▲ Elemento resistor. (a) Domínio do tempo. (b) Domínio da freqüência.

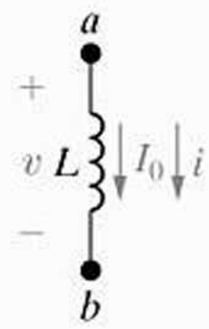


Figura 13.2 ▲ Indutor de L henrys conduzindo uma corrente inicial de I_0 ampères.

A transformada de Laplace da Equação 13.3 é

$$V = L[sI - i(0^-)] = sLI - LI_0. \tag{13.4}$$

Duas configurações de circuito diferentes satisfazem a Equação 13.4. A primeira consiste em uma impedância de sL ohms em série com uma fonte de tensão independente de LI_0 volts-segundos, como mostra a Figura 13.3. Observe que as marcas de polaridade na fonte de tensão LI_0 estão de acordo com o sinal negativo da Equação 13.4. Observe também que LI_0 tem o próprio sinal algébrico; isto é, se o valor inicial de i for oposto ao sentido de referência para i, então I_0 terá um valor negativo.

O segundo circuito equivalente no domínio da freqüência que satisfaz a Equação 13.4 consiste em uma impedância de sL ohms em paralelo com uma fonte de corrente independente de I_0/s ampères-segundos, como mostra a Figura 13.4. Podemos obter o circuito equivalente alternativo mostrado na Figura 13.4 de vários modos. Um deles é simplesmente explicitar, na Equação 13.4, a corrente I e, então, construir o circuito que satisfaça a equação resultante. Assim,

$$I = \frac{V + LI_0}{sL} = \frac{V}{sL} + \frac{I_0}{s}. \tag{13.5}$$

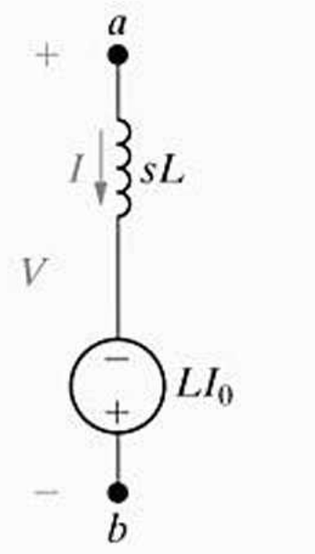


Figura 13.3 ▲ Circuito equivalente em série para um indutor de L henrys que conduz uma corrente inicial de I_0 ampères.

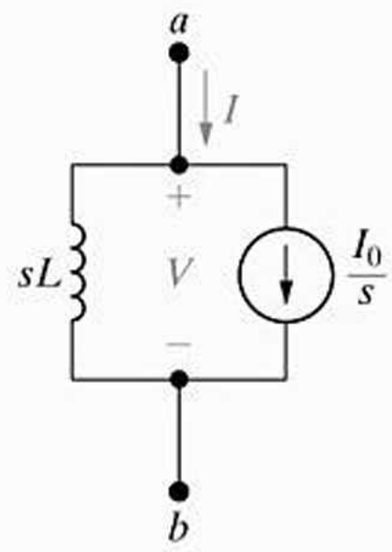


Figura 13.4 ▲ Circuito equivalente em paralelo para um indutor de L henrys que conduz uma corrente inicial de I_0 ampères.

Os outros dois modos são: (1) determinar o equivalente de Norton do circuito mostrado na Figura 13.3 e (2) começar com a corrente no indutor em função da tensão no indutor e, então, determinar a transformada de Laplace da equação integral resultante. Deixamos essas duas abordagens para os problemas 13.1 e 13.2.

Se a energia inicial armazenada no indutor for zero, isto é, se $I_0 = 0$, o circuito equivalente do indutor no domínio da freqüência se reduz a um indutor com uma impedância de sL ohms. A Figura 13.5 mostra esse circuito.

O capacitor no domínio da freqüência

Um capacitor inicialmente carregado também tem dois circuitos equivalentes no domínio da freqüência. A Figura 13.6 mostra um capacitor inicialmente carregado até V_0 volts. A corrente terminal é

$$i = C\frac{dv}{dt}. \tag{13.6}$$

Transformando a Equação 13.6, obtemos

$$I = C[sV - v(0^-)]$$

ou

$$I = sCV - CV_0, \tag{13.7}$$

que indica que a corrente I no domínio da freqüência é a soma de duas correntes de ramo. Um ramo consiste em uma admitância de sC siemens e o segundo ramo consiste em uma fonte de corrente independente de CV_0 ampères-segundos. A Figura 13.7 mostra esse circuito equivalente em paralelo.



Figura 13.5 ▲ Circuito para um indutor no domínio da freqüência quando a corrente inicial é zero.

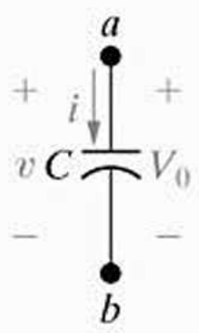


Figura 13.6 ▲ Capacitor de C farads carregado inicialmente com V_0 volts.

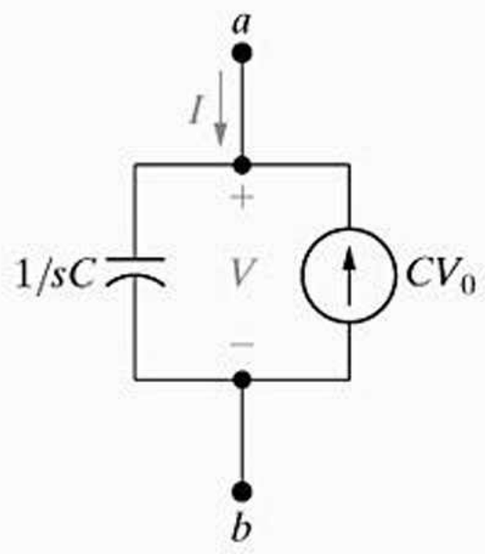


Figura 13.7 ◀ Circuito equivalente em paralelo para um capacitor inicialmente carregado com V_0 volts.

Obtemos o circuito equivalente em série para o capacitor carregado explicitando V na Equação 13.7:

$$V = \left(\frac{1}{sC}\right)I + \frac{V_0}{s}. \tag{13.8}$$

A Figura 13.8 mostra o circuito que satisfaz a Equação 13.8.

Nos circuitos equivalentes mostrados nas figuras 13.7 e 13.8, V_0 tem o próprio sinal algébrico. Em outras palavras, se a polaridade de V_0 for oposta à polaridade de referência para v, V_0 será uma quantidade negativa. Se a tensão inicial no capacitor for zero, ambos os circuitos equivalentes serão reduzidos a uma impedância de $1/sC$ ohms, como mostra a Figura 13.9.

Neste capítulo, uma etapa importante na resolução de problemas será escolher entre os equivalentes em paralelo ou em série quando há indutores e capacitores presentes. Com um pouco de atenção e alguma experiência, muitas vezes a opção correta será bastante evidente. Os circuitos equivalentes estão resumidos na Tabela 13.1.

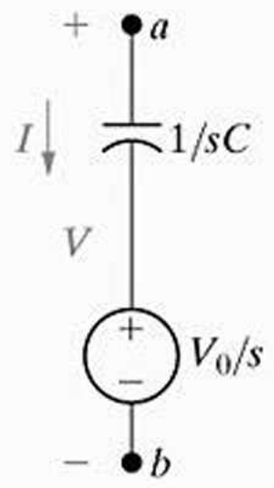


Figura 13.8 ◀ Circuito equivalente em série para um capacitor inicialmente carregado com V_0 volts.

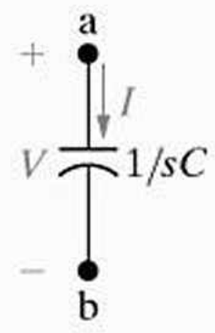
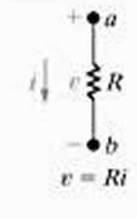
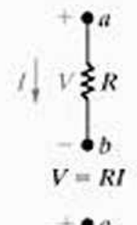
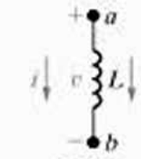
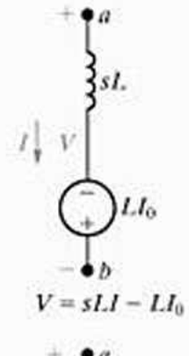
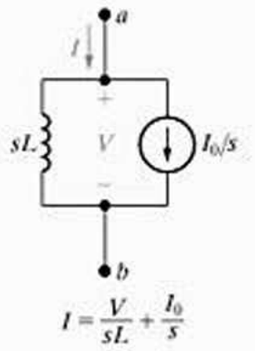
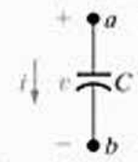
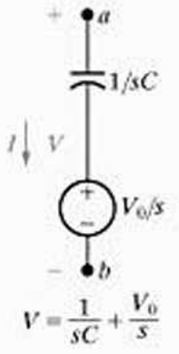
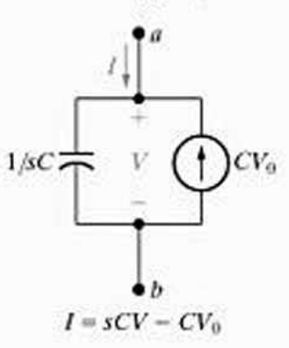


Figura 13.9 ◀ Circuito para um capacitor no domínio da freqüência quando a tensão inicial é zero.

TABELA 13.1 Resumo dos circuitos equivalentes no domínio da freqüência

TEMPO DE DOMÍNIO	FREQÜÊNCIA DE DOMÍNIO
 $v = Ri$	 $V = RI$
 $v = L\,di/dt,$ $i = \frac{1}{L}\int_{0^-}^{t} v\,dx + I_0$	 $V = sLI - LI_0$  $I = \frac{V}{sL} + \frac{I_0}{s}$
 $i = C\,dv/dt,$ $v = \frac{1}{C}\int_{0^-}^{t} i\,dx + V_0$	 $V = \frac{1}{sC} + \frac{V_0}{s}$  $I = sCV - CV_0$

13.2 Análise de circuitos no domínio da freqüência

Antes de ilustrarmos como usar os circuitos equivalentes no domínio da freqüência em análise de circuitos, precisamos fundamentar a discussão.

Em primeiro lugar, sabemos que se não houver nenhuma energia armazenada no indutor ou capacitor, a relação entre a tensão terminal e a corrente terminal para cada elemento passivo tomará a forma:

$$V = ZI, \tag{13.9}$$

(Lei de Ohm no domínio da freqüência)

onde Z refere-se à impedância do elemento no domínio da freqüência. Desse modo, um resistor tem uma impedância de R ohms, um indutor tem uma impedância de sL ohms e um capacitor tem uma impedância de $1/sC$ ohms. A relação contida na Equação 13.9 também está contida nas figuras 13.1(b), 13.5 e 13.9. A Equação 13.9 às vezes é denominada lei de Ohm para o domínio da freqüência.

A recíproca da impedância é a admitância. Assim, a admitância de um resistor no domínio da freqüência é $1/R$ siemens, um indutor tem uma admitância de $1/sL$ siemens, e um capacitor tem uma admitância de sC siemens.

As regras para associar impedâncias e admitâncias no domínio da freqüência são as mesmas do domínio do tempo. Assim, simplificações em série, em paralelo e conversões Δ-Y também são aplicáveis à análise no domínio da freqüência.

Além disso, as leis de Kirchhoff aplicam-se a correntes e tensões no domínio da freqüência. Sua aplicabilidade origina-se do enunciado da transformada operacional, ou seja, a transformada de Laplace de uma soma de funções no domínio do tempo é a soma das transformadas das funções individuais (veja a Tabela 12.2). Como a soma algébrica das correntes em um nó é zero no domínio do tempo, a soma algébrica das correntes transformadas também é zero. Uma afirmação semelhante também é válida para a soma algébrica das tensões transformadas ao longo de um caminho fechado. A versão das leis de Kirchhoff no domínio da freqüência é

$$\text{alg} \sum I = 0, \tag{13.10}$$

$$\text{alg} \sum V = 0. \tag{13.11}$$

Como a tensão e a corrente nos terminais de um elemento passivo estão relacionadas por uma equação algébrica, e como as leis de Kirchhoff ainda são válidas, todas as técnicas de análise de circuitos desenvolvidas para redes permanentemente resistivas puras podem ser usadas em análise no domínio da freqüência. Por isso, tensões de nó, correntes de malha, transformações de fonte, equivalentes de Thévenin e Norton são todas técnicas válidas, mesmo quando houver energia inicialmente armazenada nos indutores e capacitores. Nesse caso, a Equação 13.9 é modificada pela simples adição de fontes independentes em série ou em paralelo com as impedâncias dos elementos. A adição dessas fontes é regida pelas leis de Kirchhoff.

13.3 Exemplos

Ilustramos, agora, como usar a transformada de Laplace para determinar o comportamento transitório de vários circuitos de parâmetros concentrados. Começamos analisando circuitos conhecidos dos capítulos 7 e 8, pois eles representam um ponto de partida simples, além de mostrarem que a abordagem da transformada de Laplace fornece os mesmos resultados. Em todos os exemplos, a facilidade de manipular equações algébricas em vez de equações diferenciais certamente ficará evidente.

Resposta natural de um circuito *RC*

Inicialmente, vamos analisar novamente a resposta natural de um circuito *RC* (Figura 13.10), agora por meio de técnicas de transformada de Laplace. (Seria bom você rever a análise clássica desse mesmo circuito na Seção 7.2.)

✔ PROBLEMAS PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 1 — Saber transformar um circuito para o domínio da freqüência usando transformadas de Laplace

13.1 Um resistor de 500 Ω, um indutor de 16 mH e um capacitor de 25 nF estão ligados em paralelo.

a) Expresse a admitância dessa combinação de elementos como uma função racional de s.
b) Calcule os valores numéricos dos zeros e dos pólos.

Resposta: (a) $25 \times 10^{-9}(s^2 + 80.000s + 25 \times 10^8)/s$;
(b) $-z_1 = -40.000 - j30.000$;
$-z_2 = -40.000 + j30.000$; $p_1 = 0$.

13.2 O circuito em paralelo no Problema para Avaliação 13.1 é colocado em série com um resistor de 2.000 Ω.

a) Expresse a impedância dessa combinação como uma função racional de s.
b) Calcule os valores numéricos dos zeros e dos pólos.

Resposta: (a) $2.000(s + 50.000)^2/(s^2 + 80.000s + 25 \times 10^8)$;
(b) $-z_1 = -z_2 = -50.000$;
$-p_1 = -40.000 - j30.000$.
$-p_2 = -40.000 + j30.000$.

NOTA: Tente resolver também os problemas 13.4 e 13.5, apresentados no final deste capítulo.

O capacitor está inicialmente carregado com V_0 volts e estamos interessados nas expressões no domínio do tempo para i e v. Começamos determinando i. Quando convertemos o circuito na Figura 13.10 para o domínio da freqüência, temos a opção de dois circuitos equivalentes para o capacitor carregado. Como estamos interessados na corrente, o circuito equivalente em série é mais atraente, pois ele é constituído de uma única malha no domínio da freqüência. Assim, construímos o circuito da Figura 13.11.

A soma das tensões ao longo da malha gera a expressão

$$\frac{V_0}{s} = \frac{1}{sC}I + RI. \tag{13.12}$$

Explicitando I, obtemos

$$I = \frac{CV_0}{RCs + 1} = \frac{V_0/R}{s + (1/RC)}. \tag{13.13}$$

Observe que a expressão para I é uma função racional própria de s e que podemos determinar sua transformada inversa por inspeção:

$$i = \frac{V_0}{R}e^{-t/RC}u(t), \tag{13.14}$$

que é equivalente à expressão para a corrente obtida pelos métodos clássicos discutidos no Capítulo 7. Naquele capítulo, a corrente foi dada pela Equação 7.26, onde τ é usado no lugar de RC.

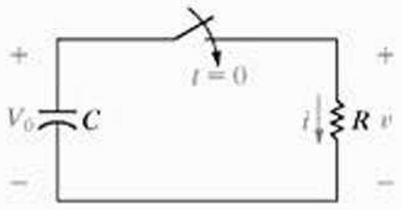


Figura 13.10 ◀ O circuito de descarga do capacitor.

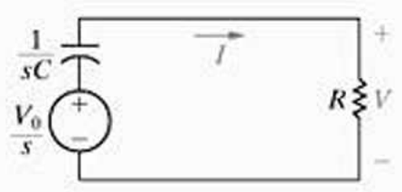


Figura 13.11 ◀ Circuito equivalente no domínio da freqüência para o circuito da Figura 13.10.

Após determinarmos i, o modo mais fácil de determinar v é simplesmente aplicar a lei de Ohm; isto é, pelo circuito,

$$v = Ri = V_0e^{-t/RC}u(t). \tag{13.15}$$

Ilustramos, agora, um modo de determinar v antes de determinar i. Nessa abordagem alternativa, voltamos ao circuito original da Figura 13.10 e o convertemos ao domínio da freqüência utilizando o circuito equivalente em paralelo para o capacitor carregado. Usar o circuito equivalente em paralelo é atraente agora porque podemos descrever o circuito resultante em termos de uma única tensão de nó. A Figura 13.12 mostra o novo circuito equivalente.

A equação das tensões de nó que descreve o novo circuito é

$$\frac{V}{R} + sCV = CV_0. \tag{13.16}$$

Explicitando V, obtemos

$$V = \frac{V_0}{s + (1/RC)}. \tag{13.17}$$

A transformada inversa da Equação 13.17 leva à mesma expressão de v dada pela Equação 13.15, ou seja,

$$v = V_0e^{-t/RC} = V_0e^{-t/\tau}u(t). \tag{13.18}$$

Nosso propósito aqui é mostrar que a escolha do circuito equivalente a ser utilizado no domínio da freqüência é influenciada pelo sinal que desejamos obter como resposta.

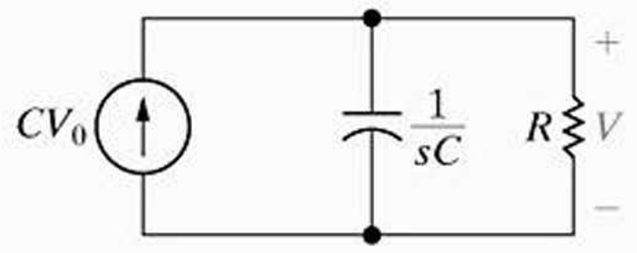


Figura 13.12 ▲ Circuito equivalente no domínio da freqüência para o circuito da Figura 13.10.

✔ PROBLEMA PARA AVALIAÇÃO

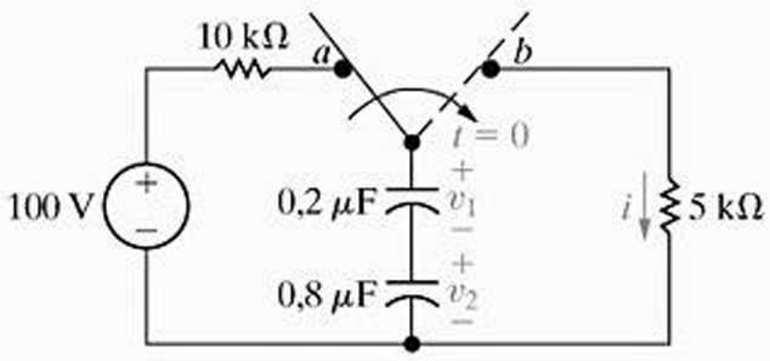
Objetivo 2 — Saber como analisar um circuito no domínio da freqüência e saber transformar uma solução no domínio da freqüência de volta para o domínio do tempo

13.3 A chave no circuito mostrado esteve na posição *a* por um longo tempo. Em $t = 0$, ela passa repentinamente para a posição *b*.

a) Determine I, V_1 e V_2 como funções racionais de s.

b) Determine as expressões no domínio do tempo para i, v_1 e v_2.

Resposta: (a) $I = 0{,}02/(s + 1.250)$,
$V_1 = 80/(s + 1.250)$,
$V_2 = 20/(s + 1.250)$;
(b) $i = 20e^{-1.250t}u(t)$ mA,
$v_1 = 80e^{-1.250t}u(t)$ V,
$v_2 = 20e^{-1.250t}u(t)$ V.



NOTA: Tente resolver também os problemas 13.9 e 13.10, apresentados no final deste capítulo.

Resposta ao degrau de um circuito *RLC* em paralelo

A seguir, analisaremos o circuito *RLC* em paralelo mostrado na Figura 13.13, que já analisamos no Exemplo 8.7. O problema é determinar a expressão para i_L após a fonte de corrente constante ser aplicada aos elementos em paralelo. A energia inicial armazenada no circuito é zero.

Como antes, começamos construindo o circuito equivalente no domínio da freqüência mostrado na Figura 13.14. Observe com que facilidade uma fonte independente pode ser transformada do domínio do tempo para o domínio da freqüência. Transformamos a fonte para o domínio da freqüência pela simples determinação da transformada de Laplace de sua função no domínio do tempo. Aqui, abrir a chave significa a aplicação de uma corrente na forma de um degrau ao circuito. Dessa forma, a fonte de corrente no domínio da freqüência é $\mathcal{L}\{I_{cc}u(t)\}$, ou I_{cc}/s. Para determinarmos I_L, primeiro obtemos V e, então, usamos

$$I_L = \frac{V}{sL} \tag{13.19}$$

para estabelecer a expressão para I_L no domínio da freqüência. A soma das correntes que saem do nó superior leva à expressão

$$sCV + \frac{V}{R} + \frac{V}{sL} = \frac{I_{cc}}{s}. \tag{13.20}$$

Explicitando V, obtemos

$$V = \frac{I_{cc}\ C}{s^2 + (1\ RC)s + (1\ LC)}. \tag{13.21}$$

Substituindo a Equação 13.21 na Equação 13.19, temos

$$I_L = \frac{I_{cc}\ LC}{s[s^2 + (1\ RC)s + (1\ LC)]}. \tag{13.22}$$

Substituindo os valores numéricos de R, L, C e I_{cc} na Equação 13.22, o resultado é

$$I_L = \frac{384 \times 10^5}{s(s^2 + 64.000s + 16 \times 10^8)}. \tag{13.23}$$

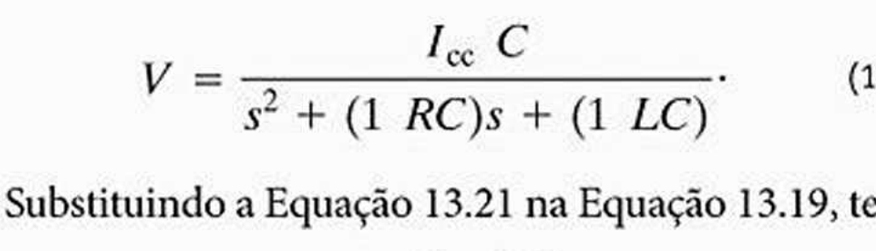


Figura 13.13 ▲ Resposta ao degrau de um circuito *RLC* em paralelo.

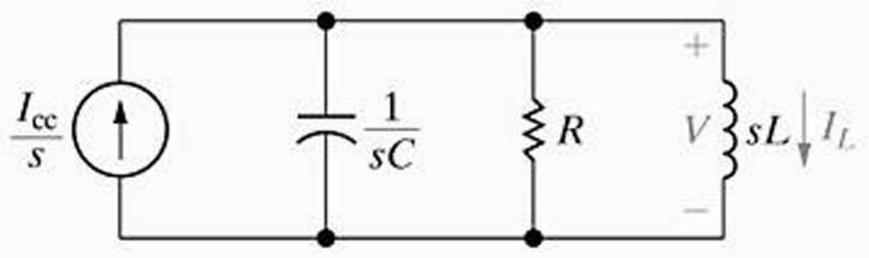


Figura 13.14 ▲ Circuito equivalente no domínio da freqüência para o circuito da Figura 13.13.

Antes de expandirmos a Equação 13.23 em uma soma de frações parciais, fatoramos o termo quadrático no denominador:

$$I_L = \frac{384 \times 10^5}{s(s + 32.000 - j24.000)(s + 32.000 + j24.000)}. \tag{13.24}$$

Agora, podemos testar a expressão de I_L no domínio da freqüência, verificando se o teorema do valor final prevê o valor correto de i_L em $t = \infty$. Como todos os pólos de I_L, exceto o pólo de primeira ordem na origem, encontram-se na metade esquerda do plano s, o teorema é aplicável. Pelo comportamento conhecido do circuito sabemos que, após a chave ter permanecido aberta por um longo tempo, o indutor estará curto-circuitando a fonte de corrente. Assim, o valor final de i_L deve ser 24 mA. O limite de sI_L quando $s \to 0$ é

$$\lim_{s\to 0} sI_L = \frac{384 \times 10^5}{16 \times 10^8} = 24 \text{ mA}. \tag{13.25}$$

(Como as correntes no domínio da freqüência têm a dimensão de ampères-segundos, a dimensão de sI_L será ampères.) Desse modo, verificamos que nossa expressão no domínio da freqüência está correta.

Agora, procedemos à expansão por frações parciais da Equação 13.24:

$$I_L = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s + 32.000 - j24.000} + \frac{K_2^*}{s + 32.000 + j24.000}. \tag{13.26}$$

Os coeficientes das frações parciais são

$$K_1 = \frac{384 \times 10^5}{16 \times 10^8} = 24 \times 10^{-3}, \tag{13.27}$$

$$K_2 = \frac{384 \times 10^5}{(-32.000 + j24.000)(j48.000)}$$

$$= 20 \times 10^{-3} \underline{/126{,}87°}. \tag{13.28}$$

Substituindo os valores numéricos de K_1 e K_2 na Equação 13.26 e tomando a transformada inversa da expressão resultante, temos

$$i_L = [24 + 40e^{-32.000t} \cos\ (24.000t\ \ + 126{,}87°\ )]u(t)\text{mA}. \tag{13.29}$$

A resposta dada pela Equação 13.29 é equivalente à resposta dada pelo Exemplo 8.7, pois

$$40 \cos (24.000t + 126{,}87°) = -24 \cos 24.000t\ - 32 \operatorname{sen} 24.000t.$$

Se não estivéssemos usando uma solução anterior como verificação, testaríamos a Equação 13.29 para ter certeza de que $i_L(0)$ satisfez as condições iniciais dadas e de que $i_1(\infty)$ satisfez o comportamento conhecido do circuito.

✔ PROBLEMA PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 2 — Saber como analisar um circuito no domínio da freqüência e saber transformar uma solução no domínio da freqüência de volta para o domínio do tempo

13.4 A energia armazenada no circuito mostrado é zero no instante em que a chave é fechada.

a) Determine a expressão para I no domínio da freqüência.

b) Determine a expressão para i no domínio do tempo quando $t > 0$.

c) Determine a expressão para V no domínio da freqüência.

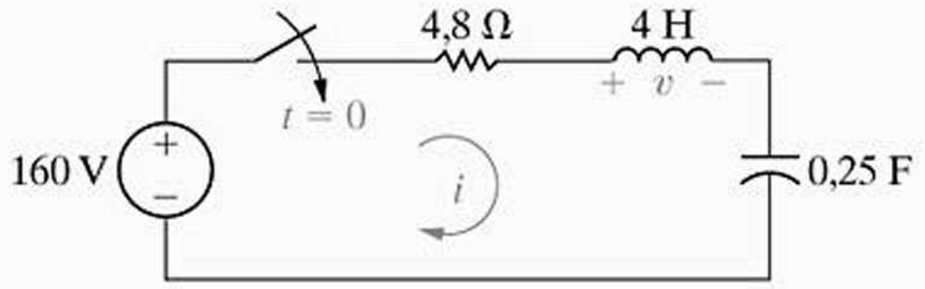
d) Determine a expressão para v no domínio do tempo quando $t > 0$.

Resposta: (a) $I = 40/(s^2 + 1{,}2s + 1)$;

(b) $i = (50e^{-0,6t} \operatorname{sen} 0{,}8t)u(t)$ A;

(c) $V = 160s/(s^2 + 1{,}2s + 1)$;

(d) $v = [200e^{-0,6t} \cos(0{,}8t + 36{,}87°)]u(t)$ V,



NOTA: Tente resolver também os problemas 13.15 e 13.16, apresentados no final deste capítulo.

Resposta transitória de um circuito *RLC* em paralelo

Outro exemplo de utilização da transformada de Laplace para determinar o comportamento transitório de um circuito surge da substituição de uma fonte de corrente cc no circuito da Figura 13.13 por uma fonte de corrente senoidal. A nova fonte de corrente é

$$i_g = I_m \cos \omega t \text{ A}, \tag{13.30}$$

onde $I_m = 24$ mA e $\omega = 40.000$ rad/s. Como antes, admitimos que a energia inicial armazenada no circuito seja zero.

A expressão para a fonte de corrente no domínio da freqüência é

$$I_g = \frac{sI_m}{s^2 + \omega^2}. \tag{13.31}$$

A tensão nos elementos em paralelo é

$$V = \frac{(I_g/C)s}{s^2 + (1/RC)s + (1/LC)}. \tag{13.32}$$

Substituindo a Equação 13.31 na Equação 13.32, obtemos

$$V = \frac{(I_m/C)s^2}{(s^2 + \omega^2)[s^2 + (1/RC)s + (1/LC)]}, \tag{13.33}$$

da qual

$$I_L = \frac{V}{sL} = \frac{(I_m/LC)s}{(s^2 + \omega^2)[s^2 + (1/RC)s + (1/LC)]}. \tag{13.34}$$

Substituindo os valores numéricos de I_m, ω, R, L e C na Equação 13.34, temos

$$I_L = \frac{384 \times 10^5 s}{(s^2 + 16 \times 10^8)(s^2 + 64.000s + 16 \times 10^8)}. \tag{13.35}$$

Agora, escrevemos o denominador na forma fatorada:

$$I_L = \frac{384 \times 10^5 s}{(s - j\omega)(s + j\omega)(s + \alpha - j\beta)(s + \alpha + j\beta)}, \tag{13.36}$$

onde $\omega = 40.000$, $\alpha = 32.000$ e $\beta = 24.000$.

Não podemos testar o valor final de i_L pelo teorema do valor final porque I_L tem um par de pólos no eixo imaginário; isto é, pólos em $\pm j4 \times 10^4$. Por isso, em primeiro lugar, precisamos determinar i_L e, então, verificar a validade da expressão pelo comportamento conhecido do circuito.

Quando expandimos a Equação 13.36 em uma soma de frações parciais, obtemos a equação

$$I_L = \frac{K_1}{s - j40.000} + \frac{K_1^*}{s + j40.000} + \frac{K_2}{s + 32.000 - j24.000} + \frac{K_2^*}{s + 32.000 + j24.000}. \tag{13.37}$$

Os valores numéricos dos coeficientes K_1 e K_2 são

$$K_1 = \frac{384 \times 10^5 (j40.000)}{(j\,80.000)(32.000 + j\,16.000)(32.000j + 64.000)}$$

$$= 7{,}5 \times 10^{-3} \angle -90°, \tag{13.38}$$

$$K_2 = \frac{384 \times 10^5 (-32.000 + j\,24.000)}{(-32.000 - j\,16.000)(-32.000 + j\,64.000)(j\,48.000)}$$

$$= 12{,}5 \times 10^{-3} \angle 90°. \tag{13.39}$$

Substituindo os valores numéricos das equações 13.38 e 13.39 na Equação 13.37 e tomando a transformada inversa da expressão resultante, temos

$$i_L = [15 \cos(40.000t - 90°) + 25e^{-32.000t} \cos(24.000t + 90°)] \text{ mA},$$

$$= (15 \operatorname{sen} 40.000t - 25e^{-32.000t} \operatorname{sen} 24.000t)u(t) \text{ mA}. \tag{13.40}$$

Agora, testamos a Equação 13.40 para verificar se ela faz sentido em termos das condições iniciais dadas e do comportamento conhecido do circuito, depois de a chave ter permanecido aberta por um longo tempo. Para $t = 0$, a Equação 13.40 prevê corrente inicial zero, o que está de acordo com a energia inicial zero no circuito. A Equação 13.40 também prevê uma corrente de regime permanente de

$$i_{L_{rp}} = 15\text{sen}\, 40.000t \text{ mA}, \tag{13.41}$$

que pode ser verificada pelo método fasorial (Capítulo 9).

Resposta ao degrau de um circuito de múltiplas malhas

Até agora, evitamos circuitos que exigissem duas ou mais equações de tensões de nó ou de correntes de malha porque as técnicas para resolver equações diferenciais simultâneas estão fora do escopo deste livro. Todavia, usando a transformada de Laplace, podemos resolver um problema como o apresentado pelo circuito de múltiplas malhas da Figura 13.15.

Aqui, queremos determinar as correntes de ramo i_1 e i_2 que surgem quando a fonte de tensão de 336 V cc é aplicada subitamente ao circuito. A energia inicial armazenada no circuito é zero. A Figura 13.16 mostra, no domínio da freqüência, o circuito equivalente ao circuito da Figura 13.15. As duas equações de correntes de malha são

$$\frac{336}{s} = (42 + 8{,}4s)I_1 - 42I_2, \tag{13.42}$$

$$0 = -42I_1 + (90 + 10s)I_2. \tag{13.43}$$

Usando o método de Cramer para calcular I_1 e I_2, obtemos

$$\Delta = \begin{vmatrix} 42 + 8{,}4s & -42 \\ -42 & 90 + 10s \end{vmatrix}$$

$$= 84(s^2 + 14s + 24)$$

$$= 84(s + 2)(s + 12) \tag{13.44}$$

$$N_1 = \begin{vmatrix} 336/s & -42 \\ 0 & 90 + 10s \end{vmatrix}$$

$$= \frac{3.360(s + 9)}{s}, \tag{13.45}$$

$$N_2 = \begin{vmatrix} 42 + 8{,}4s & 336/s \\ -42 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{14.112}{s}. \tag{13.46}$$

Com base nas equações 13.44–13.46,

$$I_1 = \frac{N_1}{\Delta} = \frac{40(s + 9)}{s(s + 2)(s + 12)}, \tag{13.47}$$

$$I_2 = \frac{N_2}{\Delta} = \frac{168}{s(s + 2)(s + 12)}. \tag{13.48}$$

Expandindo I_1 e I_2 em somas de frações parciais, obtemos

$$I_1 = \frac{15}{s} - \frac{14}{s + 2} - \frac{1}{s + 12}, \tag{13.49}$$

$$I_2 = \frac{7}{s} - \frac{8{,}4}{s + 2} + \frac{1{,}4}{s + 12}. \tag{13.50}$$

Obtemos as expressões para i_1 e i_2 tomando a transformada inversa das equações 13.49 e 13.50, respectivamente:

$$i_1 = (15 - 14e^{-2t} - e^{-12t})u(t) \text{ A}, \tag{13.51}$$

$$i_2 = (7 - 8{,}4e^{-2t} + 1{,}4e^{-12t})u(t) \text{ A}. \tag{13.52}$$

Em seguida, testamos as soluções para verificar se elas fazem sentido em termos do circuito. Como não há nenhuma energia armazenada no circuito no instante em que a chave é fechada, ambas, $i_1(0^-)$ e $i_2(0^-)$, devem ser zero. As soluções estão de acordo com esses valores iniciais. Depois de a chave estar fechada por um longo tempo, os dois indutores se comportam como curto-circuitos. Portanto, os valores finais de i_1 e i_2 são

$$i_1(\infty) = \frac{336(90)}{42(48)} = 15 \text{ A}, \tag{13.53}$$

$$i_2(\infty) = \frac{15(42)}{90} = 7 \text{ A}. \tag{13.54}$$

Um teste final envolve os valores numéricos dos expoentes e o cálculo da queda de tensão no resistor de 42 Ω por três métodos diferentes. Pelo circuito, a tensão no resistor de 42 Ω (positiva no topo) é

$$v = 42(i_1 - i_2) = 336 - 8{,}4\frac{di_1}{dt} = 48i_2 + 10\frac{di_2}{dt}. \tag{13.55}$$

Você deve verificar que, independentemente da forma como a Equação 13.55 é usada, a tensão é

$$v = (336 - 235{,}2e^{-2t} - 100{,}80e^{-12t})u(t) \text{ V}$$

Portanto, podemos confiar que as soluções para i_1 e i_2 estão corretas.

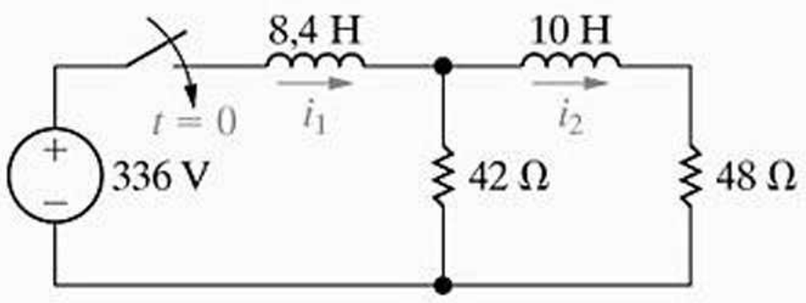


Figura 13.15 ▲ Circuito *RL* com múltiplas malhas.

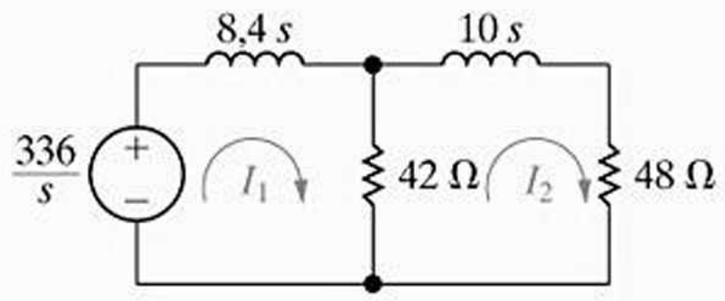


Figura 13.16 ▲ Circuito equivalente no domínio da freqüência para o circuito mostrado na Figura 13.15.

✔ PROBLEMA PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 2 — Saber como analisar um circuito no domínio da freqüência e saber transformar uma solução no domínio da freqüência de volta para o domínio do tempo

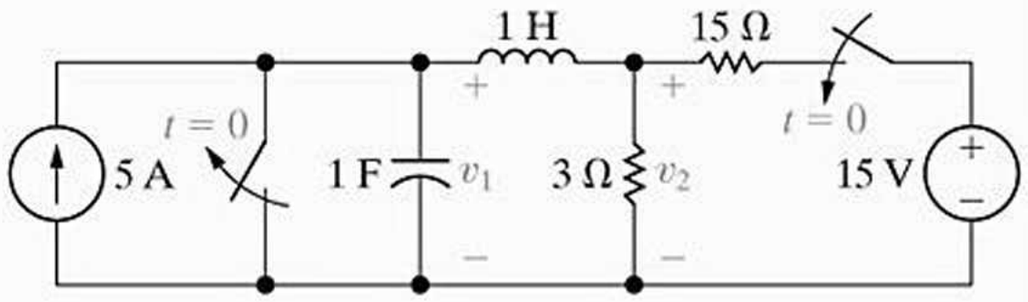
13.5 As fontes de corrente e tensão contínuas são aplicadas simultaneamente ao circuito mostrado. Não há nenhuma energia armazenada no circuito no instante da aplicação.

a) Calcule as expressões para V_1 e V_2 no domínio da freqüência.

b) Calcule as expressões para v_1 e v_2 no domínio do tempo para $t > 0$.

c) Calcule $v_1(0^+)$ e $v_2(0^+)$.

d) Calcule os valores de regime permanente de v_1 e v_2.



Resposta: (a) $V_1 = [5(s + 3)]/[s(s + 0{,}5)(s + 2)]$,
$V_2 = [2{,}5(s_2 + 6)]/[s(s + 0{,}5)(s + 2)]$;

(b) $v_1 = (15 - \frac{50}{3}e^{-0,5t} + \frac{5}{3}e^{-2t})u(t)$ V,
$v_2 = (15 - \frac{125}{6}e^{-0,5t} + \frac{25}{3}e^{-2t})u(t)$ V;

(c) $v_1(0^+) = 0$, $v_2(0^+) = 2{,}5$ V;

(d) $v_1 = v_2 = 15$ V.

NOTA: Tente resolver também os problemas 13.26 e 13.27, apresentados no final deste capítulo.

Utilização do equivalente de Thévenin

Nesta seção, mostramos como usar o equivalente de Thévenin no domínio da freqüência. A Figura 13.17 mostra o circuito a ser analisado. O problema é determinar a corrente no capacitor quando a chave fecha. A energia armazenada no circuito antes do fechamento é zero.

Para determinar i_C, em primeiro lugar, construímos o circuito equivalente no domínio da freqüência e, então, determinamos o equivalente de Thévenin desse circuito visto a partir dos terminais do capacitor. A Figura 13.18 mostra o circuito no domínio da freqüência.

A tensão de Thévenin é a tensão de circuito aberto nos terminais *a, b*. Sob as condições de circuito aberto, não há nenhuma tensão no resistor de 60 Ω. Daí,

$$V_{\text{Th}} = \frac{(480/s)(0{,}002s)}{20 + 0{,}002s} = \frac{480}{s + 10^4}. \qquad (13.56)$$

A impedância de Thévenin vista a partir dos terminais *a* e *b* é igual ao resistor de 60 Ω em série com a combinação em paralelo do resistor de 20 Ω e do indutor de 2 mH. Assim,

$$Z_{\text{Th}} = 60 + \frac{0{,}002s(20)}{20 + 0{,}002s} = \frac{80(s + 7.500)}{s + 10^4}. \qquad (13.57)$$

Usando o equivalente de Thévenin, reduzimos o circuito da Figura 13.18 ao mostrado na Figura 13.19. Ele indica que a corrente no capacitor, I_C, é igual à tensão de Thévenin dividida pela impedância total em série. Assim,

$$I_C = \frac{480/(s + 10^4)}{[80(s + 7.500)/(s + 10^4)] + [(2 \times 10^5)/s]}. \qquad (13.58)$$

Simplificamos a Equação 13.58 para

$$I_C = \frac{6s}{s^2 + 10.000s + 25 \times 10^6} = \frac{6s}{(s + 5.000)^2}. \qquad (13.59)$$

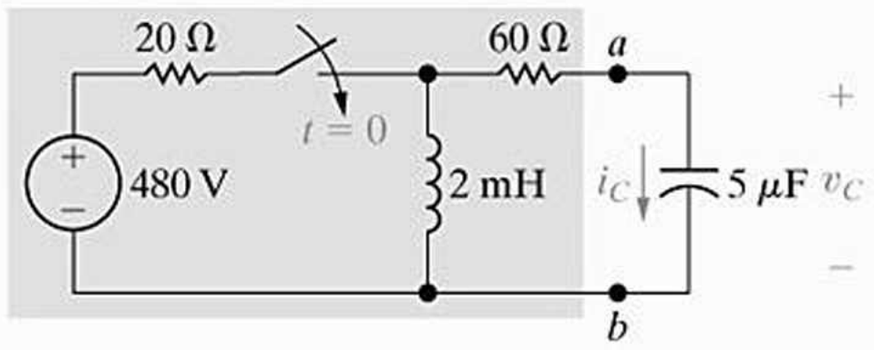


Figura 13.17 ▲ Circuito a ser analisado utilizando equivalente de Thévenin no domínio da freqüência.

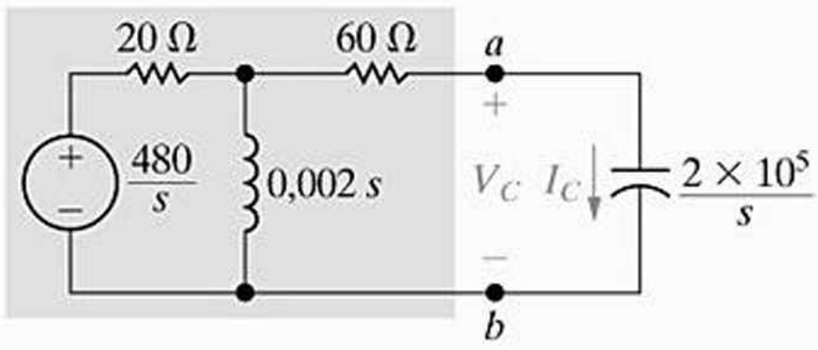


Figura 13.18 ▲ Modelo no domínio da freqüência do circuito da Figura 13.17.

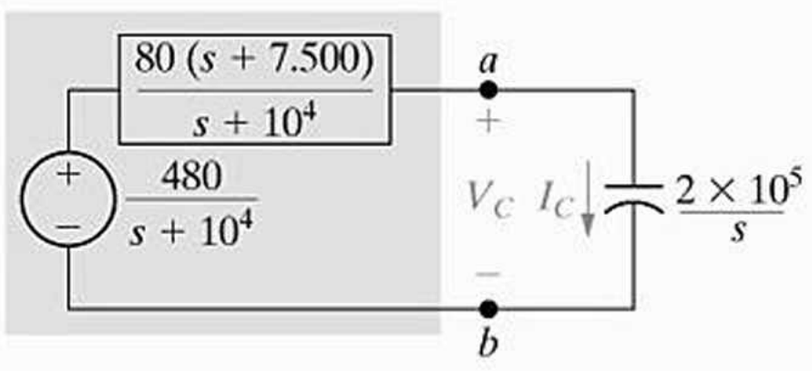


Figura 13.19 ▲ Versão simplificada do circuito da Figura 13.18, usando um equivalente de Thévenin.

Da expansão por frações parciais da Equação 13.59 decorre

$$I_C = \frac{-30.000}{(s+5.000)^2} + \frac{6}{s+5.000}, \tag{13.60}$$

cuja transformada inversa é

$$i_C = (-30.000te^{-5.000t} + 6e^{-5.000t})u(t) \text{ A}. \tag{13.61}$$

Agora, testamos a Equação 13.61 para verificar se ela faz sentido em termos do comportamento conhecido do circuito. Pela Equação 13.61,

$$i_C(0) = 6 \text{ A} \tag{13.62}$$

Esse resultado está de acordo com a corrente inicial no capacitor, como calculada pelo circuito na Figura 13.17. A corrente inicial no indutor é zero e a tensão inicial no capacitor é zero, portanto a corrente inicial no capacitor é 480/80, ou 6 A. O valor final da corrente é zero, o que também está de acordo com a Equação 13.61. Observe também que, por essa equação, a corrente inverte o sinal quando t excede 6/30.000 ou 200 μs. O fato de i_C inverter o sinal faz sentido porque, logo que a chave fecha, o capacitor começa a carregar. A certa altura, essa carga é reduzida a zero porque o indutor é um curto-circuito em $t = \infty$. A reversão de sinal de i_C reflete o carregamento e a descarga do capacitor.

Vamos admitir que a queda de tensão no capacitor v_C também seja de interesse. Tão logo determinemos i_C, determinamos v_C por integração no domínio do tempo; isto é,

$$v_C = 2 \times 10^5 \int_{0^-}^{t} (6 - 30.000x)e^{-5.000x}\,dx. \tag{13.63}$$

Embora a integração da Equação 13.63 não seja difícil, podemos evitá-la totalmente determinando, em primeiro lugar, a expressão para V_c no domínio da freqüência e, então, determinando v_C por uma transformada inversa. Assim,

$$V_C = \frac{1}{sC}I_C = \frac{2 \times 10^5}{s}\frac{6s}{(s+5.000)^2}$$

$$= \frac{12 \times 10^5}{(s+5.000)^2}, \tag{13.64}$$

e, então,

$$v_C = 12 \times 10^5 te^{-5.000t}u(t). \tag{13.65}$$

Você deve verificar se a Equação 13.65 é consistente com a Equação 13.63 e se ela também fundamenta as observações relativas ao comportamento de i_C (veja o Problema 13.33, apresentado no final deste capítulo).

Circuito com indutância mútua

O próximo exemplo ilustra como usar a transformada de Laplace para analisar a resposta transitória de um circuito que contém indutância mútua. A Figura 13.20 mostra o circuito. A chave liga-antes-interrompe-depois permaneceu na posição a por um longo tempo. Em $t = 0$, ela passa instantaneamente para a posição b. O problema é deduzir a expressão para i_2 no domínio do tempo.

Começamos desenhando novamente o circuito da Figura 13.20, substituindo a chave na posição b e os enrolamentos magneticamente acoplados por um circuito equivalente em T.[1] A Figura 13.21 mostra o novo circuito.

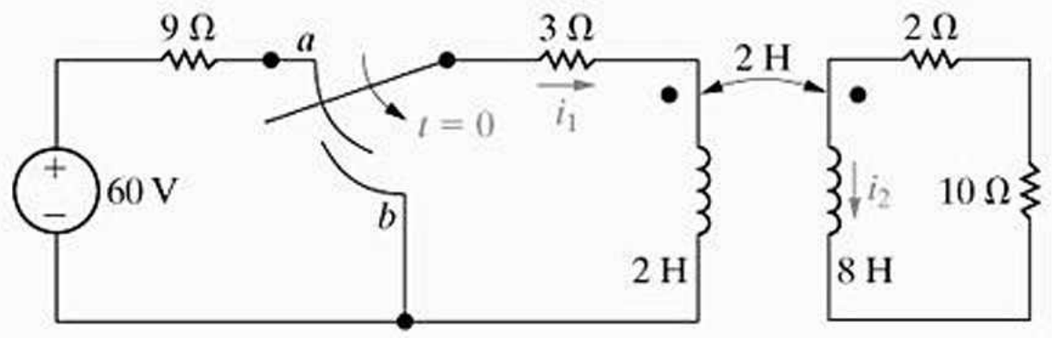


Figura 13.20 ▲ Circuito com enrolamentos magneticamente acoplados.

✔ PROBLEMA PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 2 — Saber como analisar um circuito no domínio da freqüência e saber transformar uma solução no domínio da freqüência de volta para o domínio do tempo

13.6 A carga inicial no capacitor do circuito mostrado é zero.

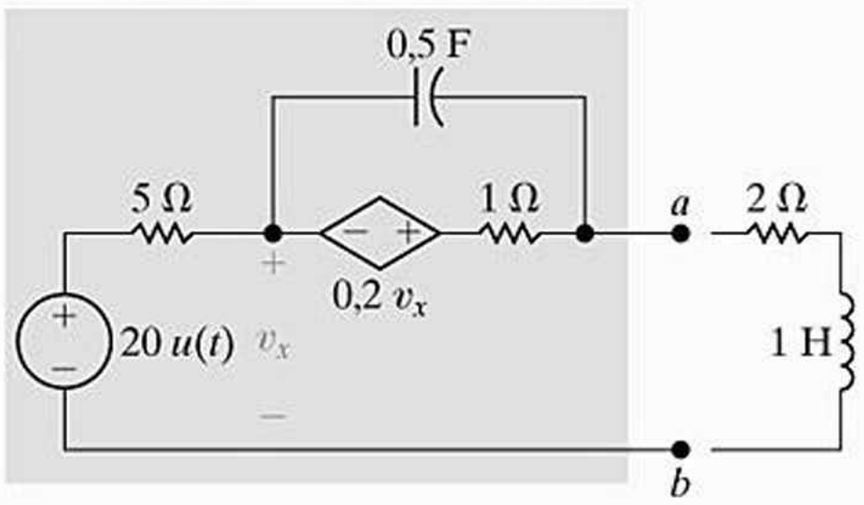
a) Determine o circuito equivalente de Thévenin no domínio da freqüência visto a partir dos terminais a e b.

b) Determine a expressão no domínio da freqüência da corrente que o circuito fornece à carga, que consiste em um indutor de 1 H em série com um resistor de 2 Ω.

Resposta: (a) $V_{Th} = V_{ab} = [20(s + 2{,}4)]/[s(s + 2)]$,

$Z_{Th} = 5(s + 2{,}8)/(s + 2)$;

(b) $I_{ab} = [20(s + 2{,}4)]/[s(s + 3)(s + 6)]$.



NOTA: Tente resolver também o Problema 13.35, apresentado no final deste capítulo.

Agora, transformamos esse circuito para o domínio da freqüência e observamos que

$$i_1(0^-) = \frac{60}{12} = 5 \text{ A}, \tag{13.66}$$

$$i_2(0^-) = 0. \tag{13.67}$$

Como planejamos usar a análise de malhas no domínio da freqüência, utilizamos o circuito equivalente em série para um indutor que conduz uma corrente inicial. A Figura 13.22 mostra o circuito no domínio da freqüência. Observe que há somente uma fonte de tensão independente. Essa fonte aparece na perna vertical do T para representar o valor inicial da corrente no indutor de 2 H, isto é, $i_1(0^-) + i_2(0^-)$, ou 5 A. O ramo que conduz i_1 não possui nenhuma fonte de tensão, pois $L_1 - M = 0$.

As duas equações de malha no domínio da freqüência que descrevem o circuito na Figura 13.22 são

$$(3 + 2s)I_1 + 2sI_2 = 10 \tag{13.68}$$

$$2sI_1 + (12 + 8s)I_2 = 10 \tag{13.69}$$

Explicitando I_2, obtemos

$$I_2 = \frac{2{,}5}{(s + 1)(s + 3)}. \tag{13.70}$$

Expandindo a Equação 13.70 em uma soma de frações parciais, temos

$$I_2 = \frac{1{,}25}{s + 1} - \frac{1{,}25}{s + 3}. \tag{13.71}$$

Então,

$$i_2 = (1{,}25e^{-t} - 1{,}25e^{-3t})u(t) \text{ A}. \tag{13.72}$$

A Equação 13.72 revela que i_2 aumenta de zero até um valor de pico de 481,13 mA em 549,31 ms depois de a chave passar para a posição *b*. Daí em diante, decresce exponencialmente, aproximando-se de zero. A Figura 13.23 mostra um gráfico de i_2 em função de *t*. Essa resposta faz sentido em termos do comportamento físico conhecido dos enrolamentos magneticamente acoplados. Só pode existir uma corrente no indutor L_2 se houver uma corrente que varie com o tempo no indutor L_1. À medida que i_1 diminui a partir de seu valor inicial de 5 A, i_2 aumenta a partir de zero e depois diminui à medida que i_1 tende a zero.

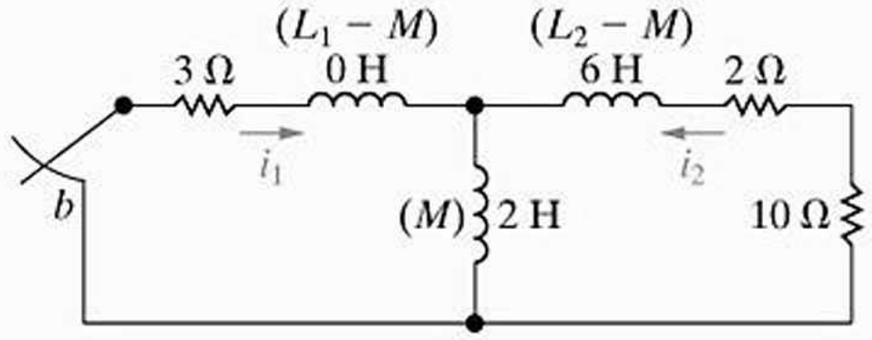


Figura 13.21 ▲ Circuito da Figura 13.20, com os enrolamentos magneticamente acoplados substituídos por um circuito equivalente em T.

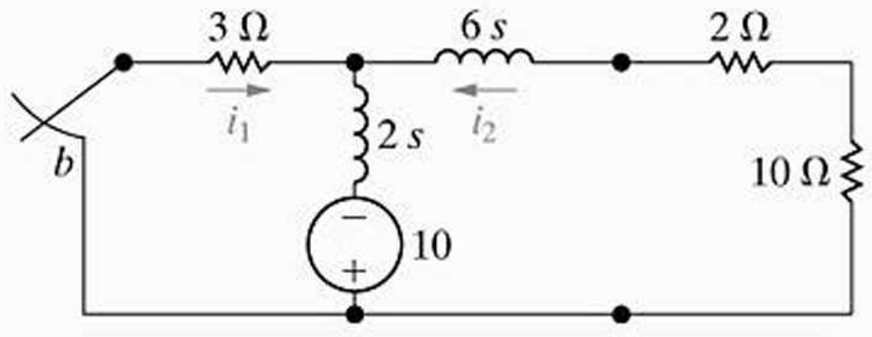


Figura 13.22 ▲ Circuito equivalente no domínio da freqüência para o circuito da Figura 13.21.

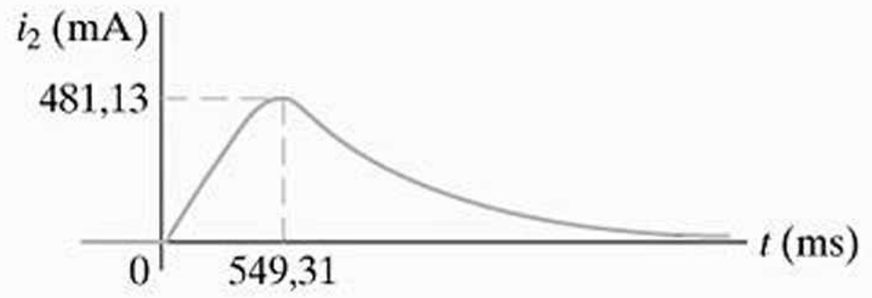


Figura 13.23 ▲ Gráfico de i_2 em função de *t* para o circuito da Figura 13.20.

✔ PROBLEMA PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 2 — Saber como analisar um circuito no domínio da freqüência e saber transformar uma solução no domínio da freqüência de volta para o domínio do tempo

13.7 a) Verifique pela Equação 13.72 se i_2 alcança um valor de pico de 481,13 mA em $t = 549{,}31$ ms.
b) Determine i_1 para $t > 0$ para o circuito mostrado na Figura 13.20.
c) Calcule di_1/dt quando i_2 está em seu valor de pico.
d) Expresse i_2 como uma função de di_1/dt quando i_2 está em seu valor de pico.
e) Use os resultados obtidos em (c) e (d) para calcular o valor de pico de i_2.

Resposta: (a) $di_2/dt = 0$ quando $t = \frac{1}{2}\ln 3$ (s);
(b) $i_1 = 2{,}5(e^{-t} + e^{-3t})u(t)$ A;
(c) −2,89 A/s;
(d) $i_2 = -(Mdi_1/dt)/12$;
(e) 481,13 mA.

NOTA: Tente resolver também os problemas 13.36 e 13.37, apresentados no final deste capítulo.

[1] Veja o Apêndice C.

Teorema da superposição no domínio da freqüência

Como estamos analisando circuitos lineares de parâmetros concentrados, podemos usar o teorema da superposição para dividir a resposta em componentes que podem ser identificados com determinadas fontes e condições iniciais. Distinguir esses componentes é fundamental para usar a função de transferência, que apresentaremos na próxima seção.

A Figura 13.24 mostra nosso circuito ilustrativo. Admitimos que, no instante em que as duas fontes são aplicadas ao circuito, o indutor esteja conduzindo uma corrente inicial de ρ ampères e o capacitor esteja submetido a uma tensão inicial de γ volts. A resposta desejada do circuito é a tensão v_2 no resistor R_2.

A Figura 13.25 mostra o circuito equivalente no domínio da freqüência. Optamos pelos equivalentes em paralelo para L e C porque escolhemos calcular V_2 usando o método das tensões de nó.

Para determinar V_2 por superposição, calculamos o componente de V_2 devido à ação individual de cada fonte e, então, somamos os componentes. Começamos com a fonte V_g agindo sozinha. Abrir o ramo de cada uma das três fontes de corrente as elimina do circuito. A Figura 13.26 mostra o circuito resultante. Adicionamos a tensão de nó V_1' para auxiliar a análise. As aspas em V_1 e V_2 indicam que eles são os componentes de V_1 e V_2 atribuíveis a V_g se este estiver agindo sozinho. As duas equações que descrevem o circuito na Figura 13.26 são

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{sL} + sC\right)V_1' - sCV_2' = \frac{V_g}{R_1}, \tag{13.73}$$

$$-sCV_1' + \left(\frac{1}{R_2} + sC\right)V_2' = 0. \tag{13.74}$$

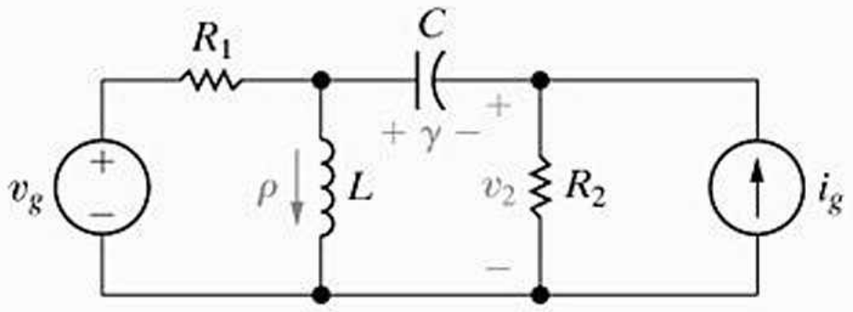


Figura 13.24 ▲ Circuito mostrando o uso do teorema da superposição no domínio da freqüência.

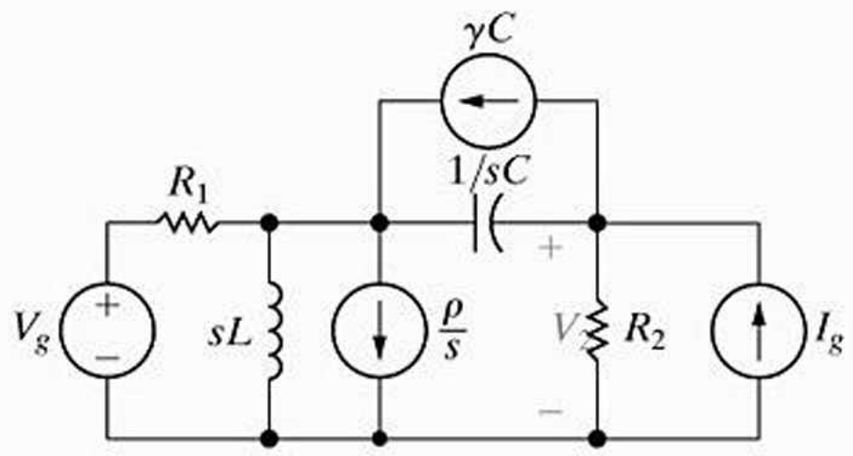


Figura 13.25 ▲ Circuito equivalente no domínio da freqüência do circuito da Figura 13.24.

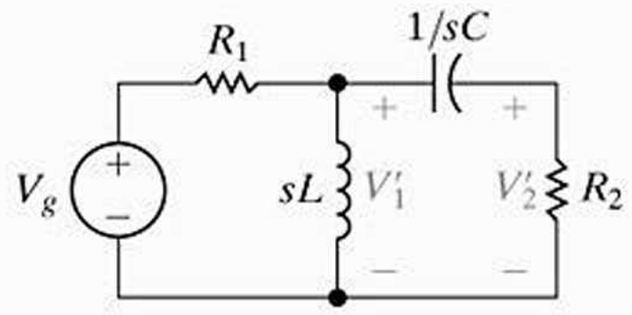


Figura 13.26 ▲ Circuito da Figura 13.25 quando a fonte V_g age sozinha.

Por conveniência, introduzimos a notação

$$Y_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{sL} + sC; \tag{13.75}$$

$$Y_{12} = -sC; \tag{13.76}$$

$$Y_{22} = \frac{1}{R_2} + sC. \tag{13.77}$$

Substituindo as equações 13.75–13.77 nas equações 13.73 e 13.74, obtemos

$$Y_{11}V_1' + Y_{12}V_2' = V_g/R_1 \tag{13.78}$$

$$Y_{12}V_1' + Y_{22}V_2' = 0. \tag{13.79}$$

Explicitando V_2' nas equações 13.78 e 13.79, temos

$$V_2' = \frac{-Y_{12}/R_1}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2}V_g. \tag{13.80}$$

Quando a fonte de corrente I_g age sozinha, o circuito da Figura 13.25 reduz-se ao mostrado na Figura 13.27. Aqui, V_1'' e V_2'' são os componentes de V_1 e V_2 resultantes da ação da fonte I_g. Se usarmos a notação apresentada nas equações 13.75-13.77, as duas equações de tensões de nó que descrevem o circuito da Figura 13.27 são

$$Y_{11}V_1'' + Y_{12}V_2'' = 0 \tag{13.81}$$

e

$$Y_{12}V_1'' + Y_{22}V_2'' = I_g. \tag{13.82}$$

Explicitando V_2'' nas equações 13.81 e 13.82, obtemos

$$V_2'' = \frac{Y_{11}}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2}I_g. \tag{13.83}$$

Para determinar o componente de V_2 resultante da energia inicial armazenada no indutor (V_2'''), temos de resolver o circuito da Figura 13.28, no qual

$$Y_{11}V_1''' + Y_{12}V_2''' = -\rho/s, \tag{13.84}$$

$$Y_{12}V_1''' + Y_{22}V_2''' = 0. \tag{13.85}$$

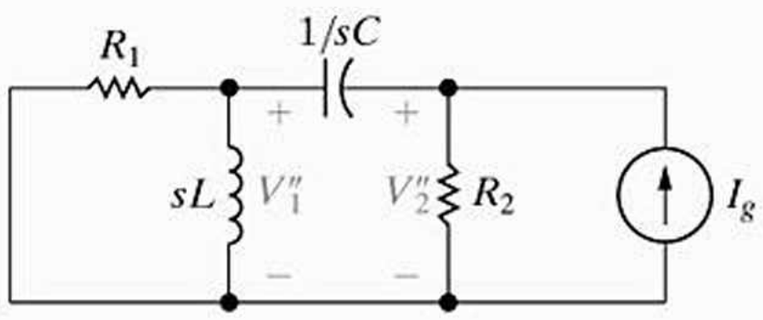


Figura 13.27 ▲ Circuito da Figura 13.25 quando a fonte I_g age sozinha.

Assim

$$V_2''' = \frac{Y_{12}/s}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2}\rho. \tag{13.86}$$

Pelo circuito da Figura 13.29, determinamos o componente de V_2 (V_2''') resultante da energia inicial armazenada no capacitor. As equações de tensões de nó que descrevem esse circuito são

$$Y_{11}V_1''' + Y_{12}V_2''' = \gamma C, \tag{13.87}$$

$$Y_{12}V_1''' + Y_{22}V_2''' = -\gamma C. \tag{13.88}$$

Explicitando V_2'''', temos

$$V_2'''' = \frac{-(Y_{11} + Y_{12})C}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2}\gamma. \tag{13.89}$$

A expressão para V_2 é

$$\begin{aligned} V_2 &= V_2' + V_2'' + V_2''' + V_2'''' \\ &= \frac{-(Y_{12}/R_1)}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2}V_g + \frac{Y_{11}}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2}I_g \\ &\quad + \frac{Y_{12}/s}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2}\rho + \frac{-C(Y_{11} + Y_{12})}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2}\gamma. \end{aligned} \tag{13.90}$$

Podemos determinar V_2 sem usar a propriedade de superposição, resolvendo as duas equações de tensões de nó que descrevem o circuito da Figura 13.25. Assim,

$$Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 = \frac{V_g}{R_1} + \gamma C - \frac{\rho}{s}, \tag{13.91}$$

$$Y_{12}V_1 + Y_{22}V_2 = I_g - \gamma C. \tag{13.92}$$

Você deve verificar, no Problema 13.43, que a solução das equações 13.91 e 13.92 para V_2 dá o mesmo resultado que o da Equação 13.90.

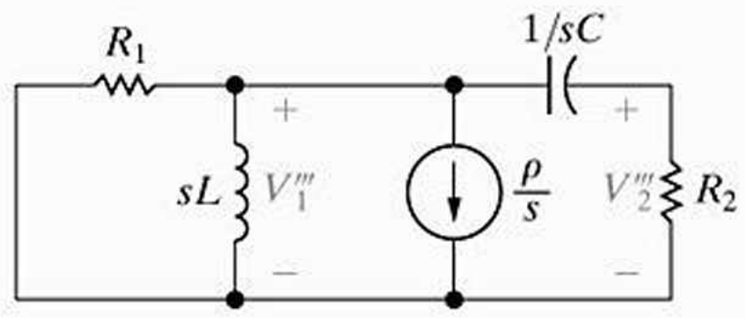


Figura 13.28 ▲ Circuito da Figura 13.25, alimentado pela corrente inicial do indutor.

13.4 Função de transferência

A *função de transferência* é definida como a razão, no domínio da freqüência, entre a transformada de Laplace da saída (resposta) e a transformada de Laplace da entrada (fonte). No cálculo da função de transferência, restringimos nossa atenção a circuitos nos quais todas as condições iniciais são nulas. Se um circuito tiver múltiplas fontes independentes, podemos determinar a função de transferência para cada fonte e usar a propriedade de superposição para determinar a resposta para todas as fontes.

A função de transferência é

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}, \tag{13.93}$$

(Definição de uma função de transferência)

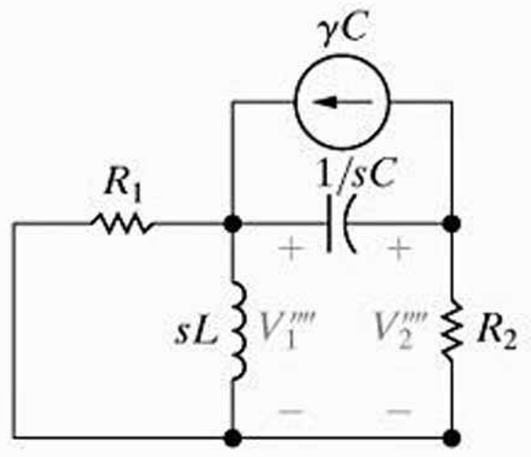


Figura 13.29 ▲ Circuito da Figura 13.25, alimentado apenas pela tensão inicial do capacitor.

✔ PROBLEMA PARA AVALIAÇÃO

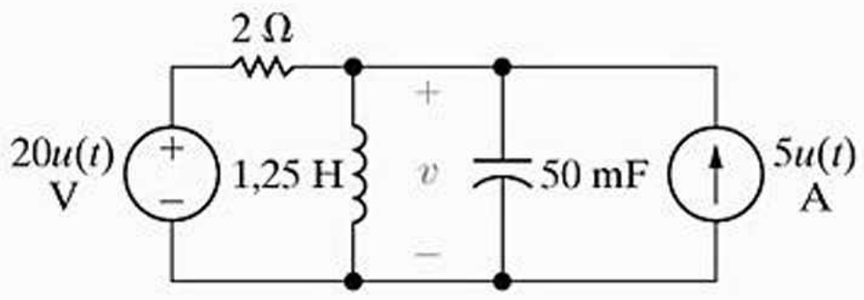
Objetivo 2 — Saber como analisar um circuito no domínio da freqüência e saber transformar uma solução no domínio da freqüência de volta para o domínio do tempo

13.8 A energia armazenada no circuito mostrado é zero no instante em que as duas fontes são ligadas.

a) Determine o componente de v para $t > 0$ devida à fonte de tensão.

b) Determine o componente de v para $t > 0$ devida à fonte de corrente.

c) Determine a expressão para v quando $t > 0$.



Resposta: (a) $[(100/3)e^{-2t} - (100/3)e^{-8t}]u(t)$ V;
(b) $[(50/3)e^{-2t} - (50/3)e^{-8t}]u(t)$ V;
(c) $[50e^{-2t} - 50e^{-8t}]u(t)$ V.

NOTA: Tente resolver também o Problema 13.42, apresentado no final deste capítulo.

na qual $Y(s)$ é a transformada de Laplace do sinal de saída e $X(s)$ é a transformada de Laplace do sinal de entrada. Observe que a função de transferência depende do que é definido como sinal de saída. Considere, por exemplo, o circuito em série da Figura 13.30.

Se a corrente for definida como a resposta do circuito,

$$H(s) = \frac{I}{V_g} = \frac{1}{R + sL + 1/sC} = \frac{sC}{s^2LC + RCs + 1}. \tag{13.94}$$

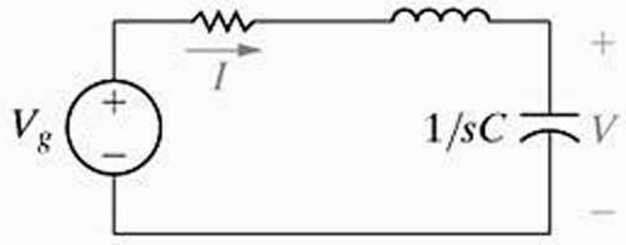


Figura 13.30 ▲ Circuito *RLC* em série.

Ao deduzirmos a Equação 13.94, consideramos que I corresponde à saída $Y(s)$ e V_g corresponde à entrada $X(s)$.

Se a tensão no capacitor for definida como o sinal de saída do circuito da Figura 13.30, a função de transferência será

$$H(s) = \frac{V}{V_g} = \frac{1/sC}{R + sL + 1/sC} = \frac{1}{s^2LC + RCs + 1}. \tag{13.95}$$

Desse modo, como os circuitos podem ter múltiplas fontes e como a definição do sinal de saída pode variar, um único circuito pode gerar muitas funções de transferência. Lembre-se de que, quando múltiplas fontes estão envolvidas, nenhuma função de transferência por si só pode representar a saída global – para obter a resposta global, funções de transferência associadas a cada fonte devem ser combinadas usando a superposição. O Exemplo 13.1 ilustra o cálculo de uma função de transferência para valores numéricos conhecidos de R, L e C.

Exemplo 13.1 Dedução da função de transferência de um circuito

A fonte de tensão v_g alimenta o circuito da Figura 13.31. O sinal de resposta é a tensão no capacitor, v_o.

a) Calcule a expressão numérica para a função de transferência.

b) Calcule os valores numéricos para os pólos e zeros da função de transferência.

Solução

a) A primeira etapa na determinação da função de transferência é construir o circuito equivalente no domínio da freqüência, como mostra a Figura 13.32. Por definição, a função de transferência é a razão V_o/V_g, que pode ser calculada por uma única equação de tensões de nó. Somando as correntes que saem do nó superior, obtemos

$$\frac{V_o - V_g}{1.000} + \frac{V_o}{250 + 0{,}05s} = \frac{V_o s}{10^6} = 0.$$

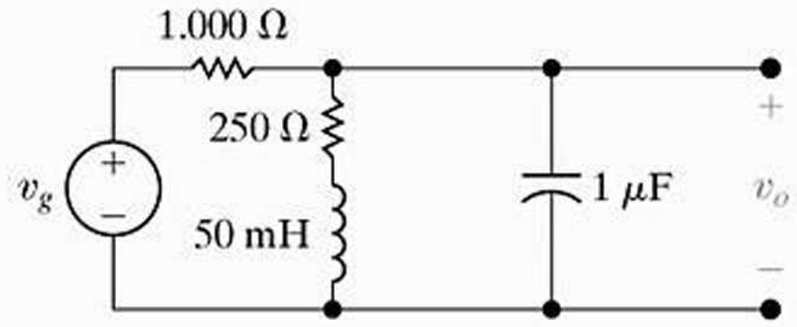


Figura 13.31 ▲ Circuito para o Exemplo 13.1.

Explicitando V_o, temos

$$V_o = \frac{1.000(s + 5.000)V_g}{s^2 + 6.000s + 25 \times 10^6}.$$

Portanto, a função de transferência é

$$H(s) = \frac{V_o}{V_g} = \frac{1.000(s + 5.000)}{s^2 + 6.000s + 25 \times 10^6}.$$

b) Os pólos de $H(s)$ são as raízes do polinômio do denominador. Portanto,

$$-p_1 = -3.000 - j4.000,$$
$$-p_2 = -3.000 + j4.000.$$

Os zeros de $H(s)$ são as raízes do polinômio do numerador; assim, $H(s)$ tem um zero em

$$-z_1 = -5.000.$$

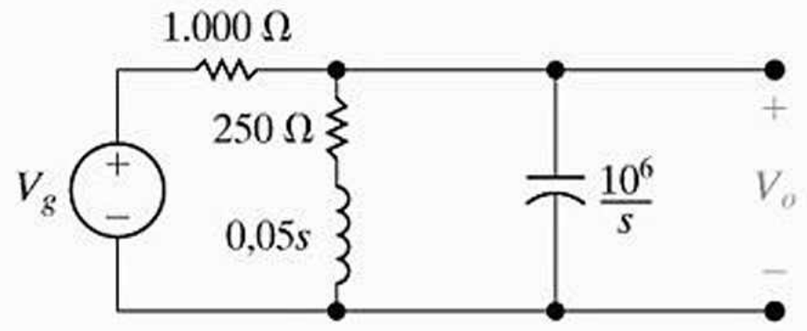


Figura 13.32 ▲ Circuito equivalente no domínio da freqüência para o circuito da Figura 13.31.

✔ PROBLEMA PARA AVALIAÇÃO

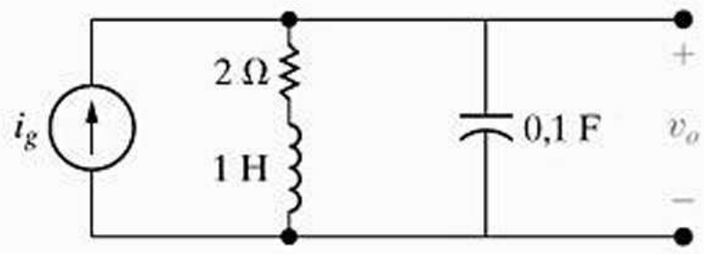
Objetivo 3 — Entender a definição e o significado da função de transferência; saber determinar uma função de transferência

13.9 a) Determine a expressão numérica para a função de transferência V_o/I_g para o circuito mostrado.

b) Calcule o valor numérico de cada pólo e de cada zero de $H(s)$.

Resposta: (a) $H(s) = 10(s + 2)/(s^2 + 2s + 10)$;

(b) $-p_1 = -1 + j3, -p_2 = -1 - j3$,
$-z = -2$.



A localização de pólos e zeros de $H(s)$

Para circuitos lineares de parâmetros concentrados, $H(s)$ é sempre uma função racional de s. Pólos e zeros complexos sempre aparecem em pares conjugados. Os pólos de $H(s)$ devem estar na metade esquerda do plano s para que a resposta a um sinal limitado (cujos valores encontram-se dentro de limites finitos) seja finita. Os zeros de $H(s)$ podem estar na metade direita ou na metade esquerda do plano s.

Tendo em mente essas características gerais, a seguir discutimos o papel que $H(s)$ desempenha na determinação da função resposta. Começamos com a técnica da expansão por frações parciais para determinar $y(t)$.

13.5 Função de transferência em expansões por frações parciais

Pela Equação 13.93, podemos escrever a saída do circuito como o produto da função de transferência pelo sinal de entrada:

$$Y(s) = H(s)X(s). \tag{13.96}$$

Já observamos que $H(s)$ é uma função racional de s. Uma consulta à Tabela 13.1 mostra que $X(s)$ também é uma função racional de s para os sinais de entrada de maior interesse em análise de circuitos.

Expandindo o lado direito da Equação 13.96 em uma soma de frações parciais, obtemos um termo para cada pólo de $H(s)$ e $X(s)$. Lembre-se que, no Capítulo 12, vimos que pólos são as raízes do polinômio do denominador; zeros são as raízes do polinômio do numerador. Os termos gerados pelos pólos de $H(s)$ dão origem ao componente transitório da resposta global, ao passo que os termos gerados pelos pólos de $X(s)$ dão origem ao componente de regime permanente da resposta. Aqui, resposta de regime permanente significa a resposta que existe depois de os componentes transitórios terem-se tornado desprezíveis. O Exemplo 13.2 ilustra essas observações gerais.

Exemplo 13.2 Análise da função de transferência de um circuito

O circuito no Exemplo 13.1 (Figura 13.31) é alimentado por uma fonte de tensão cujo valor aumenta linearmente com o tempo, ou seja, $v_g = 50tu(t)$.

a) Use a função de transferência para determinar v_o.
b) Identifique o componente transitória da resposta.
c) Identifique o componente de regime permanente da resposta.
d) Faça um gráfico de v_o em função de t para $0 \leq t \leq 1{,}5$ ms.

Solução

a) Pelo Exemplo 13.1,

$$H(s) = \frac{1.000(s + 5.000)}{s^2 + 6.000s + 25 \times 10^6}.$$

A transformada da tensão de alimentação é $50/s^2$; portanto, a expressão no domínio da freqüência para a tensão de saída é

$$V_o = \frac{1.000(s + 5.000)}{(s^2 + 6.000s + 25 \times 10^6)} \frac{50}{s^2}.$$

A expansão por frações parciais de V_o é

$$V_o = \frac{K_1}{s + 3.000 - j4.000} + \frac{K_1^*}{s + 3.000 + j4.000} + \frac{K_2}{s^2} + \frac{K_3}{s}.$$

Avaliamos os coeficientes K_1, K_2 e K_3 usando as técnicas descritas na Seção 12.7:

$$K_1 = 5\sqrt{5} \times 10^{-4} \angle 79{,}70°;$$
$$K_1^* = 5\sqrt{5} \times 10^{-4} \angle -79{,}70°,$$
$$K_2 = 10$$
$$K_3 = -4 \times 10^{-4}.$$

A expressão no domínio do tempo para v_o é

$$v_o = [10\sqrt{5} \times 10^{-4} e^{-3.000t} \cos(4.000t + 79{,}70°) + 10t - 4 \times 10^{-4}]u(t) \text{ V}.$$

b) A componente transitória de v_o é

$$10\sqrt{5} \times 10^{-4} e^{-3.000t} \cos(4.000t + 79{,}70°).$$

Observe que esse termo é gerado pelos pólos $(-3.000 + j4.000)$ e $(-3.000 - j4.000)$ da função de transferência.

c) O componente de regime permanente da resposta é

$$(10t - 4 \times 10^{-4})u(t)$$

Esses dois termos são gerados pelo pólo de segunda ordem (K/s^2) da tensão de alimentação.

d) A Figura 13.33 mostra o gráfico de v_o em função de t. Observe que a diferença entre a resposta global e a de regime permanente $10.000t - 0{,}4$ mV é imperceptível depois de aproximadamente 1 ms.

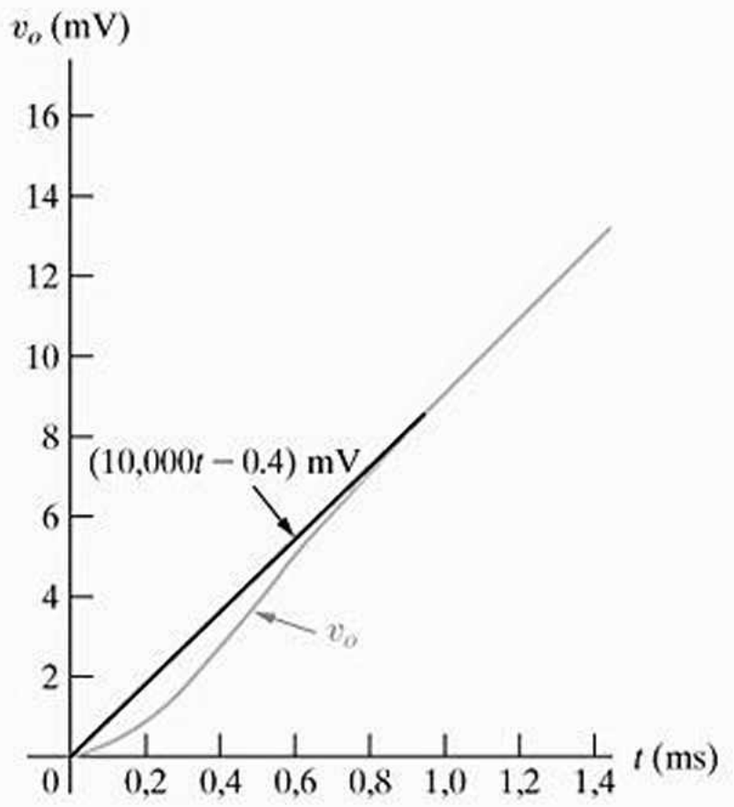


Figura 13.33 ▶ Gráfico de v_o em função de t para o Exemplo 13.2.

✔ PROBLEMAS PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 4 — Saber como usar a função de transferência de um circuito para calcular sua resposta ao impulso, sua resposta ao degrau unitário e sua reposta de regime permanente senoidal.

13.10 Determine (a) a resposta ao degrau unitário e (b) a resposta ao impulso unitário do circuito do Problema para Avaliação 13.9.

Resposta: (a) $[2 + (10/3)e^{-t}\cos(3t + 126{,}87°)]u(t)$ V;
(b) $10{,}54e^{-t}\cos(3t - 18{,}43°)u(t)$ V.

13.11 A resposta ao impulso unitário de um circuito é $v_o(t) = 10.000e^{-70t}\cos(240t + \theta)$ V, onde $\text{tg}\ \theta = \frac{7}{24}$.
a) Determine a função de transferência do circuito.
b) Determine a resposta ao degrau unitário do circuito.

Resposta: (a) $9.600s/(s^2 + 140s + 62.500)$;
(b) $40e^{-70t}\ \text{sen}\ 240t$ V.

NOTA: Tente resolver também os problemas 13.76(a) e (b), apresentados no final deste capítulo.

Observações sobre a utilização de $H(s)$ em análise de circuitos

O Exemplo 13.2 mostra claramente, por meio de uma expansão por frações parciais, como a função de transferência $H(s)$ está relacionada com a resposta de um circuito. Todavia, o exemplo levanta questões sobre a praticidade de alimentar um circuito com uma tensão tipo rampa ascendente que gera uma resposta do tipo rampa ascendente. A certa altura, as componentes do circuito se danificarão por causa de uma tensão excessiva em seus terminais e, quando isso acontecer, nosso modelo linear deixará de ser válido. A resposta à rampa é de interesse em aplicações práticas nas quais o sinal aplicado aumenta até um valor máximo dentro de um intervalo de tempo finito. Se o tempo para atingir esse valor máximo for longo em comparação com as constantes de tempo do circuito, a solução para a rampa de duração infinita é válida para esse intervalo de tempo finito.

Façamos duas observações adicionais referentes à Equação 13.96. Em primeiro lugar, vamos examinar a resposta do circuito a um sinal retardado. Se a entrada estiver a segundos retardada,

$$\mathcal{L}\{x(t - a)u(t - a)\} = e^{-as}X(s),$$

e, pela Equação 13.96, a resposta torna-se

$$Y(s) = H(s)X(s)e^{-as}. \tag{13.97}$$

Se $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)X(s)\}$, então, pela Equação 13.97,

$$y(t - a)u(t - a) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)X(s)e^{-as}\}. \tag{13.98}$$

Portanto, atrasar a entrada de a segundos simplesmente atrasa a função resposta de a segundos. Um circuito que exiba essa característica é denominado *invariante no tempo*.

Em segundo lugar, se uma fonte de impulso unitário alimentar o circuito, a resposta do circuito será igual à transformada inversa da função de transferência. Assim, se

$$x(t) = \delta(t), \text{ então } X(s) = 1$$

e

$$Y(s) = H(s) \tag{13.99}$$

Daí, pela Equação 13.99,

$$y(t) = h(t) \tag{13.100}$$

na qual a transformada inversa da função de transferência é igual à resposta do circuito ao impulso unitário. Observe que essa é também a resposta natural do circuito, pois a aplicação

de uma fonte impulsiva é equivalente a armazenar instantaneamente energia no circuito (veja a Seção 13.8). O fornecimento subseqüente dessa energia armazenada dá origem à resposta natural (veja o Problema 13.86).

Na verdade, a resposta ao impulso unitário, $h(t)$, contém informação suficiente para se calcular a resposta para qualquer fonte que alimente o circuito. A integral de convolução é usada para calcular a resposta de um circuito a uma fonte arbitrária, como demonstraremos na próxima seção.

13.6 Função de transferência e integral de convolução

A integral de convolução relaciona a saída $y(t)$ de um circuito linear invariante no tempo com a sua entrada $x(t)$ e a resposta $h(t)$ do circuito ao impulso. A relação integral pode ser expressa de dois modos:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)x(t-\lambda)\,d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\lambda)x(\lambda)\,d\lambda. \tag{13.101}$$

Estamos interessados na integral de convolução por diversas razões. Primeiro, ela nos permite trabalhar inteiramente no domínio do tempo e isso pode ser benéfico em situações em que $x(t)$ e $h(t)$ são conhecidas apenas por meio de dados experimentais. Nesses casos, o método da transformada pode ser inconveniente ou até impossível, porque exigiria que calculássemos a transformada de Laplace de dados experimentais. Segundo, a integral de convolução introduz na análise de circuitos os conceitos de memória e a função de peso. Mostraremos que o conceito de memória nos permite examinar a resposta ao impulso (ou função de peso) $h(t)$ e prever, até certo ponto, quanto a forma de onda da saída reproduzirá a forma de onda da entrada. Por fim, a integral de convolução proporciona um procedimento formal para determinar a transformada inversa de produtos de transformadas de Laplace.

Baseamos nossa dedução da Equação 13.101 na premissa de que o circuito seja linear e invariante no tempo. Como o circuito é linear, o princípio da superposição é válido e, como ele é invariante no tempo, o retardo da saída é igual ao retardo da entrada. Agora, considere a Figura 13.34, em que o bloco que contém $h(t)$ representa qualquer circuito linear invariante no tempo cuja resposta ao impulso é conhecida, $x(t)$ representa o sinal de entrada, e $y(t)$ representa o sinal de saída desejado.

Admitimos que $x(t)$ seja um sinal de alimentação genérico mostrado na Figura 13.35(a). Por conveniência, admitimos também que $x(t) = 0$ para $t < 0^-$. Logo que for examinada a dedução da integral de convolução para sinais nulos para $t < 0^-$, ficará clara a possibilidade da extensão da integral para incluir sinais de entrada que não obedeçam a essa restrição. Observe também que permitimos uma descontinuidade em $x(t)$ na origem, isto é, um degrau entre 0^- e 0^+.

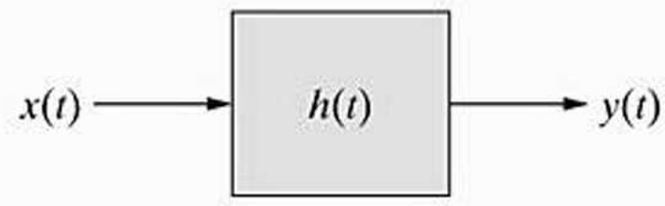


Figura 13.34 ▲ Diagrama de bloco de um circuito genérico.

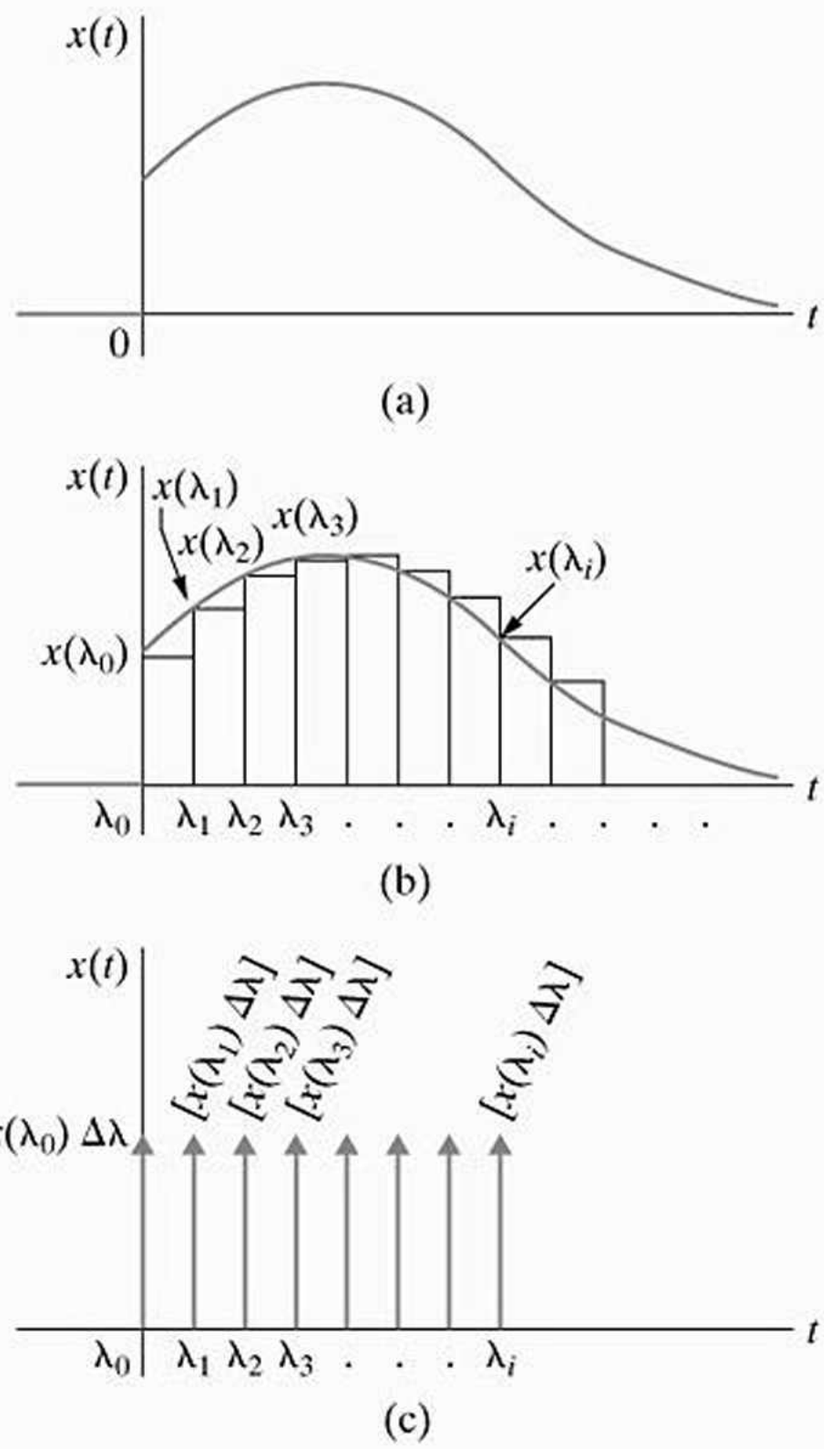


Figura 13.35 ▲ Sinal de alimentação $x(t)$. (a) Sinal de alimentação genérico. (b) Aproximação de $x(t)$ por uma série de pulsos. (c) Aproximação de $x(t)$ por uma série de impulsos.

Agora, aproximamos $x(t)$ por uma série de pulsos retangulares de largura uniforme $\Delta\lambda$, como mostra a Figura 13.35(b). Assim,

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t) + \ldots + x_i(t) + \ldots, \tag{13.102}$$

onde $x_i(t)$ é um pulso retangular que é igual a $x(\lambda_i)$ entre λ_i e λ_{i+1} e é zero em todos os outros lugares. Observe que o pulso de ordem i pode ser expresso em termos de funções degrau; isto é,

$$x_i(t) = x(\lambda_i)\{u(t-\lambda_i) - u[t-(\lambda_i+\Delta\lambda)]\}.$$

A próxima etapa na aproximação de $x(t)$ é fazer $\Delta\lambda$ pequeno o suficiente para que o componente de ordem i possa ser aproximado por uma função impulso de intensidade $x(\lambda_i)\Delta\lambda$. A Figura 13.35(c) mostra a representação do impulso, sendo que a intensidade de cada impulso é mostrada entre colchetes, ao lado de cada seta. A representação de $x(t)$ por uma série de impulsos é

$$x(t) = x(\lambda_0)\Delta\lambda\delta(t-\lambda_0) + x(\lambda_1)\Delta\lambda\delta(t-\lambda_1) + \cdots + x(\lambda_i)\Delta\lambda\delta(t-\lambda_i) + \cdots \tag{13.103}$$

Agora, quando $x(t)$ é representada por uma série de funções impulso (que ocorrem a intervalos de tempo igualmente espaçados, isto é, a $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$), a função resposta $y(t)$ consiste na soma de uma série de respostas ao impulso uniformemente retardadas. A intensidade de cada resposta depende da intensidade do impulso que alimenta o circuito. Por exemplo, vamos admitir que a resposta ao impulso unitário do circuito contido na caixa da Figura 13.34 seja a função exponencial decrescente da Figura 13.36(a). Então, a aproximação de $y(t)$ é a soma das respostas ao impulso mostrada na Figura 13.36(b).

Analiticamente, a expressão para $y(t)$ é

$$\begin{aligned} y(t) = {} & x(\lambda_0)\Delta\lambda h(t-\lambda_0) + x(\lambda_1)\Delta\lambda h(t-\lambda_1) \\ & + x(\lambda_2)\Delta\lambda h(t-\lambda_2) + \cdots \\ & + x(\lambda_i)\Delta\lambda h(t-\lambda_i) + \cdots \end{aligned} \tag{13.104}$$

À medida que $\Delta\lambda \to 0$, o somatório na Equação 13.104 aproxima-se de uma integração contínua, ou

$$\sum_{i=0}^{\infty} x(\lambda_i)h(t-\lambda_i)\Delta\lambda \to \int_0^{\infty} x(\lambda)h(t-\lambda)\,d\lambda. \tag{13.105}$$

Portanto,

$$y(t) = \int_0^{\infty} x(\lambda)h(t-\lambda)\,d\lambda. \tag{13.106}$$

Se $x(t)$ existir durante todo o tempo, então o limite inferior na Equação 13.106 se tornará $-\infty$; desse modo, em geral,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t-\lambda)\,d\lambda, \tag{13.107}$$

que é a segunda forma da integral de convolução dada na Equação 13.101. Deduzimos a primeira forma da integral pela Equação 13.107, fazendo uma mudança de variável de integração. Fazemos $u = t - \lambda$, e, então, observamos que $du = -d\lambda$, $u = -\infty$ quando $\lambda = \infty$, e $u = +\infty$ quando $\lambda = -\infty$. Agora, podemos escrever a Equação 13.107 como

$$y(t) = \int_{\infty}^{-\infty} x(t-u)h(u)(-du),$$

ou

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-u)h(u)(du). \tag{13.108}$$

Contudo, como u é apenas um símbolo de integração, a Equação 13.108 é equivalente à primeira forma da integral de convolução, Equação 13.101.

A relação integral entre $y(t)$, $h(t)$ e $x(t)$, expressa na Equação 13.101, freqüentemente é escrita em notação abreviada:

$$y(t) = h(t) * x(t) = x(t) * h(t), \tag{13.109}$$

em que o asterisco significa a convolução entre $h(t)$ e $x(t)$. Assim, $h(t) * x(t)$ é lida como "convolução de $h(t)$com $x(t)$" e implica que

$$h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)x(t-\lambda)\,d\lambda,$$

ao passo que $x(t) * h(t)$é lida como "convolução de $x(t)$ com $h(t)$" e implica que

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t-\lambda)\,d\lambda.$$

As integrais da Equação 13.101 expressam a relação mais geral de convolução de duas funções. Todavia, em nossas aplicações da integral de convolução, podemos mudar o limite inferior para zero e o limite superior para t. Então, podemos escrever a Equação 13.101 como

$$y(t) = \int_0^t h(\lambda)x(t-\lambda)\,d\lambda = \int_0^t x(\lambda)h(t-\lambda)\,d\lambda. \tag{13.110}$$

Alteramos os limites por duas razões. A primeira é que, para circuitos realizáveis fisicamente, $h(t)$ é zero para $t < 0$. Em outras palavras, não pode haver nenhuma resposta ao impulso antes da aplicação de um impulso. A segunda é que começamos a medir o tempo no instante em que o sinal $x(t)$ é aplicado; assim, $x(t) = 0$ para $t < 0^-$.

Uma interpretação gráfica das integrais de convolução contidas na Equação 13.110 é importante na utilização da integral como uma ferramenta de cálculo. Começamos com a primeira integral. Admitamos, por exemplo, que a resposta ao impulso de nosso circuito seja a função exponencial decrescente mostrada na Figura 13.37(a) e que o sinal aplicado tenha a forma de onda mostrada na Figura 13.37(b). Em cada uma dessas representações gráficas, substituímos t por λ, uma variável de integração. Substituir λ por $-\lambda$ simplesmente reflete o sinal aplicado no eixo vertical e substituir $-\lambda$ por $t - \lambda$ faz a função refletida deslocar-se para a direita. Veja as figuras 13.37(c) e (d). Essa operação de refletir deu origem ao termo *convolução.* Em qualquer valor especificado de t, a função resposta $y(t)$ é a área sob a função produto $h(\lambda)x(t-\lambda)$, como mostra a Figura 13.37(e). Essa representação gráfica deve tornar evidente a razão por que o limite inferior da integral de convolução é zero e o limite superior é t. Para $\lambda < 0$, o produto $h(\lambda)x(t-\lambda)$ é zero porque $h(\lambda)$ é zero. Para $\lambda > t$, o produto $h(\lambda)x(t-\lambda)$ é zero porque $x(t-\lambda)$ é zero.

A Figura 13.38 mostra a segunda forma da integral de convolução. Observe que a função produto na Figura 13.38(e) confirma a utilização de zero para o limite inferior e t para o limite superior.

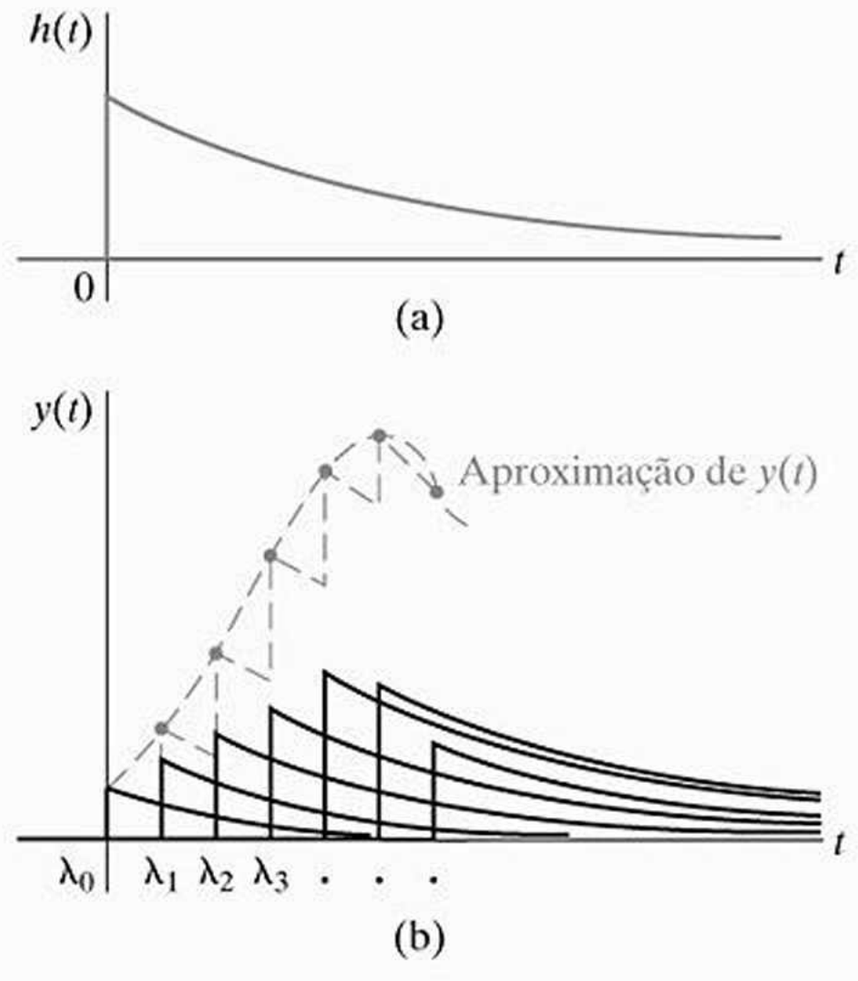


Figura 13.36 ▲ Aproximação de $y(t)$. (a) Resposta ao impulso do circuito da Figura 13.34. (b) Soma das respostas ao impulso.

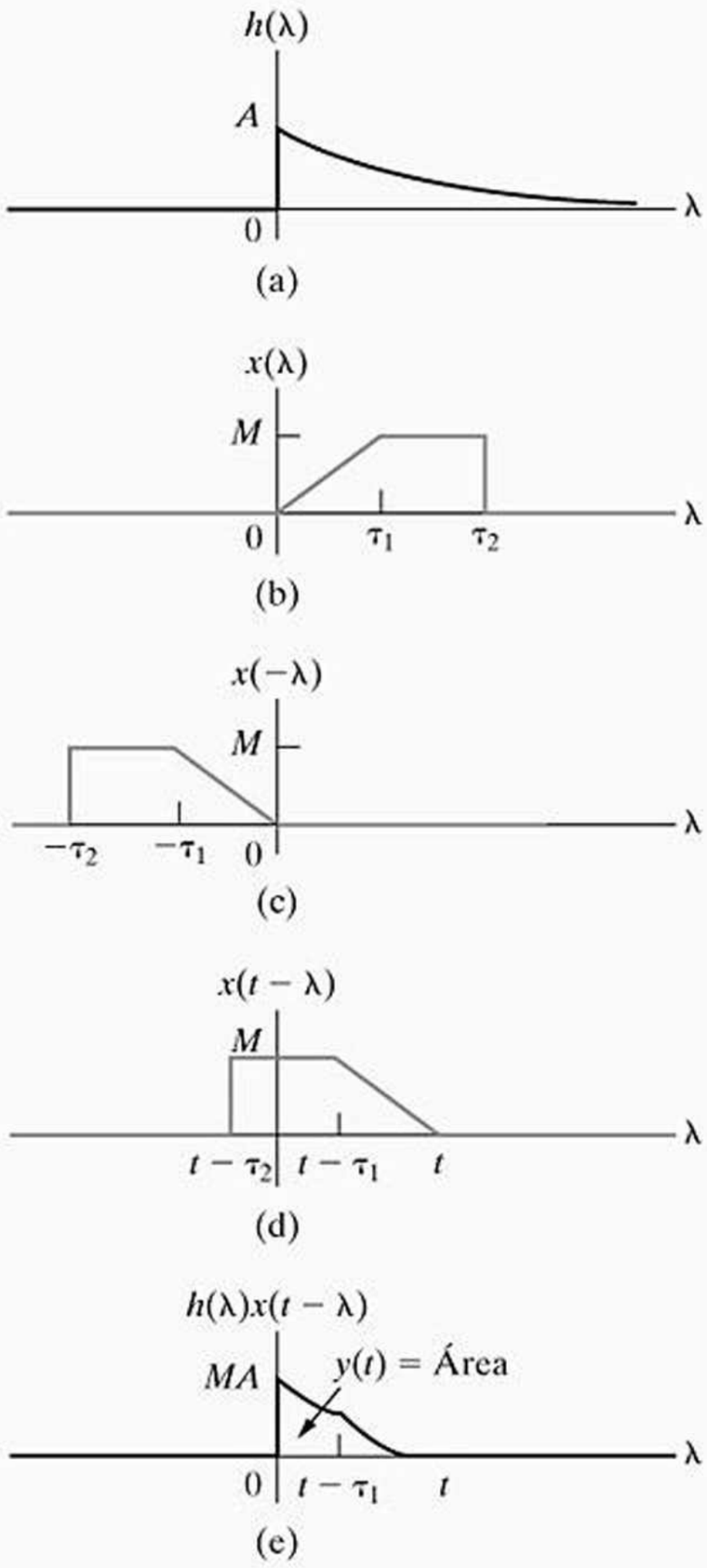


Figura 13.37 ▲ Interpretação gráfica da integral de convolução $\int_0^t h(\lambda)x(t-\lambda)\,d\lambda$. (a) Resposta ao impulso. (b) Sinal de entrada. (c) Sinal de entrada refletido. (d) Sinal de entrada refletido e deslocado de t unidades. (e) O produto $h(\lambda)x(t-\lambda)$.

O Exemplo 13.3 ilustra como usar a integral de convolução em conjunto com uma resposta ao impulso unitário para determinar a resposta de um circuito.

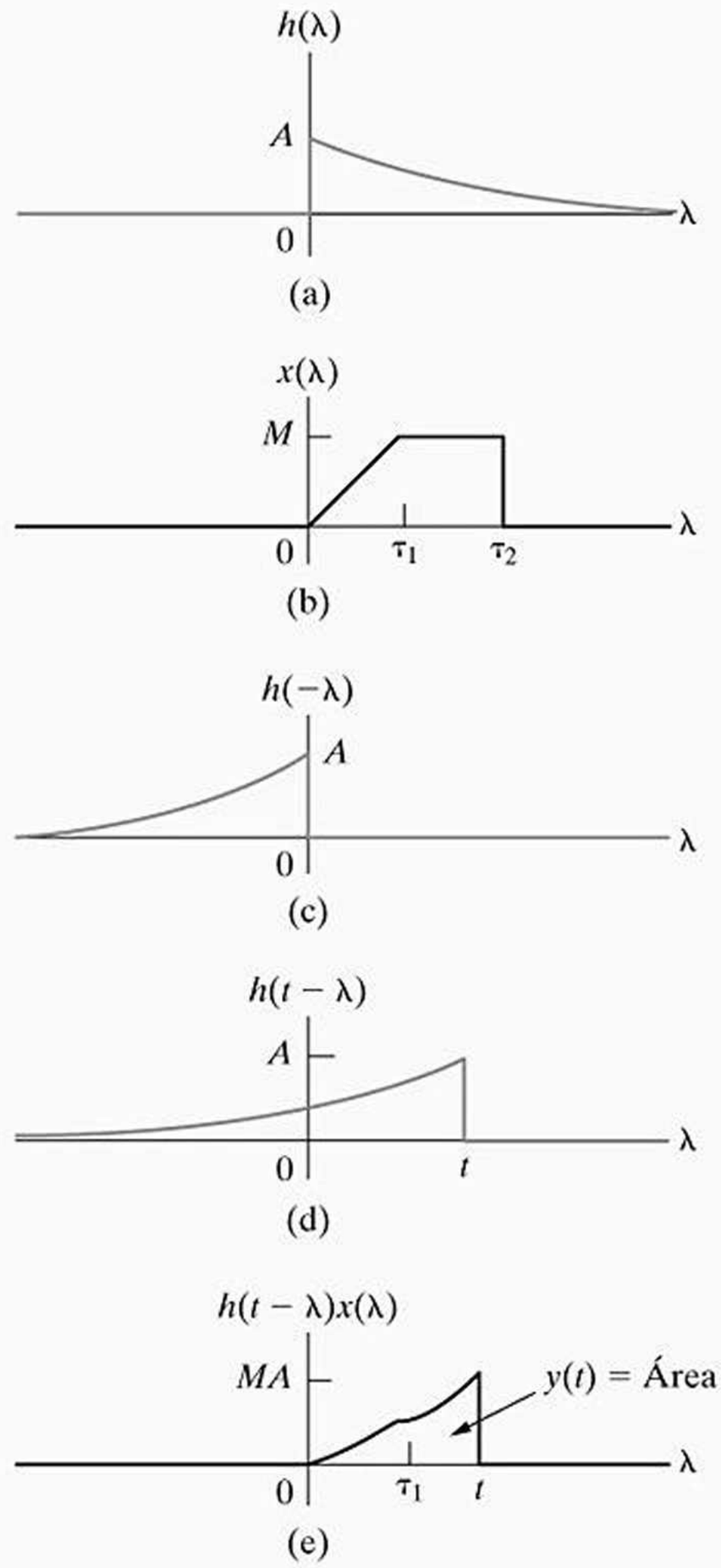


Figura 13.38 ▲ Interpretação gráfica da integral de convolução $\int_0^t h(t-\lambda)x(\lambda)\,d\lambda$. (a) Resposta ao impulso. (b) Sinal de entrada. (c) Resposta ao impulso refletida. (d) Resposta ao impulso refletida e deslocada de t unidades. (e) O produto $h(t-\lambda)x(\lambda)$.

Exemplo 13.3 Utilização da integral de convolução para determinar um sinal de saída

A tensão de alimentação v_i do circuito da Figura 13.39(a) é mostrada na Figura 13.39(b).

a) Use a integral de convolução para determinar v_o.

b) Faça um gráfico de v_o na faixa $0 \leq t \leq 15$ s.

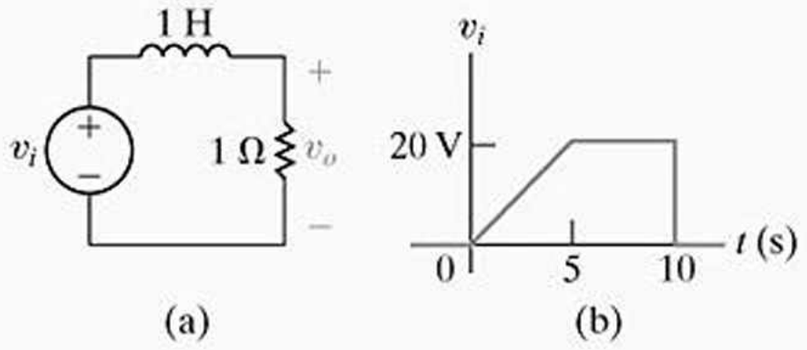


Figura 13.39▲ Circuito e tensão de alimentação para o Exemplo 13.3. (a) Circuito. (b) Tensão de alimentação.

Solução

a) A primeira etapa na utilização da integral de convolução é determinar a resposta ao impulso unitário do circuito. Obtemos a expressão para V_o pelo equivalente do circuito no domínio da freqüência na Figura 13.39(a):

$$V_o = \frac{V_i}{s+1}(1).$$

Quando v_i é um impulso unitário $\delta(t)$,

$$v_o = h(t) = e^{-t}u(t),$$

em que

$$h(\lambda) = e^{-\lambda}u(\lambda).$$

Usando a primeira forma da integral de convolução da Equação 13.110, construímos os gráficos da resposta ao impulso e da função alimentação refletida da Figura 13.40, que são úteis para selecionar os limites da integral de convolução. Para deslocar o sinal de entrada refletido para a direita, dividimos o intervalo de integração em três partes: $0 \leq t \leq 5$; $5 \leq t \leq 10$ e $10 \leq t \leq \infty$. As mudanças de inclinação na função de excitação em 0, 5 e 10 s impõem a divisão do intervalo de integração. A Figura 13.41 mostra a forma da função de excitação refletida para cada um desses intervalos. A expressão analítica para v_i no intervalo $0 \leq t \leq 5$ é

$$v_i = 4t, \qquad 0 \leq t \leq 5 \text{ s.}$$

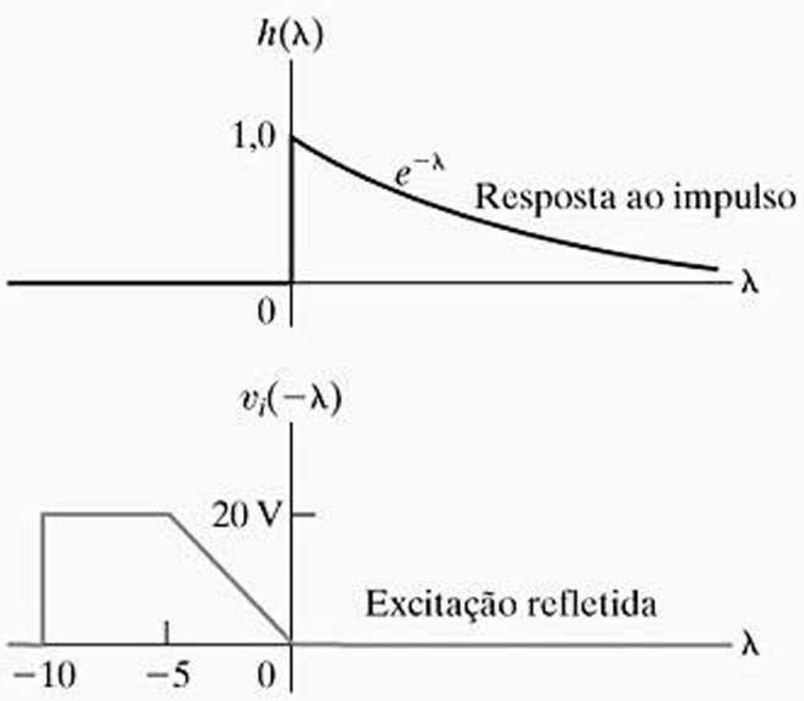


Figura 13.40 ▲ Resposta ao impulso e a excitação refletida para o Exemplo 13.3.

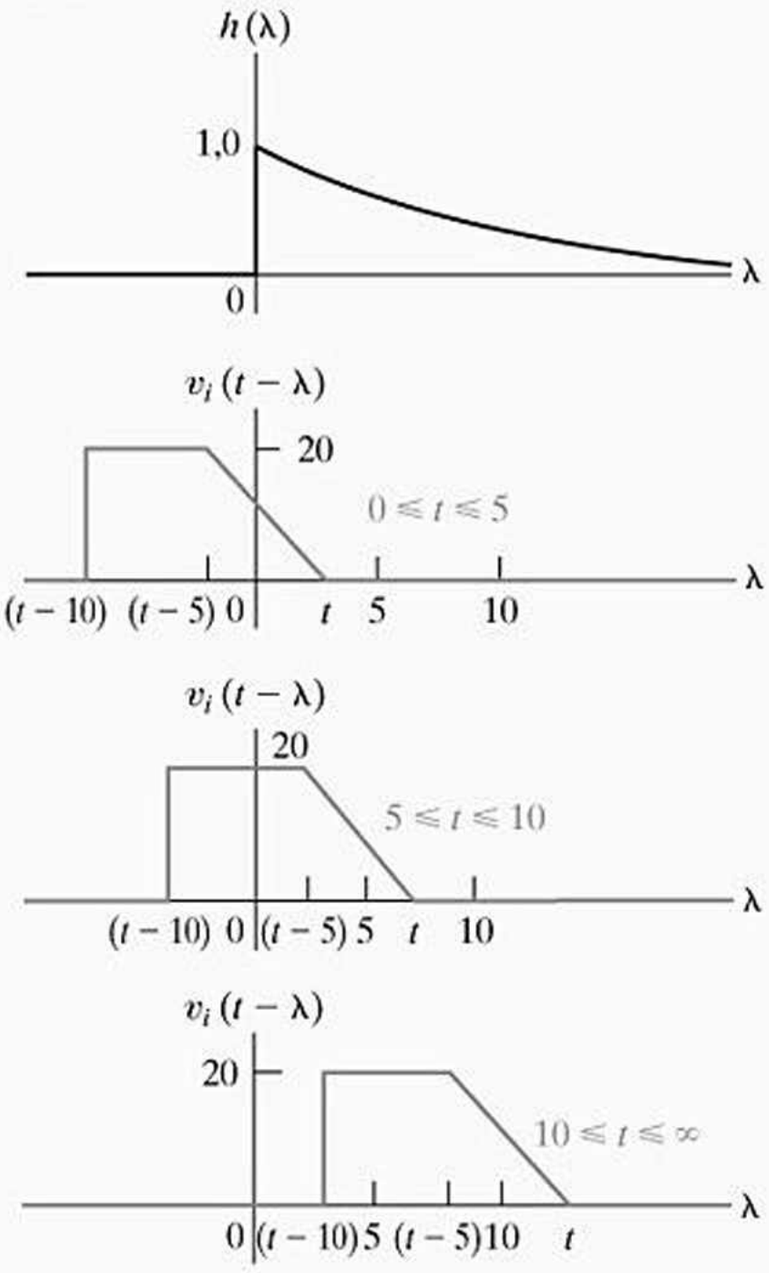


Figura 13.41 ▲ Deslocamento de $v_i(t - \lambda)$ para três intervalos de tempo diferentes.

Assim, a expressão analítica para a entrada refletida no intervalo $t - 5 \leq \lambda \leq t$ é

$$v_i(t - \lambda) = 4(t - \lambda), \; t - 5 \leq \lambda \leq t.$$

Agora, podemos estabelecer as três expressões da integral para v_o. Para $0 \leq t \leq 5$ s:

$$v_o = \int_0^t 4(t - \lambda)e^{-\lambda} d\lambda$$

$$= 4(e^{-t} + t - 1) \text{ V.}$$

Para $5 \leq t \leq 10$ s,

$$v_o = \int_0^{t-5} 20e^{-\lambda} d\lambda + \int_{t-5}^t 4(t - \lambda)e^{-\lambda} d\lambda$$

$$= 4(5 + e^{-t} - e^{-(t-5)}) \text{ V.}$$

e para $10 \leq t \leq \infty$ s,

$$v_o = \int_{t-10}^{t-5} 20e^{-\lambda} d\lambda + \int_{t-5}^t 4(t - \lambda)e^{-\lambda} d\lambda$$

$$= 4(e^{-t} - e^{-(t-5)} + 5e^{-(t-10)}) \text{ V.}$$

b) Calculamos v_o para intervalos de tempo de 1 s usando a equação adequada. Os resultados são apresentados na Tabela 13.2 e representados em gráfico na Figura 13.42.

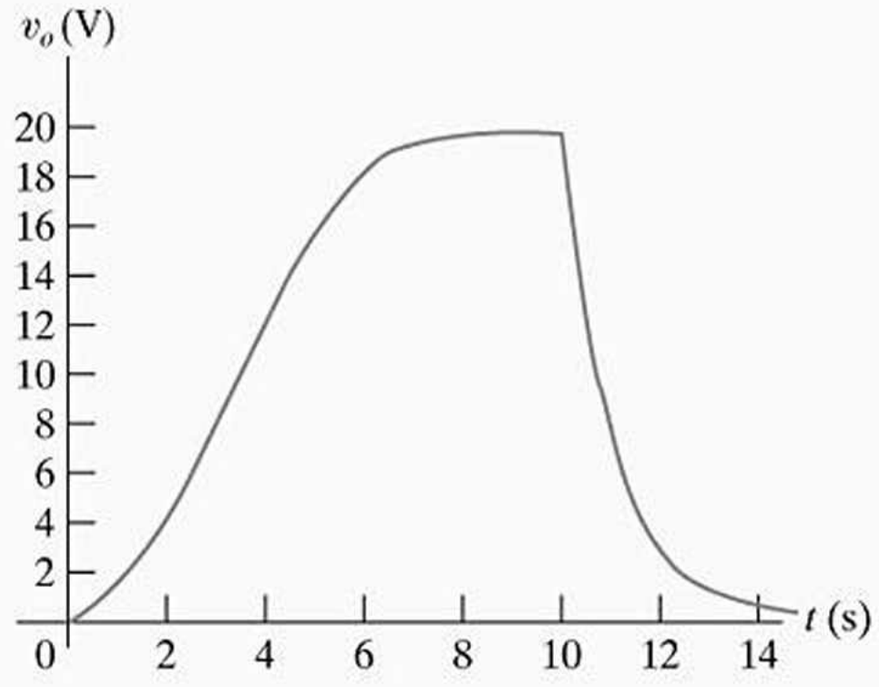


Figura 13.42 ▲ Resposta de tensão em função do tempo para o Exemplo 13.3.

TABELA 13.2 Valores numéricos de $v_o(t)$

t	v_o	t	v_o
1	1,47	9	19,93
2	4,54	10	19,97
3	8,20	11	7,35
4	12,07	12	2,70
5	16,03	13	0,99
6	18,54	14	0,37
7	19,56	15	0,13
8	19,80		

NOTA: Avalie o que entendeu da convolução tentando resolver os problemas 13.57 e 13.58, apresentados no final deste capítulo.

Os conceitos de memória e a função de peso

No início desta seção, mencionamos que a integral de convolução envolve os conceitos de memória e a função de peso na análise de circuitos. A interpretação gráfica da integral de convolução é o modo mais fácil de começar a entender esses conceitos. Podemos observar a reflexão e o deslocamento do sinal de entrada em uma escala temporal caracterizada como passado, presente e futuro. O eixo vertical, no qual o sinal de entrada $x(t)$ é refletido, representa o valor presente; valores passados de $x(t)$ encontram-se à direita do eixo vertical e valores futuros ficam à esquerda. A Figura 13.43 ilustra essa abordagem. Como exemplo, usamos o sinal de entrada do Exemplo 13.3.

Quando combinamos as visões do passado, presente e futuro de $x(t-\tau)$ com a resposta a um impulso do circuito, vemos que esta atribui peso a $x(t)$ de acordo com valores presentes e passados. Por exemplo, a Figura 13.41 mostra que a resposta a um impulso no Exemplo 13.3 atribui peso menor a valores passados de $x(t)$ do que ao valor presente. Em outras palavras, o circuito retém cada vez menos informação sobre os valores passados da entrada. Assim, na Figura 13.42, v_o aproxima-se rapidamente de zero quando o valor presente da entrada é zero (isto é, quando $t > 10$ s). Ou seja, como o valor presente da entrada recebe mais peso do que os valores passados, a saída aproxima-se rapidamente do valor presente da entrada.

A multiplicação de $x(t-\lambda)$ por $h(\lambda)$ é a razão pela qual chamamos a resposta a um impulso de *função de peso* do circuito. Por sua vez, a função de peso determina a memória do circuito. *Memória* é a proporção em que a resposta do circuito retém os valores passados de sua entrada. Por exemplo, se a resposta a um impulso, ou função de peso, for uniforme, como mostrado na Figura 13.44(a), ela atribui peso igual a todos os valores de $x(t)$, passados e presentes. Tal circuito tem uma memória perfeita. Todavia, se a resposta a um impulso for uma função impulso, como mostra a Figura 13.44(b), ela não atribui nenhum peso aos valores passados de $x(t)$. Tal circuito não tem memória. Assim, quanto mais memória um circuito tiver, mais distorção haverá entre a forma de onda do sinal de entrada e a forma de onda do sinal de saída. Podemos mostrar essa relação, admitindo que o circuito não tenha memória, isto é, $h(t) = A\delta(t)$, e, então, observando pela integral de convolução que

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t h(\lambda)x(t-\lambda)\,d\lambda \\ &= \int_0^t A\,\delta(\lambda)x(t-\lambda)\,d\lambda \\ &= Ax(t). \end{aligned} \tag{13.111}$$

A Equação 13.111 mostra que, se o circuito não tiver nenhuma memória, a saída será a entrada multiplicada por um fator de escala.

O circuito mostrado no Exemplo 13.3 ilustra a distorção entre entrada e saída para um circuito que tem alguma memória. Essa distorção é clara quando traçamos as formas de onda de entrada e saída no mesmo gráfico, como na Figura 13.45.

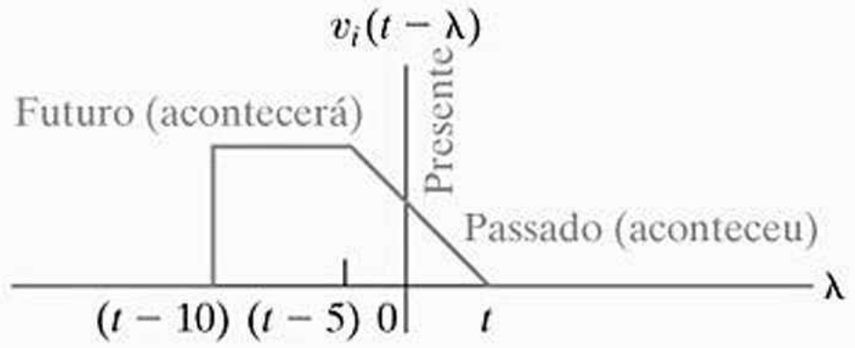


Figura 13.43 ▲ Valores passado, presente e futuro do sinal de entrada.

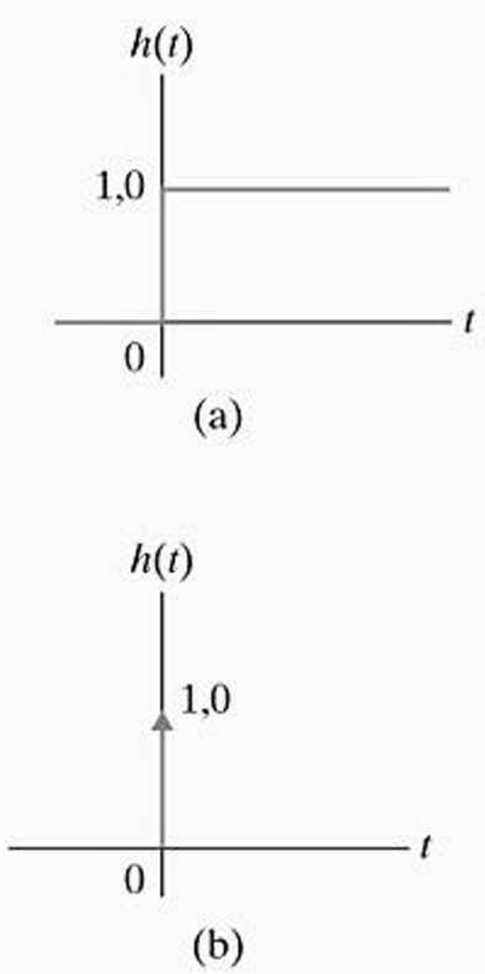


Figura 13.44 ▲ Funções de peso. (a) Memória perfeita. (b) Nenhuma memória.

13.7 Função de transferência e resposta de regime permanente senoidal

Uma vez calculada a função de transferência de um circuito, não precisamos mais realizar uma análise fasorial em separado do circuito para determinar sua resposta de regime permanente. Em vez disso, usamos a função de transferência

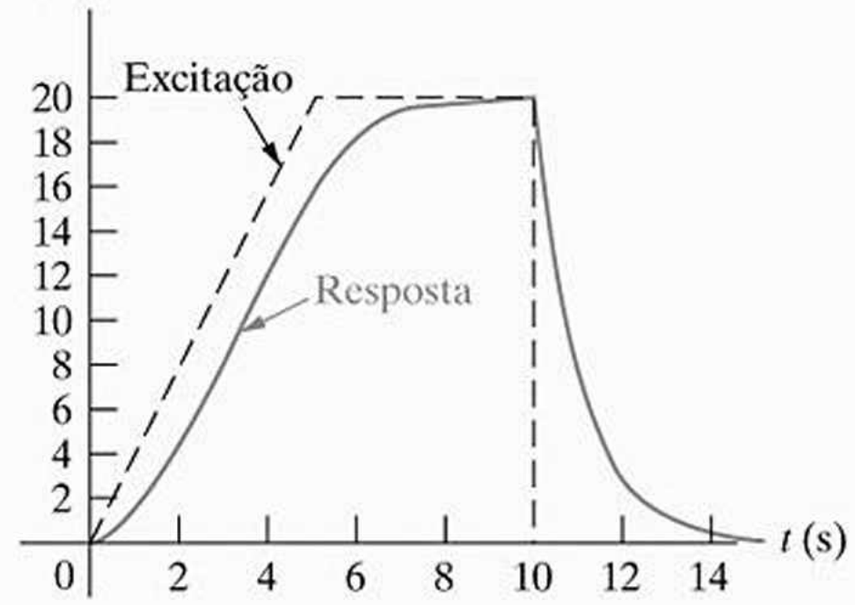


Figura 13.45 ▲ Formas de onda de entrada e saída para o Exemplo 13.3.

para relacionar a resposta de regime permanente com a entrada senoidal. Em primeiro lugar, admitimos que

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi), \tag{13.112}$$

e, então, usamos a Equação 13.96 para determinar a solução de regime permanente. Para determinar a transformada de Laplace de $x(t)$, primeiro escrevemos $x(t)$ como

$$x(t) = A\cos\omega t\cos\phi - A\,\text{sen}\,\omega t\,\text{sen}\,\phi \tag{13.113}$$

da qual temos

$$X(s) = \frac{(A\cos\phi)s}{s^2+\omega^2} - \frac{(A\,\text{sen}\phi)\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$= \frac{A(s\cos\phi - \omega\,\text{sen}\phi)}{s^2+\omega^2}. \tag{13.114}$$

Substituindo a Equação 13.114 na Equação 13.96, obtemos a expressão para a resposta no domínio da freqüência:

$$Y(s) = H(s)\frac{A(s\cos\phi - \omega\,\text{sen}\phi)}{s^2+\omega^2}. \tag{13.115}$$

Agora, analisamos a expansão da Equação 13.115 por frações parciais. O número de termos da expansão depende do número de pólos de $H(s)$. Como $H(s)$ não é especificada, além do fato de ser a função de transferência de um circuito fisicamente realizável, a expansão da Equação 13.115 é

$$Y(s) = \frac{K_1}{s-j\omega} + \frac{K_1^*}{s+j\omega}$$

$$+ \sum \text{dos termos gerados pelos pólos de H}(s) \tag{13.116}$$

Na Equação 13.116, os dois primeiros termos resultam dos pólos conjugados complexos do sinal de entrada; isto é, $s^2+\omega^2 = (s-j\omega)(s+j\omega)$. Contudo, os termos gerados pelos pólos de $H(s)$ não contribuem para a resposta de regime permanente, que é um componente do sinal de saída $y(t)$ porque todos esses pólos encontram-se na metade esquerda do plano s; dessa forma, os termos correspondentes no domínio do tempo aproximam-se de zero à medida que t aumenta. Assim, os dois primeiros termos do lado direito da Equação 13.116 determinam a resposta de regime permanente. O problema é reduzido à determinação do coeficiente K_1 da fração parcial:

$$K_1 = \left.\frac{H(s)A(s\cos\phi - \omega\,\text{sen}\,\phi)}{s+j\omega}\right|_{s=j\omega}$$

$$= \frac{H(j\omega)A(j\omega\cos\phi - \omega\,\text{sen}\,\phi)}{2j\omega}$$

$$= \frac{H(j\omega)A(\cos\phi + j\,\text{sen}\,\phi)}{2} = \frac{1}{2}H(j\omega)Ae^{j\phi}. \tag{13.117}$$

Em geral, $H(j\omega)$ é uma quantidade complexa, o que reconhecemos escrevendo-a em forma polar; assim,

$$H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\theta(\omega)} \tag{13.118}$$

Observe pelo Equação 13.118 que ambos, o módulo, $|H(j\omega)|$, e ângulo de fase, $\theta(\omega)$, da função de transferência variam com a freqüência ω. Quando substituímos a Equação 13.118 na Equação 13.117, a expressão para K_1 torna-se

$$K_1 = \frac{A}{2}|H(j\omega)|e^{j[\theta(\omega)+\phi]}. \tag{13.119}$$

Obtemos o componente de $y(t)$ referente à solução de regime permanente executando a transformada inversa da Equação 13.116 e, no processo, ignorando os termos gerados pelos pólos de $H(s)$. Assim,

$$y_{rp}(t) = A|H(j\omega)|\cos[\omega t + \phi + \theta(\omega)] \tag{13.120}$$

(Resposta de regime permanente senoidal calculada a partir da função de transferência)

expressão que indica como usar a função de transferência para determinar a resposta de regime permanente senoidal de um circuito. A amplitude da resposta é igual à amplitude da fonte, A, vezes o módulo da função de transferência, $|H(j\omega)|$. O ângulo de fase da resposta, $\phi + \theta(\omega)$, é igual ao ângulo de fase da fonte, ϕ, mais o ângulo de fase da função de transferência, $\theta(\omega)$. Avaliamos ambos, $|H(j\omega)|$ e $\theta(\omega)$, na freqüência da fonte, ω.

O Exemplo 13.4 ilustra como usar a função de transferência para determinar a resposta de regime permanente senoidal de um circuito.

Exemplo 13.4 Utilização da função de transferência para determinar a resposta de regime permanente senoidal

O circuito do Exemplo 13.1 é mostrado na Figura 13.46. A fonte de tensão senoidal é 120 cos (5.000t + 30°) V. Determine a expressão do regime permanente para v_o.

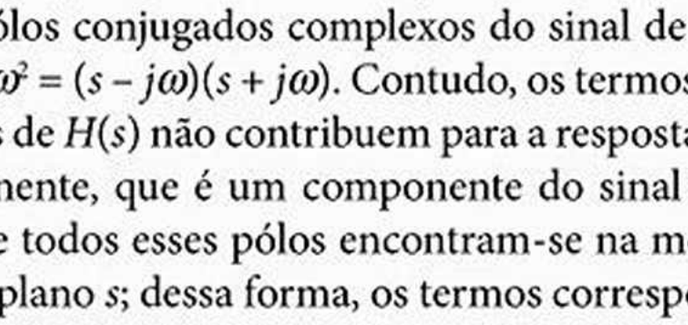


Figura 13.46 ▲ Circuito para o Exemplo 13.4.

Solução

Pelo Exemplo 13.1,

$$H(s) = \frac{1.000(s+5.000)}{s^2+6.000s+25*10^6}.$$

A freqüência da fonte de tensão é 5.000 rad/s; então, fazemos $s = j5.000$:

$$H(j5000) = \frac{1.000(5.000+j5.000)}{-25*10^6 + j5.000(6.000) + 25\times10^6}$$

$$= \frac{1 + j1}{j6} = \frac{1 - j1}{6} = \frac{\sqrt{2}}{6}\angle -45°.$$

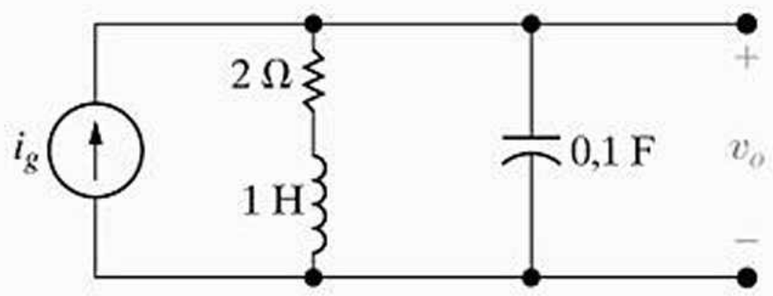
Então, pela Equação 13.120,

$$v_{o_{rp}} = \frac{(120)\sqrt{2}}{6}\cos(5.000t + 30° - 45°)$$
$$= 20\sqrt{2}\cos(5.000t - 15°)\ \text{V}.$$

✔ PROBLEMAS PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 4 — Saber como usar a função de transferência de um circuito para calcular sua resposta ao impulso, sua resposta ao degrau unitário e sua resposta de regime permanente senoidal

13.12 A fonte de corrente no circuito mostrado está fornecendo 10 cos 4*t* A. Use a função de transferência para calcular a expressão do regime permanente para v_o.

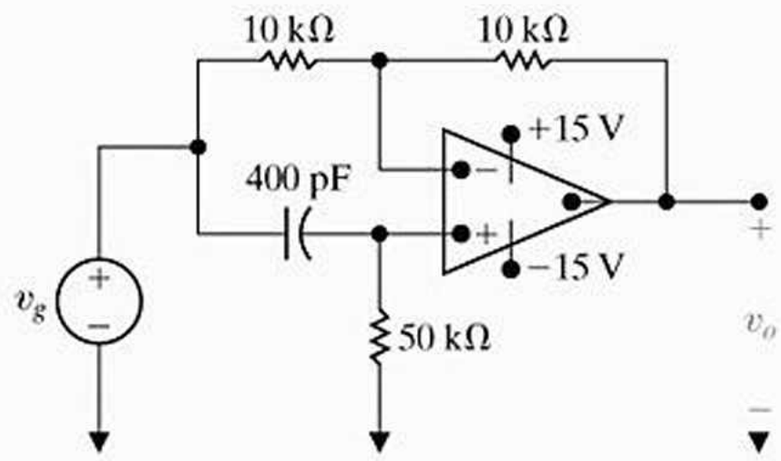


Resposta: 44,7 cos(4*t* – 63,43°) V.

13.13 a) Para o circuito mostrado, determine a expressão do regime permanente para v_o quando

$$v_g = 10\cos 50.000t\ \text{V}.$$

b) Substitua o resistor de 50 kΩ por um resistor variável e calcule o valor da resistência necessária para fazer com que v_o esteja 120° adiantado em relação a v_g.



Resposta: (a) 10 cos (50.000*t* + 90°) V;
(b) 28.867,51 Ω.

NOTA: Tente resolver também os problemas 13.74 e 13.75, apresentados no final deste capítulo.

Saber usar a função de transferência para calcular a resposta de regime permanente senoidal de um circuito é importante. Observe que, se conhecermos $H(j\omega)$, conheceremos também $H(s)$, pelo menos teoricamente. Em outras palavras, podemos inverter o processo; em vez de usarmos $H(s)$ para determinar $H(j\omega)$, usamos $H(j\omega)$ para determinar $H(s)$. Conhecida $H(s)$, podemos determinar a resposta para outras formas de onda das fontes de alimentação. Nessa aplicação, determinamos experimentalmente $H(j\omega)$ e, então, pelo resultado, construímos $H(s)$. Na prática, essa abordagem experimental nem sempre é possível; contudo, em alguns casos, realmente proporciona um método útil para determinar $H(s)$. Em teoria, a relação entre $H(s)$ e $H(j\omega)$ estabelece uma ligação entre o domínio do tempo e o domínio da freqüência. A função de transferência também é uma ferramenta muito útil em problemas referentes à resposta em freqüência dos circuitos, um conceito que apresentaremos no próximo capítulo.

13.8 Função impulso em análise de circuitos

Funções impulso ocorrem em análise de circuitos ou por causa de uma operação de chaveamento ou porque um circuito é alimentado por uma fonte impulsiva. A transformada de Laplace pode ser usada para calcular as correntes e tensões impulsivas criadas durante o chaveamento e a resposta de um circuito a uma fonte impulsiva. Começamos nossa discussão mostrando como criar uma função impulso com uma operação de chaveamento.

Operações de chaveamento

Usamos dois circuitos diferentes para ilustrar como uma função impulso pode ser criada com uma operação de chaveamento: um circuito capacitivo e um circuito indutivo.

Circuito capacitivo

No circuito mostrado na Figura 13.47, o capacitor C_1 está carregado com uma tensão inicial de V_0 no instante em que a chave é fechada. A carga inicial em C_2 é zero. O problema é determinar a expressão para $i(t)$ quando $R \rightarrow 0$. A Figura 13.48 mostra o circuito equivalente no domínio da freqüência.

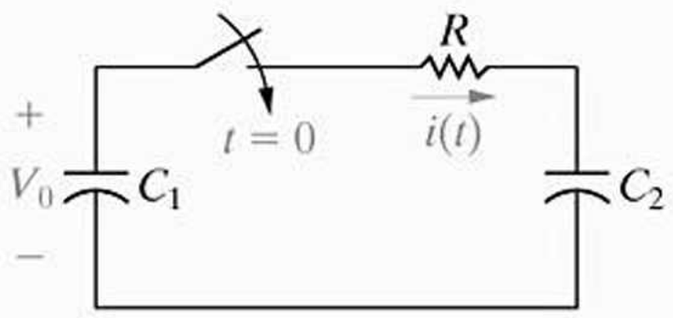


Figura 13.47 ▲ Circuito que mostra a criação de uma corrente impulsiva.

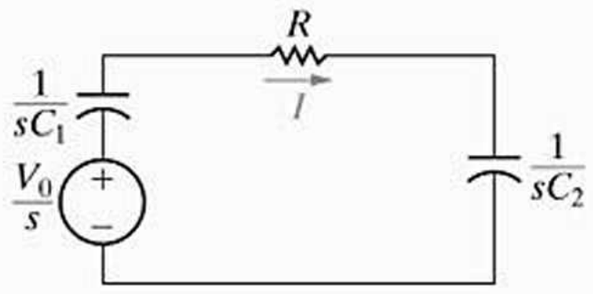


Figura 13.48 ◀ Circuito equivalente no domínio da freqüência para o circuito da Figura 13.47.

Pela Figura 13.48,

$$I = \frac{V_0/s}{R + (1/sC_1) + (1/sC_2)}$$

$$= \frac{V_0/R}{s + (1/RC_e)}, \tag{13.121}$$

em que a capacitância equivalente $C_1C_2/(C_1 + C_2)$ é substituída por C_e.

Tomando, por inspeção, a transformada inversa da Equação 13.121, obtemos

$$i = \left(\frac{V_0}{R}e^{-t/RC_e}\right)u(t), \tag{13.122}$$

que indica que, à medida que R decresce, a corrente inicial (V_0/R) cresce e a constante de tempo (RC_e) decresce. Assim, à medida que R fica menor, a corrente começa de um valor inicial maior e, então, cai mais rapidamente. A Figura 13.49 mostra essas características de i.

Aparentemente, i está aproximando-se de uma função impulso à medida que R tende a zero porque o valor inicial de i está aproximando-se de infinito e sua duração está aproximando-se de zero. Ainda temos de determinar se a área sob a função corrente é independente de R. Em termos físicos, a área total sob a curva de i em função de t representa a carga total transferida para C_2, depois que a chave fechou. Assim,

$$\text{Área} = q = \int_{0^-}^{\infty}\frac{V_0}{R}e^{-t/RC_e}dt = V_0C_e, \tag{13.123}$$

que mostra que a carga total transferida para C_2 é independente de R e é igual a V_0C_e coulombs. Desse modo, à medida que R aproxima-se de zero, a corrente aproxima-se de um impulso de intensidade V_0C_e, isto é,

$$i \rightarrow V_0C_e\delta(t). \tag{13.124}$$

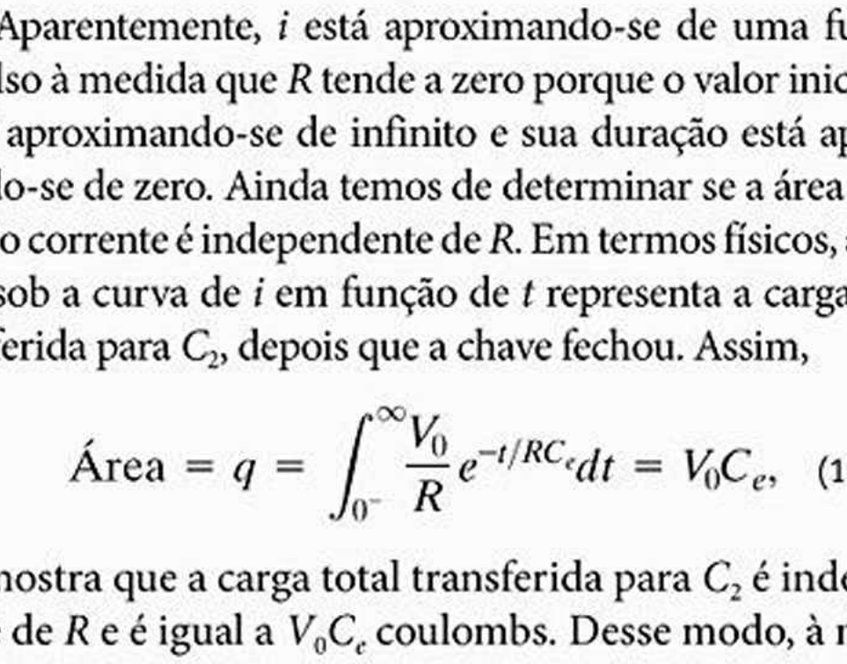


Figura 13.49 ▲ Gráfico de $i(t)$ em relação a t para dois valores diferentes de R.

A interpretação física da Equação 13.124 é que, quando $R = 0$, uma quantidade finita de carga é transferida a C_2 instantaneamente. Igualar R a zero no circuito apresentado na Figura 13.47 mostra como obtemos uma transferência instantânea de carga. Com $R = 0$, criamos uma contradição quando fechamos a chave; isto é, aplicamos uma tensão a um capacitor cuja tensão inicial é zero. O único modo de ocorrer uma mudança instantânea na tensão de um capacitor é ter uma transferência instantânea de carga. Quando a chave é fechada, a tensão em C_2 não salta para V_0, mas para seu valor final de

$$v_2 = \frac{C_1V_0}{C_1 + C_2}. \tag{13.125}$$

Deixamos para você a dedução da Equação 13.125 (veja o Problema 13.78, apresentado no final deste capítulo).

Se fizermos $R = 0$ logo de saída, a análise por meio da transformada de Laplace fornecerá uma resposta impulsiva de corrente. Assim,

$$I = \frac{V_0/s}{(1/sC_1) + (1/sC_2)} = \frac{C_1C_2V_0}{C_1 + C_2} = C_eV_0. \tag{13.126}$$

Ao escrevermos a Equação 13.126, usamos as tensões dos capacitores em $t = 0^-$. A transformada inversa de uma constante é a constante vezes a função impulso; dessa forma, pela Equação 13.126,

$$i = C_eV_0\delta(t). \tag{13.127}$$

A capacidade de a transformada de Laplace prever corretamente a ocorrência de uma resposta impulsiva é uma das razões pelas quais ela é amplamente usada para analisar o comportamento transitório de circuitos lineares com parâmetros concentrados invariantes no tempo.

Circuito indutivo

O circuito mostrado na Figura 13.50 ilustra uma segunda operação de chaveamento que produz uma resposta impulsiva. O problema é determinar a expressão no domínio do tempo para v_o após a abertura da chave. Observe que abrir a chave significa impor uma mudança instantânea na corrente de L_2, o que faz com que v_o contenha um componente impulsivo.

A Figura 13.51 mostra o equivalente no domínio da freqüência com a chave aberta. Ao chegarmos a esse circuito, consideramos que a corrente no indutor de 3 H em $t = 0^-$ seja 10 A e que a corrente no indutor de 2 H em $t = 0^-$ seja zero. Usar as condições iniciais em $t = 0^-$ é uma conseqüência direta de termos usado 0^- como o limite inferior na integral definidora da transformada de Laplace.

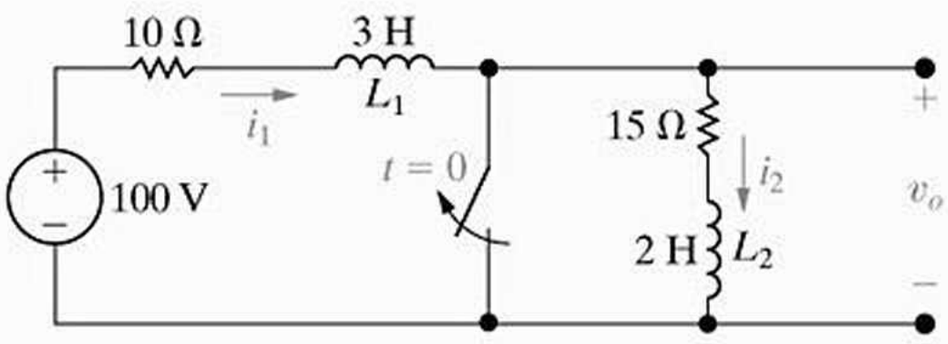


Figura 13.50 ▲ Circuito que mostra a criação de uma tensão impulsiva.

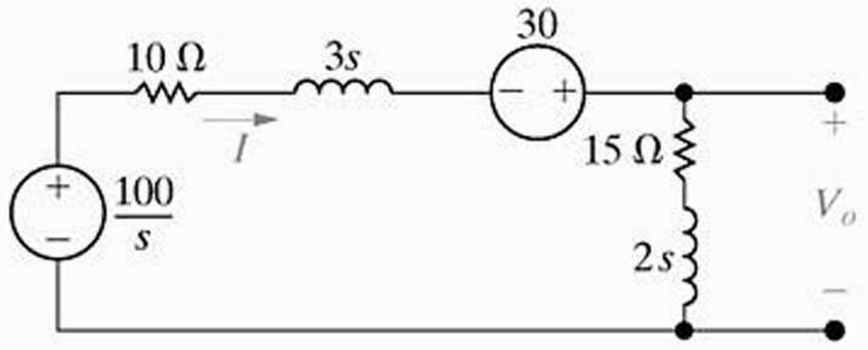


Figura 13.51 ▲ Circuito equivalente no domínio da freqüência para o circuito da Figura 13.50.

Deduzimos a expressão para V_o a partir de uma única equação de tensões de nó. Somando as correntes que saem do nó entre o resistor de 15 Ω e a fonte de 30 V obtemos

$$\frac{V_o}{2s + 15} + \frac{V_o - [(100/s) + 30]}{3s + 10} = 0. \quad (13.128)$$

Explicitando V_o, temos

$$V_o = \frac{40(s + 7{,}5)}{s(s + 5)} + \frac{12(s + 7{,}5)}{s + 5}. \quad (13.129)$$

Vemos que v_o conterá um termo impulsivo, pois o segundo termo do lado direito da Equação 13.129 é uma função racional imprópria. Podemos expressar essa importante fração como uma constante mais uma função racional, pela simples divisão do denominador pelo numerador; isto é,

$$\frac{12(s + 7{,}5)}{s + 5} = 12 + \frac{30}{s + 5}. \quad (13.130)$$

Combinando a Equação 13.130 com a expansão por frações parciais do primeiro termo do lado direito da Equação 13.129, temos

$$V_o = \frac{60}{s} - \frac{20}{s + 5} + 12 + \frac{30}{s + 5}$$

$$= 12 + \frac{60}{s} + \frac{10}{s + 5}, \quad (13.131)$$

do qual

$$v_o = 12\delta(t) + (60 + 10^{e-5t})u(t) \text{ V}. \quad (13.132)$$

Essa solução faz sentido? Antes de respondermos a essa pergunta, em primeiro lugar, vamos deduzir a expressão para a corrente quando $t > 0^-$. Após a abertura da chave, a corrente em L_1 é a mesma que em L_2. Se tomarmos como referência a corrente em sentido horário ao longo da malha, a expressão no domínio da freqüência será

$$I = \frac{(100/s) + 30}{5s + 25} = \frac{20}{s(s + 5)} + \frac{6}{s + 5}$$

$$= \frac{4}{s} - \frac{4}{s + 5} + \frac{6}{s + 5}$$

$$= \frac{4}{s} + \frac{2}{s + 5}. \quad (13.133)$$

A transformada inversa da Equação 13.133 é

$$i = (4 + 2e^{-5t})u(t) \text{ A}. \quad (13.134)$$

Antes da abertura da chave, a corrente em L_1 é 10 A e a corrente em L_2 é 0 A; pela Equação 13.134 sabemos que em $t = 0^+$, a corrente em L_1 e em L_2 é 6 A. Então, a corrente em L_1 passa instantaneamente de 10 para 6 A, enquanto a corrente em L_2 passa instantaneamente de 0 para 6 A. Partindo desse valor de 6 A, a corrente decresce exponencialmente até um valor final de 4 A. Esse valor final é facilmente verificado pelo circuito; isto é, ele deve ser igual a 100/25, ou 4 A. A Figura 13.52 mostra essas características de i_1 e i_2.

Como podemos verificar se essas variações instantâneas na corrente do indutor fazem sentido, em termos do comportamento físico do circuito? Primeiro, observamos que a operação de chaveamento coloca os dois indutores em série. Qualquer tensão impulsiva que apareça no indutor de 3 H deve estar compensada exatamente por uma tensão impulsiva no indutor de 2 H porque a soma de tensões impulsivas ao longo de um caminho fechado deve ser igual a zero. A lei de Faraday estabelece que a tensão induzida seja proporcional à variação do fluxo concatenado ($v = d\lambda/dt$). Portanto, a variação no fluxo concatenado deve ser nula. Em outras palavras, o fluxo concatenado total imediatamente após o chaveamento é o mesmo que antes do chaveamento. Para o circuito que consideramos aqui, fluxo concatenado antes do chaveamento é

$$\lambda = L_1 i_1 + L_2 i_2 = 3(10) + 2(0) = 30 \text{ Wb-espiras}. \quad (13.135)$$

Imediatamente após o chaveamento é

$$\lambda = (L_1 + L_2) i(0^+) = 5i(0^+). \quad (13.136)$$

Combinando as equações 13.135 e 13.136 obtemos

$$i(0^+) = 30/5 = 6 \text{ A}. \quad (13.137)$$

Assim, a solução para i (Equação 13.134) está de acordo com o princípio da conservação do fluxo.

Agora, testamos a validade da Equação 13.132. Em primeiro lugar, verificamos o termo impulsivo $12\delta(t)$. A variação instantânea de i_2 de 0 para 6 A em $t = 0$ dá origem a um impulso de intensidade $6\delta(t)$ na derivada de i_2. Esse impulso dá origem ao impulso $12\delta(t)$ na tensão do indutor de 2 H. Para $t > 0^+$, di_2/dt é $-10e^{-5t}$ A/s; assim, a tensão v_o é

$$v_o = 15(4 + 2e^{-5t}) + 2(-10e^{-5t})$$

$$= (60 + 10e^{-5t})u(t) \text{ V}. \quad (13.138)$$

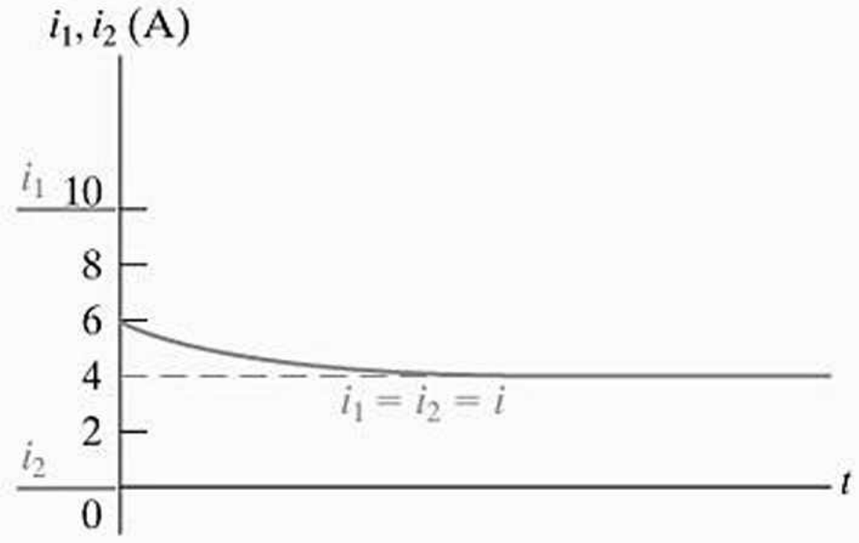


Figura 13.52 ▲ Correntes do indutor em função de t para o circuito da Figura 13.50.

A Equação 13.138 está de acordo com os dois últimos termos do lado direito da Equação 13.132; desse modo, confirmamos que a Equação 13.132 faz sentido em termos do comportamento conhecido do circuito.

Também podemos verificar a queda instantânea de 10 para 6 A na corrente i_1. Essa queda dá origem a um impulso de $-4\delta(t)$ na derivada de i_1. Dessa forma, a tensão em L_1 contém um impulso de $-12\delta(t)$ na origem. Esse impulso compensa exatamente o impulso em L_2; isto é, a soma das tensões impulsivas ao longo do caminho fechado é igual a zero.

Fontes impulsivas

Funções impulso podem ocorrer em fontes, bem como em respostas; tais fontes são denominadas *fontes impulsivas*. Uma fonte impulsiva que alimenta um circuito fornece uma quantidade finita de energia ao sistema instantaneamente. Uma analogia mecânica seria fazer soar um sino com uma batida impulsiva do badalo. Após a energia ter sido transferida ao sino, a resposta natural do sino determina o tom emitido (isto é, a freqüência das ondas sonoras resultantes) e a duração do tom.

No circuito mostrado na Figura 13.53, uma fonte de tensão impulsiva de intensidade V_0 volts-segundos é aplicada a um resistor e um indutor ligados em série. Quando a fonte de tensão é aplicada, a energia inicial no indutor é zero; portanto, a corrente inicial é zero. Como não há nenhuma queda de tensão em R, a fonte de tensão impulsiva aparece diretamente nos terminais de L.

Uma tensão impulsiva nos terminais de um indutor estabelece uma corrente instantânea. A corrente é

$$i = \frac{1}{L}\int_{0^-}^{t} V_0\delta(x)\,dx. \tag{13.139}$$

Dado que a integral de $\delta(t)$ em qualquer intervalo que inclua zero é 1, constatamos que a Equação 13.139 implica

$$i(0^+) = \frac{V_0}{L}\ \text{A}. \tag{13.140}$$

Assim, em um intervalo infinitesimal, a fonte impulsiva de tensão forneceu

$$\text{w} = \frac{1}{2}L\left(\frac{V_0}{L}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{V_0^2}{L}\ \text{J} \tag{13.141}$$

ao indutor.

A corrente V_0/L cai, agora, para zero, de acordo com a resposta natural do circuito; isto é,

$$i = \frac{V_0}{L}e^{-t/\tau}u(t), \tag{13.142}$$

onde $\tau = L/R$. Lembre-se que, no Capítulo 7, vimos que a resposta natural só pode ser atribuída a elementos passivos que fornecem ou armazenam energia, e não aos efeitos de fontes. Quando um circuito é alimentado por apenas uma fonte impulsiva, a resposta total é completamente definida pela resposta natural; a duração da fonte impulsiva é tão infinitesimal que não contribui para nenhuma resposta forçada.

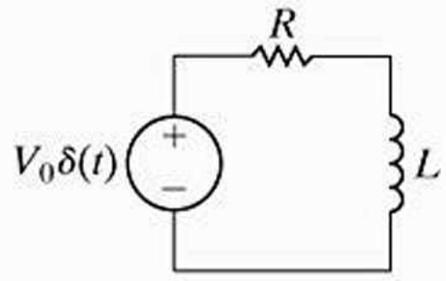


Figura 13.53 ▲ Circuito *RL* alimentado por uma fonte de tensão impulsiva.

Também podemos obter a Equação 13.142 pela aplicação direta do método da transformada de Laplace. A Figura 13.54 mostra o equivalente no domínio da freqüência do circuito da Figura 13.53. Assim,

$$I = \frac{V_0}{R + sL} = \frac{V_0/L}{s + (R/L)}, \tag{13.143}$$

$$i = \frac{V_0}{L}e^{-(R/L)t} = \frac{V_0}{L}e^{-t/\tau}u(t). \tag{13.144}$$

Dessa forma, o método da transformada de Laplace dá a solução correta para $i \geq 0^+$.

Por fim, consideramos o caso em que impulsos gerados internamente e impulsos aplicados externamente ocorrem simultaneamente. A abordagem da transformada de Laplace garante automaticamente a solução correta para $t > 0^+$ se as correntes no indutor e as tensões no capacitor em $t = 0^-$ forem usadas para construir o circuito equivalente no domínio da freqüência e se os impulsos aplicados externamente forem representados por suas transformadas. Para ilustrar, adicionamos uma fonte de tensão impulsiva de $50\delta(t)$ em série com a fonte de 100 V ao circuito da Figura 13.50. A Figura 13.55 mostra o novo arranjo.

Em $t = 0^-$, $i_1(0^-) = 10$ A e $i_2(0^-) = 0$ A. A transformada de Laplace de $50\delta(t)$ é 50. Se usarmos esses valores, o circuito equivalente no domínio da freqüência será o mostrado na Figura 13.56.

A expressão para I é

$$I = \frac{50 + (100/s) + 30}{25 + 5s}$$

$$= \frac{16}{s + 5} + \frac{20}{s(s + 5)}$$

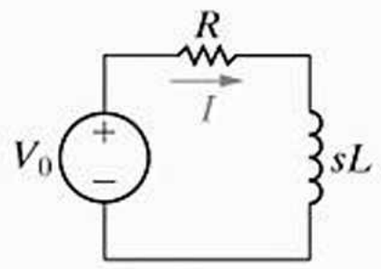


Figura 13.54 ▲ Circuito equivalente no domínio da freqüência para o circuito da Figura 13.53.

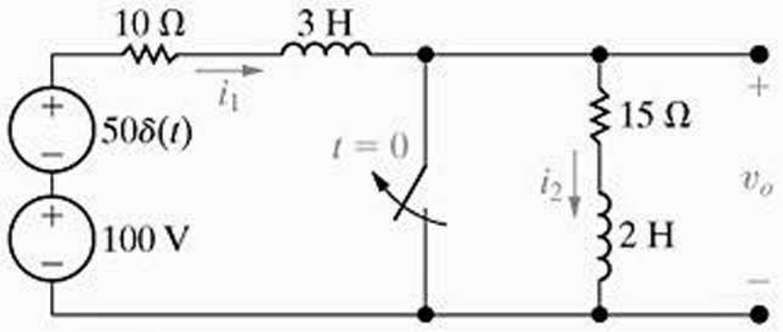


Figura 13.55 ▲ Circuito da Figura 13.50 com uma fonte de tensão impulsiva adicionada em série com a fonte de 100 V.

$$= \frac{16}{s+5} + \frac{4}{s} - \frac{4}{s+5}$$
$$= \frac{12}{s+5} + \frac{4}{s}, \qquad (13.145)$$

do qual temos

$$i(t) = (12e^{-5t} + 4)u(t) \text{ A} \qquad (13.146)$$

A expressão para V_o é

$$V_o = (15 + 2s)I = \frac{32(s+7{,}5)}{s+5} + \frac{40(s+7{,}5)}{s(s+5)}$$
$$= 32\left(1 + \frac{2{,}5}{s+5}\right) + \frac{60}{s} - \frac{20}{s+5}$$
$$= 32 + \frac{60}{s+5} + \frac{60}{s}, \qquad (13.147)$$

assim,

$$v_o = 32\delta(t) + (60e^{-5t} + 60)u(t) \text{ V}. \qquad (13.148)$$

Agora, testamos os resultados para ver se eles fazem sentido. Pela Equação 13.146, vemos que a corrente em L_1 e L_2 é 16 A em $t = 0^+$. Como no caso anterior, a operação de chaveamento faz com que i_1 decresça instantaneamente de 10 para 6 A e, ao mesmo tempo, faz com que i_2 aumente de 0 para 6 A. Ao mesmo tempo e sobreposto a isso, a fonte de tensão impulsiva faz passar 10 A por L_1 e L_2; isto é,

$$i = \frac{1}{3+2}\int_{0^-}^{t} 50\delta(x)\,dx = 10 \text{ A}. \qquad (13.149)$$

Portanto, i_1 aumenta repentinamente de 10 para 16 A, enquanto i_2 aumenta repentinamente de 0 para 16 A. O valor final de i é 4 A. A Figura 13.57 mostra i_1, i_2 e i em um gráfico.

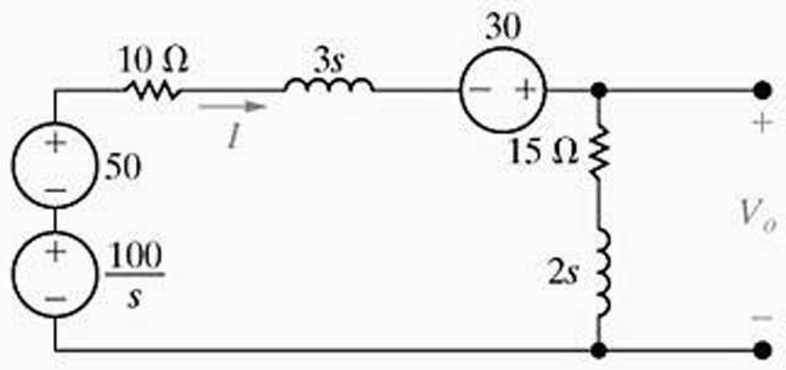


Figura 13.56 ▲ Circuito equivalente no domínio da freqüência para o circuito da Figura 13.55.

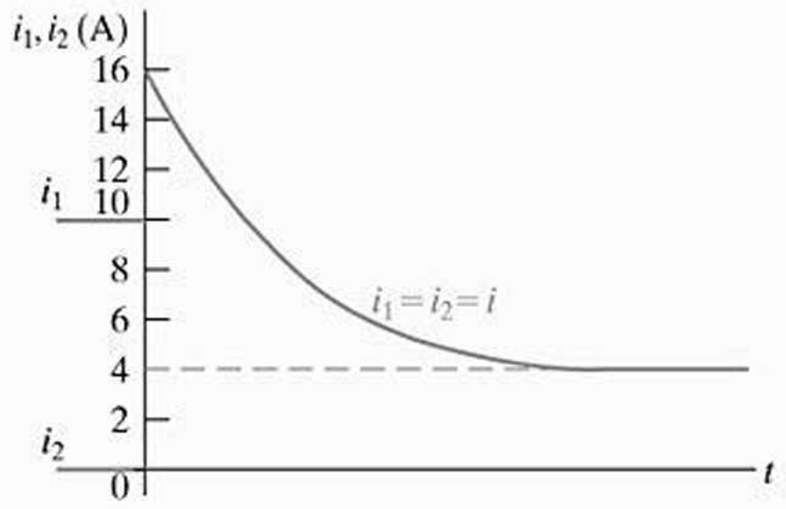


Figura 13.57 ▲ Correntes no indutor, em função do tempo, para o circuito da Figura 13.55.

Também podemos determinar as variações abruptas em i_1 e i_2 sem usar o princípio da superposição. A soma das tensões impulsivas em L_1 (3 H) e em L_2 (2 H) é igual a $50\delta(t)$. Assim, a mudança no fluxo concatenado deve somar 50; isto é,

$$\Delta\lambda_1 + \Delta\lambda_2 = 50. \qquad (13.150)$$

Como $\lambda = Li$, expressamos a Equação 13.50 como

$$3\Delta i_1 + 2\Delta i_2 = 50. \qquad (13.151)$$

No entanto, como i_1 e i_2 devem ser iguais após a ocorrência do chaveamento,

$$i_1(0^-) + \Delta i_1 = i_2(0^-) + \Delta i_2\,. \qquad (13.152)$$

Então,

$$10 + \Delta i_1 = 0 + \Delta i_2\,. \qquad (13.153)$$

Calculando Δi_1 e Δi_2 pelas equações 13.151 e 13.153, obtemos

$$\Delta i_1 = 6 \text{ A}, \qquad (13.154)$$

$$\Delta i_2 = 16 \text{ A}. \qquad (13.155)$$

Essas expressões estão de acordo com a verificação anterior.

A Figura 13.57 também indica que as derivadas de i_1 e i_2 conterão um impulso em $t = 0$. Especificamente, a derivada de i_1 terá um impulso de $6\delta(t)$ e a derivada de i_2 terá um impulso de $16\delta(t)$. As Figuras 13.58(a) e (b) ilustram as derivadas de i_1 e i_2, respectivamente.

Agora, voltamos à Equação 13.148. O componente impulsivo $32\delta(t)$ está de acordo com o impulso de $16\delta(t)$ de di_2/dt na origem. Os termos $60e^{-5t} + 60$ estão de acordo com o fato de que, para $t > 0^+$,

$$v_o = 15i + 2\frac{di}{dt}.$$

Testamos o componente impulsivo de di_1/dt observando que ele produz uma tensão impulsiva de $(3)6\delta(t)$, ou $18\delta(t)$, em L_1. Essa tensão, aliada à tensão de $32\delta(t)$ em L_2, soma $50\delta(t)$. Assim, a soma algébrica das tensões impulsivas ao longo da malha é zero.

Resumindo, a transformada de Laplace permite prever corretamente a criação de correntes e tensões impulsivas que surgem do chaveamento. Todavia, os circuitos equivalentes no domínio da freqüência devem levar em conta as condições iniciais em $t = 0^-$, isto é, as condições iniciais que existem antes da perturbação causada pelo chaveamento. A transformada de Laplace preverá corretamente a resposta a fontes de alimentação impulsivas pela simples representação dessas fontes, no domínio da freqüência, por suas transformadas corretas.

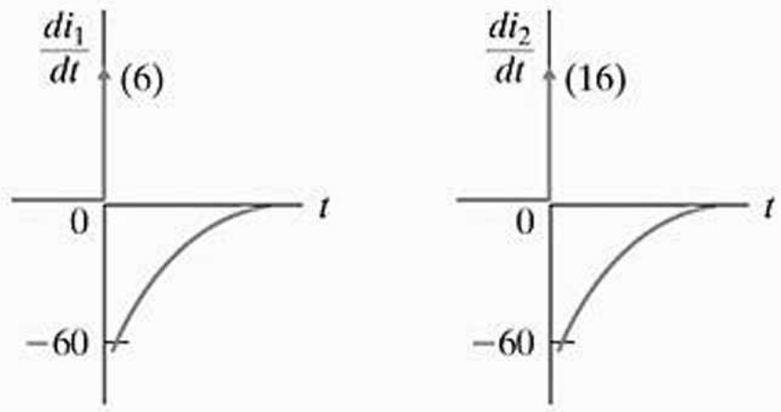


Figura 13.58 ▲ Derivadas de i_1 e i_2.

NOTA: Avalie o que você entendeu da função impulso em análise de circuitos tentando resolver os problemas 13.83 e 13.84, apresentados no final deste capítulo.

Perspectiva prática

Supressores de surto

Como mencionamos no início deste capítulo, surtos de tensão podem ocorrer em um circuito que está funcionando em regime permanente senoidal. Nossa finalidade aqui é mostrar como a transformada de Laplace é usada para determinar o surgimento de um surto na tensão entre fase e neutro de um circuito residencial em regime permanente senoidal, quando uma carga é desligada.

Considere o circuito mostrado na Figura 13.59, que modela um circuito residencial com três cargas, uma das quais é desligada no tempo $t = 0$. Para simplificar a análise, admitimos que a tensão fase-neutro, V_o, seja $120 \angle 0°$ V (ef) — uma tensão padrão (nos Estados Unidos) para residências — e que, quando a carga é desligada em $t = 0$, o valor de V_g não muda. Após a chave abrir, podemos construir o circuito no domínio da freqüência, como mostra a Figura 13.60. Observe que, como o ângulo de fase da tensão da carga indutiva é 0°, a corrente inicial que passa pela carga indutiva é 0. Assim, somente a indutância da linha tem uma condição inicial não nula, o que é modelado no circuito como uma fonte de tensão com o valor $L_l I_0$, como vemos na Figura 13.60.

Imediatamente antes de a chave abrir em $t = 0$, cada uma das cargas tem uma tensão de regime permanente senoidal com um valor de pico de $120\sqrt{2} = 169.7$ V. Toda a corrente que flui pela linha, fornecida pela fonte de tensão y_g, é dividida entre as três cargas. Quando a chave for aberta em $t = 0$, toda a corrente da linha fluirá pela carga resistiva remanescente. Isso porque a corrente na carga indutiva é 0 em $t = 0$ e a corrente em um indutor não pode variar instantaneamente. Dessa forma, a queda de tensão nas cargas remanescentes pode sofrer um avanço abrupto (surto) na medida em que a corrente de linha é forçada a passar pela carga resistiva. Por exemplo, se a corrente inicial na linha for 25 A (ef) e a impedância da carga resistiva for 12 Ω, a queda de tensão no resistor sofrerá uma variação (surto) de 169,7 V para $(25)(\sqrt{2})(12) = 424{,}3$ V quando a chave for aberta. Se a carga resistiva não puder suportar esse valor de tensão, precisará ser protegida por um supressor de surto.

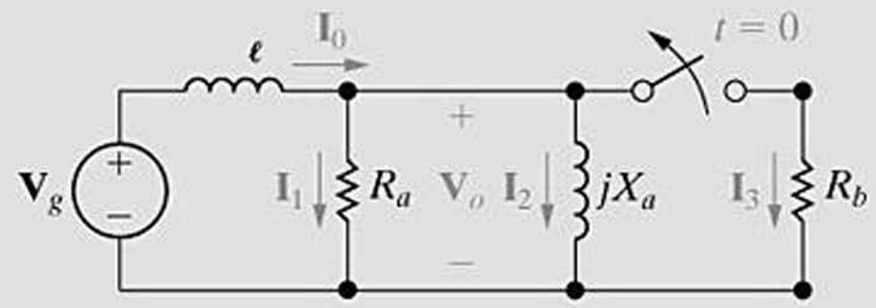


Figura 13.59 ▲ Circuito usado para ilustrar o aparecimento de uma tensão de surto de chaveamento.

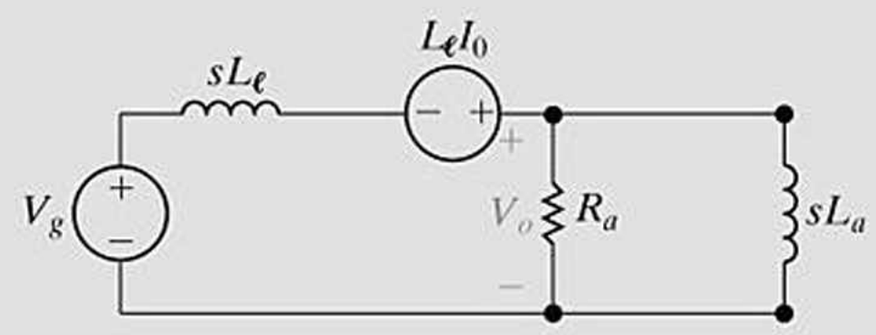


Figura 13.60 ▲ Circuito no domínio da freqüência.

NOTA: Avalie o que você entendeu dessa "Perspectiva prática" tentando resolver os problemas 13.89 e 13.90, apresentados no final deste capítulo.

Resumo

- Podemos representar cada um dos elementos de um circuit no domínio da freqüência aplicando, para cada um, a transformada de Laplace de sua equação terminal tensão-corrente:
  - Resistor: $V = RI$
  - Indutor: $V = sLI - LI_0$
  - Capacitor: $V = (1/sC)I + V_o/s$
    Nessas equações, $V = \mathcal{L}\{v\}$, $I = \mathcal{L}\{i\}$, I_0 é a corrente inicial no indutor e V_0 é a tensão inicial no capacitor.
- Podemos realizar a análise de circuitos no domínio da freqüência substituindo cada elemento de circuito por seu modelo equivalente no domínio da freqüência. O circuito equivalente resultante é resolvido escrevendo-se as equações algébricas usando técnicas de análise de circuitos resistivos. A Tabela 13.1 resume os modelos no domínio da freqüência para resistores, indutores e capacitores.
- A análise de circuitos no domínio da freqüência é particularmente vantajosa para resolver problemas de resposta transitória em circuitos lineares de parâmetros concentrados quando as condições iniciais são conhecidas. Também é útil em problemas que envolvem equações diferenciais simultâneas de correntes de malha ou tensões de nó, porque as reduz a equações algébricas.
- A *função de transferência* é a razão entre o sinal de saída e o sinal de entrada de um circuito no domínio da freqüência. É representada como

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)},$$

onde $Y(s)$ é a transformada de Laplace do sinal de saída e $X(s)$ é a transformada de Laplace do sinal de entrada.

- A expansão por frações parciais do produto $H(s)X(s)$ resulta em um termo para cada pólo de $H(s)$ e de $X(s)$. Os termos $H(s)$ correspondem ao componente transitório da resposta total; os termos $X(s)$ correspondem ao componente de regime permanente.
- Se um circuito for alimentado por um impulso unitário $x(t) = \delta(t)$, então a resposta do circuito será igual à transformada inversa de Laplace da função de transferência, $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = h(t)$.
- Um circuito *invariante no tempo* é um circuito no qual, se a entrada for retardada de a segundos, a resposta também será retardada de a segundos.
- A saída $y(t)$ de um circuito pode ser calculada pela convolução da entrada $x(t)$ com a resposta do circuito ao impulso unitário, $h(t)$:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_0^t h(\lambda)x(t-\lambda)\,d\lambda$$
$$= x(t) * h(t) = \int_0^t x(\lambda)h(t-\lambda)\,d\lambda.$$

Uma interpretação gráfica da integral de convolução muitas vezes proporciona um método mais fácil para se calcular $y(t)$.

- Pode-se usar a função de transferência de um circuito para calcular sua resposta de regime permanente senoidal. Para isso, substitua $s = j\omega$ em $H(s)$ e represente o número complexo resultante como um módulo e um ângulo de fase. Se

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi),$$

$$H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\theta(\omega)},$$

então

$$y_{rp}(t) = A|H(j\omega)|\cos[\omega t + \phi + \theta(\omega)].$$

- A análise por meio da transformada de Laplace prevê corretamente correntes e tensões impulsivas de chaveamento e de fontes impulsivas. Você deve se assegurar de que os circuitos equivalentes no domínio da freqüência sejam baseados em condições iniciais em $t = 0^-$, isto é, antes do chaveamento.

Problemas

Seção 13.1

13.1 Determine o equivalente de Norton do circuito da Figura 13.3.

13.2 Determine o circuito equivalente no domínio da freqüência mostrado na Figura 13.4, expressando a corrente i no indutor em função da tensão terminal v e, então, determinando a transformada de Laplace dessa equação integral.

13.3 Determine o equivalente de Thévenin do circuito da Figura 13.7.

Seção 13.2

13.4* Um resistor de 10 kΩ, um indutor de 5 H e um capacitor de 20 nF estão em série.

a) Expresse a impedância dessa combinação em série no domínio da freqüência como uma função racional.

b) Determine os valores numéricos dos pólos e zeros da impedância.

13.5* Um resistor de 5 kΩ, um indutor de 6,25 H e um capacitor a 40 nF estão em paralelo.

a) Expresse a impedância dessa combinação em paralelo no domínio da freqüência como uma função racional.

b) Determine os valores numéricos dos pólos e zeros da impedância.

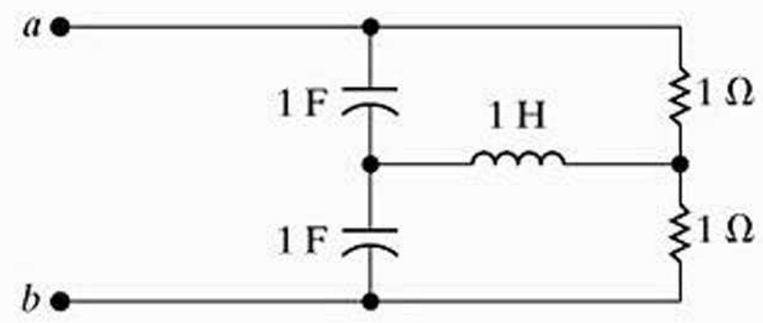
13.6 Um resistor de 1 kΩ está em série com um indutor de 500 mH. Essa combinação em série está em paralelo com um capacitor de 0,4 μF.

a) Expresse a impedância equivalente desses ramos paralelos no domínio da freqüência como uma função racional.

b) Determine os valores numéricos dos pólos e zeros.

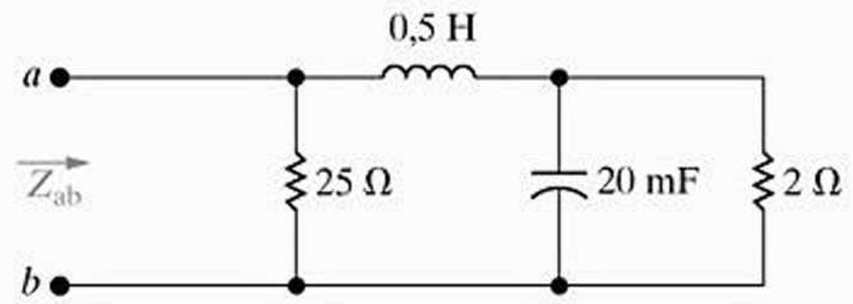
13.7 Determine os pólos e zeros da impedância vista a partir dos terminais a,b do circuito da Figura P13.7.

Figura P13.7



13.8 Determine os pólos e zeros da impedância vista a partir dos terminais a,b do circuito da Figura P13.8.

Figura P13.8

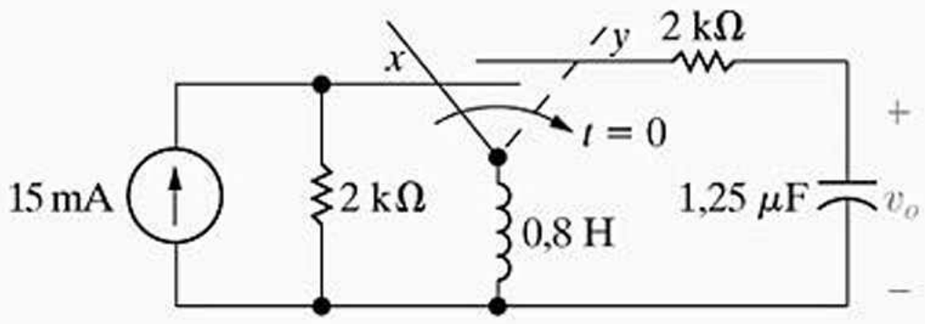


Seção 13.3

13.9* PSPICE A chave no circuito da Figura P13.9 esteve na posição x por um longo tempo. Em $t = 0$, ela passa instantaneamente para a posição y.

a) Construa um circuito no domínio da freqüência para $t > 0$.
b) Determine V_o.
c) Determine v_o.

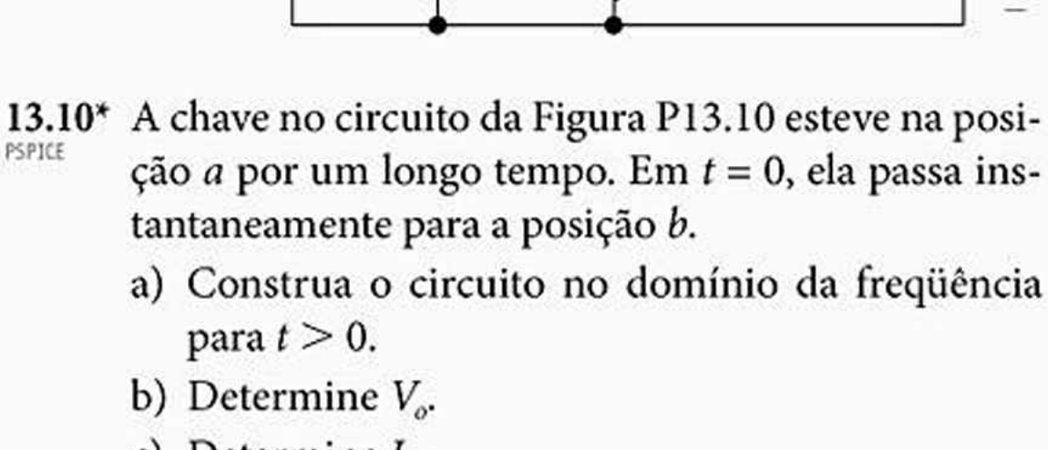
Figura P13.9



13.10* PSPICE A chave no circuito da Figura P13.10 esteve na posição *a* por um longo tempo. Em $t = 0$, ela passa instantaneamente para a posição *b*.

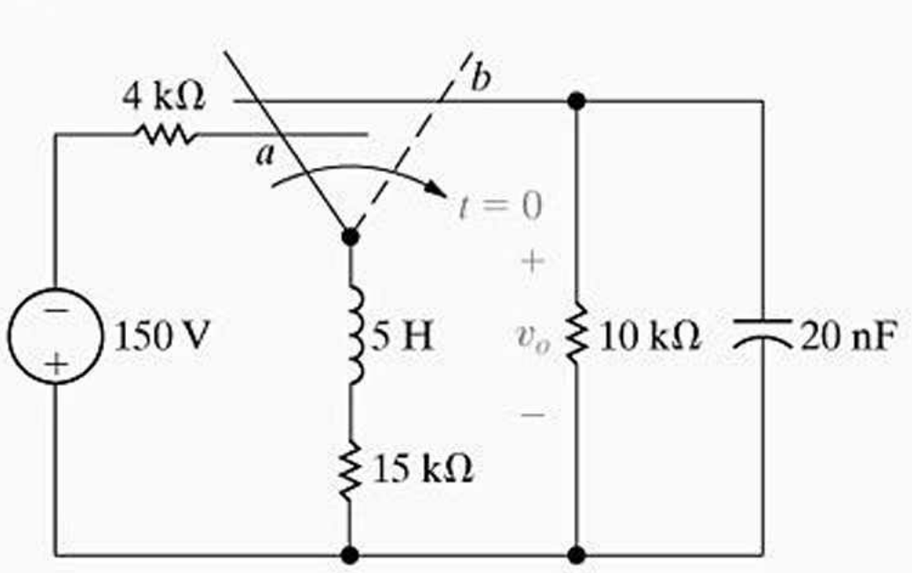
a) Construa o circuito no domínio da freqüência para $t > 0$.
b) Determine V_o.
c) Determine I_L.
d) Determine v_o para $t > 0$.
e) Determine i_L para $t > 0$.

Figura P13.10



13.11 PSPICE A chave do tipo liga-antes-interrompe-depois da Figura P13.11 esteve na posição *a* por um longo tempo. Em $t = 0$, ela passa instantaneamente para a posição *b*. Determine v_o para $t \geq 0$.

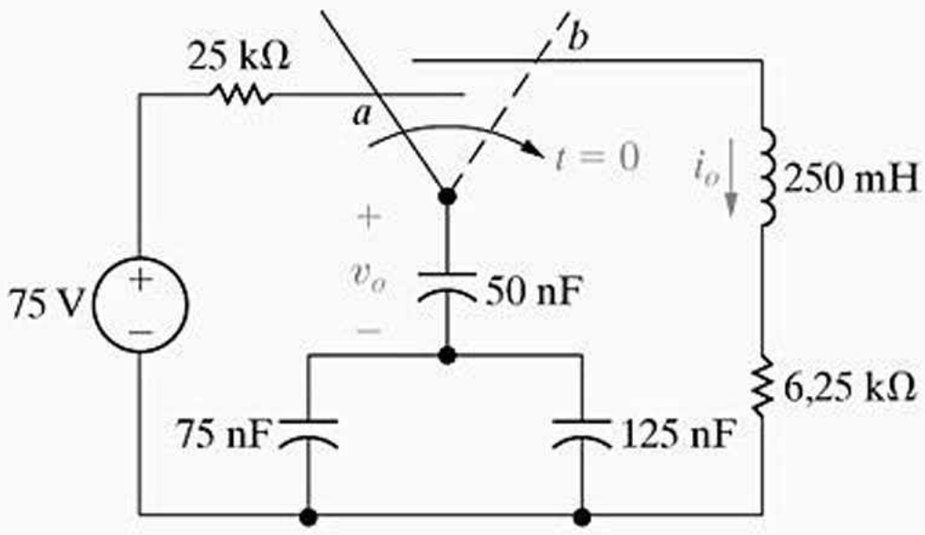
Figura P13.11



13.12 PSPICE A chave do tipo liga-antes-interrompe-depois da Figura P13.12 esteve na posição *a* por um longo tempo antes de passar instantaneamente para a posição *b* em $t = 0$.

a) Construa o circuito equivalente no domínio da freqüência para $t > 0$.
b) Determine I_o e i_o.
c) Determine V_o e v_o.

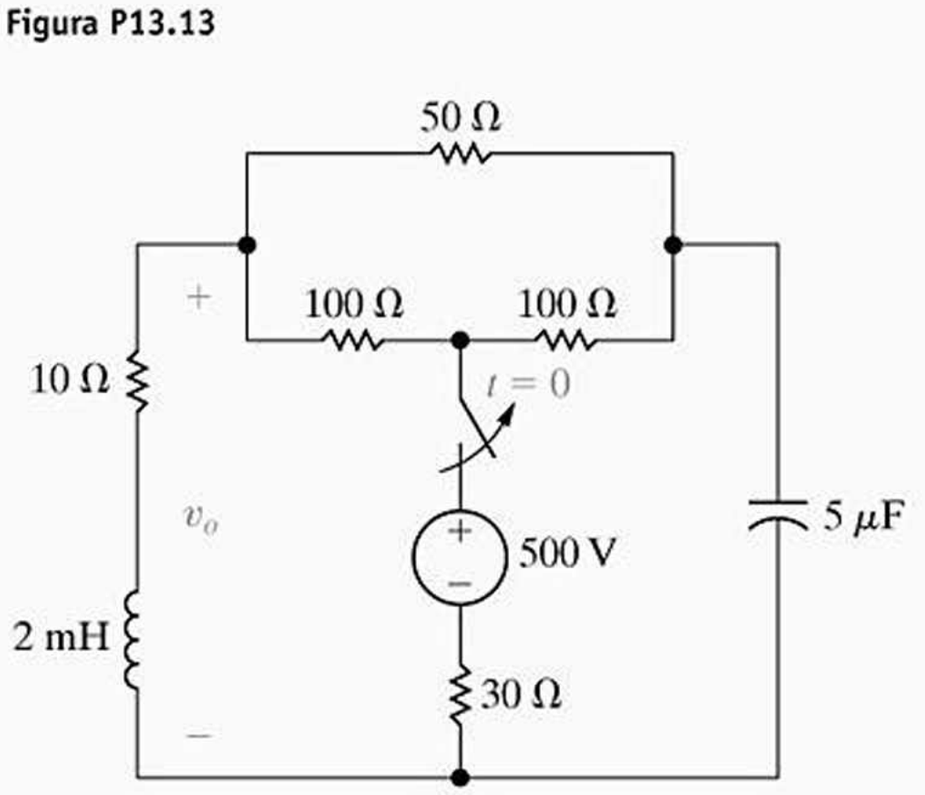
Figura P13.12



13.13 PSPICE A chave no circuito da Figura P13.13 esteve fechada por um longo tempo antes de se abrir em $t = 0$.

a) Construa o circuito equivalente no domínio da freqüência para $t > 0$.
b) Determine V_o.
c) Determine v_o para $t \geq 0$.

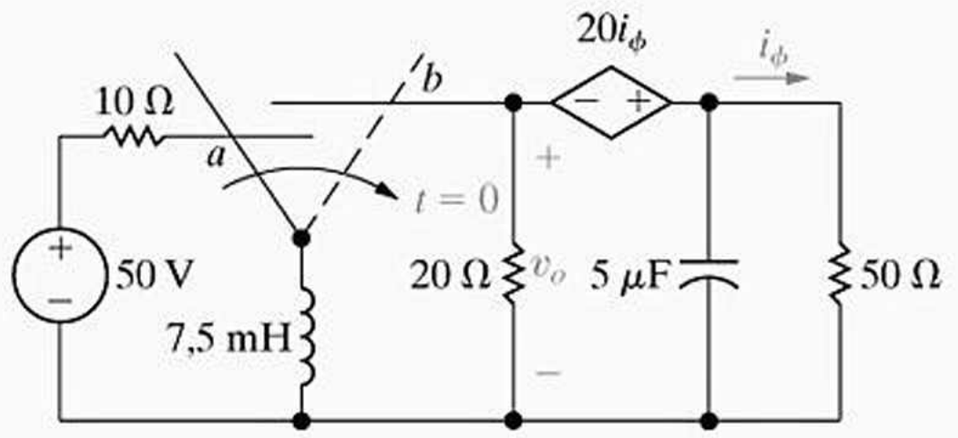
Figura P13.13



13.14 PSPICE A chave no circuito da Figura P13.14 esteve na posição *a* por um longo tempo. Em $t = 0$, ela passa instantaneamente para a posição *b*.

a) Determine V_o.
b) Determine v_o.

Figura P13.14

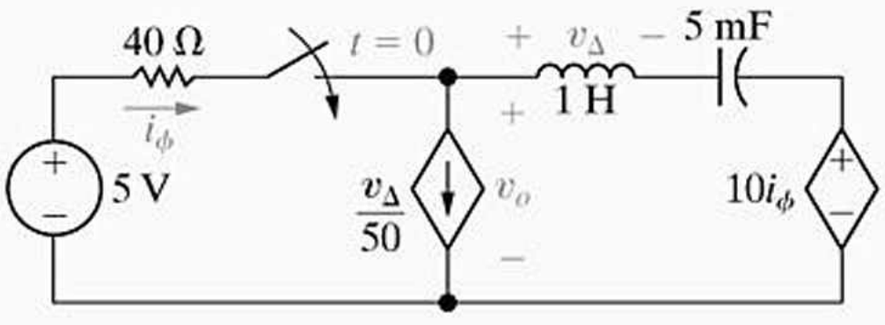


13.15* PSPICE Não há nenhuma energia armazenada no circuito da Figura P13.15 no instante em que a chave é fechada.

a) Determine v_o para $t \geq 0$.

b) Sua solução faz sentido em termos do comportamento conhecido do circuito? Explique.

Figura P13.15



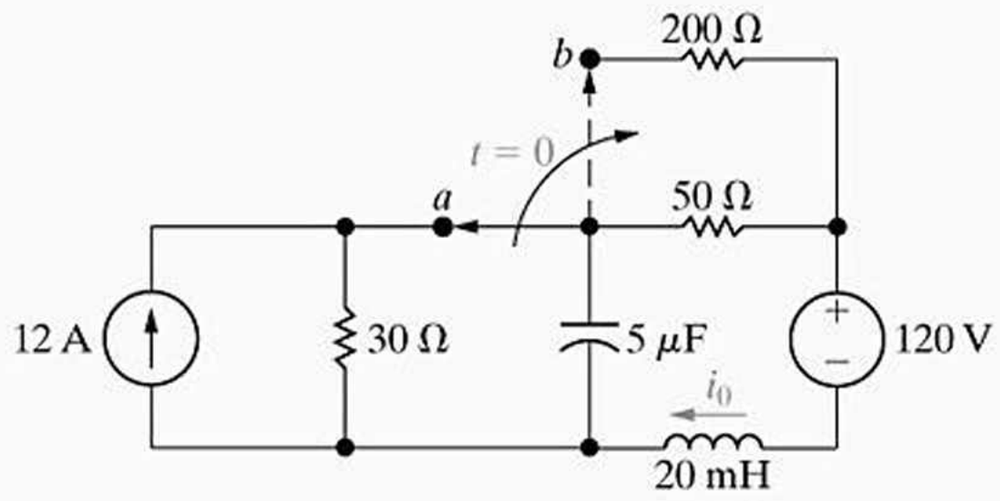
13.16* PSPICE A chave no circuito da Figura P13.16 esteve na posição *a* por um longo tempo. Em $t = 0$, ela passa instantaneamente de *a* para *b*.

a) Construa o circuito no domínio da freqüência para $t > 0$.

b) Determine $I_o(s)$.

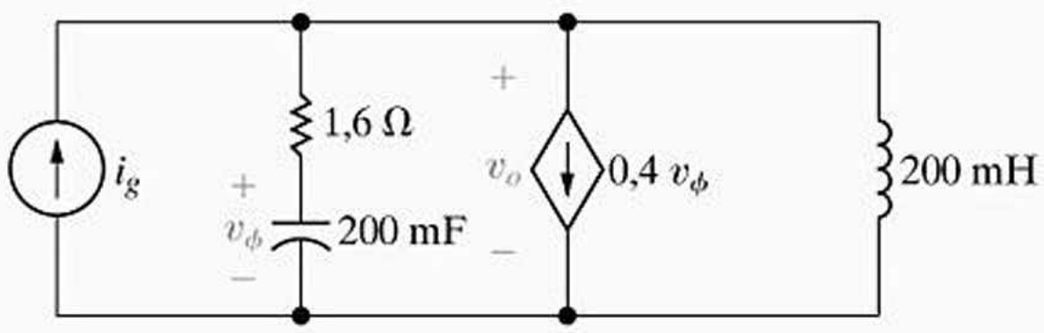
c) Determine $i_o(t)$ para $t \geq 0$.

Figura P13.16



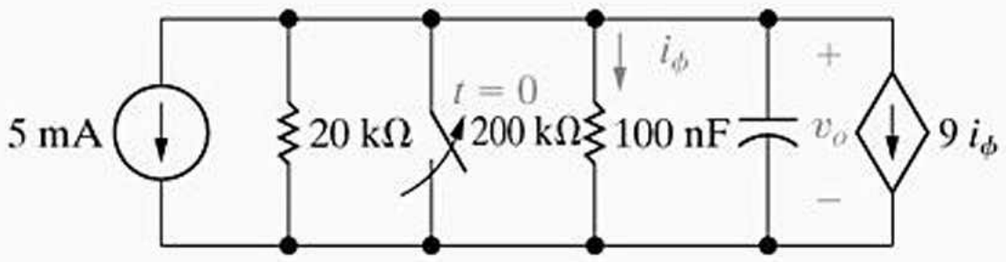
13.17 PSPICE Determine v_o no circuito da Figura P13.17 se $i_g = 15u(t)$ A. Não há nenhuma energia armazenada no circuito em $t = 0$.

Figura P13.17



13.18 PSPICE A chave no circuito da Figura P13.18 esteve fechada por um longo tempo antes de abrir em $t = 0$. Determine v_o para $t \geq 0$.

Figura P13.18

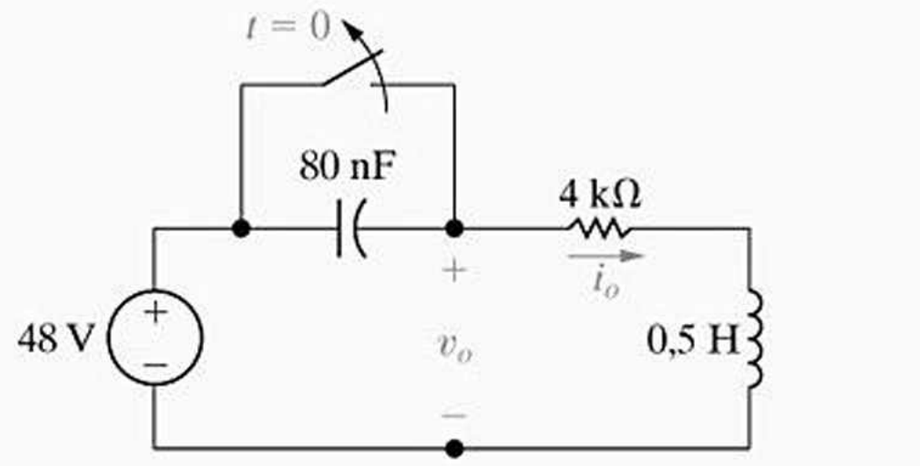


13.19 PSPICE A chave no circuito da Figura P13.19 esteve fechada por um longo tempo. Em $t = 0$, ela é aberta.

a) Determine $v_o(t)$ para $t \geq 0$.

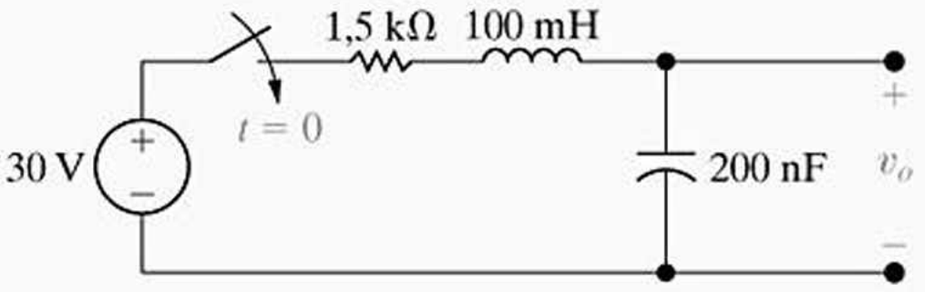
b) Determine $i_o(t)$ para $t \geq 0$.

Figura P13.19



13.20 PSPICE Determine V_o e v_o no circuito da Figura P13.20 se a energia inicial for zero e a chave for fechada em $t = 0$.

Figura P13.20



13.21 PSPICE Repita o Problema 13.20, se a tensão inicial no capacitor for 20 V positiva no terminal inferior.

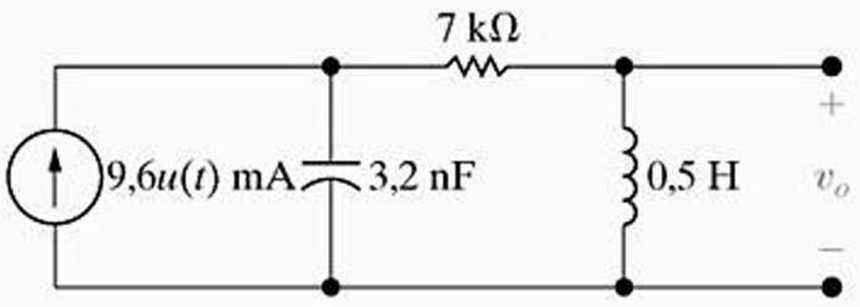
13.22 PSPICE

a) Determine a expressão de V_o no domínio da freqüência para o circuito da Figura P13.22.

b) Use a expressão no domínio da freqüência determinada em (a) para prever os valores inicial e final de v_o.

c) Determine a expressão no domínio do tempo para v_o.

Figura P13.22



13.23 PSPICE Determine a expressão no domínio do tempo para a corrente no capacitor da Figura P13.22. Admita que o sentido de referência para i_C seja de cima para baixo.

13.24 PSPICE Não há nenhuma energia armazenada nos capacitores no circuito da Figura P13.24 no instante em que a chave é fechada.

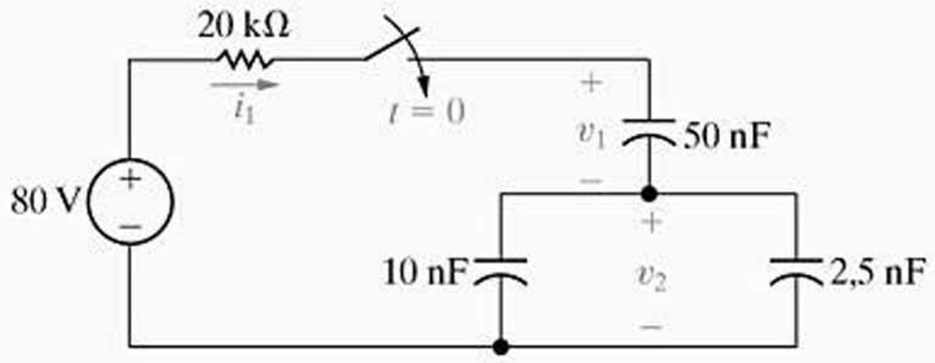
a) Construa o circuito no domínio da freqüência para $t > 0$.

b) Determine I_1, V_1 e V_2.

c) Determine i_1, v_1 e v_2.

d) Suas respostas para i_1, v_1 e v_2 fazem sentido em termos do comportamento conhecido do circuito? Explique.

Figura P13.24

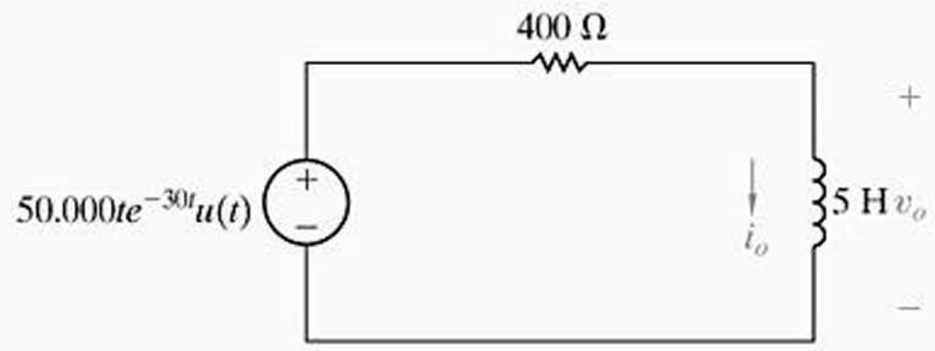


13.25 PSPICE Não há nenhuma energia armazenada no circuito da Figura P13.25 no instante em que a fonte de tensão é energizada.

a) Determine V_o e I_o.

b) Determine v_o e i_o para $t \geq 0$.

Figura P13.25



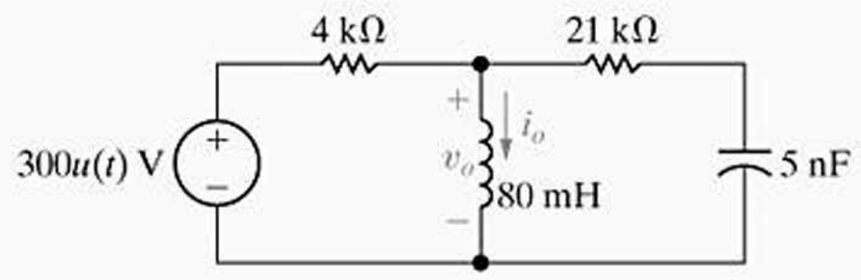
13.26* PSPICE Não há nenhuma energia armazenada no circuito da Figura P13.26 em $t = 0^-$.

a) Use o método das tensões de nó para determinar v_o.

b) Determine a expressão no domínio do tempo para i_o.

c) Suas respostas em (a) e (b) fazem sentido em termos do comportamento conhecido do circuito? Explique.

Figura P13.26



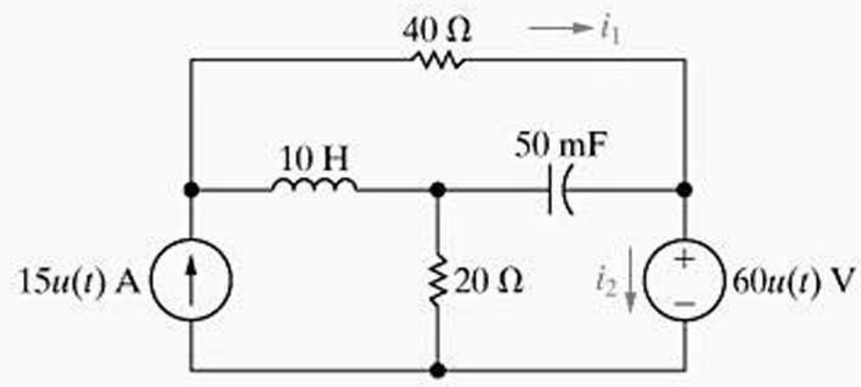
13.27* PSPICE Não há nenhuma energia armazenada no circuito da Figura P13.27 no instante em que as fontes são conectadas.

a) Determine $I_1(s)$ e $I_2(s)$.

b) Use os teoremas do valor inicial e final para verificar os valores inicial e final de $i_1(t)$ e $i_2(t)$.

c) Determine $i_1(t)$ e $i_2(t)$ para $t \geq 0$.

Figura P13.27



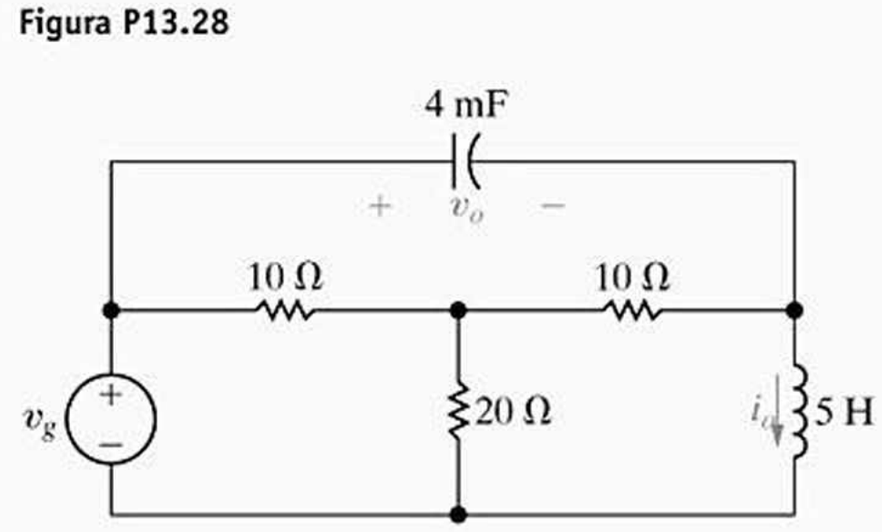
13.28 PSPICE Não há nenhuma energia armazenada no circuito da Figura P13.28 no instante em que a fonte de tensão é ligada e $v_g = 75u(t)$ V.

a) Determine V_o e I_o.

b) Determine v_o e i_o.

c) As soluções para v_o e i_o fazem sentido em termos do comportamento conhecido do circuito? Explique.

Figura P13.28



13.29 PSPICE A energia inicial no circuito da Figura P13.29 é zero. A fonte de tensão ideal é $600u(t)$ V.

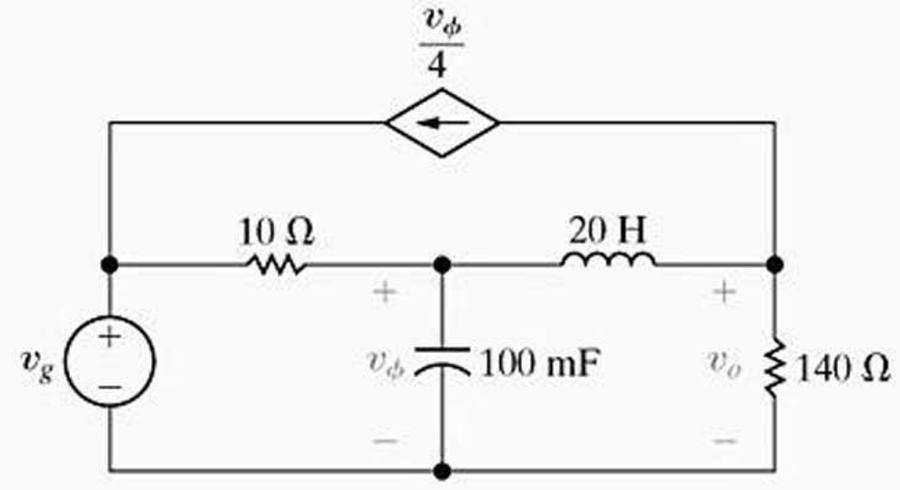
a) Determine $V_o(s)$.

b) Use os teoremas dos valores inicial e final para determinar $v_o(0^+)$ e $v_o(\infty)$.

c) Os valores obidos em (b) estão de acordo com o comportamento conhecido do circuito? Explique.

d) Determine $v_o(t)$.

Figura P13.29



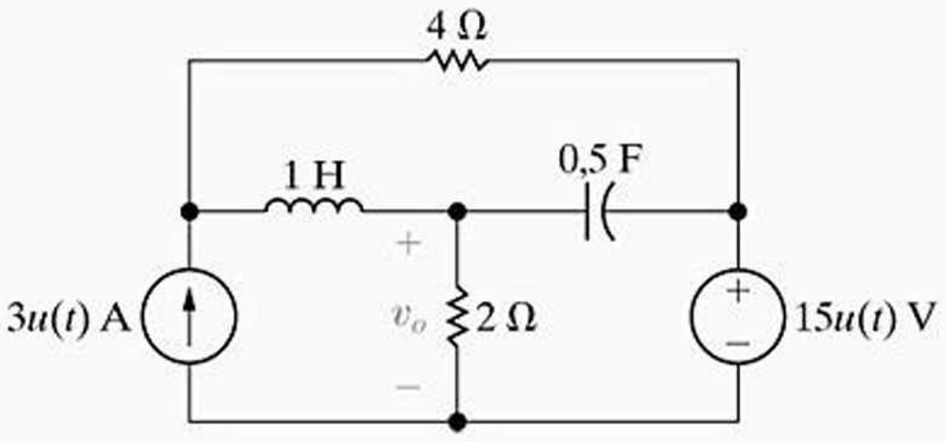
13.30 PSPICE Não há nenhuma energia armazenada no circuito da Figura P13.30 em $t = 0^-$.

a) Determine V_o.

b) Determine v_o.

c) Sua solução para v_o faz sentido em termos do comportamento conhecido do circuito? Explique.

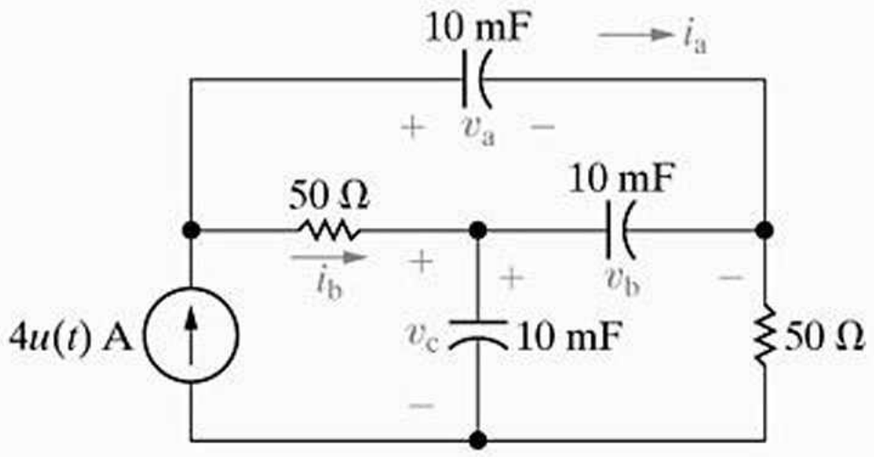
Figura P13.30



13.31 PSPICE Não há nenhuma energia armazenada no circuito na Figura P13.31 no instante em que a fonte de corrente é aplicada.

a) Determine I_a e I_b.
b) Determine i_a e i_b.
c) Determine V_a, V_b e V_c.
d) Determine v_a, v_b e v_c.
e) Admita que um capacitor se danificará sempre que sua tensão terminal for 1.000 V. Quanto tempo após a fonte de corrente ter sido aplicada um dos capacitores se danificará?

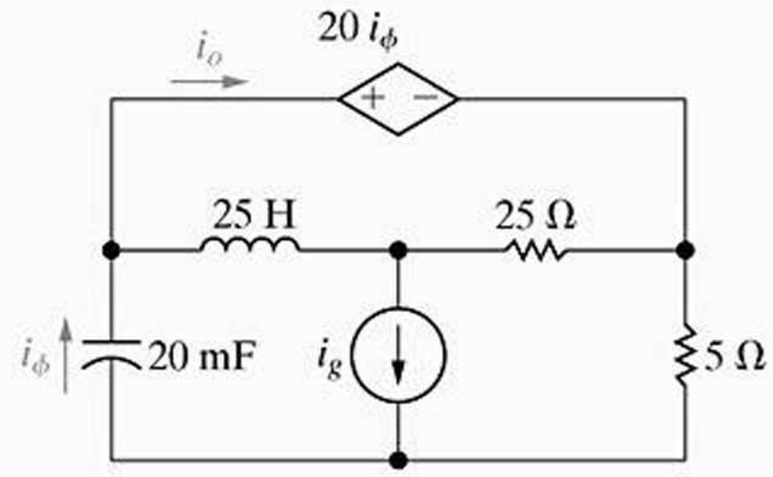
Figura P13.31



13.32 PSPICE Não há nenhuma energia armazenada no circuito da Figura P13.32 no instante em que a fonte de corrente é ligada. Dado que $i_g = 100u(t)$ A:

a) Determine $I_o(s)$.
b) Use os teoremas dos valores inicial e final para determinar $i_o(0^+)$ e $i_o(\infty)$.
c) Determine se os resultados obtidos em (b) estão de acordo com o comportamento conhecido do circuito.
d) Determine $i_o(t)$.

Figura P13.32

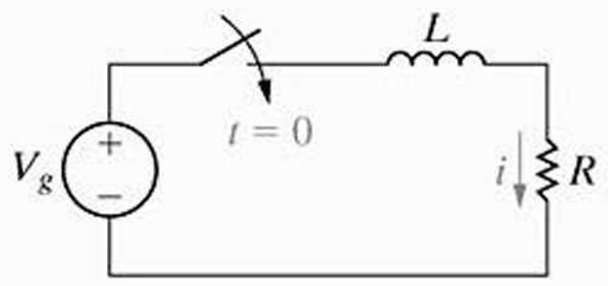


13.33 Começando com a Equação 13.65, mostre que a corrente no capacitor do circuito da Figura 13.19 é positiva para $0 < t < 200\ \mu s$ e negativa para $t > 200\ \mu s$. Mostre também que em 200 μs a corrente é zero e que isso corresponde a quando dv_C/dt é zero.

13.34 A chave no circuito da Figura P13.34 esteve aberta por um longo tempo. A tensão da fonte senoidal é $v_g = V_m \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$. A chave fecha em $t = 0$. Observe que o ângulo ϕ determina o valor da tensão no momento em que a chave fecha, isto é, $v_g(0) = V_m \operatorname{sen} \phi$.

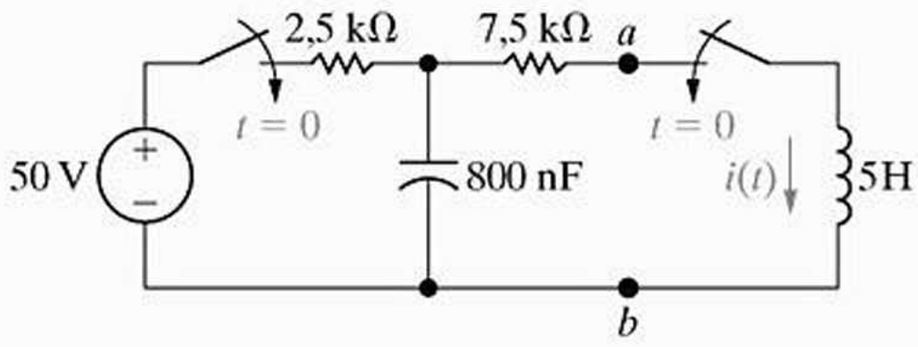
a) Use o método da transformada de Laplace para determinar i para $t > 0$.
b) Usando a expressão determinada em (a), escreva a expressão para a corrente depois de a chave estar fechada por um longo tempo.
c) Usando a expressão determinada em (a), escreva a expressão para o componente transitório de i.
d) Determine a expressão de regime permanente para i usando o método fasorial. Verifique se sua expressão é equivalente à obtida em (b).
e) Especifique o valor de ϕ de modo que o circuito passe imediatamente a operar em regime permanente quando a chave for fechada.

Figura P13.34



13.35* PSPICE As duas chaves no circuito da Figura P13.35 funcionam simultaneamente. Não há nenhuma energia armazenada no circuito no instante em que elas se fecham. Determine $i(t)$ para $t \geq 0^+$ depois de determinar o equivalente de Thévenin no domínio da freqüência do circuito à esquerda dos terminais a,b.

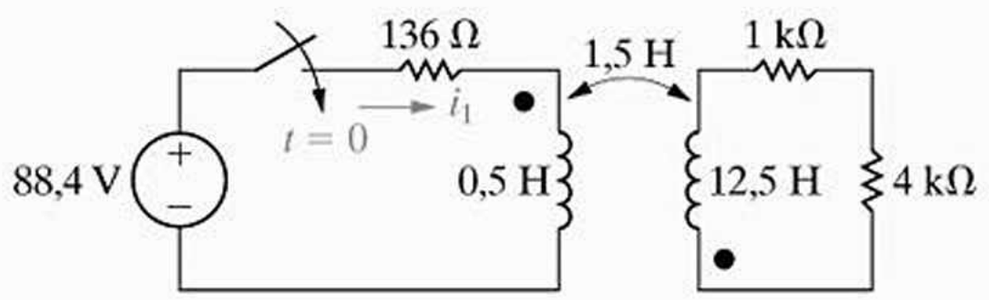
Figura P13.35



13.36* PSPICE Não há nenhuma energia armazenada no circuito da Figura P13.36 no instante em que a chave é fechada.

a) Determine I_1.
b) Use os teoremas do valor inicial e final para determinar $i_1(0^+)$ e $i_1(\infty)$.
c) Determine i_1.

Figura P13.36

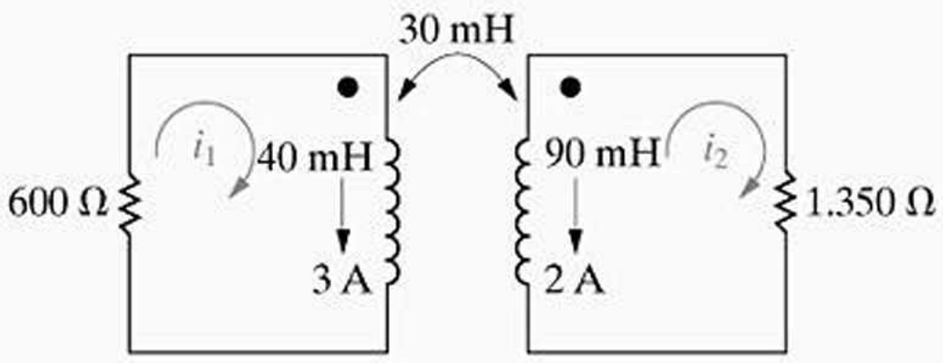


13.37*a) PSPICE Determine a corrente no resistor de 4 kΩ no circuito da Figura P13.36. O sentido de referência para a corrente é de cima para baixo, passando pelo resistor.
b) Repita a parte (a) se o ponto no enrolamento de 12,5 H for invertido.

13.38 PSPICE Os enrolamentos magneticamente acoplados no circuito da Figura P13.38 conduzem correntes iniciais de 3 e 2 A, como mostrado.

a) Determine a energia inicial armazenada no circuito.
b) Determine I_1 e I_2.
c) Determine i_1 e i_2.
d) Determine a energia total dissipada nos resistores de 600 e 1.350 Ω.
e) Repita (a)–(d), com o ponto no indutor de 90 mH no terminal inferior.

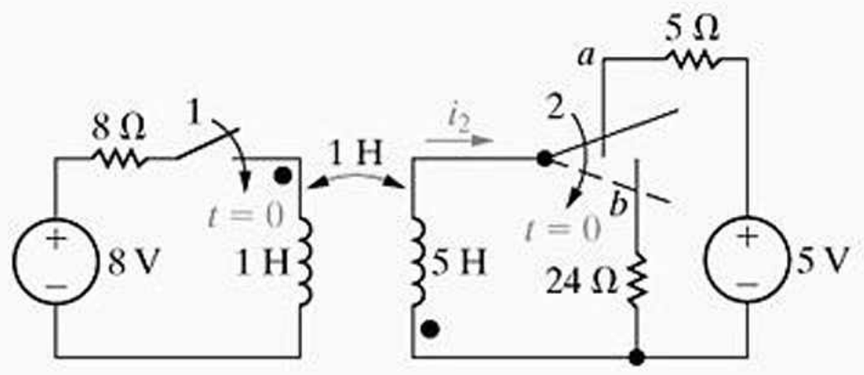
Figura P13.38



13.39 PSPICE No circuito da Figura P13.39, a chave 1 fecha em $t = 0$ e a chave do tipo liga-antes-interrompe-depois passa instantaneamente da posição *a* para a posição *b*.

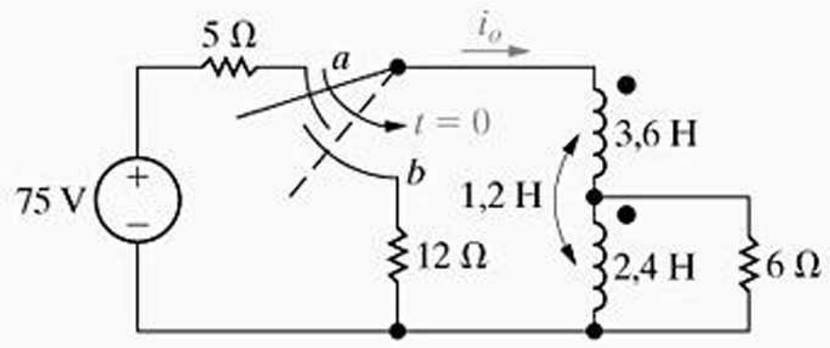
a) Construa o circuito equivalente no domínio da freqüência para $t > 0$.
b) Determine I_2.
c) Use os teoremas dos valores inicial e final para verificar os valores inicial e final de i_2.
d) Determine i_2 para $t \geq 0^+$.

Figura P13.39



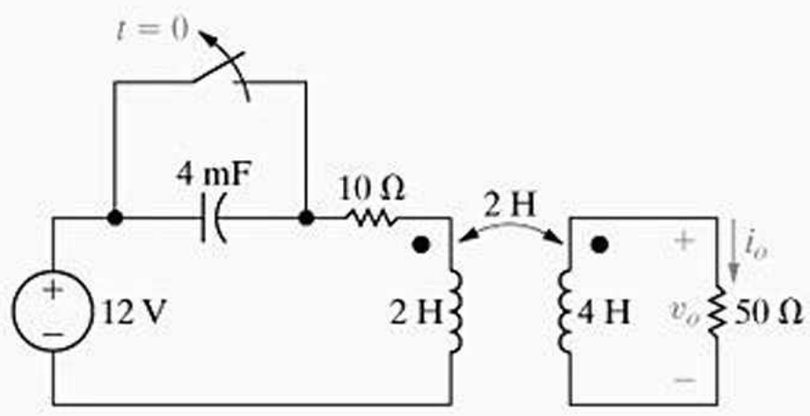
13.40 PSPICE A chave do tipo liga-antes-interrompe-depois no circuito da Figura P13.40 esteve na posição *a* por um longo tempo. Em $t = 0$, ela passa instantaneamente para a posição *b*. Determine i_o para $t \geq 0$.

Figura P13.40



13.41 PSPICE A chave no circuito da Figura P13.41 esteve fechada por um longo tempo antes de abrir em $t = 0$. Use o método da transformada de Laplace para determinar i_o.

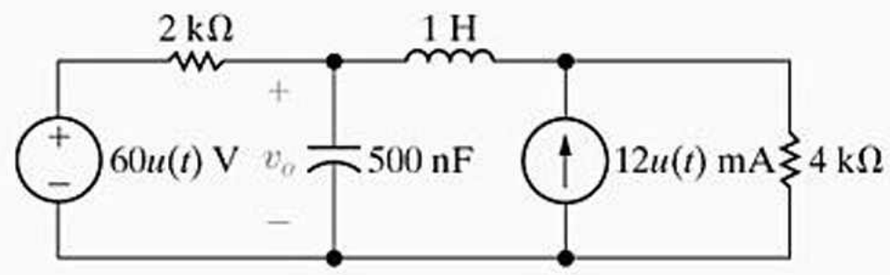
Figura P13.41



13.42* PSPICE Não há nenhuma energia armazenada no circuito apresentado na Figura P13.42 no instante em que as duas fontes são conectadas.

a) Use o princípio da superposição para determinar V_o.
b) Determine v_o para $t > 0$.

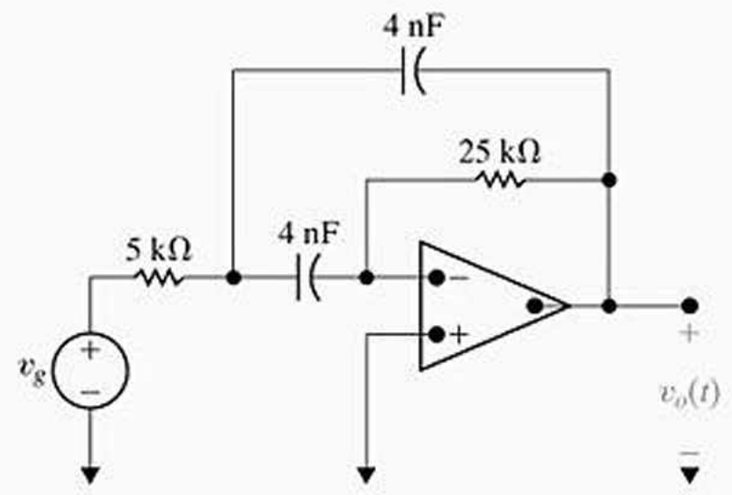
Figura P13.42



13.43 Verifique se a solução das equações 13.91 e 13.92 para V_2 resulta na mesma expressão que a da Equação 13.90.

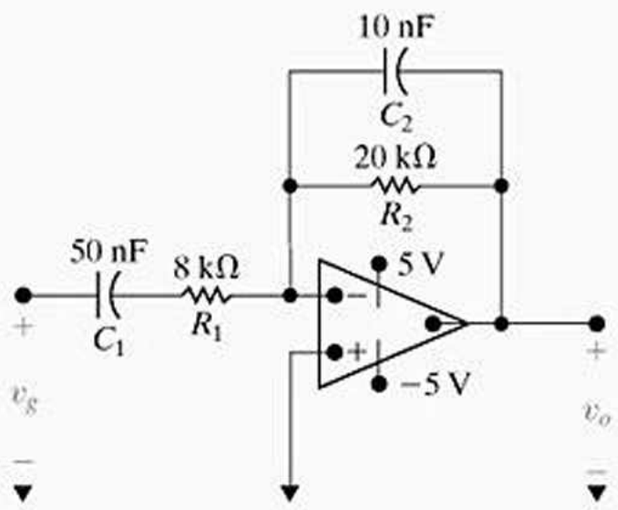
13.44 PSPICE Determine $v_o(t)$ no circuito da Figura P13.44 se o amp op ideal operar na sua região linear e v_g = 400$u(t)$ mV.

Figura P13.44



13.45 PSPICE O amp op no circuito da Figura P13.45 é ideal. Não há nenhuma energia armazenada no circuito no instante em que ele é energizado. Se v_g = 20.000$tu(t)$ V, determine (a) V_o, (b) v_o, (c) quanto tempo leva para saturar o amplificador operacional e (d) qual deve ser a taxa de aumento em v_g para evitar a saturação.

Figura P13.45

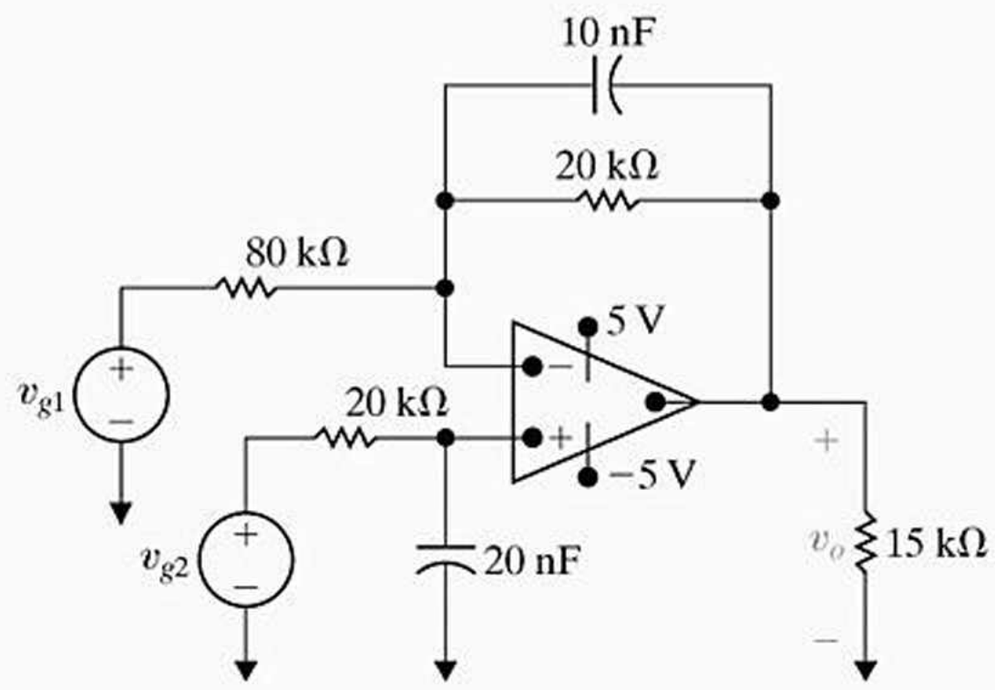


13.46 PSPICE O amp op no circuito mostrado na Figura P13.46 é ideal. Não há nenhuma energia armazenada nos capacitores no instante em que o circuito é energizado.

a) Determine v_o se $v_{g1} = 16u(t)$ V e $v_{g2} = 8u(t)$ V.

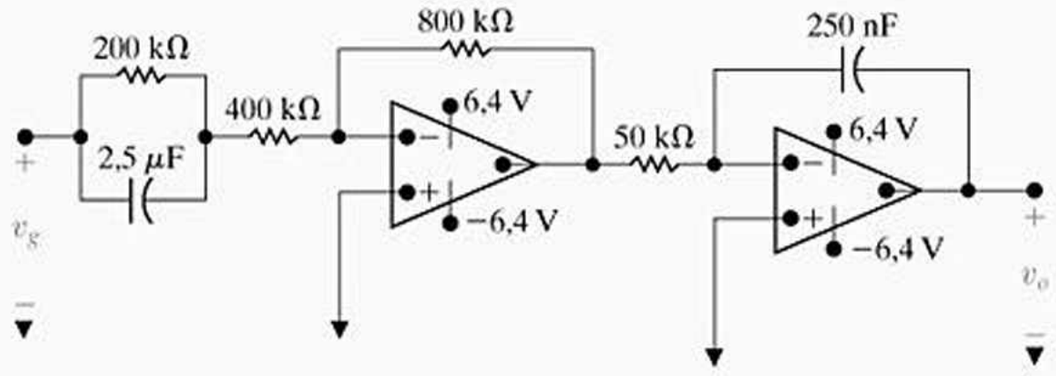
b) Quantos milissegundos o amplificador operacional leva para ficar saturado depois que as duas fontes são ligadas?

Figura P13.46



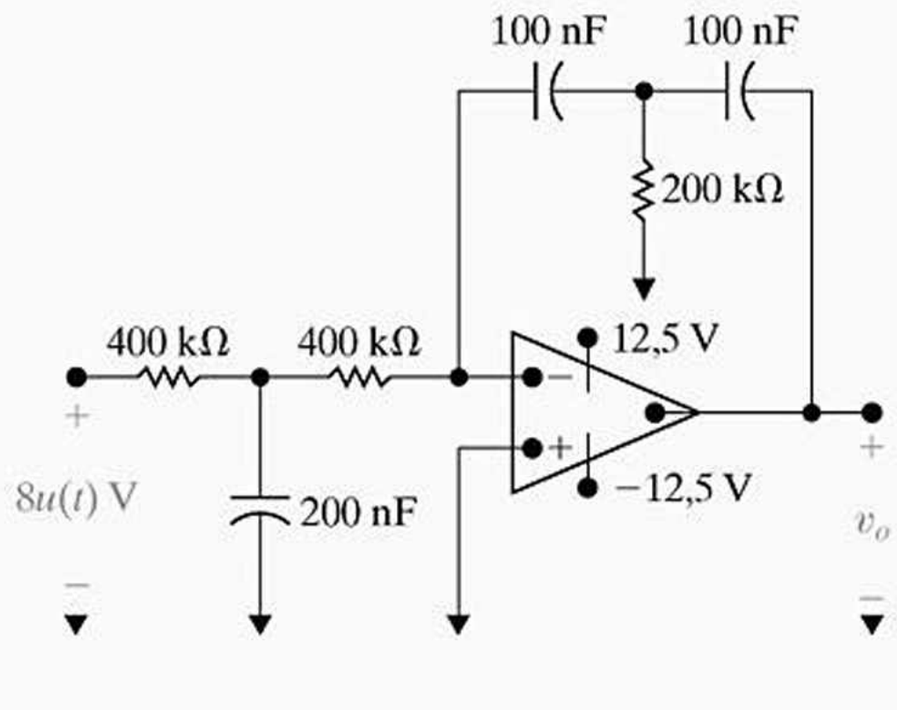
13.47 PSPICE Os amp ops no circuito mostrado na Figura P13.47 são ideais. Não há nenhuma energia armazenada nos capacitores em $t = 0^-$. Se $v_g = 180u(t)$ mV, quanto tempo o amp op leva para ficar saturado?

Figura P13.47



13.48 PSPICE O amp op no circuito da Figura P13.48 é ideal. Não há nenhuma energia armazenada nos capacitores no instante em que o circuito é energizado. Determine (a) V_o, (b) v_o e (c) quanto tempo o amplificador operacional leva para saturar.

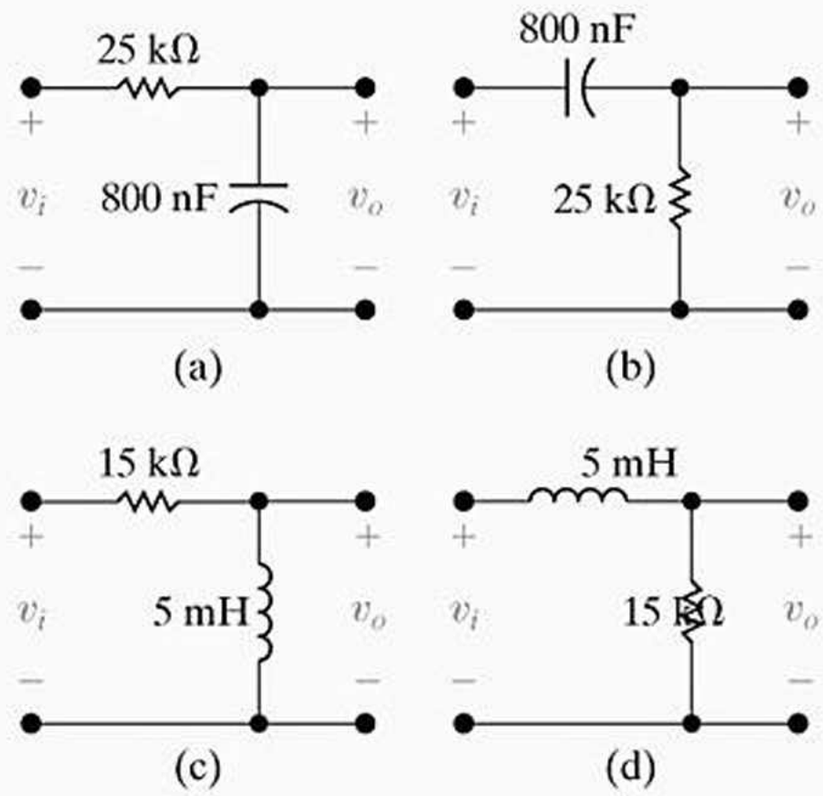
Figura P13.48

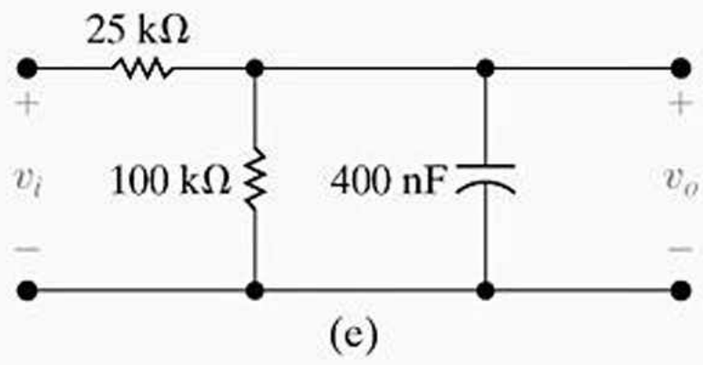


Seções 13.4–13.5

13.49* Determine a expressão numérica para a função de transferência (V_o/V_i) de cada circuito da Figura P13.49 e os valores numéricos dos pólos e zeros de cada função de transferência.

Figura P13.49



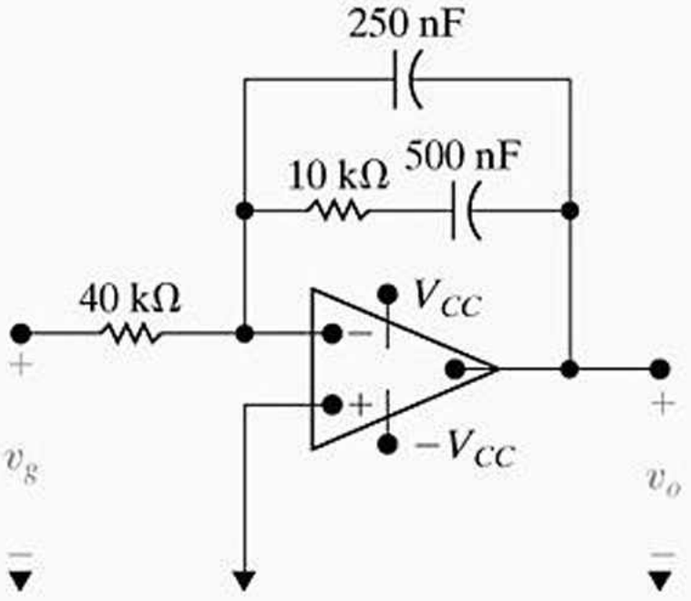


13.50 O amplificador operacional no circuito da Figura P13.50 é ideal.

a) Determine a expressão numérica para a função de transferência $H(s) = V_o/V_g$.

b) Determine o valor numérico de cada zero e pólo de $H(s)$.

Figura P13.50

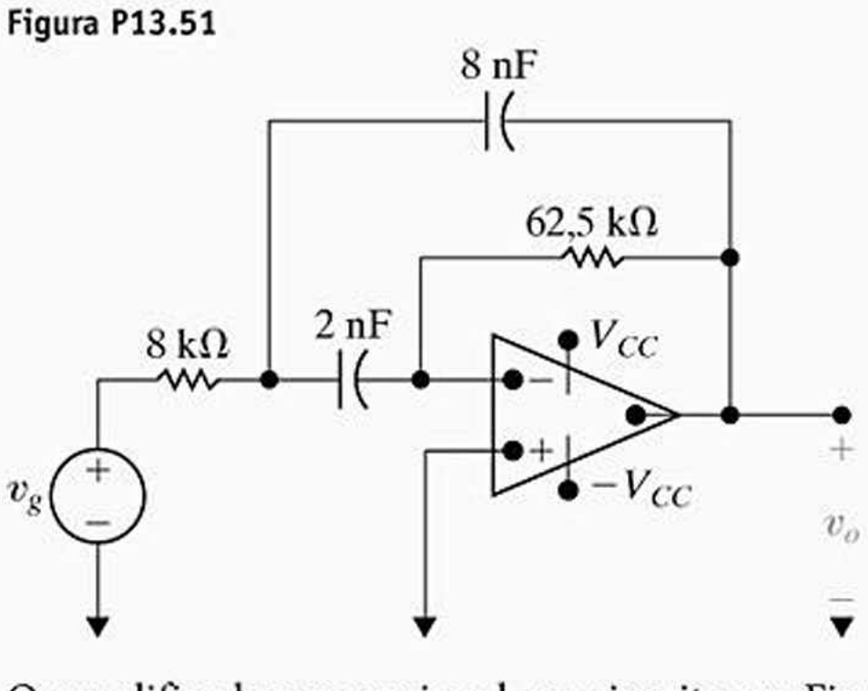


13.51 O amplificador operacional no circuito da Figura P13.51 é ideal.

a) Determine a expressão numérica da função de transferência $H(s) = V_o/V_g$ para o circuito na Figura P13.51.

b) Determine o valor numérico de cada pólo e zero de $H(s)$.

Figura P13.51

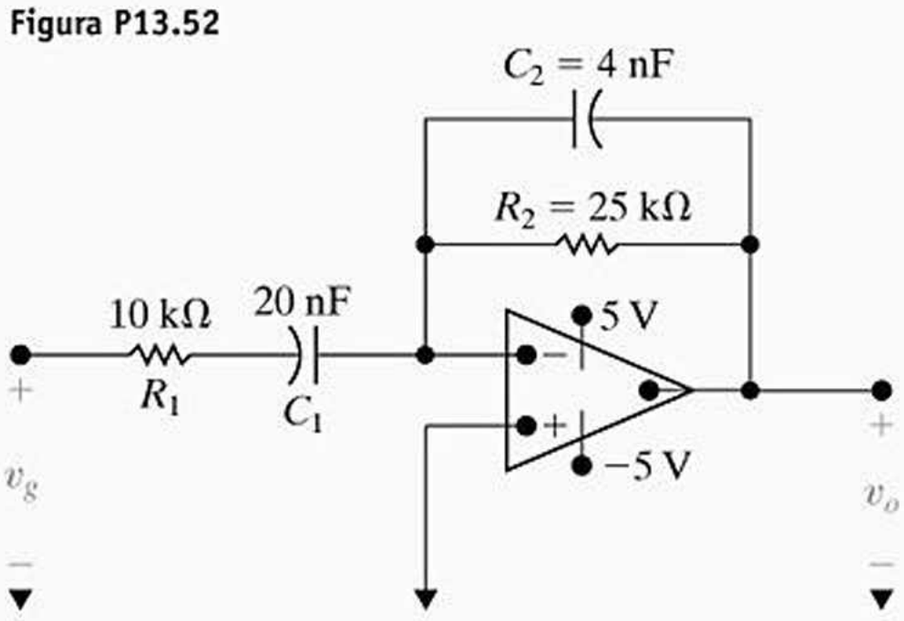


13.52 O amplificador operacional no circuito na Figura P13.52 é ideal.

a) Determine a expressão numérica para a função de transferência $H(s) = V_o/V_g$.

b) Determine o valor numérico de cada zero e pólo de $H(s)$.

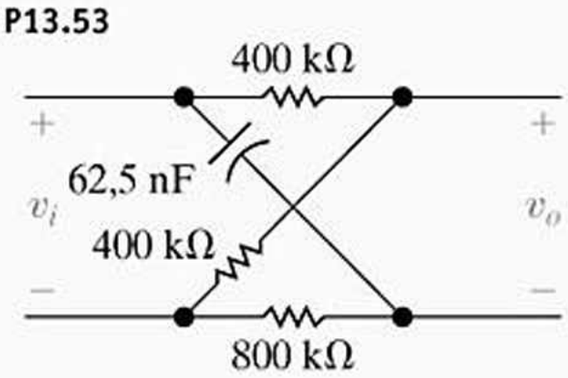
Figura P13.52



13.53 a) Determine a expressão numérica para a função de transferência $H(s) = V_o/V_i$ para o circuito na Figura P13.53.

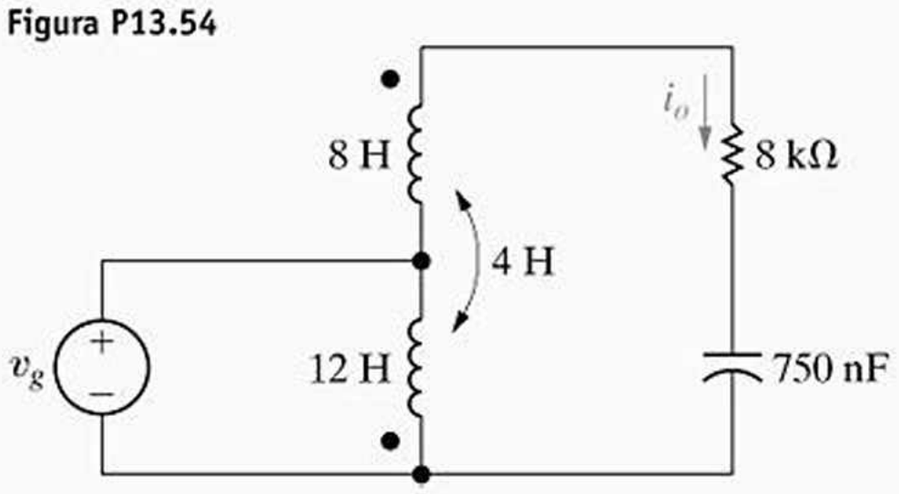
b) Determine o valor numérico de cada pólo e zero de $H(s)$.

Figura P13.53



13.54 No circuito da Figura P13.54 i_o é o sinal de saída e v_g é o sinal de entrada. Determine os pólos e zeros da função de transferência.

Figura P13.54



13.55 PSPICE Não há nenhuma energia armazenada no circuito da Figura P13.55 no instante em que a chave é aberta. A fonte de corrente senoidal fornece o sinal 60 cos 4.000t mA. O sinal de resposta é a corrente i_o.

a) Determine a função de transferência I_o/I_g.

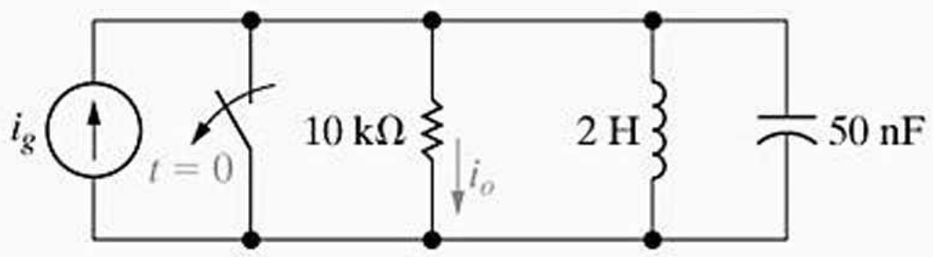
b) Determine $I_o(s)$.

c) Descreva a natureza do componente transitório de $i_o(t)$ sem calcular $i_o(t)$.

d) Descreva a natureza do componente de regime permanente de $i_o(t)$ sem calcular $i_o(t)$.

e) Verifique as observações feitas em (c) e (d) determinando $i_o(t)$.

Figura P13.55

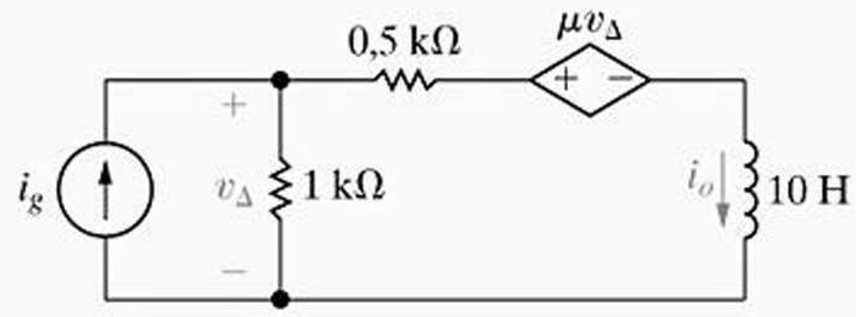


13.56 PSPICE a) Determine a função de transferência I_o/I_g como uma função de μ para o circuito da Figura P13.56.

b) Determine o maior valor de μ que produzirá um sinal de saída limitado para um sinal de entrada limitado.

c) Determine i_o para $\mu = -0{,}5$, 0, 1, 1,5 e 2 se $i_g = 10u(t)$ A.

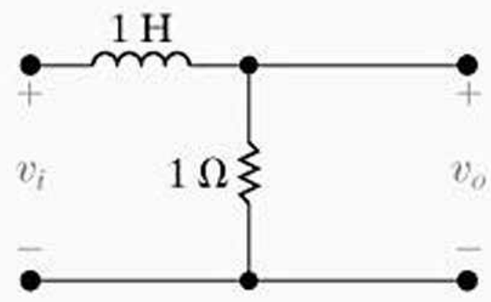
Figura P13.56



Seção 13.6

13.57* Um pulso de tensão retangular $v_i = [u(t) - u(t-1)]$ V é aplicado ao circuito da Figura P13.57. Use a integral de convolução para determinar v_o.

Figura P13.57



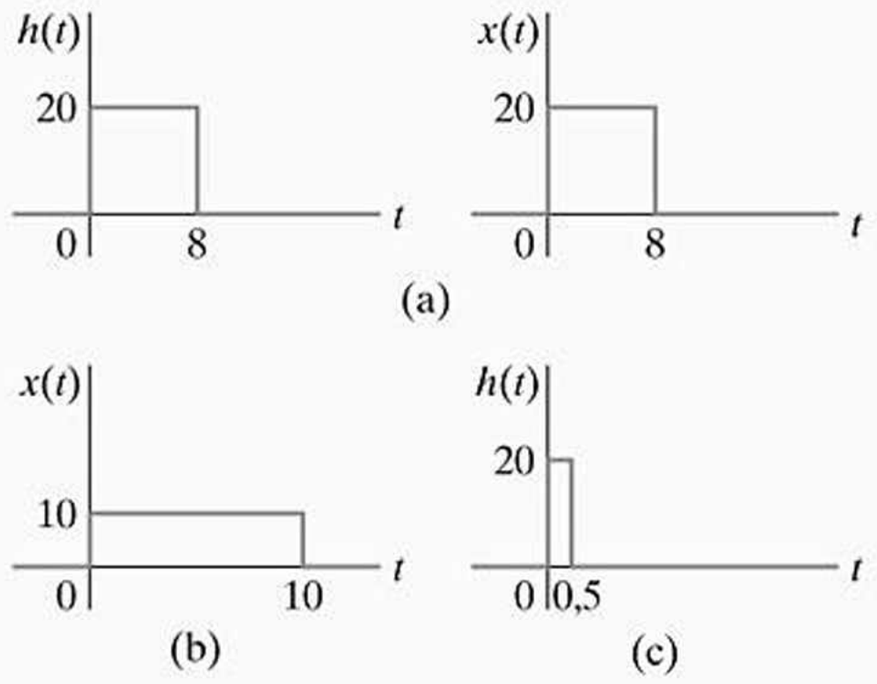
13.58* Permute o indutor e o resistor no Problema 13.57 e use novamente a integral de convolução para determinar v_o.

13.59 a) Determine $h(t) * x(t)$ quando $h(t)$ e $x(t)$ são os pulsos retangulares mostrados na Figura P13.59(a).

b) Repita (a) quando $x(t)$ mudar para o pulso retangular mostrado na Figura P13.59(b).

c) Repita (a) quando $h(t)$ mudar para o pulso retangular mostrado na Figura P13.59(c).

Figura P13.59



13.60 a) Dada $y(t) = h(t) * x(t)$, determine $y(t)$ quando $h(t)$ e $x(t)$ forem os pulsos retangulares mostrados na Figura P13.60(a).

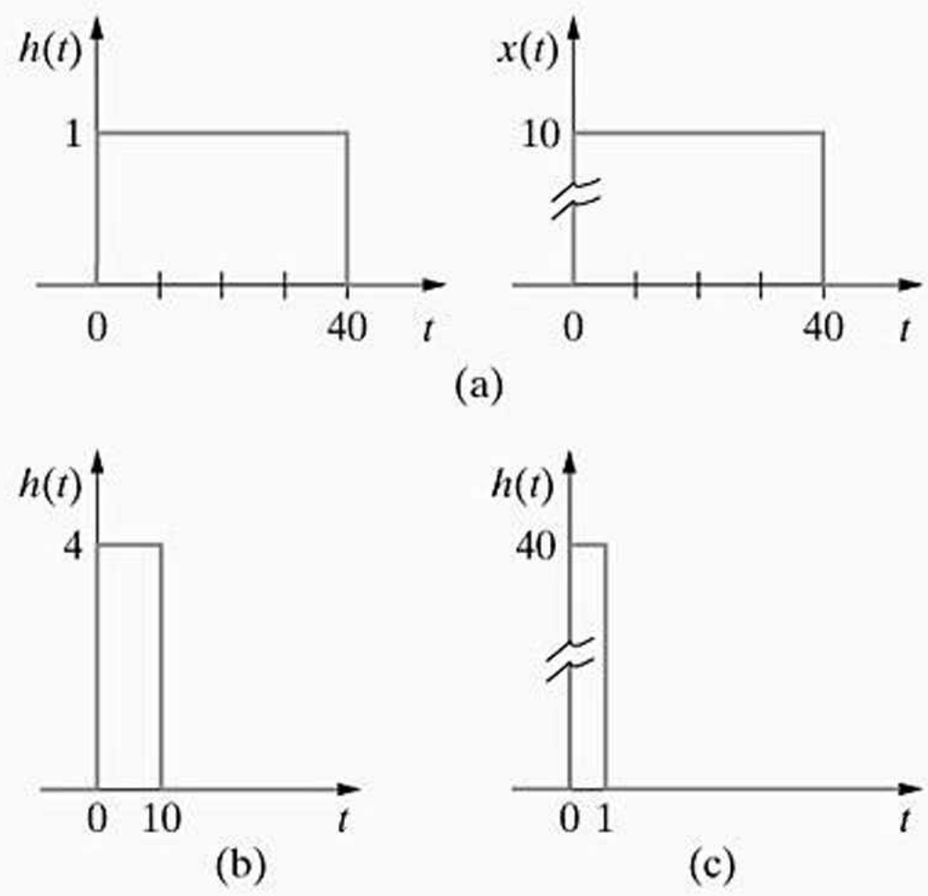
b) Repita (a) quando $h(t)$ mudar para o pulso retangular mostrado na Figura P13.60(b).

c) Repita (a) quando $h(t)$ mudar para o pulso retangular mostrado na Figura P13.60(c).

d) Plote no mesmo gráfico a função $y(t)$ dos itens anteriores.

e) Os gráficos do item (d) fazem sentido? Explique.

Figura P13.60

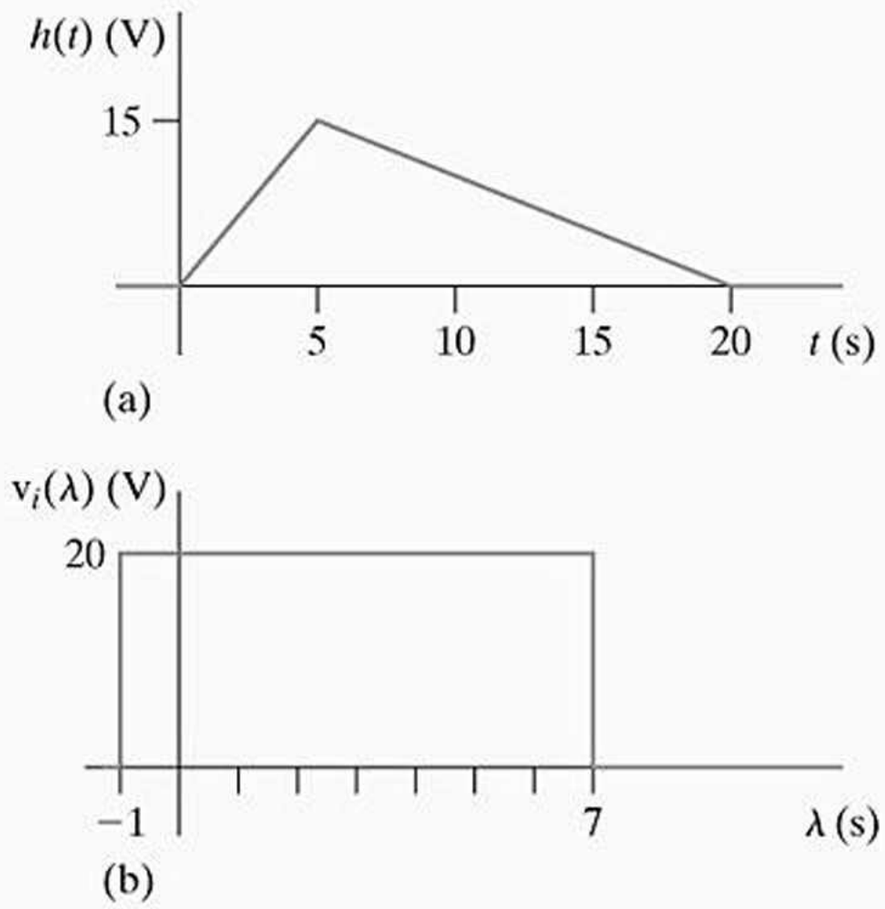


13.61 A resposta a um impulso de tensão de um circuito é mostrada na Figura P13.61(a). O sinal de entrada é o pulso de tensão retangular mostrado na Figura P13.61(b).

a) Determine as equações para a tensão de saída. Observe a faixa de tempo para a qual cada equação é aplicável.

b) Faça o gráfico v_o para $0 \leq t \leq 27$ s.

Figura P13.61



13.62 Admita que a resposta de tensão a um impulso de um circuito possa ser modelada pela forma de onda triangular da Figura P13.62. O sinal de tensão de entrada é a função degrau $4u(t)$ V.

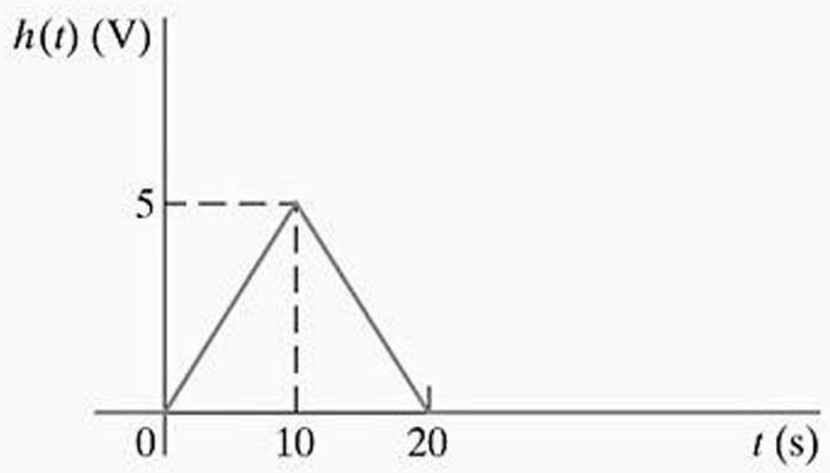
a) Use a integral de convolução para determinar as expressões para a tensão de saída.

b) Faça o gráfico para a tensão de saída no intervalo 0 a 25 s.

c) Repita as partes (a) e (b) se a área sob a resposta a um impulso de tensão permanecer a mesma, mas a largura da resposta ao impulso for reduzida para 5 s.

d) Qual forma de onda de saída está mais próxima da forma de onda de entrada: (b) ou (c)? Explique.

Figura P13.62



13.63 a) Admita que a resposta a um impulso de tensão de um circuito seja

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 10e^{-4t}, & t \geq 0. \end{cases}$$

Use a integral de convolução para determinar a tensão de saída se o sinal de entrada for $10u(t)$ V.

b) Repita (a) se a resposta a um impulso de tensão for

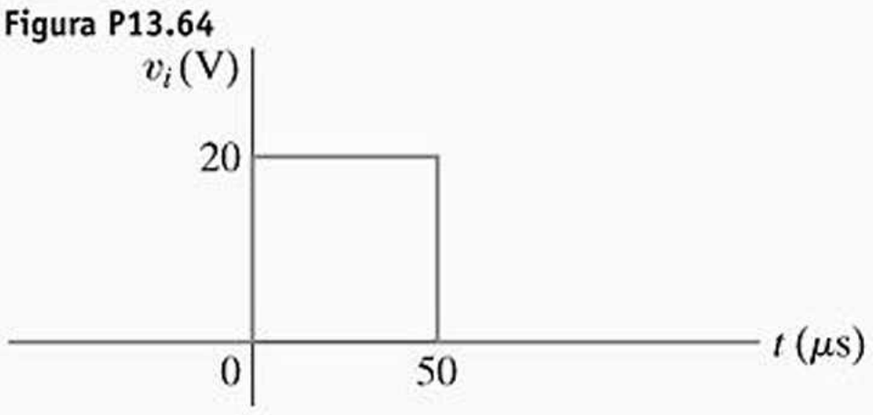
$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 10(1 - 2t), & 0 \leq t \leq 0{,}5 \text{ s} \\ 0, & t \geq 0{,}5 \text{ s} \end{cases}$$

c) Faça o gráfico para a tensão de saída para os itens (a) e (b) para $0 \leq t \leq 100\ \mu$s.

13.64 a) Use a integral de convolução para determinar a tensão de saída do circuito da Figura P13.49(d) se a tensão de entrada for o pulso retangular mostrado na Figura P13.64.

b) Faça o gráfico de $v_o(t)$ para $0 \leq t \leq 100\ \mu$s.

Figura P13.64



13.65 a) Repita o Problema 13.64, dado que o resistor no circuito da Figura P13.49(d) é aumentado para 400 Ω.

b) Aumentar o resistor aumenta ou diminui a memória do circuito?

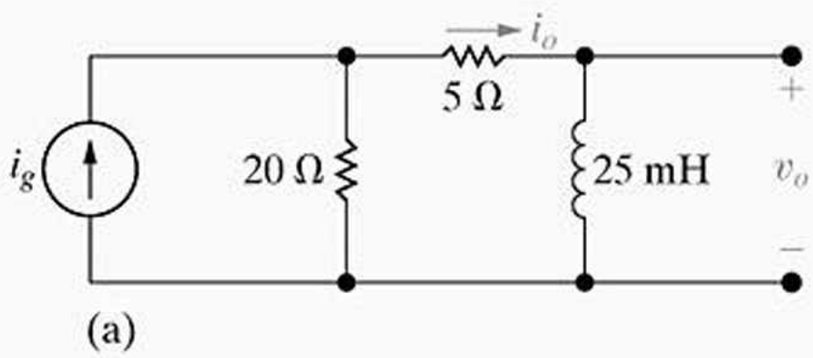
c) Qual circuito reproduz mais fielmente o sinal de entrada?

13.66 a) Use a integral de convolução para determinar i_o no circuito da Figura P13.66(a) se i_g for o pulso mostrado na Figura P13.66(b).

b) Use a integral de convolução para determinar v_o.

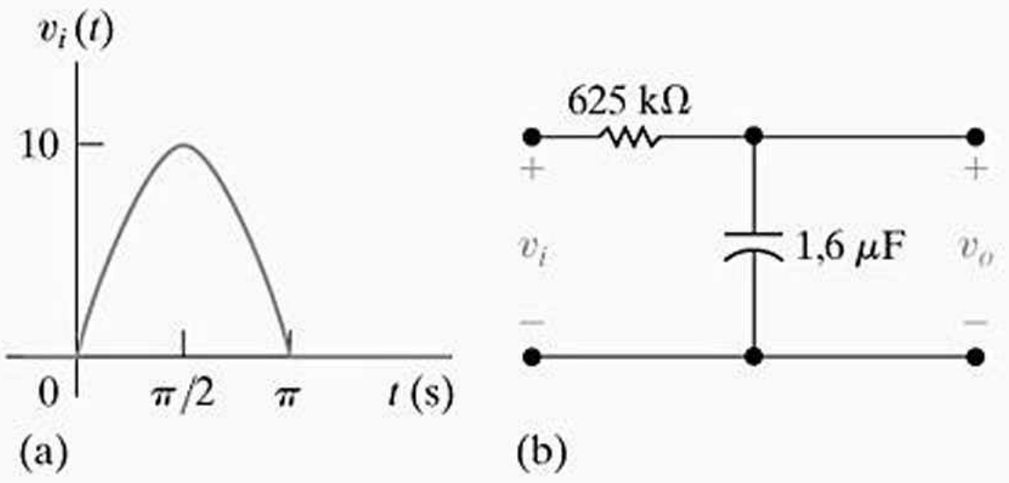
c) Mostre que suas soluções para v_o e i_o são consistentes calculando v_o e i_o em 1^- ms, 1^+ ms, 4^- ms e 4^+ ms.

Figura P13.66



13.67 O pulso de tensão senoidal mostrado na Figura P13.67(a) é aplicado ao circuito da Figura P13.67(b). Use a integral de convolução para determinar o valor de v_o em $t = 2{,}2$ s.

Figura P13.67

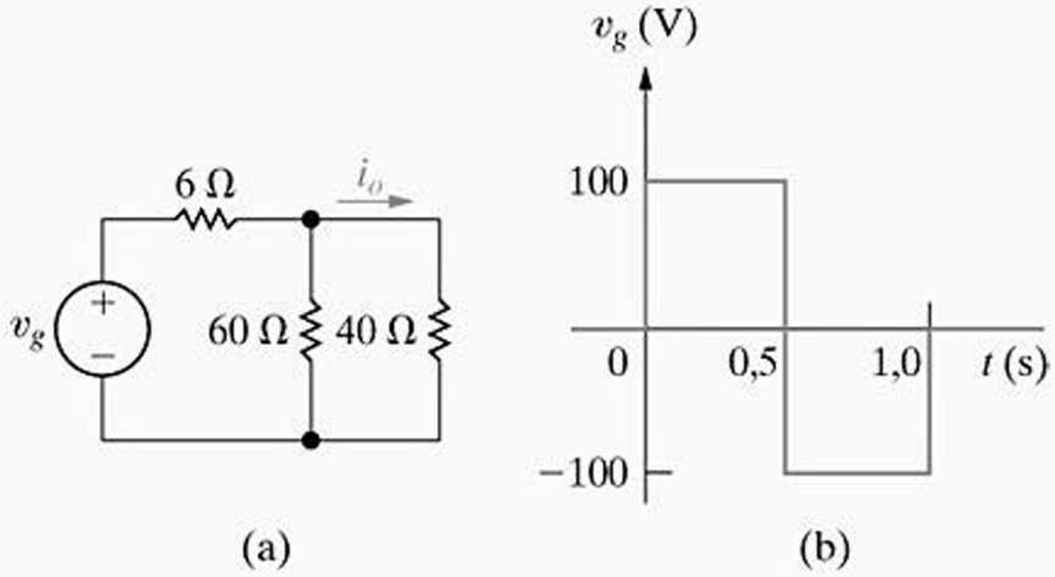


13.68 a) Determine a resposta a um impulso do circuito da Figura P13.68(a) se v_g for o sinal de entrada e i_o for o sinal de saída.

b) Dado que v_g tem a forma de onda mostrada na Figura P13.68(b), use a integral de convolução para determinar i_o.

c) i_o tem a mesma forma de onda de v_g? Por quê?

Figura P13.68



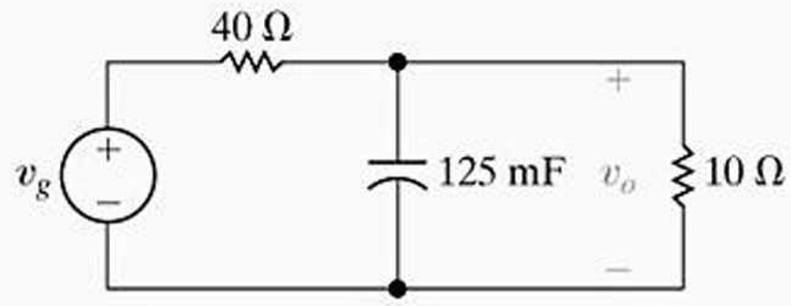
13.69 a) Determine a resposta a um impulso do circuito apresentado na Figura P13.69 se v_g for o sinal de entrada e v_o for o sinal de saída.

b) Admita que a fonte de tensão tenha a forma de onda mostrada na Figura P13.68(b). Use a integral de convolução para determinar v_o.

c) Faça o gráfico de v_o para $0 \leq t \leq 1{,}5$ s.

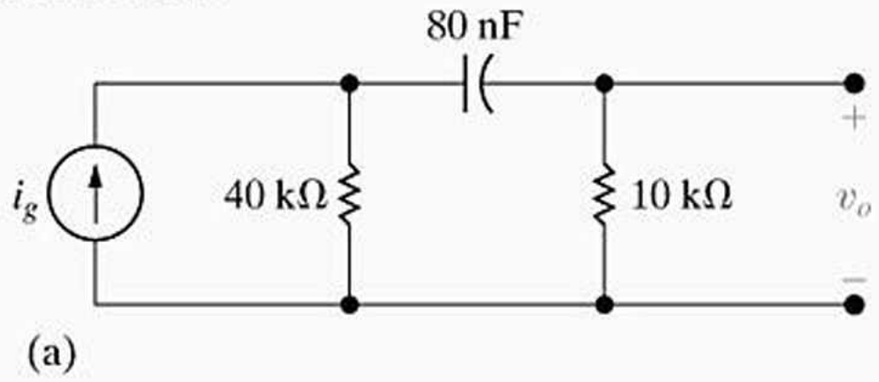
d) v_o tem a mesma forma de onda de v_g? Por quê?

Figura P13.69

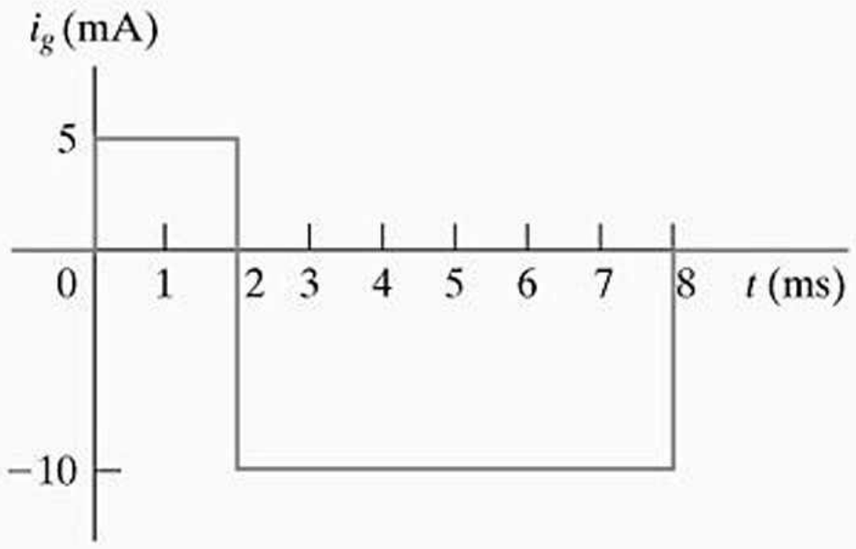


13.70 A fonte de corrente no circuito da Figura P13.70(a) tem a forma de onda da Figura P13.70(b). Use a integral de convolução para determinar v_o em $t = 7$ ms.

Figura P13.70



(a)



(b)

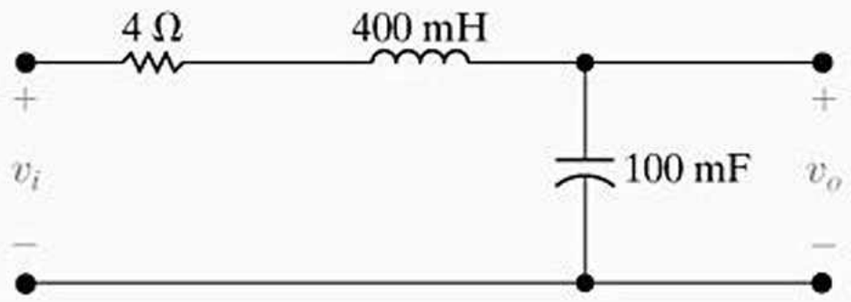
13.71 A tensão de entrada no circuito da Figura P13.71 é

$$v_i = 10[u(t) - u(t - 0{,}1)] \text{ V}.$$

a) Use a integral de convolução para determinar v_o.

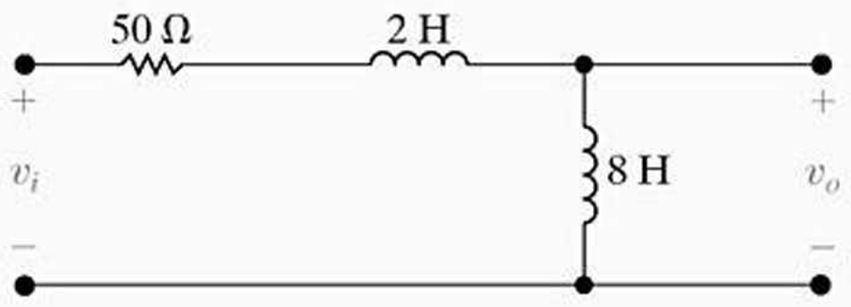
b) Faça o gráfico de v_o para $0 \leq t \leq 1$ s.

Figura P13.71



13.72 Use a integral de convolução para determinar v_o no circuito da Figura P13.72 se $v_i = 75u(t)$ V.

Figura P13.72



13.73 a) Mostre que, se $y(t) = h(t) * x(t)$, então $Y(s) = H(s)X(s)$.

b) Use o resultado dado em (a) para determinar $f(t)$ se

$$F(s) = \frac{a}{s(s + a)^2}.$$

Seção 13.7

13.74* A função de transferência para um circuito linear invariante no tempo é

$$H(s) = \frac{V_o}{V_g} = \frac{10^4(s + 6.000)}{s^2 + 875s + 88 \times 10^6}.$$

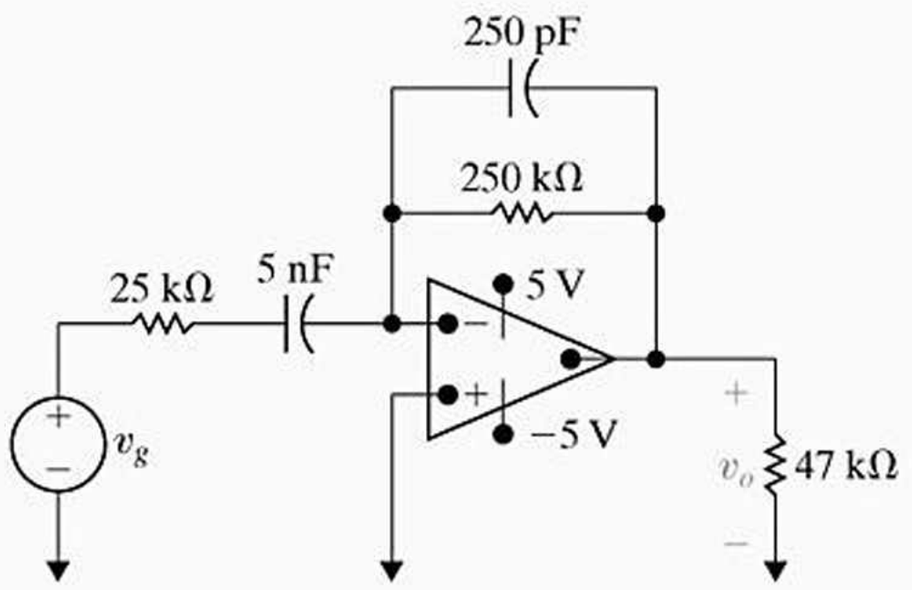
Se $v_g = 12{,}5 \cos 8.000t$ V, qual é a expressão de regime permanente para v_o?

13.75* PSPICE O amplificador operacional no circuito da Figura P13.77 é ideal e está operando na região linear.

a) Calcule a função de transferência V_o/V_g.

b) Se $v_g = 200\sqrt{10} \cos 8.000t$ mV, qual é a expressão de regime permanente de v_o?

Figura P13.75



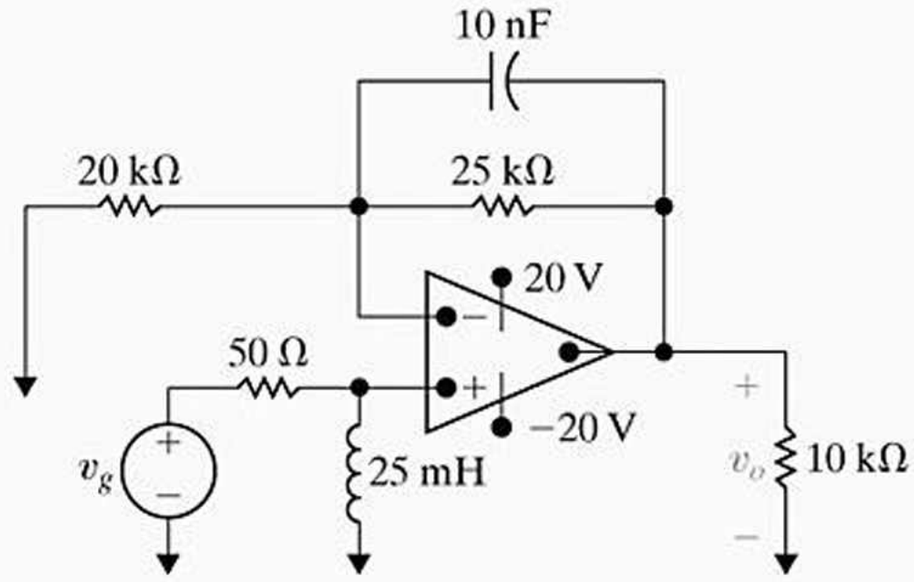
13.76* PSPICE O amp op no circuito da Figura P13.76 é ideal.

a) Determine a função de transferência V_o/V_g.

b) Determine v_o se $v_g = 10u(t)$ V.

c) Determine a expressão de regime permanente de v_o se $v_g = 8 \cos 2.000t$ V.

Figura P13.76



13.77 Quando uma tensão de entrada de $240u(t)$ V é aplicada a um circuito, sabe-se que a resposta é

$$v_o = (75 - 100e^{-800t} + 25e^{-3.200t})u(t) \text{ V}.$$

Qual será a resposta de regime permanente se $v_g = 40 \cos 16.000$ V?

Seção 13.8

13.78 Mostre que, após V_0C_c coulombs serem transferidos de C_1 para C_2 no circuito da Figura 13.47, a tensão em cada capacitor é $C_1V_0/(C_1 + C_2)$. (*Sugestão:* use o princípio de conservação da carga.)

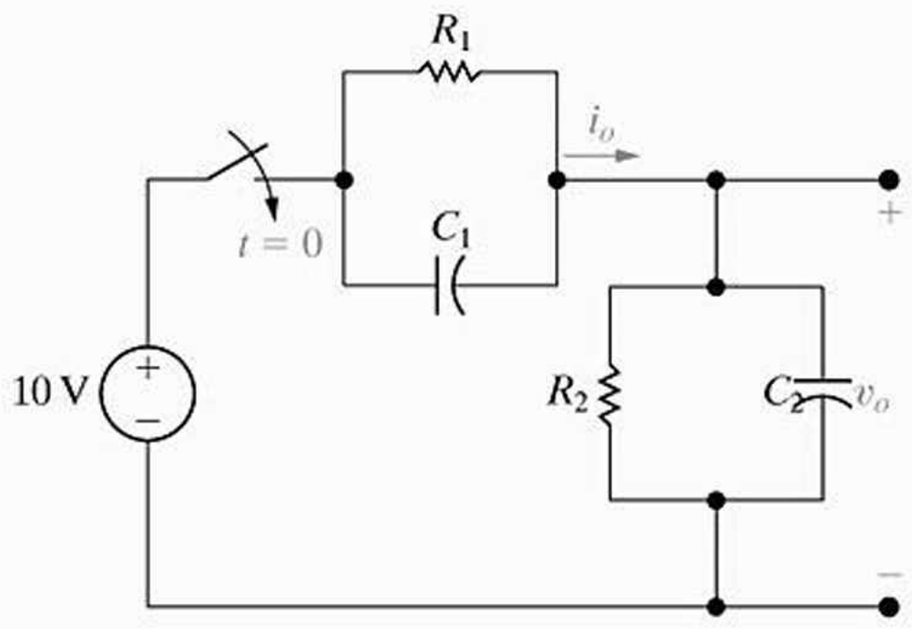
13.79 A combinação em paralelo de R_2 e C_2 no circuito da Figura P13.79 representa o circuito de entrada de um osciloscópio analógico. A combinação em paralelo de R_1 e C_1 representa o cabo de compensação que é usado para ligar a fonte de sinal ao osciloscópio. Não há nenhuma energia armazenada em C_1 ou em C_2 no momento em que a fonte de 10 V é ligada ao osciloscópio por meio do cabo de compensação. Os valores do circuito são $C_1 = 5$ pF, $C_2 = 20$ pF, $R_1 = 1$ MΩ e $R_2 = 4$ MΩ.

a) Determine v_o.

b) Determine i_o.

c) Repita (a) e (b) quando C_1 for alterado para 80 pF.

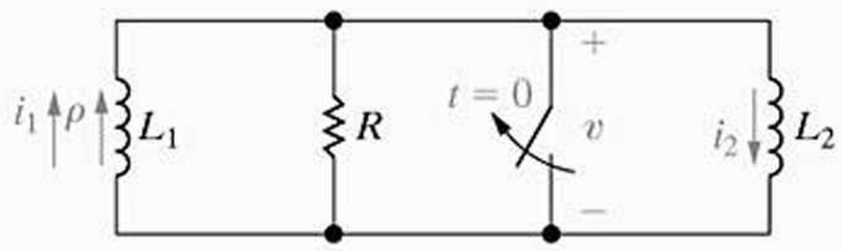
Figura P13.79



13.80 Mostre que, se $R_1C_1 = R_2C_2$ no circuito da Figura P13.79, v_o será uma réplica da fonte de tensão multiplicado por um fator de escala.

13.81 O indutor L_1 no circuito da Figura P13.81 é percorrido por uma corrente inicial de ρ A no instante em que a chave abre. Determine (a) $v(t)$; (b) $i_1(t)$; (c) $i_2(t)$ e (d) $\lambda(t)$, onde $\lambda(t)$ é o fluxo total no circuito.

Figura P13.81

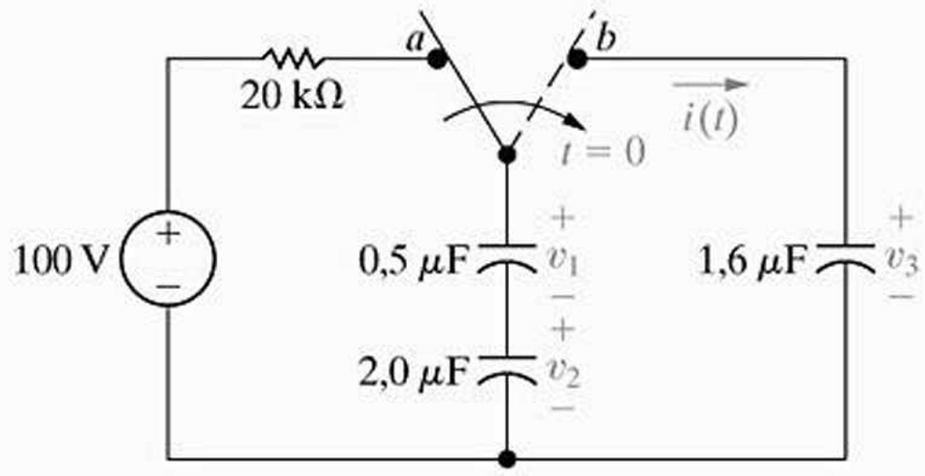


13.82 a) Admita que $R \to \infty$ no circuito da Figura P13.81 e use as soluções encontradas no Problema 13.81 para determinar $v(t)$, $i_1(t)$ e $i_2(t)$.

b) Admita que $R = \infty$ no circuito da Figura P13.81 e use o método da transformada de Laplace para determinar $v(t)$, $i_1(t)$ e $i_2(t)$.

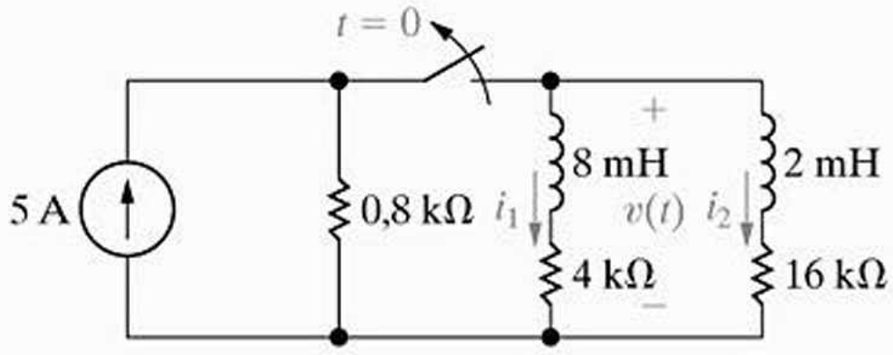
13.83* A chave no circuito da Figura P13.83 esteve na posição *a* por um longo tempo. Em $t = 0$, ela passa para a posição *b*. Calcule (a) $v_1(0^-)$; (b) $v_2(0^-)$; (c) $v_3(0^-)$; (d) $i(t)$; (e) $v_1(0^+)$; (f) $v_2(0^+)$ e (g) $v_3(0^+)$.

Figura P13.83



13.84* A chave no circuito na Figura P13.84 esteve fechada por um longo tempo. Ela se abre em $t = 0$. Calcule (a) $i_1(0^-)$; (b) $i_1(0^+)$; (c) $i_2(0^-)$; (d) $i_2(0^+)$; (e) $i_1(t)$; (f) $i_2(t)$ e (g) $v(t)$.

Figura P13.84

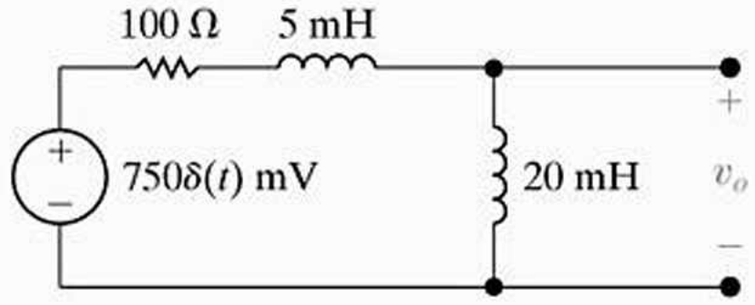


13.85 Não há nenhuma energia armazenada no circuito da Figura P13.85 no instante em que a tensão impulsiva é aplicada.

a) Determine v_o para $t \geq 0$.

b) Sua solução faz sentido em termos do comportamento conhecido do circuito? Explique.

Figura P13.85



13.86 A fonte de tensão no circuito do Exemplo 13.1 é trocada por um impulso unitário; isto é, $v_g = \delta(t)$.

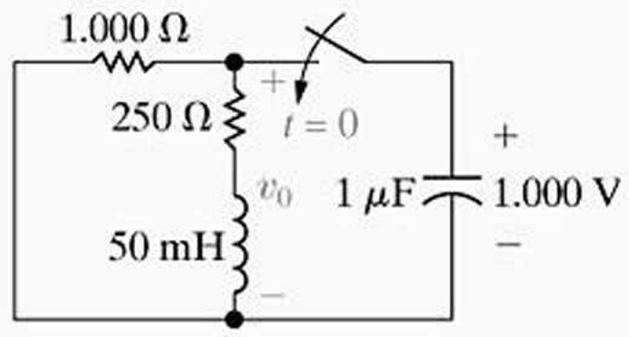
a) Qual é a energia total transferida da fonte de tensão para o capacitor?

b) Qual é a energia total transferida ao indutor?

c) Use a função de transferência para determinar $v_o(t)$.

d) Mostre que a resposta determinada em (c) é a mesma que se obteria se, primeiro, o capacitor fosse carregado com 1.000 V e, então, descarregado através do circuito, como mostra a Figura P13.86.

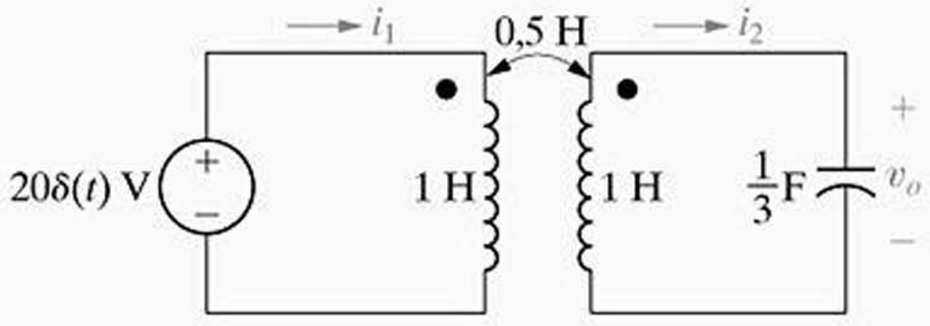
Figura P13.86



13.87 Não há nenhuma energia armazenada no circuito da Figura P13.87 no instante em que a tensão impulsiva é aplicada.

a) Determine i_1 para $t \geq 0^+$.
b) Determine i_2 para $t \geq 0^+$.
c) Determine v_o para $t \geq 0^+$.
d) Suas soluções para i_1, i_2 e v_o fazem sentido em termos do comportamento conhecido do circuito? Explique.

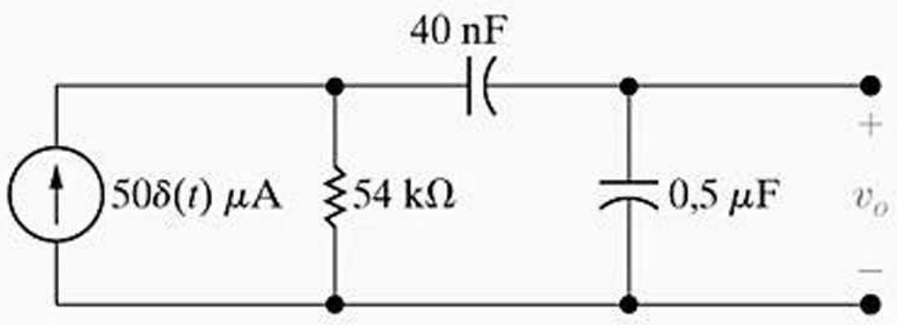
Figura P13.87



13.88 Não há nenhuma energia armazenada no circuito da Figura P13.88 no instante em que a corrente impulsiva é aplicada.

a) Determine v_o para $t \geq 0^+$.
b) Sua solução faz sentido em termos do comportamento conhecido do circuito? Explique.

Figura P13.88



Seções 13.1–13.8

13.89* PERSPECTIVA PRÁTICA Admita que a tensão fase-neutro $\mathbf{V}_o$ no circuito de 60 Hz da Figura 13.59 seja 120 $\angle 0°$ V(ef). A carga R_a está absorvendo 1.200 W; a carga R_b está absorvendo 1.800 W e a carga X_a está absorvendo 350 VAR. A reatância indutiva da linha (X_l) é 1 Ω. Admita que $\mathbf{V}_g$ não mude depois que a chave abre.

a) Calcule o valor inicial de $i_2(t)$ e de $i_L(t)$.
b) Determine $\mathbf{V}_o$, $v_o(t)$ e $v_o(0^+)$ usando o circuito no domínio da freqüência da Figura 13.60.
c) Verifique o componente de regime permanente de v_o usando a análise de domínio fasorial.
d) Usando um programa de computador de sua preferência, faça o gráfico de v_o em relação a t para $0 \leq t \leq 20$ ms.

13.90* PERSPECTIVA PRÁTICA Admita que a chave no circuito da Figura 13.59 abra no instante em que a tensão de regime permanente senoidal v_o é zero, passando de valores negativos a positivos, isto é, $v_o = 120\sqrt{2}$ sen $120\pi t$ V.

a) Determine $v_o(t)$ para $t \geq 0$.
b) Usando um programa de computador de sua preferência, faça o gráfico de $v_o(t)$ para $0 \leq t \leq 20$ ms.
c) Compare a perturbação na tensão na parte (a) com a obtida na parte (c) do Problema 13.89.

13.91 PERSPECTIVA PRÁTICA A finalidade deste problema é mostrar que a tensão fase-neutro no circuito da Figura 13.59 pode passar diretamente para regime permanente se a carga R_b for desligada no instante certo. Seja $v_o = V_m \cos(120\pi t - \theta°)$ V, onde $V_m = 120\sqrt{2}$. Admita que v_g não mude após R_b ser desligado.

a) Determine o valor de θ (em graus) de modo que v_o passe diretamente para o regime permanente quando a carga R_b for desligada.
b) Para o valor de θ determinado na parte (a), determine $v_o(t)$ para $t \geq 0$.
c) Usando um programa de computador de sua preferência plote, em um único gráfico, para -10 ms $\leq t \leq 10$ ms, $v_o(t)$ antes e depois de a carga R_b ter sido desligada.

CAPÍTULO

14 Introdução aos circuitos de seleção de freqüências

SUMÁRIO DO CAPÍTULO

14.1 **Observações preliminares**

14.2 **Filtros passa-baixas**

14.3 **Filtros passa-altas**

14.4 **Filtros passa-faixa**

14.5 **Filtros rejeita-faixa**

✔ OBJETIVOS DO CAPÍTULO

1. Conhecer as configurações dos circuitos *RL* e *RC* que funcionam como filtros passa-baixas e saber calcular o valor dos componentes para atender a uma freqüência de corte especificada.
2. Conhecer as configurações dos circuitos *RL* e *RC* que funcionam como filtros passa-altas e saber calcular o valor dos componentes para atender a uma freqüência de corte especificada.
3. Conhecer as configurações dos circuitos *RLC* que funcionam como filtros passa-faixa, entender a definição e a relação entre freqüência central, freqüências de corte, largura de faixa e fator de qualidade de um filtro passa-faixa e saber calcular o valor dos componentes para cumprir as especificações de projeto.
4. Conhecer as configurações dos circuitos *RLC* que funcionam como filtros rejeita-faixa, entender a definição e a relação entre freqüência central, freqüências de corte, largura de faixa e fator de qualidade de um filtro rejeita-faixa e saber calcular o valor dos componentes para cumprir as especificações de projeto.

Até este ponto de nossa análise de circuitos com fontes senoidais, a freqüência da fonte foi mantida constante. Neste capítulo, analisaremos o efeito da variação da freqüência da fonte sobre as tensões e correntes. O resultado dessa análise é a *resposta de freqüência* de um circuito.

Em capítulos anteriores, vimos que a resposta de um circuito depende dos tipos de elementos presentes, do modo como eles estão ligados e de suas impedâncias. Embora a variação da freqüência de uma fonte senoidal não altere os tipos de elementos, nem suas ligações, ela altera a impedância de capacitores e indutores, pois essa impedância é uma função da freqüência. Como veremos, a cuidadosa escolha dos elementos de circuito, seus valores e suas ligações a outros elementos nos possibilita construir circuitos cuja saída contém somente os sinais de entrada que se encontram dentro de uma determinada faixa de freqüências. Tais circuitos são denominados *circuitos de seleção de freqüências*. Muitos dispositivos que se comunicam por meio de sinais elétricos, como telefones, rádios, televisores e satélites, empregam esse tipo de circuito.

Circuitos de seleção de freqüências também são denominados *filtros* em razão de sua capacidade de filtrar certos sinais de entrada com base na freqüência. A Figura 14.1 representa esquematicamente essa propriedade. Para sermos mais precisos, deveríamos observar que, na prática, nenhum circuito de seleção de freqüências consegue filtrar as freqüências selecionadas com perfeição ou completamente. Mais exatamente, filtros *atenuam* — isto é, enfraquecem ou reduzem o efeito de — quaisquer sinais de entrada cujas freqüências estejam fora de determinada faixa. O sistema de som estereofônico que você tem em casa pode estar equipado com um equalizador gráfico, que é um excelente exemplo de conjunto de filtros. Cada faixa no equalizador gráfico é um filtro que amplifica sons (freqüências audíveis) na faixa de freqüência determinada e atenua freqüências que estão fora dessa faixa. Assim, o equalizador gráfico permite que você altere o volume de som em cada faixa de freqüência.

Perspectiva prática

Circuitos de telefone de teclas

Neste capítulo, examinaremos circuitos em que a freqüência da fonte varia. O comportamento desses circuitos varia à medida que a freqüência da fonte varia, pois a impedância dos componentes reativos é uma função da freqüência da fonte. Esses circuitos dependentes da freqüência são denominados *filtros* e são usados em muitos equipamentos elétricos comuns.

Em rádios, os filtros são usados para selecionar o sinal de uma estação e, ao mesmo tempo, rejeitar os sinais de outras, que transmitem em freqüências diferentes. Em sistemas estereofônicos, os filtros são usados para ajustar as intensidades relativas dos componentes de baixa e alta freqüência do sinal de áudio. Filtros são usados por todos os sistemas telefônicos.

Um telefone de teclas produz tons que você ouve quando aciona uma tecla. É bem possível que você já tenha se perguntado sobre esses tons. Como eles são usados para informar ao sistema telefônico qual tecla foi acionada? Afinal, por que usar tons? Por que os tons têm sons musicais? Como o sistema telefônico distingue entre os tons das teclas e os sons normais de pessoas falando ou cantando?

O sistema telefônico foi projetado para manipular sinais de áudio — cujas freqüências estão entre 300 Hz e 3 kHz. Por isso, todos os sinais do sistema dirigidos ao usuário têm de ser audíveis — incluindo o tom de discar e o sinal de ocupado. De maneira semelhante, todos os sinais dirigidos do usuário ao sistema têm de ser audíveis, incluindo o sinal emitido quando o usuário acionou uma tecla. É importante distinguir entre os sinais das teclas e os sinais normais de áudio. Assim, um sistema multifreqüência de tom dual [*dual-tone-multiple-frequency* — DTMF) é utilizado. Quando uma tecla correspondente a um número é acionada, um par exclusivo de tons senoidais, com freqüências precisamente determinadas, é enviado pelo aparelho ao sistema telefônico. As especificações de freqüência e temporização do DTMF praticamente impossibilitam que uma voz humana produza os pares de tons exatos, ainda que alguém tentasse. A central telefônica, onde circuitos elétricos monitoram o sinal de áudio, detecta os pares de tons que sinalizam um número. No exemplo da "Perspectiva prática" no final do capítulo, examinaremos o projeto dos filtros DTMF usados para determinar qual tecla foi acionada.

Começamos este capítulo analisando circuitos de cada uma das quatro principais categorias de filtros: passa-baixas, passa-altas, passa-faixa e rejeita-faixa. A função de transferência de um circuito é o ponto de partida para a análise da resposta de freqüência. Preste muita atenção às similaridades entre as funções de transferência de circuitos que executam a mesma função de filtragem. Empregaremos essas similaridades quando projetarmos filtros no Capítulo 15.

14.1 Observações preliminares

Lembre-se de que na Seção 13.7 dissemos que a função de transferência de um circuito proporciona um meio fácil de calcular a resposta, de regime permanente, a uma entrada senoidal. Naquela seção, consideramos somente fontes de freqüência fixa. Para estudar a resposta de freqüência de um circuito, substituímos uma fonte senoidal de freqüência fixa por uma fonte senoidal de freqüência variável. A função de transferência ainda é uma ferramenta de imensa utilidade, pois o módulo e a fase do sinal de saída dependem somente do módulo e da fase da função de transferência $H(j\omega)$.

Observe que a abordagem que acabamos de delinear pressupõe que podemos variar a freqüência de uma fonte senoidal sem alterar seu módulo ou ângulo de fase. Dessa forma, a amplitude e a fase da saída variarão somente se a amplitude e a fase da função de transferência variarem, à medida que a freqüência da fonte senoidal for alterada.

Para simplificar ainda mais esse primeiro exame de circuitos de seleção de freqüências, também restringimos nossa atenção a casos em que ambos os sinais de entrada e saída são tensões senoidais, como ilustrado na Figura 14.2. Assim, a função de transferência de interesse será a razão entre a transformada de Laplace da tensão de saída e a transformada de Laplace da tensão de entrada, ou $H(s) = V_o(s)/V_i(s)$. Entretanto, devemos ter em mente que, para determinada aplicação, o sinal de entrada ou o sinal de saída pode ser uma corrente.



Figura 14.1 ▲ Ação de um filtro sobre um sinal de entrada produz um sinal de saída.

Os sinais que passam da entrada para a saída encontram-se dentro de uma faixa de freqüências denominada *faixa de passagem.* As tensões de entrada que estão fora dessa faixa têm seus módulos atenuados pelo circuito e são, por isso, efetivamente impedidas de chegar aos terminais de saída do circuito. Freqüências que não estão dentro da faixa de passagem de um circuito estão dentro de sua *faixa de rejeição.* Circuitos de seleção de freqüências são caracterizados pela localização da faixa de passagem.

Um modo de identificar o tipo do circuito de seleção de freqüências é examinar seu *gráfico de resposta de freqüência.* Um gráfico de resposta de freqüência mostra como a função de transferência de um circuito (de amplitude e de fase) muda à medida que a freqüência da fonte varia. Um gráfico de resposta de freqüência tem duas partes. Uma é um gráfico de $|H(j\omega)|$ em função da freqüência ω. Essa parte do gráfico é denominada *gráfico de amplitude.* A outra parte é um gráfico de $\theta(j\omega)$ em função da freqüência ω. Essa parte é denominada *gráfico de fase.*

Os gráficos de resposta de freqüência ideais para as quatro categorias principais de filtros são mostrados na Figura 14.3. As partes (a) e (b) ilustram os gráficos ideais para um filtro passa-baixas e um filtro passa-altas, respectivamente. Ambos os filtros têm uma única faixa de passagem e uma única faixa de rejeição, que são definidas pela *freqüência de corte* que as separam. Os nomes *passa-baixas* e *passa-altas* são derivados dos gráficos de amplitude: um *filtro passa-baixas* deixa passar sinais de freqüências mais baixas do que a freqüência de corte, e um *filtro passa-altas* deixa passar sinais de freqüências mais altas do que a freqüência de corte. Assim, os termos *alta* e *baixa* usados

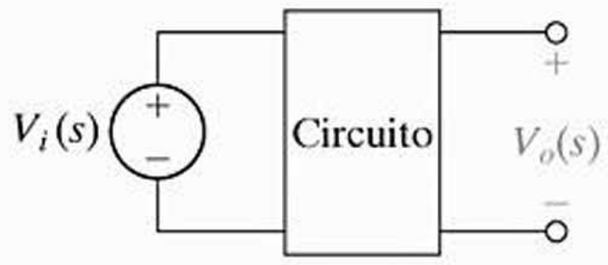


Figura 14.2 ▲ Circuito com entrada e saída de tensão.

aqui não se referem a quaisquer valores absolutos de freqüência — mais exatamente, referem-se a valores relativos à freqüência de corte.

Observe pelos gráficos de ambos os filtros (bem como para os filtros passa-faixa e rejeita-faixa) que o ângulo de fase para um filtro ideal varia linearmente na faixa de passagem. Essa grandeza não é importante fora da faixa de passagem porque, nessa região, a amplitude é zero. A variação linear de fase é necessária para evitar distorção de fase (veja o Capítulo 16).

Cada uma das duas categorias de filtros restantes tem duas freqüências de corte. A Figura 14.3(c) mostra o gráfico de resposta de freqüência ideal de um *filtro passa-faixa* que deixará passar um sinal somente quando sua freqüência estiver dentro da faixa definida pelas duas freqüências de corte. A Figura 14.3(d) mostra o gráfico ideal de um *filtro rejeita-faixa*, que deixará passar um sinal somente quando sua freqüência estiver fora da faixa definida pelas duas freqüências de corte. Desse modo, o filtro rejeita-faixa rejeitará ou impedirá que o sinal de entrada alcance a saída quando sua freqüência estiver dentro da faixa definida pelas freqüências de corte.

Ao especificar um filtro realizável usando qualquer um dos circuitos deste capítulo, é importante observar que as características de amplitude e ângulo de fase não são independentes. Em outras palavras, as características de um circuito que resultam em determinado gráfico de amplitude também determinarão a forma do gráfico de fase e vice-versa. Por exemplo, uma vez selecionada uma forma desejada para a resposta de amplitude de um circuito, a resposta de fase também estará determinada. Por outro lado, se selecionarmos uma forma desejada para a resposta de fase, a resposta da amplitude estará também determinada. Embora existam alguns circuitos de seleção de freqüências cujo comportamento da amplitude e do ângulo de fase pode ser especificado independentemente, esses circuitos não são apresentados aqui.

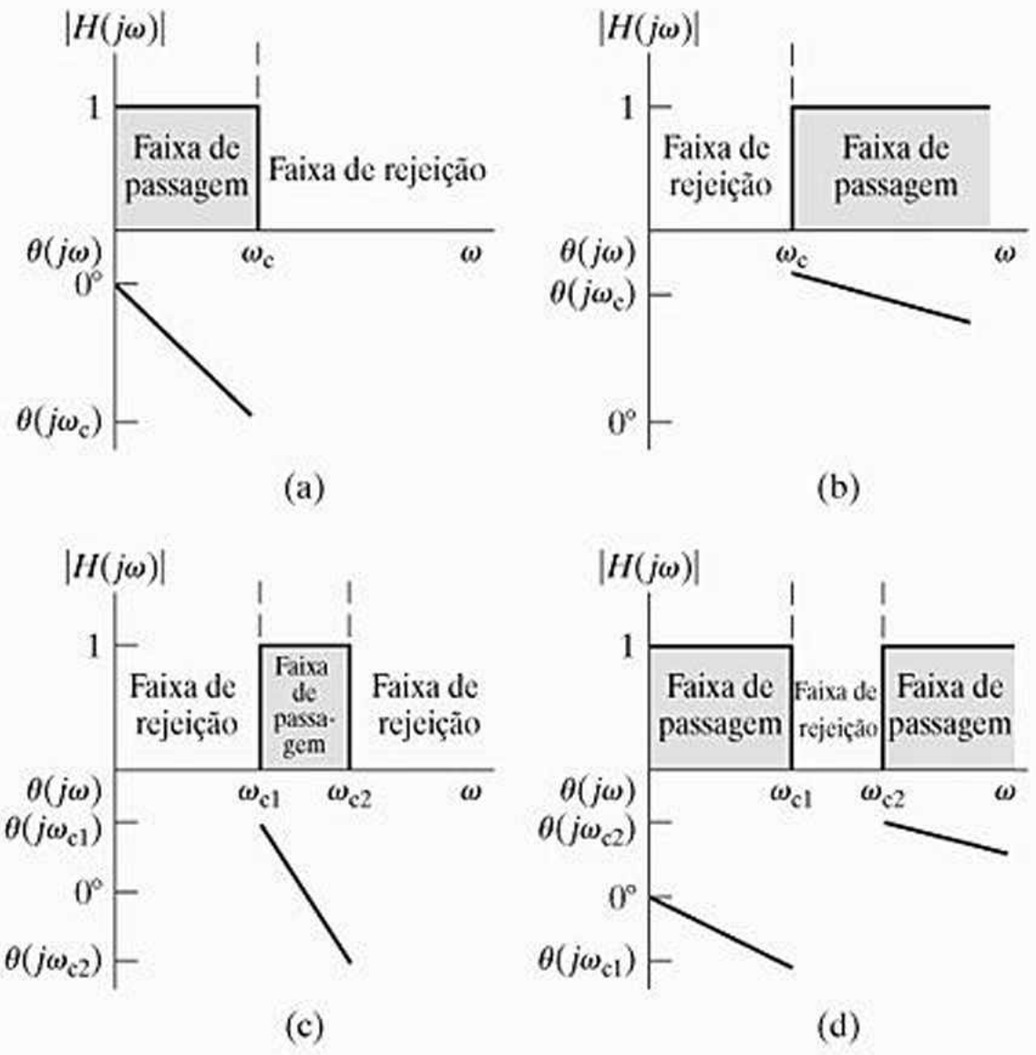


Figura 14.3 ▲ Gráficos de resposta de freqüência ideais dos quatro tipos de filtros. (a) Filtro passa-baixas ideal. (b) Filtro passa-altas ideal. (c) Filtro passa-faixa ideal. (d) Filtro rejeita-faixa ideal.

As próximas seções apresentam exemplos de circuitos de cada uma das quatro categorias de filtro. São apenas alguns dos muitos circuitos que agem como filtros. Você deve tentar identificar quais são as propriedades de um circuito que determinam seu comportamento como um filtro. Examine com atenção a forma da função de transferência para circuitos que executam as mesmas funções de filtragem. Afinal, identificar a forma da função de transferência de um filtro o ajudará a projetar filtros para aplicações particulares.

Todos os filtros que consideraremos neste capítulo são *filtros passivos,* assim denominados porque suas características de filtragem dependem apenas de elementos passivos: resistores, capacitores e indutores. A maior amplitude de saída que tais filtros podem normalmente alcançar é 1, e inserir uma impedância em série com a fonte ou em paralelo com a carga reduzirá essa amplitude. Como em muitas aplicações práticas de filtros exige-se que se aumente a amplitude da saída, os filtros passivos têm algumas desvantagens significativas. O único filtro passivo descrito neste capítulo que pode amplificar sua saída é o filtro de ressonância *RLC* em série. Uma seleção muito maior de filtros amplificadores é encontrada nos filtros ativos, assunto do Capítulo 15.

14.2 Filtros passa-baixas

Agora, examinaremos dois circuitos que se comportam como filtros passa-baixas, o circuito *RL* em série e o circuito *RC* em série, e descobriremos quais são as características desses circuitos que determinam a freqüência de corte.

O circuito *RL* em série — análise qualitativa

Um circuito *RL* em série é mostrado na Figura 14.4(a). O sinal de entrada do circuito é gerado por uma fonte de tensão senoidal de freqüência variável. O sinal de saída do circuito é definido como a tensão no resistor. Suponha que a freqüência da fonte comece com valores muito baixos e aumente gradativamente. Sabemos que o comportamento do resistor ideal não mudará, pois sua impedância é independente de freqüência. No entanto, considere como o comportamento do indutor muda.

Lembre-se de que a impedância de um indutor é $j\omega L$. Em freqüências baixas, a impedância do indutor é muito pequena em comparação com a impedância do resistor e, na verdade, o indutor funciona como um curto-circuito. Por isso, o termo *baixas freqüências* refere-se a quaisquer freqüências para as quais $\omega L << R$. O circuito equivalente para $\omega = 0$ é mostrado na Figura 14.4(b). Nesse circuito equivalente, a tensão de saída e a tensão de entrada são iguais em módulo, bem como em ângulo de fase.

À medida que a freqüência aumenta, a impedância do indutor aumenta em relação à do resistor. Esse aumento provoca um aumento correspondente na queda de tensão no indutor e uma redução correspondente da tensão de saída. Quanto

maior a impedância do indutor, maior será a diferença de fase entre a tensão de entrada e de saída. A tensão de saída fica atrasada em relação à tensão de entrada e, à medida que a freqüência aumenta, essa diferença de fase aproxima-se de 90°.

Em altas freqüências, a impedância do indutor é muito grande em comparação com a impedância do resistor e, por isso, o indutor funciona como um circuito aberto, bloqueando efetivamente o fluxo de corrente no circuito. Assim, o termo *altas freqüências* refere-se a quaisquer freqüências para as quais $\omega L >> R$. O circuito equivalente para $\omega = \infty$ é o mostrado na Figura 14.4(c), onde a amplitude da tensão de saída é zero. O ângulo de fase da tensão de saída é –90° em relação à tensão de entrada.

Com base no comportamento da amplitude da tensão de saída, esse circuito *RL* em série deixa passar, seletivamente, entradas de baixa freqüência e rejeita entradas de alta freqüência. Portanto, a resposta desse circuito a um sinal de freqüência variável de entrada tem a forma mostrada na Figura 14.5. Essas duas representações gráficas constituem as representações gráficas da resposta de freqüência do circuito *RL* em série da Figura 14.4(a). A curva superior mostra como $|H(j\omega)|$ varia com a freqüência. A curva inferior mostra como $\theta(j\omega)$ varia com a freqüência. No Apêndice E apresentamos um método formal para construir esses gráficos.

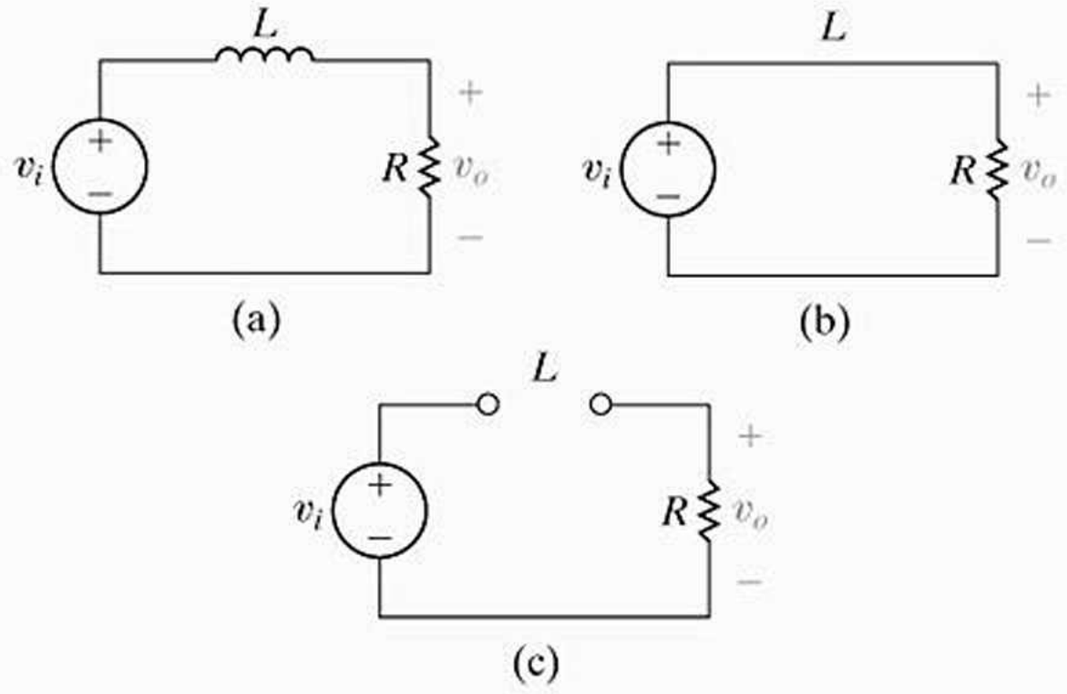


Figura 14.4 ▲ (a) Filtro passa-baixas *RL* em série. (b) Circuito equivalente em $\omega = 0$. (c) Circuito equivalente em $\omega = \infty$.

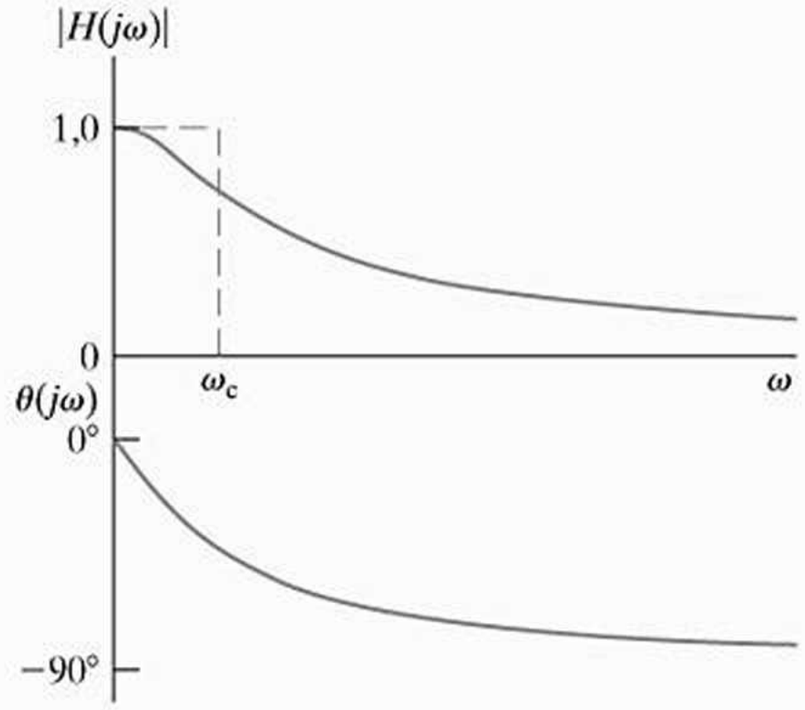


Figura 14.5 ▲ Gráfico de resposta de freqüência para o circuito *RL* em série da Figura 14.4(a).

Também sobrepusemos, na Figura 14.5, o gráfico do módulo da função de transferência para um filtro passa-baixas ideal apresentado na Figura 14.3. É óbvio que há uma diferença entre as representações gráficas de um filtro ideal e da resposta de freqüência de um filtro *RL* real. O filtro ideal exibe uma descontinuidade no módulo da função de transferência na freqüência de corte, ω_c, o que cria uma transição abrupta entre a faixa de rejeição e a faixa de passagem. Embora essa seja a forma ideal segundo a qual gostaríamos que nossos filtros funcionassem, não é possível, usando componentes reais, construir um circuito que apresente essa transição abrupta. Circuitos que agem como filtros passa-baixas têm uma resposta de amplitude que passa gradativamente da faixa de passagem para a faixa de rejeição. Dessa forma, temos de definir, para um circuito real, o que significa a freqüência de corte, ω_c.

Definição da freqüência de corte

Precisamos definir a freqüência de corte, ω_c, para circuitos de filtros reais quando não for possível identificar uma única freqüência que separe a faixa de passagem da faixa de rejeição. A definição de freqüência de corte amplamente usada por engenheiros eletricistas é a freqüência para a qual o módulo da função de transferência diminui por um fator de $1/\sqrt{2}$ em relação a seu valor máximo:

$$|H(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}} H_{\max}, \tag{14.1}$$

(Definição de freqüência de corte)

onde $H_{\max}$ é a máxima amplitude da função de transferência. Decorre da Equação 14.1 que a faixa de passagem de um filtro realizável é definida como a faixa de freqüências em que a amplitude da tensão de saída é no mínimo 70,7% da máxima amplitude possível.

A constante $1/\sqrt{2}$ usada na definição da freqüência de corte talvez pareça uma escolha arbitrária. Contudo, o exame de outra conseqüência da freqüência de corte fará com que essa escolha pareça mais razoável. Lembre-se de que na Seção 10.5 afirmamos que a potência média fornecida por qualquer circuito a uma carga é proporcional a V_L^2, onde V_L é a amplitude da queda de tensão na carga:

$$P = \frac{1}{2}\frac{V_L^2}{R}. \tag{14.2}$$

Se o circuito for alimentado por uma fonte de tensão senoidal, $V_i(j\omega)$, então a tensão da carga também será uma senóide cuja amplitude é uma função da freqüência ω. Defina $P_{\max}$ como o valor da potência média fornecida a uma carga quando a amplitude da tensão de carga for máxima:

$$P_{\max} = \frac{1}{2}\frac{V_{L\max}^2}{R}. \tag{14.3}$$

Se variarmos a freqüência da fonte de tensão senoidal, $V_i(j\omega)$, a tensão da carga será máxima quando a amplitude da função de transferência do circuito também for máxima:

$$V_{L\max} = H_{\max}|V_i|. \tag{14.4}$$

Considere, agora, o que acontece com a potência média quando a freqüência da fonte de tensão é ω_c. Usando a Equação 14.1, determinamos que a amplitude da tensão de carga em ω_c é

$$\begin{aligned} |V_L(j\omega_c)| &= |H(j\omega_c)|V_i| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} H_{\max}|V_i| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} V_{L\max}. \end{aligned} \tag{14.5}$$

Substituindo a Equação 14.5 na Equação 14.2,

$$\begin{aligned} P(j\omega_c) &= \frac{1}{2}\frac{|V_L^2(j\omega_c)|}{R} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}V_{L\max}\right)^2}{R} \\ &= \frac{1}{2}\frac{V_{L\max}^2/2}{R} \\ &= \frac{P_{\max}}{2}. \end{aligned} \tag{14.6}$$

A Equação 14.6 mostra que, na freqüência de corte ω_c, a potência média fornecida pelo circuito é metade da máxima potência média. Assim, ω_c também é denominada *freqüência de meia potência*. Portanto, na faixa de passagem, a potência média fornecida a uma carga é no mínimo 50% da máxima potência média.

O circuito *RL* em série — análise quantitativa

Agora que já definimos a freqüência de corte para circuitos de filtros reais, podemos analisar o circuito *RL* em série para determinar a relação entre os valores dos componentes e a freqüência de corte para esse filtro passa-baixas. Começamos construindo o equivalente no domínio da freqüência do circuito da Figura 14.4(a), admitindo condições iniciais nulas. O circuito equivalente resultante é mostrado na Figura 14.6.

A função de transferência da tensão para esse circuito é

$$H(s) = \frac{R/L}{s + R/L}. \tag{14.7}$$

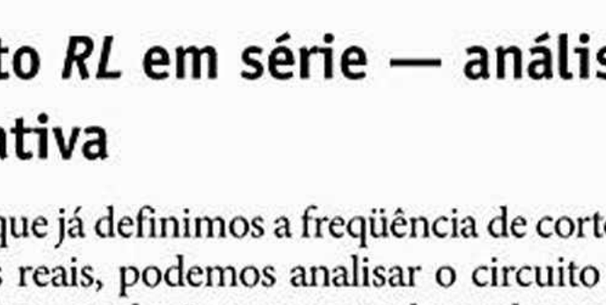


Figura 14.6 ▲ Equivalente, no domínio da freqüência, para o circuito da Figura 14.4(a).

Para estudar a resposta de freqüência, fazemos $s = j\omega$ na Equação 14.7:

$$H(j\omega) = \frac{R/L}{j\omega + R/L}. \tag{14.8}$$

Agora, podemos separar a Equação 14.8 em duas equações. A primeira define o módulo da função de transferência em função da freqüência; a segunda define o ângulo de fase da função de transferência em função da freqüência:

$$|H(j\omega)| = \frac{R/L}{\sqrt{\omega^2 + (R/L)^2}}, \tag{14.9}$$

$$\theta(j\omega) = -\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right). \tag{14.10}$$

Um exame detalhado da Equação 14.9 mostra que ela está de acordo com o gráfico de amplitude da Figura 14.5. Quando $\omega = 0$, o denominador e o numerador são iguais e $|H(j0)| = 1$. Isso significa que, em $\omega = 0$, a tensão de entrada é transferida aos terminais de saída sem mudança de amplitude.

À medida que a freqüência aumenta, o numerador da Equação 14.9 permanece inalterado, mas o denominador cresce. Assim, $|H(j\omega)|$ diminui à medida que a freqüência aumenta, como mostra o gráfico da Figura 14.5. De maneira semelhante, à medida que a freqüência aumenta, o ângulo de fase passa de seu valor cc de 0°, tornando-se mais negativo, como visto na Equação 14.10.

Quando $\omega = \infty$, o denominador da Equação 14.9 é infinito e $|H(j\infty)| = 0$, como visto na Figura 14.5. Em $\omega = \infty$, o ângulo de fase alcança um limite de −90°, como visto na Equação 14.10 e no gráfico da Figura 14.5.

Usando a Equação 14.9, podemos calcular a freqüência de corte, ω_c. Lembre-se de que ω_c é definida como a freqüência na qual $|H(j\omega_c)| = (1/\sqrt{2})H_{\max}$. Para o filtro passa-baixas, $H_{\max} = |H(j0)|$, como visto na Figura 14.5. Desse modo, para o circuito na Figura 14.4(a),

$$|H(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}}|1| = \frac{R/L}{\sqrt{\omega_c^2 + (R/L)^2}}. \tag{14.11}$$

Explicitando ω_c na Equação 14.11, obtemos

$$\omega_c = \frac{R}{L}. \tag{14.12}$$

(Freqüência de corte para filtros *RL*)

A Equação 14.12 é um importante resultado. A freqüência de corte, ω_c, pode assumir qualquer valor desejado mediante a seleção adequada de valores para R e L. Dessa forma, podemos projetar um filtro passa-baixas com qualquer freqüência de corte que precisarmos. O Exemplo 14.1 demonstra a importância da Equação 14.12 para o projeto de filtros passa-baixas.

Exemplo 14.1 Projeto de um filtro passa-baixas

Eletrocardiologia é o estudo dos sinais elétricos produzidos pelo coração. Esses sinais mantêm o batimento rítmico do coração e são medidos por um instrumento denominado eletrocardiógrafo. Esse instrumento deve ser capaz de

detectar sinais periódicos cuja freqüência é de aproximadamente 1 Hz (a taxa normal de batimentos do coração é 72 por minuto). O instrumento tem de funcionar na presença de ruído senoidal que consiste em sinais do ambiente elétrico que o rodeiam, cuja freqüência fundamental é 60 Hz – a freqüência em que a energia elétrica é fornecida.

Escolha valores para R e L no circuito da Figura 14.4(a) de modo que o circuito resultante possa ser usado em um eletrocardiógrafo para filtrar qualquer ruído acima de 10 Hz e deixar passar os sinais elétricos do coração, de freqüência de 1 Hz aproximadamente. Em seguida, calcule a amplitude de V_o a 1 Hz, 10 Hz e 60 Hz para verificar a qualidade de funcionamento do filtro.

Solução

O problema consiste em selecionar valores para R e L que resultem em um filtro passa-baixas com uma freqüência de corte de 10 Hz. Pela Equação 14.12, dado ω_c, vemos que R e L não podem ser especificados independentemente. Portanto, vamos escolher um valor normalmente disponível de L, 100 mH. Antes de usarmos a Equação 14.12 para calcular o valor de R necessário para o estabelecimento da freqüência de corte desejada, precisamos converter essa freqüência de hertz para radianos por segundo:

$$\omega_c = 2\pi(10) = 20\pi \text{ rad/s}$$

Determinamos, agora, o valor de R que, juntamente com $L = 100$ mH, resultará em um filtro passa-baixas com uma freqüência de corte de 10 Hz:

$$R = \omega_c L$$
$$= (20\pi)(100 \times 10^{-3})$$
$$= 6{,}28\ \Omega$$

Podemos calcular o módulo de V_o usando a equação $|V_o| = |H(j\omega)| \cdot |V_i|$:

$$|V_o(\omega)| = \frac{R/L}{\sqrt{\omega^2 + (R/L)^2}}|V_i|$$
$$= \frac{20\pi}{\sqrt{\omega^2 + 400\pi^2}}|V_i|.$$

A Tabela 14.1 resume os valores de amplitude calculados para as freqüências 1 Hz, 10 Hz e 60 Hz. Como esperado, as tensões de entrada e saída têm a mesma amplitude nas baixas freqüências, pois o circuito é um filtro passa-baixas. Na freqüência de corte, a amplitude da tensão de saída foi reduzida de $1/\sqrt{2}$ em relação à amplitude unitária da faixa de passagem. Em 60 Hz, a amplitude da tensão de saída foi reduzida por um fator de aproximadamente 6, obtendo a desejada atenuação do ruído que poderia adulterar o sinal para cuja medição o eletrocardiógrafo foi projetado.

TABELA 14.1 Amplitudes das tensões de entrada e saída para várias freqüências

f(Hz)	$\lvert V_i \rvert$ *(V)*	$\lvert V_o \rvert$ *(V)*
1	1,0	0,995
10	1,0	0,707
60	1,0	0,164

Circuito *RC* em série

O circuito *RC* em série mostrado na Figura 14.7 também se comporta como um filtro passa-baixas. Podemos verificar isso por meio da mesma análise qualitativa que usamos antes. Na verdade, tal exame qualitativo é uma etapa importante na resolução de problemas que você deve adotar como prática habitual quando analisar filtros. Isso o auxiliará a prever as características de filtragem (passa-baixas, passa-altas etc.) e, assim, prever a forma geral da função de transferência. Se a função de transferência calculada concordar com a previsão qualitativa inicial, você terá uma importante verificação da correção de seus cálculos.

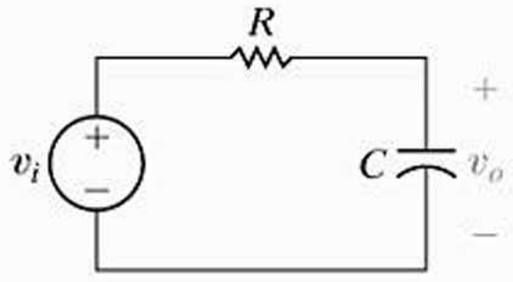


Figura 14.7 ▲ Filtro passa-baixas *RC* em série.

Observe que a saída do circuito é definida como a tensão nos terminais do capacitor. Como fizemos anteriormente, usaremos três regiões de freqüência para a análise qualitativa do comportamento do circuito *RC* em série da Figura 14.7:

1. *Freqüência zero* ($\omega = 0$): a impedância do capacitor é infinita e ele age como um circuito aberto. Assim, as tensões de entrada e saída são as mesmas.

2. *Freqüências crescentes a partir de zero*: a impedância do capacitor decresce em relação à impedância do resistor, e a tensão da fonte divide-se entre a impedância resistiva e a impedância capacitiva. Desse modo, a tensão de saída é menor do que a tensão da fonte.

3. *Freqüência infinita* ($\omega = \infty$): a impedância do capacitor é zero e ele age como um curto-circuito. Assim, a tensão de saída é zero.

Segundo essa análise, o circuito *RC* em série funciona como um filtro passa-baixas. O Exemplo 14.2 explora os aspectos quantitativos desse circuito.

Exemplo 14.2 Projeto de um filtro passa-baixas *RC* em série

Para o circuito *RC* em série da Figura 14.7:

a) Determine a função de transferência entre a tensão da fonte e a tensão de saída.

b) Determine uma equação para a freqüência de corte no circuito *RC* em série.

c) Escolha valores para R e C que resultem em um filtro passa-baixas com uma freqüência de corte de 3 kHz.

Solução

a) Para deduzir uma expressão para a função de transferência, em primeiro lugar, construímos o equivalente no domínio da freqüência do circuito da Figura 14.7, como mostra a Figura 14.8.

Usando a divisão de tensão no domínio da freqüência no circuito equivalente, determinamos

$$H(s) = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}}.$$

Faça, agora, $s = j\omega$ e calcule o módulo da expressão complexa resultante:

$$|H(j\omega)| = \frac{\frac{1}{RC}}{\sqrt{\omega^2 + \left(\frac{1}{RC}\right)^2}}.$$

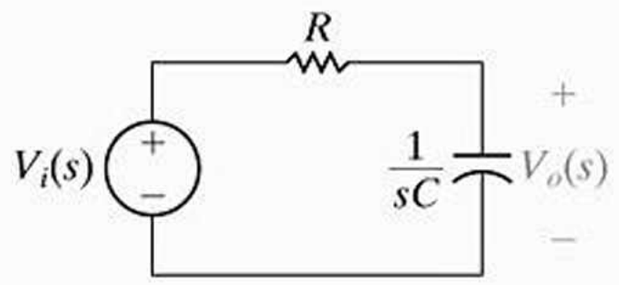


Figura 14.8 ▲ Equivalente no domínio da freqüência para o circuito da Figura 14.7.

b) Na freqüência de corte ω_c, $|H(j\omega)|$ é igual a $(1/\sqrt{2})\,H_{max}$. Para um filtro passa-baixas, $H_{max} = H(j0)$, e, para o circuito na Figura 14.8, $H(j0) = 1$. Então, podemos descrever a relação entre as quantidades R, C e ω_c:

$$|H(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}}(1) = \frac{\frac{1}{RC}}{\sqrt{\omega_c^2 + \left(\frac{1}{RC}\right)^2}}.$$

Explicitando ω_c nessa equação, obtemos

$$\omega_c = \frac{1}{RC}.$$

(Freqüência de corte de filtros *RC*)

c) Pelos resultados de (b), vemos que a freqüência de corte é determinada pelos valores de R e de C. Como R e C não podem ser calculados independentemente, vamos escolher $C = 1\ \mu$F. Quando possível, normalmente especificaremos primeiro um valor para C, em vez de para R ou L, porque os valores de capacitância para capacitores fabricados comercialmente são em número menor que o de valores para resistores ou indutores. Lembre-se de que temos de converter a freqüência de corte especificada de 3 kHz para $(2\pi)(3)$ krad/s:

$$R = \frac{1}{\omega_c C}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)(3 \times 10^3)(1 \times 10^{-6})}$$

$$= 53{,}05\ \Omega$$

A Figura 14.9 mostra os dois circuitos de filtros passa-baixas que examinamos juntamente com suas respectivas funções de transferência. Observe cuidadosamente as funções de transferência. Note como suas formas são semelhantes — a única diferença entre elas são os termos que especificam a freqüência de corte. Na verdade, podemos estabelecer uma forma geral para as funções de transferência desses dois filtros passa-baixas:

$$H(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c}. \tag{14.13}$$

(Função de transferência para um filtro passa-baixas)

Qualquer circuito cuja razão entre as tensões de entrada e saída fosse dada pela Equação 14.13 se comportaria como um filtro passa-baixas, com uma freqüência de corte ω_c. Os problemas no final do capítulo darão outros exemplos de circuitos com essa propriedade.

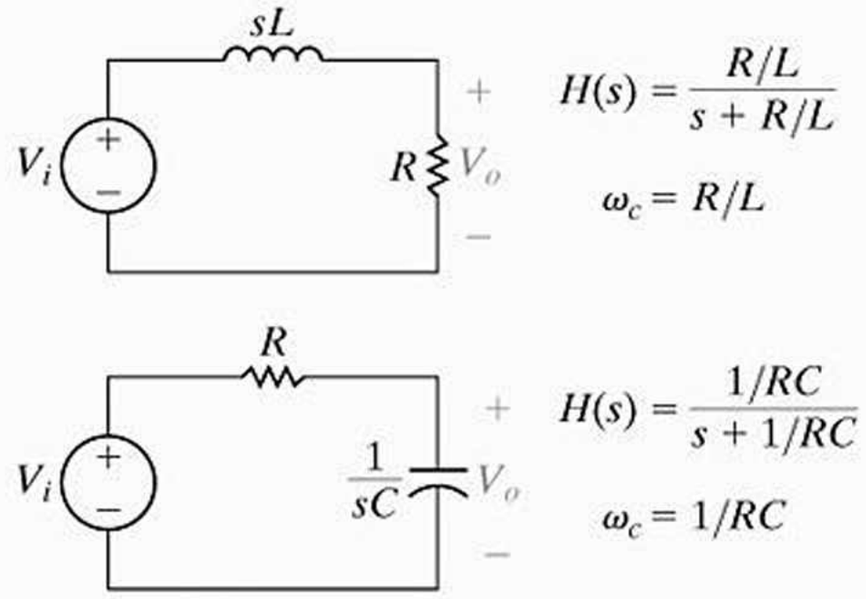


Figura 14.9 ▲ Dois filtros passa-baixas, o *RL* em série e o *RC* em série, juntamente com as respectivas funções de transferência e freqüências de corte.

Relação entre o domínio da freqüência e o domínio do tempo

Por fim, talvez você tenha percebido outra relação importante. Lembre-se de nossa discussão sobre as respostas naturais dos circuitos *RL* e *RC* de primeira ordem no Capítulo 6. Um parâmetro importante para esses circuitos é a constante de tempo, τ, que caracteriza a forma da resposta do

circuito. Para o circuito *RL*, a constante de tempo tem o valor *L*/*R* (Equação 7.14); para o circuito *RC*, a constante de tempo é *RC* (Equação 7.24). Compare as constantes de tempo com as freqüências de corte para esses circuitos e observe que

$$\tau = 1/\omega_c . \tag{14.14}$$

Esse resultado é uma conseqüência direta da relação entre a resposta no domínio do tempo de um circuito e sua resposta no domínio da freqüência, como obtida pela transformada de Laplace. A discussão sobre memória, função de peso e integral de convolução da Seção 13.6 mostra que se $\omega_c \to \infty$, o filtro tende a não ter nenhuma memória e a saída tende a ter a mesma forma da entrada; isto é, não ocorreu nenhuma filtragem. À medida que $\omega_c \to 0$, a memória do filtro tende a aumentar e a tensão de saída tende a ser o sinal de entrada distorcido, pois ocorreu uma filtragem.

14.3 Filtros passa-altas

Em seguida, examinaremos dois circuitos que funcionam como filtros passa-altas. Mais uma vez, eles são o circuito *RL* em série e o circuito *RC* em série. Veremos que o mesmo circuito em série pode agir como um filtro passa-baixas ou um filtro passa-altas, dependendo de onde a tensão de saída é definida. Determinaremos também a relação entre os valores dos componentes e a freqüência de corte desses filtros.

O circuito *RC* em série — análise qualitativa

Um circuito *RC* em série é mostrado na Figura 14.10(a). Em contraste com sua contraparte passa-baixas da Figura 14.7, aqui a tensão de saída é definida nos terminais do resistor e não nos terminais do capacitor. Por causa disso, o efeito da alteração na impedância capacitiva é, neste caso, diferente do caso da configuração passa-baixas.

Em $\omega = 0$, o capacitor comporta-se como um circuito aberto, portanto não há nenhuma corrente fluindo no resistor, o que é ilustrado no circuito equivalente da Figura 14.10(b). Nesse circuito, não há nenhuma tensão nos terminais do resistor e o circuito filtra baixas freqüências da fonte.

À medida que a freqüência da fonte aumenta, a impedância do capacitor decresce em relação à impedância do resistor e a tensão da fonte agora é dividida entre o capacitor e o resistor. Assim, a amplitude da tensão de saída começa a crescer.

Quando a freqüência da fonte é infinita ($\omega = \infty$), o capacitor comporta-se como um curto-circuito e, por isso, não há nenhuma tensão no capacitor, o que é ilustrado no circuito equivalente na Figura 14.10(c). Nesse circuito, a tensão de entrada e a tensão de saída são as mesmas.

A defasagem entre as tensões da fonte e de saída também varia à medida que muda a freqüência da fonte. Para $\omega = \infty$, a tensão de saída é a mesma que a tensão de entrada, portanto a defasagem é zero. Quando a freqüência da fonte decresce e a impedância do capacitor aumenta, aparece uma defasagem entre as tensões da fonte e de saída. A tensão de saída fica adiantada em relação à tensão da fonte. Quando $\omega = 0$, essa defasagem alcança seu máximo de +90°.

Com base em nossa análise qualitativa, vemos que, quando a saída é definida como a tensão nos terminais do resistor, o circuito *RC* em série comporta-se como um filtro passa-altas. Os componentes e ligações são idênticos aos do circuito *RC* passa-baixas, mas a escolha de saída é diferente. Assim, confirmamos o que dissemos antes, isto é, que as características de filtragem de um circuito dependem da definição da saída, bem como dos valores e ligações dos componentes de circuito.

A Figura 14.11 mostra o gráfico da resposta de freqüência para o filtro passa-altas *RC* em série. Como referência, as linhas tracejadas indicam o gráfico de um filtro passa-altas ideal. Agora passaremos à análise quantitativa desse mesmo circuito.

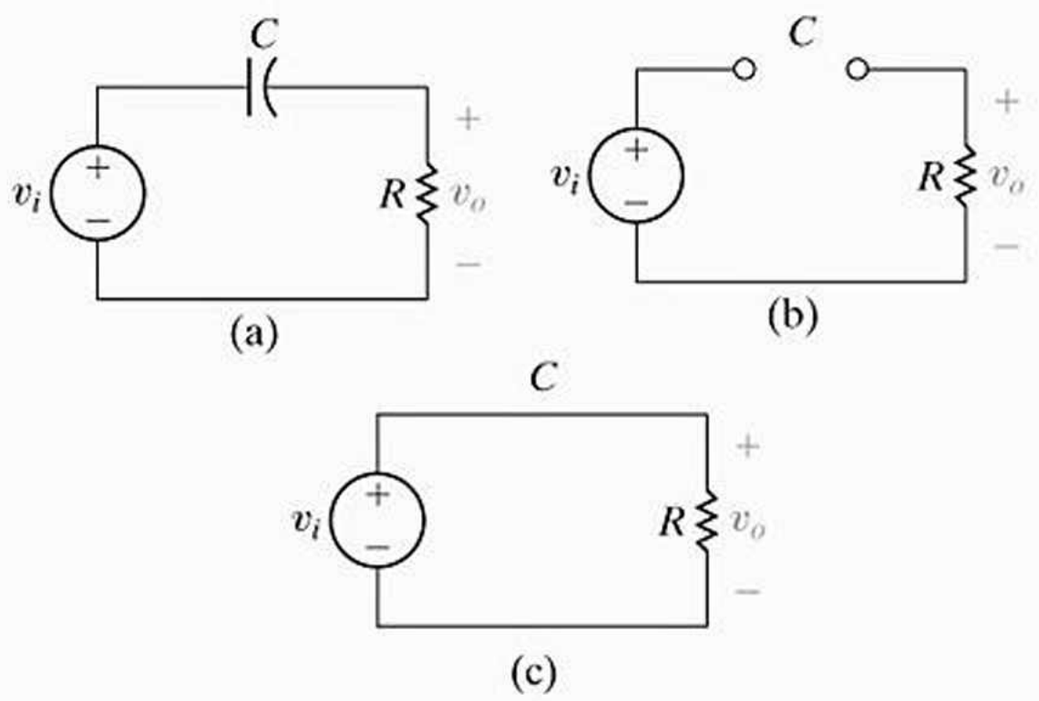


Figura 14.10 ▲ (a) Filtro passa-altas *RC* em série; (b) circuito equivalente em $\omega = 0$ e (c) circuito equivalente em $\omega = \infty$.

✔ PROBLEMAS PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 1 — Conhecer as configurações dos circuitos *RL* e *RC* que funcionam como filtros passa-baixas

14.1 Um filtro passa-baixas *RC* em série deve ter uma freqüência de corte de 8 kHz. Se $R = 10\ \text{k}\Omega$, determine o valor de *C*.

Resposta: 1,99 nF.

14.2 Precisa-se de um filtro passa-baixas *RL* em série com uma freqüência de corte de 2 kHz. Usando $R = 5\ \text{k}\Omega$, calcule (a) *L*; (b) $|H(j\omega)|$ em 50 kHz e (c) $\theta(j\omega)$ em 50 kHz.

Resposta: (a) 0,40 H; (b) 0,04; (c) –87,71°.

NOTA: Tente resolver também os problemas 14.1 e 14.2, apresentados no final deste capítulo.

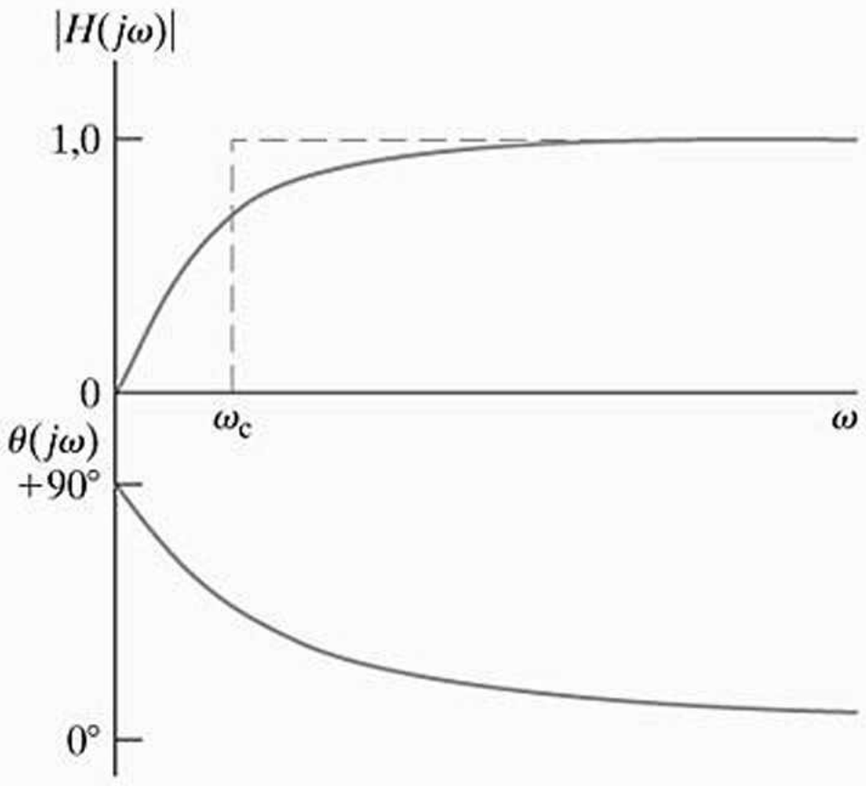


Figura 14.11 ▲ Gráfico de resposta de freqüência para o circuito *RC* em série da Figura 14.10(a).

O circuito *RC* em série — análise quantitativa

Para começar, construímos o circuito equivalente no domínio da freqüência do circuito da Figura 14.10(a). Esse circuito é mostrado na Figura 14.12. A partir da divisão de tensão no domínio da freqüência, escrevemos a função de transferência:

$$H(s) = \frac{s}{s + 1/RC}.$$

Fazendo $s = j\omega$, obtemos

$$H(j\omega) = \frac{j\omega}{j\omega + 1/RC}. \tag{14.15}$$

Em seguida, separamos a Equação 14.15 em duas equações. A primeira é a equação que descreve o módulo da função de transferência; a segunda é a equação que descreve a fase da função de transferência:

$$|H(j\omega)| = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + (1/RC)^2}}, \tag{14.16}$$

$$\theta(j\omega) = 90° - \text{tg}^{-1}\omega RC \tag{14.17}$$

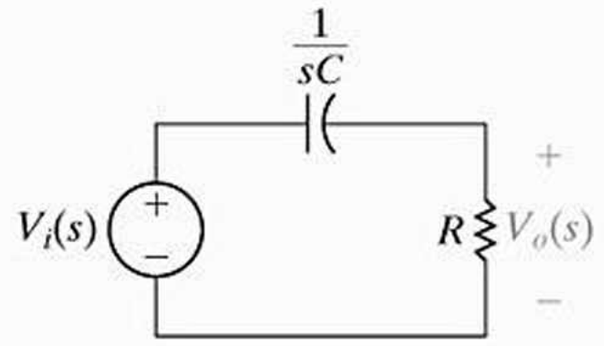


Figura 14.12 ▲ Circuito equivalente no domínio da freqüência do circuito da Figura 14.10(a).

Um exame mais detalhado das equações 14.16 e 14.17 mostra que elas estão de acordo com o gráfico de resposta de freqüência da Figura 14.11. Usando a Equação 14.16, podemos calcular a freqüência de corte para o filtro passa-altas *RC* em série. Lembre-se de que, na freqüência de corte, o módulo da função de transferência é $(1/\sqrt{2})H_{max}$. Para um filtro passa-altas, $H_{max} = |H(j\omega)|_{\omega=\infty} = |H(j\infty)|$, como mostra a Figura 14.11. Podemos construir uma equação para ω_c igualando o lado esquerdo da Equação 14.16 a $(1/\sqrt{2})|H(j\infty)|$, observando que, para esse circuito *RC* em série, $|H(j\infty)| = 1$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\omega_c}{\sqrt{\omega_c^2 + (1/RC)^2}}. \tag{14.18}$$

Explicitando ω_c na Equação 14.18, obtemos

$$\omega_c = \frac{1}{RC}. \tag{14.19}$$

A Equação 14.19 apresenta um resultado conhecido. A freqüência de corte para o circuito *RC* em série tem o valor $1/RC$, quer o circuito opere como um filtro passa-baixas (Figura 14.7) ou como um filtro passa-altas [Figura 14.10(a)]. Esse resultado talvez não seja surpreendente, porque já sabemos que há uma relação entre a freqüência de corte, ω_c, e a constante de tempo, τ, de um circuito.

O Exemplo 14.3 analisa um circuito *RL* em série, desta vez operando como um filtro passa-altas. O Exemplo 14.4 examina o efeito da adição de um resistor de carga em paralelo com o indutor.

Exemplo 14.3 Projeto de um filtro passa-altas *RL* em série

Mostre que o circuito *RL* em série da Figura 14.13 também age como um filtro passa-altas:

a) Deduza uma expressão para a função de transferência do circuito.
b) Use o resultado de (a) para determinar uma equação para a freqüência de corte do circuito *RL* em série.
c) Escolha valores para *R* e *L* que resultem em um filtro passa-altas com uma freqüência de corte de 15 kHz.

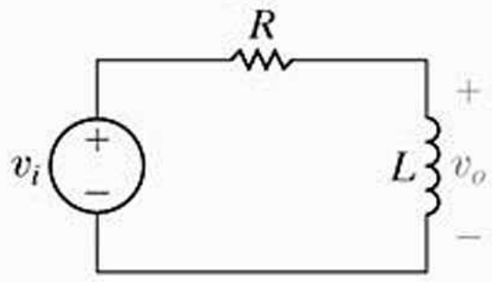


Figura 14.13 ▲ Circuito para o Exemplo 14.3.

Solução

a) Comece construindo o equivalente no domínio da freqüência do circuito *RL* em série, como mostra a Figura 14.14. Então, use, no circuito equivalente, a divisão de tensão no domínio da freqüência para construir a função de transferência:

$$H(s) = \frac{s}{s + R/L}.$$

Fazendo $s = j\omega$, obtemos

$$H(j\omega) = \frac{j\omega}{j\omega + R/L}.$$

Observe que essa equação tem a mesma forma que a Equação 14.15 para o filtro passa-altas *RC* em série.

b) Para determinar uma equação para a freqüência de corte, primeiro calcule o módulo de $H(j\omega)$:

$$|H(j\omega)| = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + (R/L)^2}}.$$

Então, como antes, igualamos o lado esquerdo dessa equação a $(1/\sqrt{2})H_{max}$, com base na definição de freqüência de corte ω_c. Lembre-se de que $H_{max} = |H(j\infty)|$ para um filtro passa-altas e que, para o circuito *RL* em série, $|H(j\infty)| = 1$. Da equação resultante obtém-se o valor da freqüência de corte:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\omega_c}{\sqrt{\omega_c^2 + (R/L)^2}}, \quad \omega_c = \frac{R}{L}.$$

Essa é a mesma freqüência de corte que calculamos para o filtro passa-baixas *RL* em série.

c) Usando a equação para ω_c calculada em (b), é evidente que não é possível especificar valores para *R* e *L* independentemente. Assim, vamos selecionar arbitrariamente um valor de 500 Ω para *R*. Lembre-se de converter a freqüência de corte para radianos por segundo:

$$L = \frac{R}{\omega_c} = \frac{500}{(2\pi)(15.000)} = 5{,}31 \text{ mH}.$$

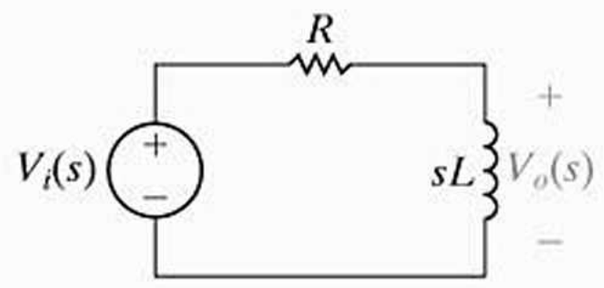


Figura 14.14 ▲ Circuito equivalente no domínio da freqüência do circuito da Figura 14.13.

Exemplo 14.4 Adição de uma carga ao filtro passa-altas *RL* em série

Examine o efeito de acrescentar um resistor de carga em paralelo com o indutor do filtro passa-altas *RL* da Figura 14.15:

a) Determine a função de transferência para o circuito na Figura 14.15.

b) Faça um gráfico do módulo da tensão de saída para o filtro passa-altas *RL* carregado, usando os valores para *R* e *L* do circuito no Exemplo 14.3(c) e fazendo $R_L = R$. No mesmo gráfico, plote também a amplitude da tensão de saída do filtro passa-altas *RL* não carregado do Exemplo 14.3(c).

Solução

a) Comece construindo o circuito equivalente no domínio da freqüência do circuito da Figura 14.15, como mostra a Figura 14.16. Use a divisão de tensão para calcular a função de transferência:

$$H(s) = \frac{\dfrac{R_L sL}{R_L + sL}}{R + \dfrac{R_L sL}{R_L + sL}} = \frac{\left(\dfrac{R_L}{R + R_L}\right)s}{s + \left(\dfrac{R_L}{R + R_L}\right)\dfrac{R}{L}} = \frac{Ks}{s + \omega_c},$$

onde

$$K = \frac{R_L}{R + R_L}, \quad \omega_c = KR/L.$$

Observe que ω_c é a freqüência de corte do filtro carregado.

b) Para o filtro passa-altas *RL* não carregado do Exemplo 14.3(c), o módulo da função de transferência dentro da faixa de passagem é 1 e a freqüência de corte é 15 kHz. Para o filtro passa-altas *RL* carregado, $R = R_L = 500\ \Omega$, portanto $K = 1/2$. Assim, para o filtro carregado, a amplitude da função de transferência dentro da faixa de passagem é (1)(1/2) = 1/2, e a freqüência de corte é (15.000)(1/2) = 7,5 kHz. Um gráfico dos circuitos (carregado e não carregado) é mostrado na Figura 14.17.

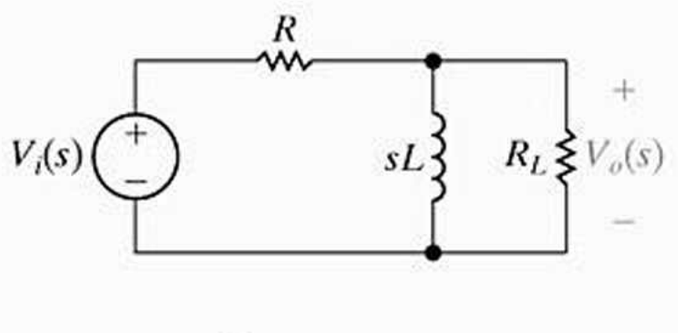


Figura 14.16 ◀ Circuito equivalente no domínio da freqüência do circuito da Figura 14.15.

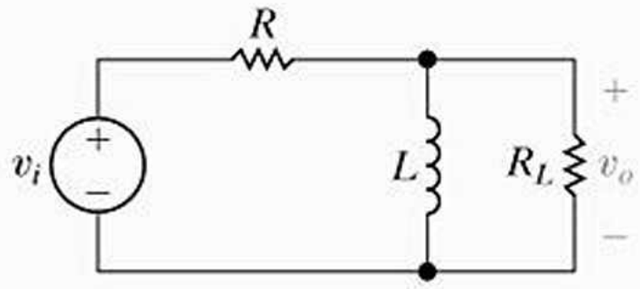


Figura 14.15 ◀ Circuito para o Exemplo 14.4.

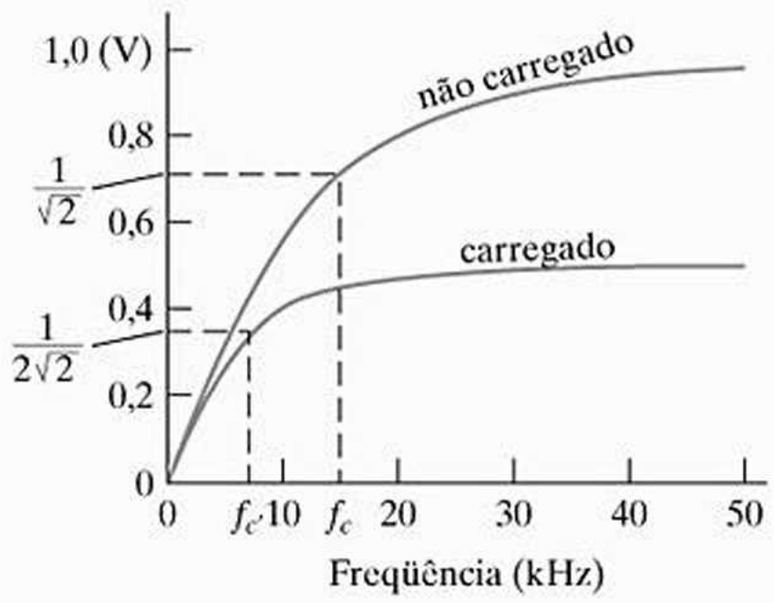


Figura 14.17 ▲ Representações gráficas da amplitude para o filtro passa-altas *RL* não carregado da Figura 14.13 e para o filtro passa-altas *RL* carregado da Figura 14.15.

Neste ponto é proveitoso comparar as funções de transferência do filtro não carregado do Exemplo 14.3 e do filtro carregado do Exemplo 14.4. Ambas as funções de transferência têm a mesma forma:

$$H(s) = \frac{Ks}{s + K(R/L)},$$

com $K = 1$ para o filtro não carregado e $K = R_L/(R + R_L)$ para o filtro carregado. Observe que o valor de K para o circuito carregado reduz-se ao valor de K para o circuito não carregado quando $R_L = \infty$; isto é, quando não há nenhum resistor de carga. As freqüências de corte para ambos os filtros podem ser vistas diretamente por suas funções de transferência. Em ambos os casos, $\omega_c = K(R/L)$, onde $K = 1$ para o circuito não carregado e $K = R_L/(R + R_L)$ para o circuito carregado. Novamente, a freqüência de corte para o circuito carregado reduz-se à do circuito não carregado quando $R_L = \infty$. Como $R_L/(R + R_L) < 1$, o efeito do resistor de carga é reduzir a amplitude da função de transferência dentro da faixa de passagem pelo fator K e baixar a freqüência de corte pelo mesmo fator. Previmos esses resultados no início deste capítulo. A maior amplitude de saída que um filtro passa-altas passivo pode alcançar é 1, e inserir uma carga no filtro, como fizemos no Exemplo 14.4, serviu para diminuir a amplitude. Quando necessitamos amplificar sinais na faixa de passagem, temos de recorrer a filtros ativos, como os que discutiremos no Capítulo 15.

O efeito de uma carga sobre a função de transferência de um filtro faz surgir outro dilema em projetos de circuitos. Normalmente, começamos com uma especificação da função de transferência e, então, projetamos um filtro que produza essa função. Podemos saber ou não qual será a carga do filtro, mas, qualquer que seja o caso, normalmente queremos que a função de transferência do filtro permaneça a mesma, independentemente da carga. Esse comportamento desejado não pode ser obtido com os filtros passivos apresentados neste capítulo.

A Figura 14.18 mostra os circuitos de filtros passa-altas que examinamos com suas respectivas funções de transferência e freqüências de corte. Examine com atenção as expressões para $H(s)$. Observe como suas formas são semelhantes — a única diferença é o denominador, que inclui a freqüência de corte. Do mesmo modo que fizemos com os filtros passa-baixas por meio da Equação 14.13, estabelecemos uma forma geral para a função de transferência desses dois filtros passa-altas:

$$H(s) = \frac{s}{s + \omega_c}. \tag{14.20}$$

(Função de transferência para um filtro passa-altas)

Qualquer circuito que tenha a função de transferência como a da Equação 14.20 se comporta como um filtro passa-altas com uma freqüência de corte de ω_c. Os problemas no final do capítulo apresentam outros exemplos de circuitos com essa propriedade.

Chamamos a atenção para outra relação importante. Verificamos que um circuito *RC* em série tem a mesma freqüência de corte quer esteja operando como um filtro passa-baixas quer como um filtro passa-altas. O mesmo acontece com um circuito *RL* em série. Como também já percebemos a relação entre a freqüência de corte de um circuito e sua constante de tempo, é de se esperar que a freqüência de corte seja um parâmetro característico do circuito, cujo valor dependa somente de seus componentes, seus valores e do modo como estão ligados.

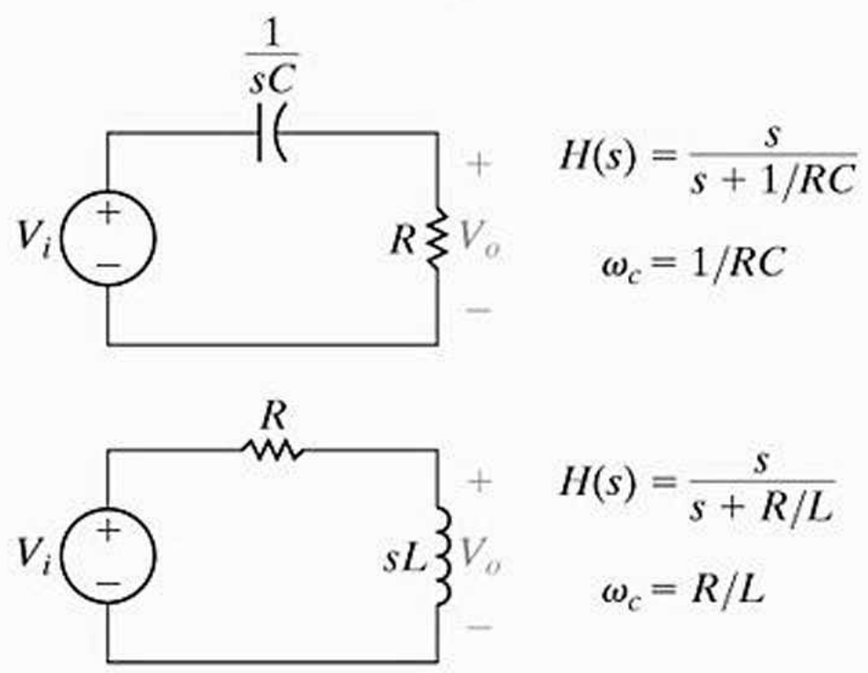


Figura 14.18 ▲ Dois filtros passa-altas, o *RC* em série e o *RL* em série, juntamente com as respectivas funções de transferência e freqüências de corte.

✔ PROBLEMAS PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 2 — Conhecer as configurações de circuitos *RL* e *RC* que funcionam como filtros passa-altas

14.3 Um filtro passa-altas *RL* em série tem $R = 5\ \text{k}\Omega$ e $L = 3{,}5$ mH. Calcule ω_c para esse filtro.

Resposta: 1,43 Mrad/s.

14.4 Um filtro passa-altas *RC* em série tem $C = 1\ \mu\text{F}$. Calcule a freqüência de corte para os seguintes valores de *R*: (a) 100 Ω; (b) 5 kΩ e (c) 30 kΩ.

Resposta: (a) 10 krad/s; (b) 200 rad/s; (c) 33,33 rad/s.

14.5 Calcule a função de transferência de um filtro passa-baixas *RC* em série que tem um resistor de carga R_L em paralelo com seu capacitor.

Resposta: $H(s) = \dfrac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{KRC}}$, onde $K = \dfrac{R_L}{R + R_L}$.

NOTA: Tente resolver também os problemas 14.12 e 14.13, apresentados no final deste capítulo.

14.4 Filtros passa-faixa

Os filtros que examinaremos a seguir são os que deixam passar sinais dentro de uma faixa de freqüências e, ao mesmo tempo, filtram sinais em freqüências que estão fora dessa faixa. Esses filtros são um pouco mais complicados do que os filtros passa-baixas ou passa-altas das seções anteriores. Como já vimos na Figura 14.3(c), filtros passa-faixa ideais têm duas freqüências de corte, ω_{c1} e ω_{c2}, que identificam a faixa de passagem. Em filtros passa-faixa reais, novamente essas freqüências de corte são definidas como as freqüências para as quais o módulo da função de transferência é igual a $(1/\sqrt{2})H_{\max}$.

Freqüência central, largura de faixa e fator de qualidade

Há três outros parâmetros importantes que caracterizam um filtro passa-faixa. O primeiro é a *freqüência central,* ω_o, definida como a freqüência para a qual a função de transferência de um circuito é um número real puro. Outro nome para a freqüência central é *freqüência de ressonância.* É o mesmo nome dado à freqüência que caracteriza a resposta natural dos circuitos de segunda ordem do Capítulo 8 porque elas são as mesmas freqüências! Quando um circuito é excitado na freqüência de ressonância, dizemos que o circuito está *em ressonância,* pois a freqüência da função de excitação é a mesma que a freqüência natural do circuito. A freqüência central é o centro geométrico da faixa de passagem, isto é, $\omega_o = \sqrt{\omega_{c1}\omega_{c2}}$. Para filtros passa-faixa, o módulo da função de transferência tem um máximo na freqüência central ($H_{\max} = |H(j\omega_o)|$).

O segundo parâmetro é a *largura de faixa,* β, que é a largura da faixa de passagem. O último parâmetro é o *fator de qualidade,* Q, que é a razão entre a freqüência central e a largura de faixa. O fator de qualidade é uma medida da largura da faixa de passagem independentemente de sua localização no eixo das freqüências. Além disso, descreve a forma do gráfico do módulo da função de transferência em função da freqüência, independentemente do valor da freqüência central.

Embora existam cinco parâmetros diferentes que caracterizam o filtro passa-faixa — ω_{c1}, ω_{c2}, ω_o, β e Q — apenas dois podem ser especificados independentemente. Em outras palavras, se soubermos determinar quaisquer dois desses parâmetros, os outros três podem ser calculados pelas relações de dependência entre eles. Definiremos essas quantidades mais especificamente assim que tivermos analisado um filtro passa-faixa. Na próxima seção estudaremos dois circuitos *RLC* que agem como filtros passa-faixa e, então, determinaremos as expressões para todos os seus parâmetros característicos.

O circuito *RLC* em série — análise qualitativa

A Figura 14.19(a) mostra um circuito *RLC* em série. Queremos considerar o efeito da variação da freqüência da

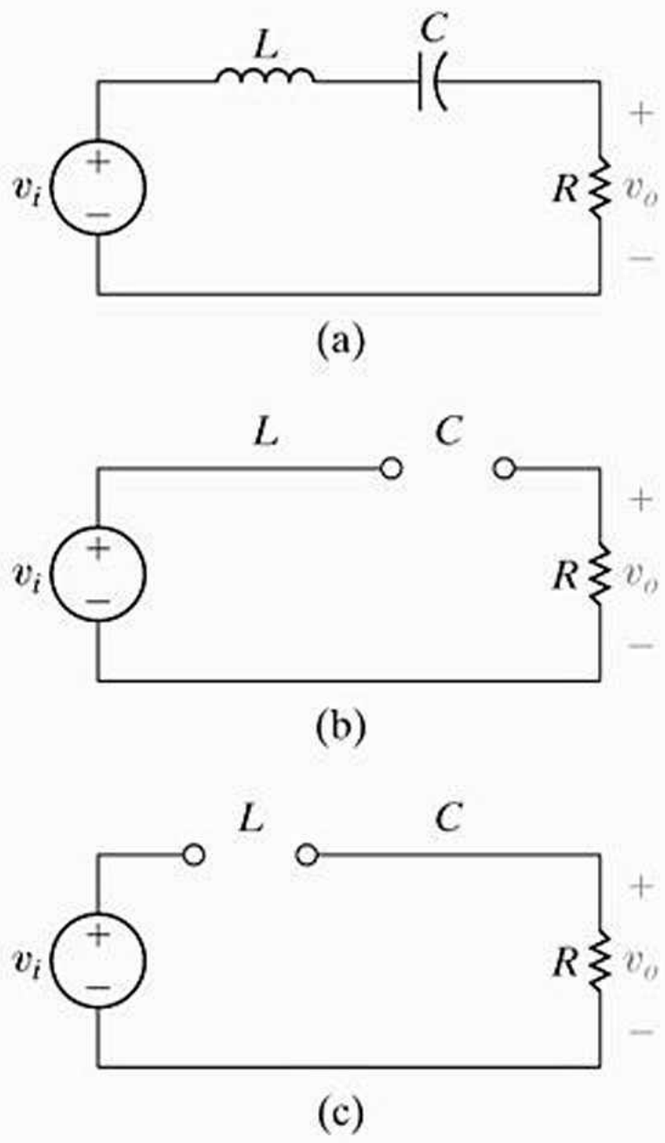


Figure 14.19 ▲ (a) Filtro passa-faixa *RLC* em série; (b) circuito equivalente para $\omega = 0$ e (c) circuito equivalente para $\omega = \infty$.

fonte sobre a amplitude da tensão de saída. Como antes, variações na freqüência da fonte resultam em alterações na impedância do capacitor e do indutor. Desta vez, a análise qualitativa é um pouco mais complicada, pois o circuito tem um indutor e também um capacitor.

Em $\omega = 0$, o capacitor comporta-se como um circuito aberto e o indutor comporta-se como um curto-circuito. O circuito equivalente é mostrado na Figura 14.19(b). O circuito aberto que representa a impedância do capacitor impede que a corrente alcance o resistor, e a tensão de saída resultante é zero.

Em $\omega = \infty$, o capacitor comporta-se como um curto-circuito e o indutor comporta-se como um circuito aberto. O circuito equivalente é mostrado na Figura 14.19(c). Agora, o indutor impede que a corrente chegue ao resistor e, novamente, a tensão de saída é zero.

Mas o que acontece na região de freqüência entre 0 e $\omega = \infty$? Entre esses dois extremos ambos, capacitor e indutor, têm impedâncias finitas. Nessa região, a tensão fornecida pela fonte sofrerá uma queda ao passar pelo indutor e pelo capacitor, mas parte dela chegará ao resistor. Lembre-se de que a impedância do capacitor é negativa, ao passo que a impedância do indutor é positiva. Por isso, em certa freqüência, a impedância do capacitor e a impedância do indutor têm amplitudes iguais e sinais opostos; as duas impedâncias se cancelam, fazendo com que a tensão de saída seja igual à tensão de fonte. Essa freqüência especial é a freqüência central, ω_o. Em qualquer freqüência diferente de ω_o a tensão de saída é menor do que a tensão de fonte. Observe que, em ω_o, a combinação em série de indutor e capacitor aparece como um curto-circuito.

O gráfico do módulo da função de transferência em função da freqüência para esse filtro é mostrado na Figura

14.20. Observe que o gráfico de um filtro passa-faixa ideal é também mostrado em linha tracejada.

Considere, agora, o que acontece com o ângulo de fase da tensão de saída. Na freqüência em que a tensão da fonte e a tensão de saída são as mesmas, os ângulos de fase são os mesmos. À medida que a freqüência decresce, a contribuição do ângulo de fase do capacitor é maior do que a do indutor. Como o capacitor contribui com deslocamento de fase positivo, o ângulo de fase resultante na saída é positivo. Em freqüências muito baixas, o ângulo de fase resultante na saída alcança seu máximo em +90°.

Ao contrário, se a freqüência crescer em relação à freqüência na qual a tensão da fonte e a tensão de saída estão em fase, a contribuição do ângulo de fase do indutor é maior do que a do capacitor. Como o indutor contribui com deslocamento de fase negativo, o ângulo de fase resultante na saída é negativo. Em freqüências muito altas, o ângulo de fase na saída alcança seu máximo negativo de –90°. Assim, o gráfico de fase tem a forma mostrada na Figura 14.20.

O circuito *RLC* em série — análise quantitativa

Começamos desenhando o circuito equivalente no domínio da freqüência para o circuito *RLC* em série, como mostra a Figura 14.21. A divisão de tensão no domínio da freqüência permite escrever uma equação para a função de transferência:

$$H(s) = \frac{(R/L)s}{s^2 + (R/L)s + (1/LC)}. \tag{14.21}$$

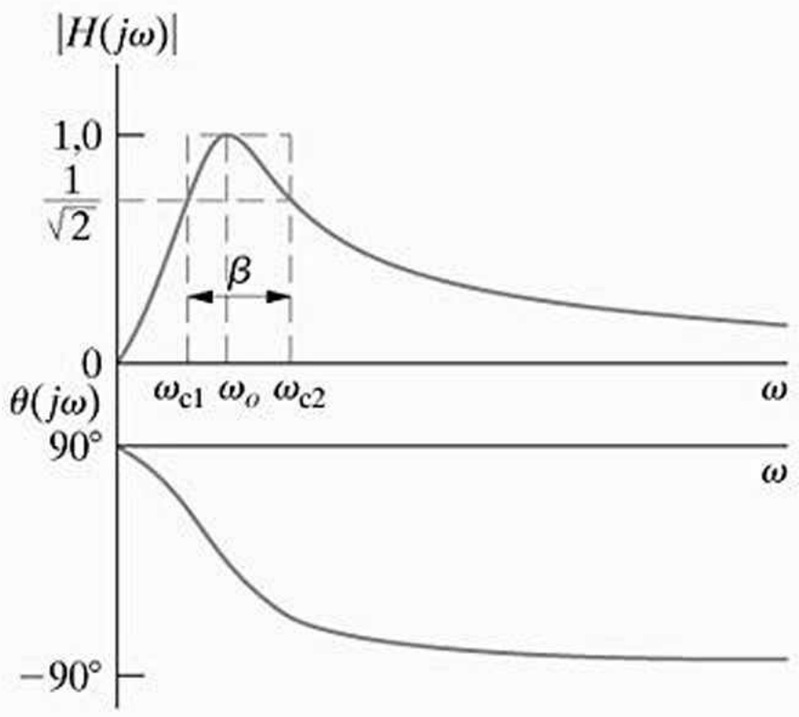


Figura 14.20 ▲ Gráfico de resposta de freqüência para o circuito do filtro passa-faixa *RLC* em série da Figura 14.19.

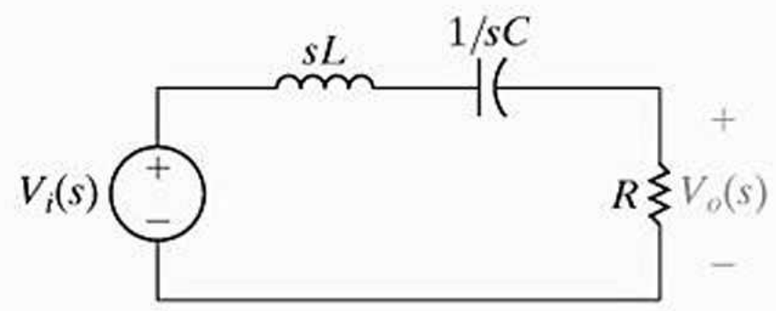


Figura 14.21 ▲ Circuito equivalente no domínio da freqüência para o circuito na Figura 14.19(a).

Como antes, substituímos *s* por *jω* na Equação 14.21 e obtemos as equações para o módulo e o ângulo de fase da função de transferência:

$$|H(j\omega)| = \frac{\omega(R/L)}{\sqrt{[(1/LC) - \omega^2]^2 + [\omega(R/L)]^2}} \tag{14.22}$$

$$\theta(j\omega) = 90^\circ - \text{tg}^{-1}\left[\frac{\omega(R/L)}{(1/LC) - \omega^2}\right]. \tag{14.23}$$

Calculamos, agora, os cinco parâmetros que caracterizam esse filtro *RLC* passa-faixa. Lembre-se de que a freqüência central, ω_o, é definida como a freqüência na qual a função de transferência de um circuito é puramente real. A função de transferência para o circuito *RLC* na Figura 14.19(a) será real quando a freqüência da fonte de tensão for tal que a soma das impedâncias do capacitor e do indutor seja zero:

$$j\omega_o L + \frac{1}{j\omega_o C} = 0. \tag{14.24}$$

Explicitando ω_o na Equação 14.24, obtemos

$$\omega_o = \sqrt{\frac{1}{LC}}. \tag{14.25}$$

(Freqüência central)

Em seguida, calculamos as freqüências de corte, ω_{c1} e ω_{c2}. Lembre-se de que nas freqüências de corte a magnitude da função de transferência é $(1/\sqrt{2})H_{\max}$. Como $H_{\max} = |H(j\omega_o)|$, podemos calcular $H_{\max}$ substituindo a Equação 14.25 na Equação 14.22:

$$H_{\max} = |H(j\omega_o)| = \frac{\omega_o(R/L)}{\sqrt{[(1/LC) - \omega_o^2]^2 + (\omega_o R/L)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{(1/LC)}(R/L)}{\sqrt{[(1/LC) - (1/LC)]^2 + \left[\sqrt{(1/LC)}(R/L)\right]^2}} = 1.$$

Agora, igualamos o lado esquerdo da Equação 14.22 a $(1/\sqrt{2})H_{\max}$ (que é igual a $1/\sqrt{2}$):

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\omega_c(R/L)}{\sqrt{[(1/LC) - \omega_c^2]^2 + (\omega_c R/L)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{[(\omega_c L/R) - (1/\omega_c RC)]^2 + 1}}. \tag{14.26}$$

Podemos igualar os denominadores do primeiro e terceiro membros da Equação 14.26 para obter

$$\pm 1 = \omega_c \frac{L}{R} - \frac{1}{\omega_c RC}. \tag{14.27}$$

Rearranjando a Equação 14.27, obtemos a seguinte equação quadrática:

$$\omega_c^2 L \pm \omega_c R - 1/C = 0 \tag{14.28}$$

A solução da Equação 14.28 resulta em quatro valores para a freqüência de corte. Somente dois desses valores são positivos e têm significado físico; eles identificam a faixa de passagem desse filtro:

$$\omega_{c1} = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)}, \tag{14.29}$$

$$\omega_{c2} = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)}. \tag{14.30}$$

(Freqüências de corte, filtros *RLC* em série)

Podemos usar as equações 14.29 e 14.30 para confirmar que a freqüência central, ω_o, é a média geométrica entre as duas freqüências de corte:

$$\omega_o = \sqrt{\omega_{c1} \cdot \omega_{c2}}$$

(Relação entre freqüência central e freqüências de corte)

$$= \sqrt{\left[-\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)}\right]\left[\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)}\right]}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{LC}}. \tag{14.31}$$

Lembre-se de que a largura de faixa de um filtro passa-faixa é definida como a diferença entre as duas freqüências de corte. Como $\omega_{c2} > \omega_{c1}$ podemos calcular a largura de faixa subtraindo a Equação 14.29 da Equação 14.30:

$$\beta = \omega_{c2} - \omega_{c1}$$

(Relação entre largura de faixa e freqüências de corte)

$$= \left[\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)}\right] - \left[-\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)}\right]$$

$$= \frac{R}{L}. \tag{14.32}$$

O fator de qualidade, o último dos cinco parâmetros característicos, é definido como a razão entre a freqüência central e a largura de faixa. Usando as equações 14.25 e 14.32:

$$Q = \omega_o/\beta$$

(Fator de qualidade)

$$= \frac{(1/LC)}{(R/L)}$$

$$= \sqrt{\frac{L}{CR^2}}. \tag{14.33}$$

Agora, temos cinco parâmetros que caracterizam o filtro passa-faixa *RLC* em série: as duas freqüências de corte, ω_{c1} e ω_{c2}, que delimitam a faixa de passagem; a freqüência central, ω_o, na qual o módulo da função de transferência é máximo; a largura de faixa, β, uma medida da largura da faixa de passagem, e o fator de qualidade, Q, uma segunda medida da largura da faixa de passagem. Como observamos antes, somente dois desses parâmetros podem ser independentemente especificados em um projeto. Já observamos que o fator de qualidade é especificado em termos da freqüência central e da largura de faixa. Além disso, podemos reescrever as equações para as freqüências de corte em termos da freqüência central e da largura de faixa:

$$\omega_{c1} = -\frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \omega_o^2}, \tag{14.34}$$

$$\omega_{c2} = \frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \omega_o^2}. \tag{14.35}$$

Formas alternativas para essas equações expressam as freqüências de corte em termos do fator de qualidade e da freqüência central:

$$\omega_{c1} = \omega_o \cdot \left[-\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q}\right)^2}\right], \tag{14.36}$$

$$\omega_{c2} = \omega_o \cdot \left[\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q}\right)^2}\right]. \tag{14.37}$$

Veja também o Problema 14.17 no final do capítulo.

Os exemplos a seguir ilustram o projeto de filtros passa-faixa, apresentam outro circuito *RLC* que se comporta como um filtro passa-faixa e examinam os efeitos da resistência da fonte sobre os parâmetros característicos de um filtro passa-faixa *RLC* em série.

Exemplo 14.5 Projeto de um filtro passa-faixa

Um equalizador gráfico é um amplificador de áudio que permite a seleção de diferentes níveis de amplificação dentro de diversas regiões de freqüência. Usando o circuito *RLC* em série da Figura 14.19(a), escolha valores para R, L e C que resultem em um circuito passa-faixa capaz de selecionar entradas na faixa de freqüência de 1–10 kHz. Tal circuito poderia ser utilizado em um equalizador gráfico para selecionar, antes da amplificação, essa faixa de freqüência dentro de uma faixa de áudio mais larga (em geral de 0–20 kHz).

Solução

Precisamos calcular valores para R, L e C que produzam um filtro passa-faixa com freqüências de corte de 1 kHz e 10 kHz. Há muitas abordagens possíveis para uma solução. Por exemplo, poderíamos usar as equações 14.29 e 14.30, que especificam ω_{c1} e ω_{c2} em termos de R, L e C. Em razão da forma dessas equações, as manipulações algébricas poderiam ficar complicadas. Em vez disso, usaremos o fato de que a freqüência central é a média geométrica das fre-

qüências de corte para calcular ω_o e, então, usaremos a Equação 14.31 para calcular L e C a partir de ω_o. Em seguida, usaremos a definição de fator de qualidade para calcular Q e, por fim, usaremos a Equação 14.33 para calcular R. Ainda que essa abordagem envolva mais etapas individuais de cálculo, cada uma delas é razoavelmente simples.

Qualquer abordagem que adotarmos nos dará somente duas equações — insuficientes para calcular as três incógnitas — por causa das dependências mútuas dos parâmetros do filtro passa-faixa. Por isso, precisamos selecionar um valor para R, L ou C e usar as duas equações que escolhemos para calcular os valores dos componentes restantes. Neste problema, escolhemos 1 μF como o valor do capacitor porque as limitações para os valores dos capacitores disponíveis no comércio são mais rigorosas do que as impostas a indutores ou resistores.

Calculamos a freqüência central como a média geométrica das freqüências de corte:

$$f_o = \sqrt{f_{c1}f_{c2}} = \sqrt{(1.000)(10.000)} = 3.162{,}28 \text{ Hz}.$$

Em seguida, calculamos o valor de L usando a freqüência central calculada e o valor selecionado para C. Não se esqueça de que temos de converter a freqüência central para radianos por segundo antes de podermos usar a Equação 14.31:

$$L = \frac{1}{\omega_o^2 C} = \frac{1}{[2\pi(3.162{,}28)]^2(10^{-6})} = 2{,}533 \text{ mH}.$$

O fator de qualidade, Q, é definido como a razão entre a freqüência central e a largura de faixa. A largura de faixa é a diferença entre os dois valores da freqüência de corte. Assim,

$$Q = \frac{f_o}{f_{c2} - f_{c1}} = \frac{3162{,}28}{10.000 - 1.000} = 0{,}3514.$$

Agora, usamos a Equação 14.33 para calcular R:

$$R = \sqrt{\frac{L}{CQ^2}} = \sqrt{\frac{0{,}0025}{(10^{-6})(0{,}3514)^2}} = 143{,}24\ \Omega.$$

Para comprovar se os valores desses componentes produzem o filtro passa-faixa que queremos, substitua-os nas equações 14.29 e 14.30. Verificamos que

$$\omega_{c1} = 6283{,}19 \text{ rad/s } (1.000 \text{ Hz})$$

$$\omega_{c2} = 62.831{,}85 \text{ rad/s } (10.000 \text{ Hz})$$

são as freqüências de corte especificadas para o filtro.

Esse exemplo nos faz lembrar que somente dois dos cinco parâmetros do filtro passa-faixa podem ser especificados independentemente. Os outros três parâmetros sempre podem ser calculados pelos dois que foram especificados. Por sua vez, o valor desses cinco parâmetros depende do valor dos três componentes, R, L e C, dos quais somente dois podem ser especificados independentemente.

Exemplo 14.6 Projeto de um filtro passa-faixa *RLC* em paralelo

a) Mostre que o circuito *RLC* da Figura 14.22 também é um filtro passa-faixa, deduzindo uma expressão para a sua função de transferência $H(s)$.
b) Calcule a freqüência central, ω_o.
c) Calcule as freqüências de corte, ω_{c1} e ω_{c2}, a largura de faixa, β, e o fator de qualidade, Q.
d) Calcule os valores de R e de L para um filtro passa-faixa com uma freqüência central de 5 kHz e uma largura de faixa de 200 Hz, usando um capacitor de 5 μF.

Solução

a) Comece desenhando o circuito equivalente no domínio da freqüência do circuito na Figura 14.22, como mostra a Figura 14.23. Usando a divisão de tensão, podemos calcular a função de transferência para o circuito equivalente se antes calcularmos a impedância equivalente da combinação em paralelo de L e C, identificada como $Z_{eq}(s)$ na Figura 14.23:

$$Z_{eq}(s) = \frac{\frac{L}{C}}{sL + \frac{1}{sC}}.$$

Agora,

$$H(s) = \frac{\frac{s}{RC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}.$$

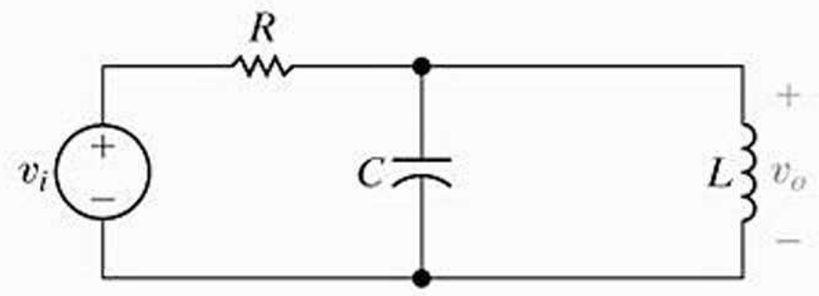


Figura 14.22 ▲ Circuito para o Exemplo 14.6.

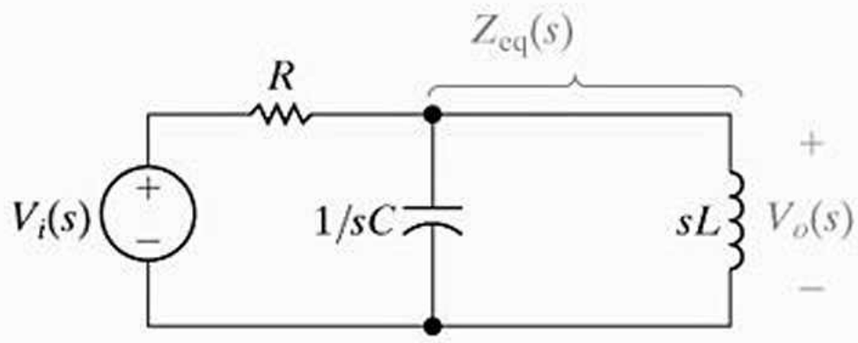


Figura 14.23 ▲ Circuito equivalente no domínio da freqüência do circuito da Figura 14.22.

b) Para determinar a freqüência central, ω_o, precisamos calcular o local em que o módulo da função de transferência é máximo. Fazendo $s = j\omega$ em $H(s)$,

$$|H(j\omega)| = \frac{\frac{\omega}{RC}}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{RC}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + £\omega RC - \frac{1}{\omega\frac{L}{R}}≥^2}}.$$

O módulo dessa função de transferência é máximo quando o termo

$$\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2$$

for zero. Assim,

$$\omega_o = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

e

$$H_{\max} = |H(j\omega_o)| = 1$$

c) Nas freqüências de corte, o módulo da função de transferência é $(1/\sqrt{2})H_{\max} = 1/\sqrt{2}$. Substituindo essa constante no lado esquerdo da equação do módulo e, então, simplificando, obtemos

$$\left[\omega_c RC - \frac{1}{\omega_c \frac{L}{R}}\right] = \pm 1.$$

Elevando, mais uma vez, o lado esquerdo dessa equação ao quadrado, obtemos duas equações quadráticas para as freqüências de corte, com quatro soluções. Somente duas delas são positivas e, portanto, têm significado físico:

$$\omega_{c1} = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}},$$

$$\omega_{c2} = \frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}}.$$

(Freqüências de corte para filtros *RLC* em paralelo)

Calculamos a largura de faixa pelas freqüências de corte:

$$\beta = \omega_{c2} - \omega_{c1}$$

$$= \frac{1}{RC}.$$

Por fim, usamos a definição de fator de qualidade para calcular Q:

$$Q = \omega_o/\beta$$

$$= \sqrt{\frac{R^2C}{L}}.$$

Observe, uma vez mais, que podemos especificar as freqüências de corte para esse filtro passa-faixa em termos de sua freqüência central e largura de faixa:

$$\omega_{c1} = -\frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \omega_o^2},$$

$$\omega_{c2} = \frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \omega_o^2}.$$

d) Use a equação para largura de faixa em (c) para calcular um valor para R, dada uma capacitância de 5 μF. Lembre-se de converter a largura de faixa para as unidades adequadas:

$$R = \frac{1}{\beta C}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)(200)(5 \times 10^{-6})}$$

$$= 159{,}15\ \Omega$$

Usando o valor da capacitância e a equação para a freqüência central de (c), calcule o valor do indutor:

$$L = \frac{1}{\omega_o^2 C}$$

$$= \frac{1}{[2\pi(5.000)]^2(5 \times 10^{-6})}$$

$$= 202{,}64\ \mu\text{H}.$$

Exemplo 14.7 Cálculo do efeito de uma fonte não ideal de tensão sobre o comportamento

Para cada um dos filtros passa-faixa que construímos, sempre admitimos uma fonte ideal de tensão, isto é, uma fonte de tensão sem nenhuma resistência em série. Ainda que essa premissa muitas vezes seja válida, às vezes não o é, como no caso em que o projeto do filtro só pode ser executado com valores de R, L e C cuja impedância equivalente tenha um módulo próximo ao da impedância real da fonte de tensão. Investigue qual seria o efeito sobre as características de um filtro passa-faixa *RLC* em série, se admitíssemos uma resistência não-nula, R_i, da fonte.

a) Determine a função de transferência para o circuito na Figura 14.24.

b) Faça o gráfico do módulo da função de transferência do circuito em função da freqüência, usando os valores para R, L e C obtidos no Exemplo 14.5 e fazendo $R_i = R$. No mesmo gráfico, plote a curva do módulo da função de transferência para o circuito do Exemplo 14.5, onde $R_i = 0$.

Solução

a) Comece substituindo o circuito da Figura 14.24 por seu equivalente no domínio da freqüência, como mostra a Figura 14.25. Agora, use a divisão de tensão para obter a função de transferência:

$$H(s) = \frac{\frac{R}{L}s}{s^2 + \left(\frac{R + R_i}{L}\right)s + \frac{1}{LC}}.$$

Faça $s = j\omega$ e calcule o módulo da função de transferência:

$$|H(j\omega)| = \frac{\frac{R}{L}\omega}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \left(\omega\frac{R + R_i}{L}\right)^2}}.$$

A freqüência central, ω_o, é a freqüência na qual o módulo dessa função de transferência é máximo, ou seja,

$$\omega_o = \sqrt{\frac{1}{LC}}.$$

Na freqüência central, o módulo máximo é

$$H_{\max} = |H(j\omega_o)| = \frac{R}{R_i + R}.$$

As freqüências de corte podem ser calculadas igualando o módulo da função de transferência a $(1/\sqrt{2})H_{\max}$:

$$\omega_{c1} = -\frac{R + R_i}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R + R_i}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}},$$

$$\omega_{c2} = \frac{R + R_i}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R + R_i}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}.$$

A largura de faixa é calculada a partir das freqüências de corte:

$$\beta = \frac{R + R_i}{L}.$$

Por fim, o fator de qualidade é calculado a partir da freqüência central e da largura de faixa:

$$Q = \frac{\sqrt{L/C}}{R + R_i}.$$

Observe, por essa análise, que podemos escrever a função de transferência do filtro passa-faixa *RLC* em série com resistência da fonte não-nula como

$$H(s) = \frac{K\beta s}{s^2 + \beta s + \omega_o^2},$$

em que

$$K = \frac{R}{R + R_i}.$$

Observe que, quando $R_i = 0$, $K = 1$ e a função de transferência é

$$H(s) = \frac{\beta s}{s^2 + \beta s + \omega_o^2}$$

b) O circuito do Exemplo 14.5 tem uma freqüência central de 3.162,28 Hz e uma largura de faixa de 9 kHz e $H_{\max} = 1$. Se usarmos os mesmos valores de R, L e C no circuito da Figura 14.24 e fizermos $R_i = R$, então a freqüência central permanece em 3.162,28 kHz, mas $\beta = (R + R_i)/L = 18$ kHz e $H_{\max} = R/(R + R_i) = 1/2$. A variação dos módulos das funções de transferência para esses dois filtros passa-faixa em função da freqüência está representada no mesmo gráfico na Figura 14.26.

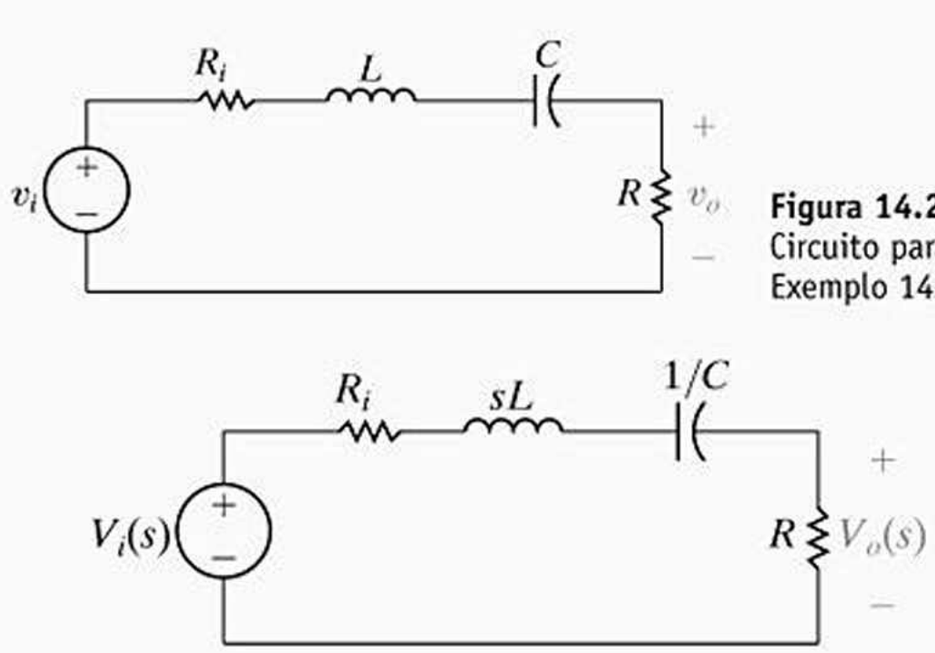


Figura 14.24 ◀ Circuito para o Exemplo 14.7.

Figura 14.25 ▲ Circuito equivalente no domínio da freqüência do circuito da Figura 14.24.

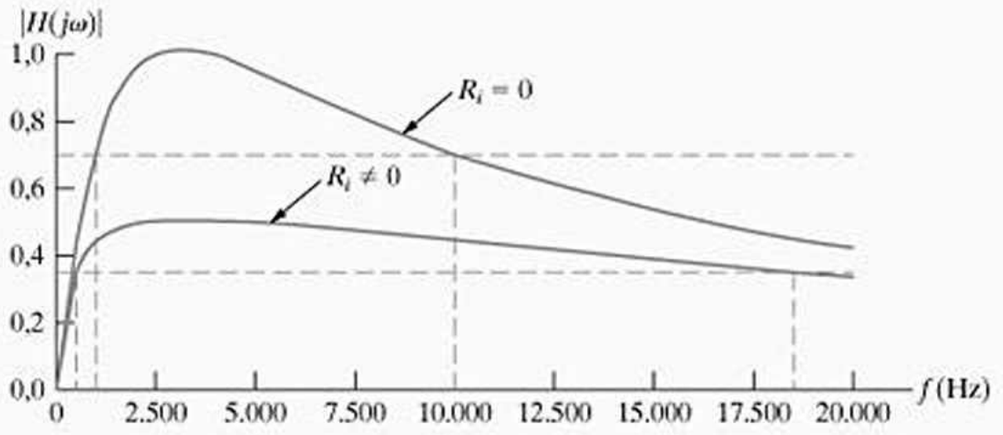


Figura 14.26 ▲ Gráfico dos módulos da função de transferência de um filtro passa-faixa *RLC* em série em função da freqüência, com resistências internas da fonte nula e não-nula.

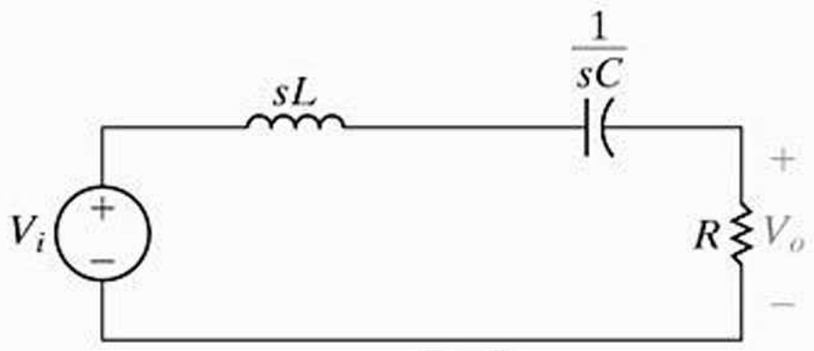
Se compararmos os valores dos parâmetros do filtro quando $R_i = 0$ com os valores quando $R_i \neq 0$, observamos o seguinte:

- As freqüências centrais são as mesmas.
- O módulo máximo da função de transferência para $R_i \neq 0$ é menor do que para $R_i = 0$.
- A largura de faixa para $R_i \neq 0$ é maior do que para $R_i = 0$. Assim, as freqüências de corte e os fatores de qualidade para os dois circuitos também são diferentes.

A consideração de uma resistência não-nula para a fonte que alimenta um filtro passa-faixa *RLC* em série não altera a freqüência central, mas aumenta a largura de faixa e reduz o módulo da função de transferência na faixa de passagem.

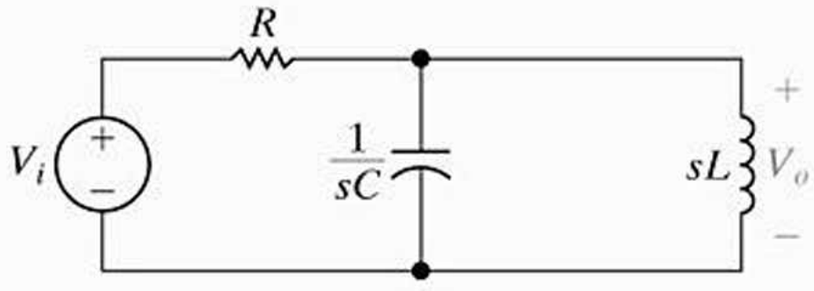
Nesse caso, percebemos o mesmo desafio de projeto que enfrentamos na adição de um resistor de carga ao filtro passa-altas, isto é, gostaríamos de projetar um filtro passa-faixa que tivesse as mesmas propriedades de filtragem independentemente de qualquer resistência interna associada à fonte de tensão. Infelizmente, a filtragem de filtros construídos com elementos passivos é alterada pela resistência interna da fonte. No Capítulo 15, veremos que filtros ativos são insensíveis a variações na resistência da fonte e, por isso, são mais adequados para projetos nos quais isso é uma questão importante.

A Figura 14.27 mostra os dois filtros passa-faixa *RLC* juntamente com suas funções de transferência e os respectivos parâmetros. Observe que as expressões para as funções de transferência do circuito têm a mesma forma. Como fizemos antes, criamos uma expressão geral para as funções de transferência desses dois filtros passa-faixa:



$$H(s) = \frac{(R/L)s}{s^2 + (R/L)s + 1/LC}$$

$$\omega_o = \sqrt{1/LC} \qquad \beta = R/L$$



$$H(s) = \frac{s/RC}{s^2 + s/RC + 1/LC}$$

$$\omega_o = \sqrt{1/LC} \qquad \beta = 1/RC$$

Figura 14.27 ▲ Dois filtros passa-faixa *RLC*, juntamente com as respectivas equações para a função de transferência, freqüência central e largura de faixa.

$$H(s) = \frac{\beta s}{s^2 + \beta s + \omega_o^2}. \tag{14.38}$$

(Função de transferência para filtro passa-faixa *RLC*)

Qualquer circuito que tenha a função de transferência expressa pela Equação 14.38 age como um filtro passa-faixa com uma freqüência central ω_o e uma largura de faixa β.

No Exemplo 14.7, vimos que a função de transferência também pode ser escrita na forma

$$H(s) = \frac{K\beta s}{s^2 + \beta s + \omega_o^2}, \tag{14.39}$$

em que os valores para K e β dependem do valor da resistência interna da fonte.

Relação entre o domínio da freqüência e o domínio do tempo

Podemos identificar uma relação entre os parâmetros que caracterizam a resposta no domínio da freqüência de filtros passa-faixa *RLC* e os parâmetros que caracterizam a resposta no domínio do tempo de circuitos *RLC*. Considere o circuito *RLC* em série da Figura 14.19(a). No Capítulo 8, verificamos que a resposta natural desse circuito é caracterizada pela freqüência de Neper (α) e pela freqüência angular de ressonância (ω_o). Esses parâmetros foram expressos em termos dos componentes de circuito nas equações 8.58 e 8.59, que repetimos aqui, por conveniência:

$$\alpha = \frac{R}{2L} \text{ rad/s}, \tag{14.40}$$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{1}{LC}} \text{ rad/s}. \tag{14.41}$$

Vemos que o mesmo parâmetro ω_o é usado para caracterizar a resposta tanto no domínio do tempo quanto no domínio da freqüência. É por isso que a freqüência central também é denominada freqüência de ressonância. A largura de faixa e a freqüência de Neper estão relacionadas pela equação

$$\beta = 2\alpha. \tag{14.42}$$

Lembre-se de que a resposta natural de um circuito *RLC* em série pode ser subamortecida, superamortecida ou criticamente amortecida. A transição de superamortecida para subamortecida ocorre quando $\omega_o^2 = \alpha^2$. Considere a relação α e β na Equação 14.42 e a definição do fator de qualidade Q. A transição de uma resposta superamortecida para uma resposta subamortecida ocorre quando $Q = 1/2$. Desse modo, um circuito cuja resposta no domínio da freqüência contiver um pico acentuado em ω_o, o que indica um alto Q e uma largura de faixa estreita, terá uma resposta natural subamortecida. Ao contrário, um circuito cuja resposta no domínio da freqüência tiver uma largura de faixa larga e um baixo Q terá uma resposta natural superamortecida.

✔ PROBLEMAS PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 3 — Conhecer quais são as configurações de circuitos *RLC* que funcionam como filtros passa-faixa

14.6 Usando o circuito da Figura 14.19(a), calcule os valores de R e L para um filtro passa-faixa com uma freqüência central de 12 kHz e um fator de qualidade de 6. Use um capacitor de 0,1 μF.

Resposta: $L = 1{,}76$ mH, $R = 22{,}10\ \Omega$.

14.7 Usando o circuito da Figura 14.22, calcule os valores de L e C para um filtro passa-faixa com uma freqüência central de 2 kHz e uma largura de faixa de 500 Hz. Use um resistor de 250 Ω.

Resposta: L = 4,97 mH, $C = 1{,}27\ \mu$F.

14.8 Recalcule os valores dos componentes para o circuito do Exemplo 14.6(d) de modo que a resposta do circuito resultante não seja alterada usando-se um capacitor de 0,2 μF.

Resposta: $L = 5{,}07$ mH, $R = 3{,}98\ \text{k}\Omega$.

14.9 Recalcule os valores dos componentes para o circuito do Exemplo 14.6(d) de modo que o fator de qualidade do circuito resultante permaneça inalterado, mas a freqüência central passe para 2 kHz. Use um capacitor de 0,2 μF.

Resposta: $R = 9{,}95\ \text{k}\Omega$, $L = 31{,}66$ mH.

NOTA: Tente resolver também os problemas 14.21 e 14.22, apresentados no final deste capítulo.

14.5 Filtros rejeita-faixa

Agora, passamos para a última das quatro categorias de filtros — o rejeita-faixa. Esse filtro deixa passar sinais que estão fora da faixa entre as duas freqüências de corte (a faixa de passagem) e atenua os sinais cujas freqüências estão entre as duas freqüências de corte (a faixa de rejeição). Desse modo, filtros passa-faixa e filtros rejeita-faixa executam funções complementares no domínio da freqüência.

Filtros rejeita-faixa são caracterizados pelos mesmos parâmetros que os filtros passa-faixa: as duas freqüências de corte, a freqüência central, a largura de faixa e o fator de qualidade. Novamente, apenas dois desses cinco parâmetros podem ser especificados independentemente.

Nas seções seguintes, examinaremos dois circuitos que funcionam como filtros rejeita-faixa e, então, calcularemos equações que relacionam os valores dos componentes do circuito com os parâmetros característicos para cada circuito.

O circuito *RLC* em série — análise qualitativa

A Figura 14.28(a) mostra um circuito *RLC* em série. Embora os componentes e ligações do circuito sejam idênticos aos do filtro passa-faixa *RLC* em série da Figura 14.19(a), o circuito da Figura 14.28(a) tem uma importante diferença: a tensão de saída agora é definida no par indutor-capacitor. Como vimos no caso dos filtros passa-baixas e passa-altas, o mesmo circuito pode executar duas funções de filtragem diferentes, dependendo da definição da tensão de saída.

Já observamos que, em $\omega = 0$, o indutor comporta-se como um curto-circuito e o capacitor comporta-se como um circuito aberto, porém em $\omega = \infty$, esses papéis são intercambiados. A Figura 14.28(b) apresenta o circuito equivalente para $\omega = 0$; a Figura 14.28(c) apresenta o circuito equivalente para $\omega = \infty$. Nos dois circuitos equivalentes, a tensão de saída é a tensão nos terminais de um circuito aberto e, por isso, as tensões de saída e entrada são a mesma. Então, esse circuito de filtro rejeita-faixa *RLC* em série tem duas faixas de passagem — uma abaixo de uma freqüência de corte inferior e outra acima de uma freqüência de corte superior.

Entre essas duas faixas de passagem, ambos, indutor e capacitor, têm impedâncias finitas de sinais opostos. À medida que a freqüência aumenta, a partir de zero, a impedância do indutor aumenta e a do capacitor diminui. Portanto, o defasamento entre a entrada e a saída aproxima-se de −90° à medida que ωL aproxima-se de $1/\omega C$. Tão logo ωL passa de $1/\omega C$, o defasamento salta para +90° e, então, aproxima-se de zero à medida que ω continua a crescer.

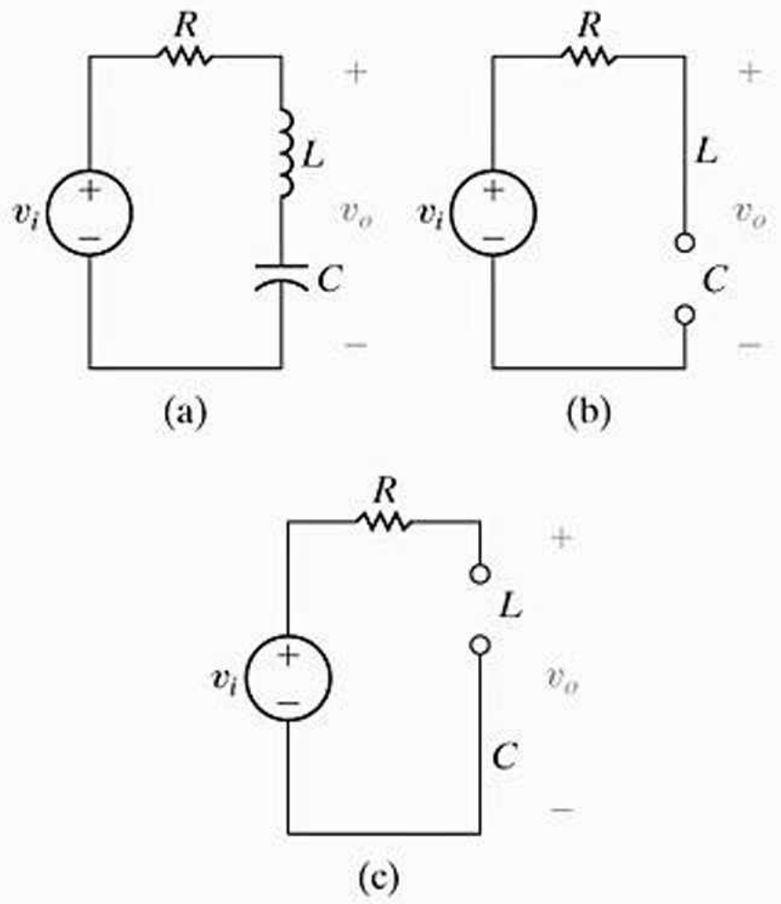


Figura 14.28 ▲ (a) Filtro rejeita-faixa *RLC* em série. (b) Circuito equivalente para $\omega = 0$. (c) Circuito equivalente para $\omega = \infty$.

Em certa freqüência entre as duas faixas de passagem, as impedâncias do indutor e do capacitor são iguais, mas têm sinais opostos. Nessa freqüência, a combinação em série de indutor e capacitor é a de um curto-circuito e, portanto, a amplitude da tensão de saída deve ser zero. Esta é a freqüência central desse filtro rejeita-faixa *RLC* em série.

A Figura 14.29 apresenta um gráfico de resposta de freqüência do filtro rejeita-faixa *RLC* em série da Figura 14.28(a). Observe que o gráfico do módulo da função de transferência do filtro real está sobreposto ao do filtro rejeita-faixa ideal da Figura 14.3(d). Nossa análise qualitativa confirmou a forma das representações gráficas do módulo e do ângulo de fase da função de transferência desse filtro. Agora, realizamos a análise quantitativa do circuito para confirmar essa resposta de freqüência e calcular valores para os parâmetros que a caracterizam.

O circuito *RLC* em série — análise quantitativa

Após a obtenção do circuito equivalente no domínio da freqüência, como mostra a Figura 14.30, usamos a divisão de tensão para deduzir uma equação para a função de transferência:

$$H(s) = \frac{sL + \dfrac{1}{sC}}{R + sL + \dfrac{1}{sC}} = \frac{s^2 + \dfrac{1}{LC}}{s^2 + \dfrac{R}{L}s + \dfrac{1}{LC}}. \qquad (14.43)$$

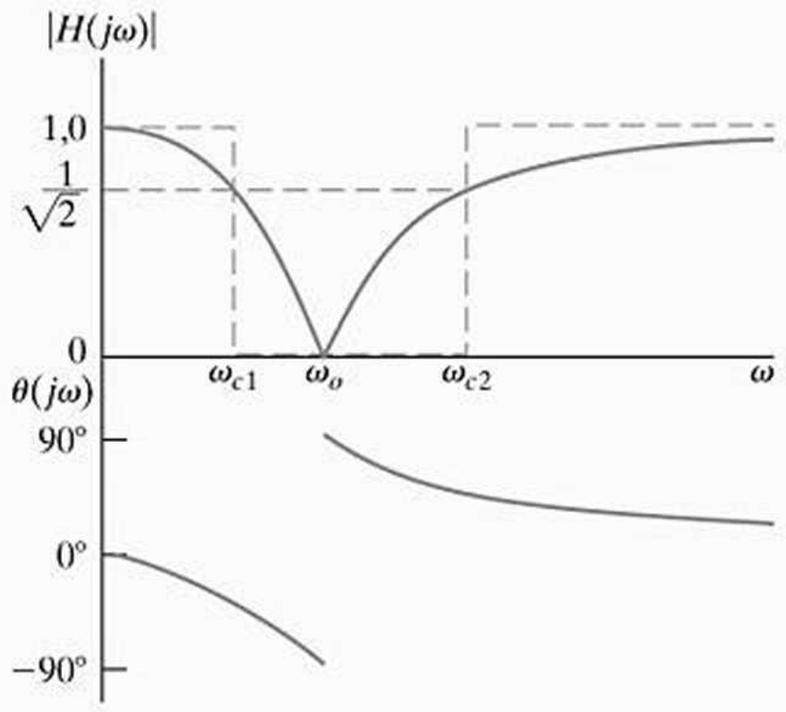


Figura 14.29 ▲ Gráfico de resposta de freqüência para o circuito do filtro rejeita-faixa *RLC* em série da Figura 14.28(a).

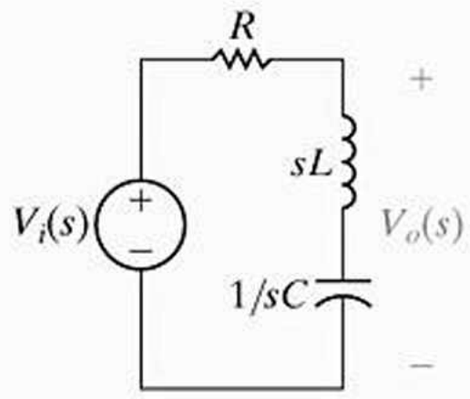


Figura 14.30 ▲ Circuito equivalente no domínio da freqüência do circuito na Figura 14.28(a).

Substituímos s por $j\omega$ na Equação 14.43 e obtemos as equações do módulo e da fase da função de transferência:

$$|H(j\omega)| = \frac{\left|\dfrac{1}{LC} - \omega^2\right|}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \left(\dfrac{\omega R}{L}\right)^2}}, \qquad (14.44)$$

$$\theta(j\omega) = -\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\dfrac{\omega R}{L}}{\dfrac{1}{LC} - \omega^2}\right). \qquad (14.45)$$

Observe que as equações 14.44 e 14.45 confirmam a forma da resposta de freqüência representada na Figura 14.29, que desenvolvemos com base na análise qualitativa.

Usamos o circuito na Figura 14.30 para calcular a freqüência central. Para o filtro rejeita-faixa, a freqüência central é também definida como a freqüência em que a soma das impedâncias do capacitor e do indutor é zero. No filtro passa-faixa, o módulo da função de transferência era máximo na freqüência central, mas no filtro rejeita-faixa ele é mínimo. Isso porque, no filtro rejeita-faixa, a freqüência central não está na faixa de passagem; mais exatamente, está na faixa de rejeição. É fácil mostrar que a freqüência central é dada por

$$\omega_o = \sqrt{\frac{1}{LC}}. \qquad (14.46)$$

Substituindo a Equação 14.46 na Equação 14.44 vemos que $|H(j\omega_o)| = 0$.

As freqüências de corte, a largura de faixa e o fator de qualidade são definidos, para o filtro rejeita-faixa, exatamente do mesmo modo que para o filtro passa-faixa. Calculamos as freqüências de corte substituindo a constante $(1/\sqrt{2})H_{\max}$ no lado esquerdo da Equação 14.44 e, então, explicitamos ω_{c1} e ω_{c2}. Observe que, para o filtro rejeita-faixa, $H_{\max} = |H(j0)| = |H(j\infty)|$ e, para o filtro rejeita-faixa *RLC* em série da Figura 14.28(a), $H_{\max} = 1$. Assim,

$$\omega_{c1} = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}, \qquad (14.47)$$

$$\omega_{c2} = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}. \qquad (14.48)$$

Usando as freqüências de corte para obter uma expressão para a largura de faixa, β, temos:

$$\beta = R/L. \qquad (14.49)$$

Por fim, o fator de qualidade, Q, é calculado a partir da freqüência central e da largura de faixa:

$$Q = \sqrt{\frac{L}{R^2C}}. \qquad (14.50)$$

Mais uma vez, podemos calcular as expressões para as duas freqüências de corte em termos da largura de faixa e freqüência central, como fizemos para o filtro passa-faixa:

$$\omega_{c1} = -\frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \omega_o^2}, \tag{14.51}$$

$$\omega_{c2} = \frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \omega_o^2}. \tag{14.52}$$

Formas alternativas para essas equações expressam as freqüências de corte em termos do fator de qualidade e da freqüência central:

$$\omega_{c1} = \omega_o \cdot \left[-\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q}\right)^2}\right], \tag{14.53}$$

$$\omega_{c2} = \omega_o \cdot \left[\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q}\right)^2}\right]. \tag{14.54}$$

O Exemplo 14.8 apresenta o projeto de um filtro rejeita-faixa *RLC* em série.

Como você já deve ter suspeitado a esta altura, outra configuração que produz um filtro rejeita-faixa é um circuito *RLC* em paralelo. Embora deixemos os detalhes da análise do circuito *RLC* em paralelo para o Problema 14.32, os resultados estão resumidos na Figura 14.31, juntamente com o filtro rejeita-faixa *RLC* em série. Como fizemos para as outras categorias de filtros, podemos estabelecer uma forma geral para as funções de transferência de filtros rejeita-faixa substituindo os termos constantes por β e ω_o:

$$H(s) = \frac{s^2 + \omega_o^2}{s^2 + \beta s + \omega_o^2}. \tag{14.55}$$

(Função de transferência para filtro *RLC* rejeita-faixa)

A Equação 14.55 é útil para projetar filtros, pois qualquer circuito que tenha uma função de transferência com essa forma pode ser usado como um filtro rejeita-faixa.

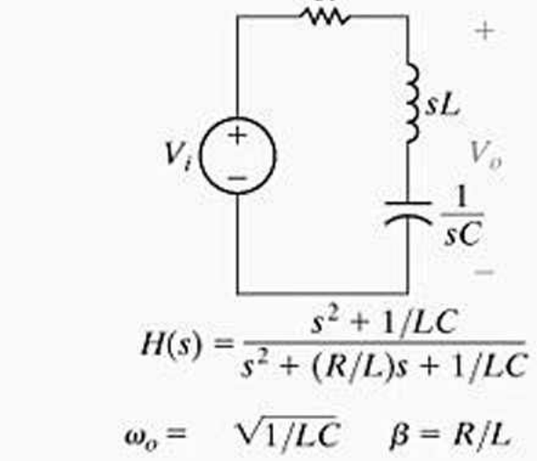


Figura 14.31 ◀ Dois filtros *RLC* rejeita-faixa, juntamente com as respectivas equações para a função de transferência, freqüência central e largura de faixa.

Exemplo 14.8 Projeto de um filtro rejeita-faixa *RLC* em série

Usando o circuito *RLC* em série da Figura 14.28(a), calcule os valores dos componentes de um filtro rejeita-faixa com uma largura de faixa de 250 Hz e uma freqüência central de 750 Hz. Use um capacitor de 100 nF. Calcule valores para R, L, ω_{c1}, ω_{c2} e Q.

Solução

Começamos calculando o valor do fator de qualidade para esse filtro:

$$Q = \omega_o/\beta = 3.$$

Usamos a Equação 14.46 para calcular L, lembrando de converter ω_o para radianos por segundo:

$$L = \frac{1}{\omega_o^2 C}$$

$$= \frac{1}{[2\pi(750)]^2(100 \times 10^{-9})}$$

$$= 450 \text{ mH}.$$

Usamos a Equação 14.49 para calcular R:

$$R = \beta L$$

$$= 2\pi(250)(450 \times 10^{-3}) = 707\ \Omega.$$

Os valores para a freqüência central e largura de faixa podem ser usados nas equações 14.51 e 14.52 para calcular as duas freqüências de corte:

$$\omega_{c1} = -\frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \omega_o^2}$$

$$= 3992{,}0 \text{ rad/s},$$

$$\omega_{c2} = \frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \omega_o^2}$$

$$= 5562{,}8 \text{ rad/s}.$$

As freqüências de corte estão em 635,3 Hz e 885,3 Hz. A diferença entre elas é 885,3 – 635,3 = 250 Hz, o que confirma a largura de faixa especificada. A média geométrica é $\sqrt{(635{,}3)(885{,}3)} = 750$ Hz, o que confirma a freqüência central especificada.

✔ PROBLEMAS PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 4 — Conhecer as configurações do circuito *RLC* que funcionam como filtros rejeita-faixa

14.10 Calcule os valores dos componentes para o filtro rejeita-faixa RLC em série mostrado na Figura 14.28(a) de modo que a freqüência central seja 4 kHz e o fator de qualidade seja 5. Use um capacitor de 500 nF.

Resposta: $L = 3{,}17$ mH,

$R = 15{,}92\ \Omega$.

14.11 Recalcule os valores dos componentes do Problema para Avaliação 14.10 de modo a obter um filtro rejeita-faixa com uma freqüência central de 20 kHz. O filtro tem um resistor de 100 Ω e o fator de qualidade continua a ser 5.

Resposta: $L = 3{,}98$ mH,

$C = 15{,}92$ nF.

NOTA: Tente resolver também os problemas 14.33 e 14.34, apresentados no final deste capítulo.

Perspectiva prática

Circuitos de telefone de teclas

Na "Perspectiva prática" do início deste capítulo, descrevemos o sistema multifreqüência de tom dual (DTMF) usado para sinalizar o acionamento de uma tecla em um telefone. Um elemento fundamental do sistema DTMF é o receptor DTMF — um circuito que decodifica os tons produzidos por uma tecla e determina qual delas foi acionada.

Para projetar um receptor DTMF, precisamos entender melhor o sistema DTMF. Como você pode ver na Figura 14.32, as teclas do telefone são organizadas em linhas e colunas. O par de tons gerado pelo acionamento de uma tecla depende da linha e da coluna da tecla. A linha determina seu tom de baixa freqüência e a coluna determina seu tom de alta freqüência.[1] Por exemplo, acionar a tecla '6' produz tons senoidais com as freqüências 770 Hz e 1.477 Hz.

Na central de comutação da empresa de telefonia, os filtros passa-faixa no receptor DTMF primeiro detectam se ambos os tons, o de baixa freqüência e o de alta freqüência, estão presentes simultaneamente. Esse teste rejeita muitos sinais de áudio irrelevantes. Se os tons estiverem presentes em ambas as faixas, outros filtros são utilizados para selecionar entre os possíveis tons em cada faixa, de modo que as freqüências possam identificar inequivocadamente a tecla pressionada. Testes adicionais são realizados para evitar falsa detecção de teclas. Por exemplo, só um tom é permitido por faixa de freqüência; as faixas de alta e baixa freqüência devem começar e terminar com alguns milissegundos de intervalo entre uma e outra para serem consideradas válidas; e as amplitudes dos sinais de alta e baixa freqüência devem ser semelhantes.

Você talvez esteja imaginando por que usar filtros passa-faixa em vez de um filtro passa-altas para o grupo de tons DTMF de alta freqüência e um filtro passa-baixa para o grupo de tons DTMF de baixa freqüência. A razão é que o sistema telefônico usa freqüências fora da faixa de 300–3kHz para outras finalidades de sinalização, como acionar a campainha do telefone. Filtros passa-faixa impedem que o receptor DTMF detecte erroneamente esses outros sinais.



Figura 14.32 ▲ Tons gerados pelas linhas e colunas de um telefone de teclas.

NOTA: Avalie o que entendeu dessa "Perspectiva prática" tentando resolver os problemas 14.43–14.45, apresentados no final deste capítulo.

[1] Um quarto tom de alta freqüência é gerado em 1.633 Hz. Esse tom é usado raramente e não é produzido por telefones comuns de 12 teclas.

Resumo

- Um *circuito de seleção de freqüências,* ou *filtro,* permite que sinais em certas freqüências cheguem à sua saída e atenua sinais em outras freqüências para impedi-los de chegar à saída. A *faixa de passagem* contém as freqüências dos sinais que o filtro deixa passar; a *faixa de rejeição* contém as freqüências dos sinais que são atenuados.
- A *freqüência de corte,* ω_c, identifica o local, no eixo das freqüências, que separa a faixa de rejeição da faixa de passagem. Na freqüência de corte, o módulo da função de transferência é igual a $(1/\sqrt{2})H_{\max}$.
- Um *filtro passa-baixas* deixa passar sinais de freqüências abaixo de ω_c e atenua sinais de freqüências acima de ω_c. Qualquer circuito que tenha a função de transferência

$$H(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c}$$

funciona como um filtro passa-baixas.

- Um *filtro passa-altas* deixa passar sinais de freqüências acima de ω_c e atenua sinais de freqüências abaixo de ω_c. Qualquer circuito que tenha a função de transferência

$$H(s) = \frac{s}{s + \omega_c}$$

funciona como um filtro passa-altas.

- Filtros passa-faixa e filtros rejeita-faixa têm duas freqüências de corte, ω_{c1} e ω_{c2}. Esses filtros são adicionalmente caracterizados por sua *freqüência central* (ω_o), *largura de faixa* (β) e *fator de qualidade* (Q). Essas quantidades são definidas como

$$\omega_o = \sqrt{\omega_{c1} \cdot \omega_{c2}},$$

$$\beta = \omega_{c2} - \omega_{c1}$$

$$Q = \omega_o/\beta$$

- Um *filtro passa-faixa* deixa passar sinais de freqüências dentro da faixa de passagem, que está entre ω_{c1} e ω_{c2}, e atenua sinais de freqüências que estão fora da faixa de passagem. Qualquer circuito que tenha a função de transferência

$$H(s) = \frac{\beta s}{s^2 + \beta s + \omega_o^2}$$

funciona como um filtro passa-faixa.

- Um *filtro rejeita-faixa* atenua sinais de freqüências dentro da faixa de rejeição, que está entre ω_{c1} e ω_{c2}, e deixa passar sinais de freqüências que estão fora da faixa de rejeição. Qualquer circuito que tenha a função de transferência

$$H(s) = \frac{s^2 + \omega_o^2}{s^2 + \beta s + \omega_o^2}$$

funciona como um filtro rejeita-faixa.

- Adicionar uma carga à saída de um filtro passivo altera suas propriedades de filtragem por alterar a localização da faixa de passagem e o módulo da função de transferência nessa faixa. Substituir uma fonte ideal de tensão que alimenta o filtro por uma fonte de resistência não-nula também altera as propriedades de filtragem do circuito, novamente pela alteração da localização da faixa de passagem e do módulo da função de transferência nessa faixa.

Problemas

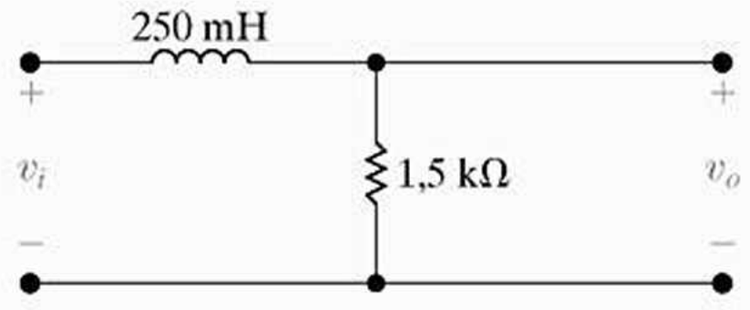
Seção 14.2

14.1* a) Determine a freqüência de corte em hertz para o filtro *RL* mostrado na Figura P14.1.

b) Calcule $H(j\omega)$ em ω_c, $0{,}3\omega_c$ e $3\omega_c$.

c) Se $v_i = 50 \cos \omega t$ V, escreva a expressão de regime permanente para v_o quando $\omega = \omega_c$, $\omega = 0{,}3\omega_c$ e $\omega = 3\omega_c$.

Figura P14.1



14.2* PROBLEMA DE PROJETO PSPICE Use um indutor de 25 mH para projetar um filtro passa-baixas *RL*, passivo, com uma freqüência de corte de 2,5 kHz.

a) Especifique o valor do resistor.

b) Uma resistência de carga de 750 Ω é ligada aos terminais de saída do filtro. Qual é a freqüência de corte, em hertz, do filtro carregado?

14.3 Um resistor R_l é inserido em série com o indutor no circuito da Figura 14.4(a). O circuito do novo filtro passa-baixas é mostrado na Figura P14.3.

a) Deduza a expressão para $H(s)$ onde $H(s) = V_o/V_i$.

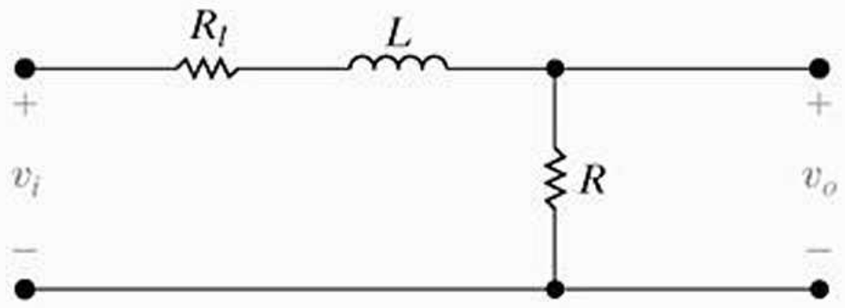
b) Em qual freqüência o módulo de $H(j\omega)$ será máximo?

c) Qual é o valor máximo do módulo de $H(j\omega)$?

d) Em qual freqüência o módulo de $H(j\omega)$ é igual a seu valor máximo dividido por $\sqrt{2}$?

e) Suponha que uma resistência de 75 Ω seja inserida em série com o indutor de 250 mH no circuito da Figura P14.1. Determine ω_c, $H(j0)$, $H(j\omega_c)$, $H(j0{,}3\omega_c)$ e $H(j3\omega_c)$.

Figura P14.3

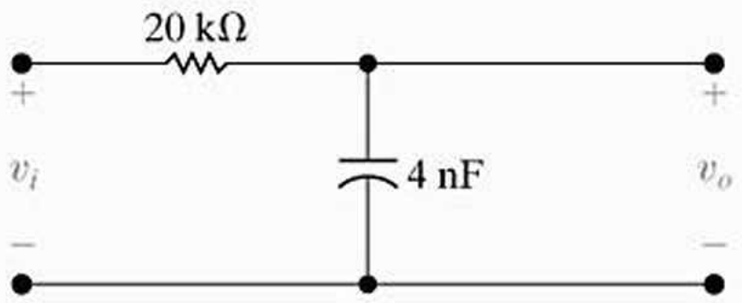


14.4 a) Determine a freqüência de corte (em hertz) do filtro passa-baixas mostrado na Figura P14.4.

b) Calcule $H(j\omega)$ em ω_c, $0{,}2\omega_c$ e $8\omega_c$.

c) Se $v_i = 480 \cos \omega t$ mV, escreva a expressão de regime permanente para v_o quando $\omega = \omega_c$, $0{,}2\omega_c$ e $8\omega_c$.

Figura P14.4



14.5 Um resistor de carga R_L é ligado em paralelo com o capacitor no circuito da Figura 14.7. O circuito do filtro passa-baixas carregado é mostrado na Figura P14.5.

a) Deduza a expressão para a função de transferência de tensão V_o/V_i.

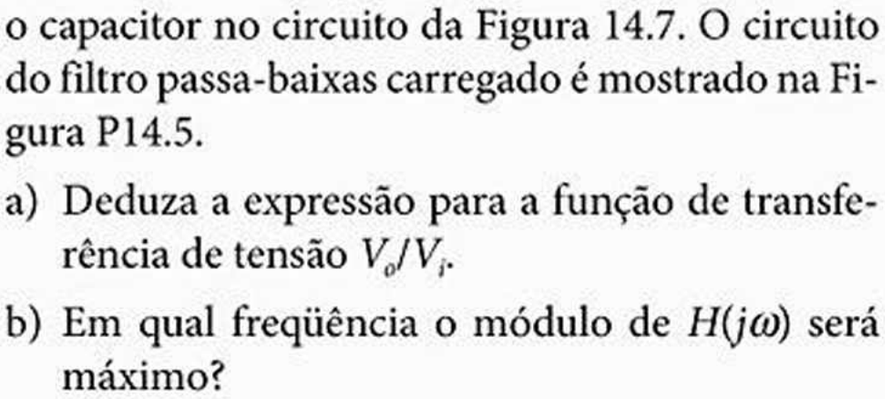
b) Em qual freqüência o módulo de $H(j\omega)$ será máximo?

c) Qual é o valor máximo do módulo de $H(j\omega)$?

d) Em qual freqüência o módulo de $H(j\omega)$ é igual a seu valor máximo dividido por $\sqrt{2}$?

e) Suponha que uma resistência de 300 kΩ seja inserida em paralelo com o capacitor de 4 nF no circuito da Figura P14.4. Determine ω_c, $H(j0)$, $H(j\omega_c)$, $H(j0{,}2\omega_c)$ e $H(j8\omega_c)$.

Figura P14.5



14.6 PROBLEMA DE PROJETO PSPICE Use um capacitor de 25 nF para projetar um filtro passa-baixas com uma freqüência de corte de 160 krad/s.

a) Especifique a freqüência de corte em hertz.

b) Especifique o valor do resistor do filtro.

c) Suponha que a freqüência de corte não possa aumentar mais do que 8%. Qual é o menor valor da resistência de carga que pode ser ligada aos terminais de saída do filtro?

d) Se o resistor determinado em (c) for ligado aos terminais de saída, qual será o módulo de $H(j\omega)$ quando $\omega = 0$?

14.7 Projete um filtro passa-baixas *RC* (veja a Figura 14.7) com uma freqüência de corte de 500 Hz usando um capacitor de 50 nF.

a) Qual é a freqüência de corte em rad/s?

b) Qual é o valor do resistor?

c) Desenhe o circuito do filtro e identifique os valores dos componentes e a tensão de saída.

d) Qual é a função de transferência do filtro do item (c)?

e) Se o filtro do item (c) for carregado com um resistor cujo valor é o mesmo do resistor do item (b), qual será a função de transferência desse filtro carregado?

f) Qual é a freqüência de corte do filtro carregado do item (e)?

g) Qual é o ganho na faixa de passagem do filtro carregado do item (e)?

14.8 Estude o circuito mostrado na Figura P14.8 (sem o resistor de carga).

a) À medida que $\omega \to 0$, o comportamento do indutor se aproxima do comportamento de qual componente de circuito? Que valor terá a tensão de saída v_0?

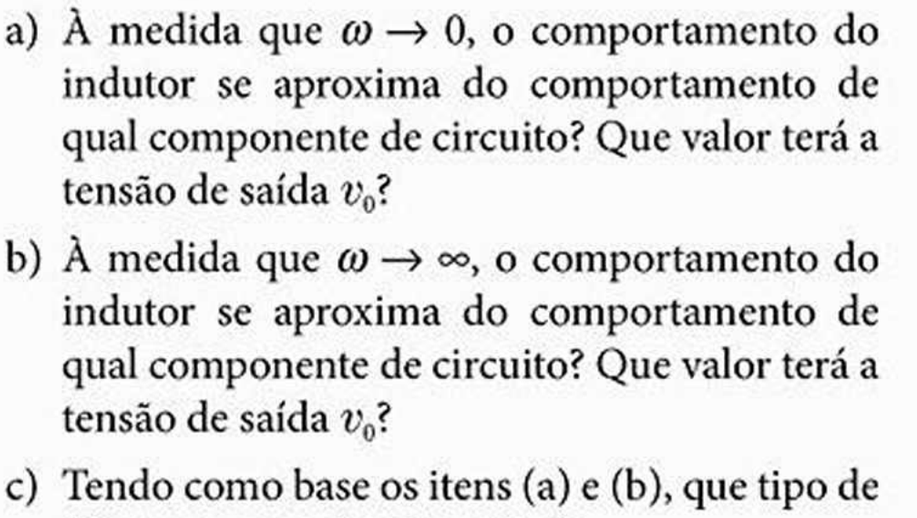
b) À medida que $\omega \to \infty$, o comportamento do indutor se aproxima do comportamento de qual componente de circuito? Que valor terá a tensão de saída v_0?

c) Tendo como base os itens (a) e (b), que tipo de filtragem esse circuito exibe?

d) Qual é a função de transferência do filtro não carregado?

e) Se $R = 1$ kΩ e $L = 20$ mH, qual é a freqüência de corte do filtro em rad/s?

Figura P14.8



14.9 Suponha que desejemos acrescentar um resistor de carga em paralelo com o resistor no circuito mostrado na Figura P14.8.

a) Qual é a função de transferência do filtro carregado?

b) Compare a função de transferência do filtro não carregado (item (d) do Problema 14.8) com a função de transferência do filtro carregado (item (a) do Problema 14.9). As freqüências de corte são diferentes? Os ganhos nas faixas de passagem são diferentes?

c) Qual é o menor valor de resistência de carga que pode ser usado com o filtro do Problema 14.8(e) de tal modo que a freqüência de corte do filtro resultante não varie mais do que 10% em relação à do filtro não carregado?

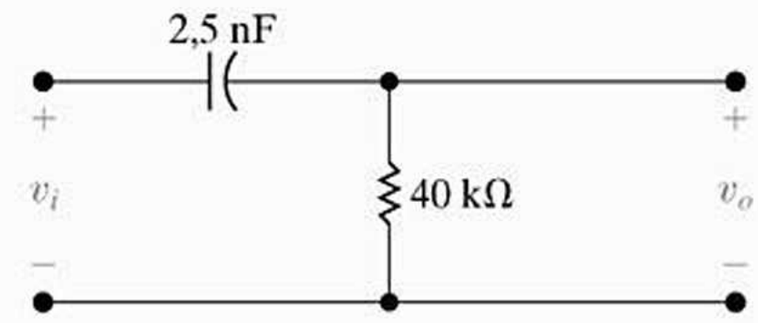
Seção 14.3

14.10 a) Determine a freqüência de corte (em hertz) para o filtro passa-altas mostrado na Figura P14.10.

b) Determine $H(j\omega)$ em ω_c, $0{,}1\omega_c$ e $10\omega_c$.

c) Se $v_i = 800 \cos \omega t$ mV, escreva a expressão de regime permanente para v_o quando $\omega = \omega_c$, $\omega = 0{,}1\omega_c$ e $\omega = 10\omega_c$.

Figura P14.10



14.11 Um resistor R_c é ligado em série com o capacitor no circuito da Figura 14.10(a). O novo circuito do filtro passa-altas é mostrado na Figura P14.11.

a) Deduza a expressão para $H(s)$ onde $H(s) = V_o/V_i$.

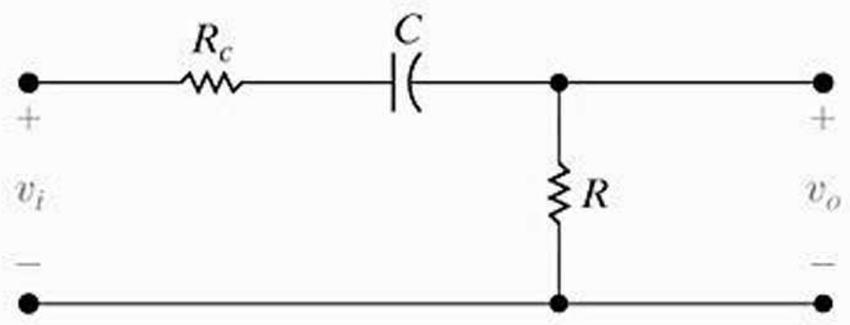
b) Em qual freqüência o módulo de $H(j\omega)$ será máximo?

c) Qual é o valor máximo do módulo de $H(j\omega)$?

d) Em qual freqüência o módulo de $H(j\omega)$ será igual a seu valor máximo dividido por $\sqrt{2}$?

e) Suponha que uma resistência de 10 kΩ seja ligada em série com o capacitor de 2,5 nF no circuito da Figura P14.10. Calcule ω_c, $H(j\omega_c)$, $H(j0{,}1\omega_c)$ e $H(j10\omega_c)$.

Figura P14.11



14.12* PROBLEMA DE PROJETO PSPICE Usando um capacitor de 20 nF, projete um filtro passa-altas com uma freqüência de corte de 800 Hz.

a) Especifique o valor de R em quiloohms.

b) Um resistor de 68 kΩ é ligado aos terminais de saída do filtro. Qual é a freqüência de corte, em hertz, do filtro carregado?

14.13* PROBLEMA DE PROJETO PSPICE Usando um indutor de 25 mH, projete um filtro passa-altas *RL*, com uma freqüência de corte de 160 krad/s.

a) Especifique o valor da resistência.

b) Suponha que uma carga resistiva pura seja ligada ao filtro. A freqüência de corte não deve cair abaixo de 150 krad/s. Qual é o menor resistor de carga que pode ser ligado aos terminais de saída do filtro?

14.14 Projete um filtro passa-altas *RC* (veja a Figura 14.10[a]) com uma freqüência de corte de 300 Hz usando um capacitor de 100 nF.

a) Qual é a freqüência de corte em rad/s?

b) Qual é o valor do resistor?

c) Desenhe o circuito do filtro identificando os valores dos componentes e a tensão de saída.

d) Qual é a função de transferência do filtro do item (c)?

e) Se o filtro do item (c) for carregado com um resistor cujo valor é o mesmo do resistor do item (b), qual é a função de transferência desse filtro carregado?

f) Qual é a freqüência de corte do filtro carregado do item (e)?

g) Qual é o ganho na faixa de passagem do filtro carregado do item (e)?

14.15 Considere o circuito mostrado na Figura P14.15.

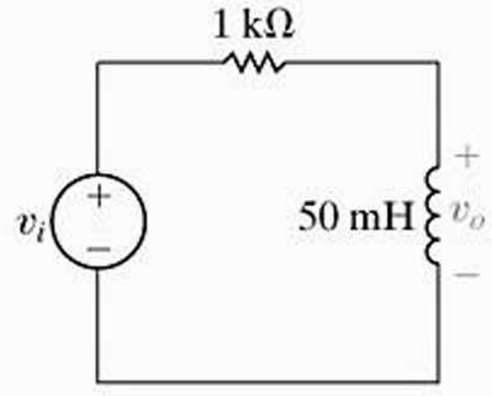
a) Considerando as tensões de entrada e saída mostradas na figura, esse circuito comporta-se como qual tipo de filtro?

b) Qual é a função de transferência, $H(s) = V_o(s)/V_i(s)$, desse filtro?

c) Qual é a freqüência de corte desse filtro?

d) Qual é a magnitude da função de transferência do filtro em $s = j\omega_c$?

Figura P14.15



14.16 Suponha que um resistor de carga de 1 kΩ seja acrescentado ao filtro na Figura P14.15.

a) Qual é a função de transferência, $H(s) = V_o(s)/V_i(s)$, desse filtro?

b) Qual é a freqüência de corte desse filtro?

c) Compare a freqüência de corte do filtro carregado com a freqüência de corte do filtro não carregado da Figura P14.15.

d) O que mais difere esses dois filtros?

Seção 14.4

14.17 Mostre que as formas alternativas para as freqüências de corte de um filtro passa-faixa dadas pelas equações 14.36 e 14.37 podem ser deduzidas das equações 14.34 e 14.35.

14.18 Calcule a freqüência central, a largura de faixa e o fator de qualidade de um filtro passa-faixa cujas freqüências de corte superior e inferior são, respectivamente, 200 krad/s e 180 krad/s.

14.19 Um filtro passa-faixa tem uma freqüência central, ou de ressonância, de 80 krad/s e um fator de qualidade de 8. Determine a largura de faixa, a freqüência de corte superior e a freqüência de corte inferior. Expresse todas as respostas em quilohertz.

14.20 PROBLEMA DE PROJETO PSPICE Use um capacitor de 20 nF para projetar um filtro passa-faixa *RLC* em série, como mostrado na parte superior da Figura 14.27. A freqüência central do filtro é 20 kHz, e o fator de qualidade é 5.

a) Especifique os valores de R e L.

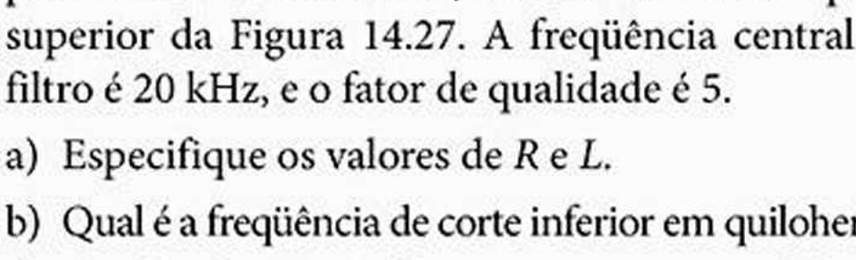
b) Qual é a freqüência de corte inferior em quilohertz?

c) Qual é a freqüência de corte superior em quilohertz?

d) Qual é a largura de faixa do filtro em quilohertz?

14.21* PSPICE Para o filtro passa-faixa mostrado na Figura P14.21, determine (a) ω_o, (b) f_o, (c) Q, (d) ω_{c1}, (e) f_{c1}, (f) ω_{c2}, (g) f_{c2} e (h) β.

Figura P14.21



14.22* PROBLEMA DE PROJETO PSPICE Usando um capacitor de 25 nF no circuito passa-faixa mostrado na Figura 14.22, projete um filtro com um fator de qualidade de 10 e uma freqüência central de 50 krad/s.

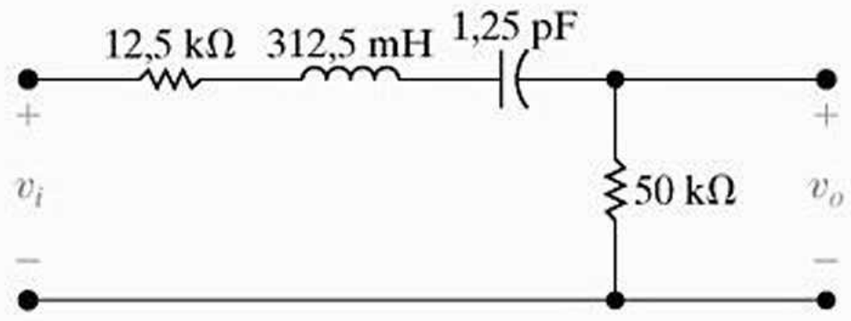
a) Especifique os valores numéricos de R e L.

b) Calcule as freqüências de corte superior e inferior em quilohertz.

c) Calcule a largura de faixa em hertz.

14.23 PSPICE Para o filtro passa-faixa mostrado na Figura P14.23, calcule o seguinte: (a) f_o; (b) Q; (c) f_{c1}; (d) f_{c2} e (e) β.

Figura P14.23



14.24 A tensão de entrada no circuito da Figura P14.23 é 800 cos ωt mV. Calcule a tensão de saída quando (a) $\omega = \omega_o$; (b) $\omega = \omega_{c1}$ e (c) $\omega = \omega_{c2}$.

14.25 Projete um filtro passa-faixa *RLC* em série (veja a Figura 14.19[a]) com um fator de qualidade de 5 e uma freqüência central de 20 krad/s, usando um capacitor de 0,05 μF.

a) Desenhe o circuito do filtro, identificando os valores dos componentes e a tensão de saída.

b) Para o filtro do item (a), calcule a largura de faixa e os valores das duas freqüências de corte.

14.26 A entrada para o filtro passa-faixa *RLC* em série projetado no Problema 14.25 é 200 cos ωt mV. Determine a queda de tensão no resistor quando (a) $\omega = \omega_o$; (b) $\omega = \omega_{c1}$;(c) $\omega = \omega_{c2}$;(d) $\omega = 0{,}1\omega_o$; (e) $\omega = 10\omega_o$.

14.27 A entrada para o filtro passa-faixa *RLC* em série projetado no Problema 14.25 é 200 cos ωt mV. Determine a queda de tensão na combinação em série de indutor e capacitor quando (a) $\omega = \omega_o$; (b) $\omega = \omega_{c1}$; (c) $\omega = \omega_{c2}$; (d) $\omega = 0{,}1\omega_o$; (e) $\omega = 10\omega_o$.

14.28 O diagrama de blocos de um sistema que consiste em uma fonte de tensão senoidal, um filtro passa-faixa *RLC* em série e uma carga é mostrado na Figura P14.28. A impedância interna da fonte senoidal é $36 + j0\ \Omega$ e a impedância da carga é $320 + j0\ \Omega$.

O filtro passa-faixa *RLC* em série tem um capacitor de 5 nF, uma freqüência central de 250 krad/s e um fator de qualidade de 10.

a) Desenhe um diagrama do circuito do sistema.

b) Especifique os valores numéricos de L e R para o filtro do sistema.

c) Qual é o fator de qualidade do sistema interligado?

d) Qual é a largura de faixa (em hertz) do sistema interligado?

Figura P14.28



14.29 A finalidade deste problema é investigar como uma carga resistiva ligada aos terminais de saída do filtro passa-faixa mostrado na Figura 14.19 afeta o fator de qualidade e, por conseguinte, a largura de faixa do sistema de filtragem. O circuito do filtro carregado é mostrado na Figura P14.29.

a) Calcule a função de transferência V_o/V_i para o circuito mostrado na Figura P14.29.

b) Qual é a expressão para a largura de faixa do sistema?

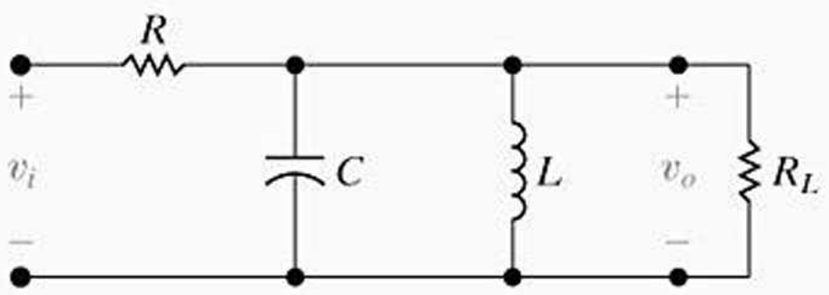
c) Qual é a expressão para a largura de faixa do sistema carregado (β_C) em função da largura de faixa do sistema não carregado (β_D)?

d) Qual é a expressão para o fator de qualidade do sistema?

e) Qual é a expressão para o fator de qualidade do sistema carregado (Q_C) em função do fator de qualidade do sistema descarregado (Q_D)?

f) Quais são as expressões para as freqüências de corte ω_{c1} e ω_{c2}?

Figura P14.29



14.30 PSPICE Considere o circuito mostrado na Figura P14.30.

a) Determine ω_o.

b) Determine β.

c) Determine Q.

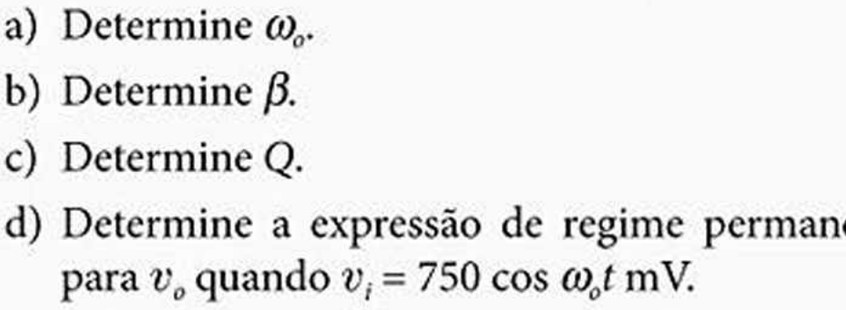
d) Determine a expressão de regime permanente para v_o quando $v_i = 750 \cos \omega_o t$ mV.

e) Mostre que, se R_L for expresso em megaohms, Q do circuito na Figura P14.30 será

$$Q = \frac{25}{1 + 1{,}25/R_L}$$

f) Faça um gráfico de Q em relação a R_L para $1\ \text{M}\Omega \leq R_L \leq 40\ \text{M}\Omega$.

Figura P14.30



14.31 Os parâmetros do circuito na Figura P14.30 são $R = 100\ \text{k}\Omega$, $C = 4$ pF e $L = 400\ \mu$H. O fator de qualidade do circuito não deve cair abaixo de 9. Qual é o menor valor permissível do resistor R_L?

Seção 14.5

14.32 a) Mostre (por análise qualitativa) que o circuito da Figura P14.32 é um filtro rejeita-faixa.

b) Comprove a análise qualitativa do item (a) determinando a função de transferência de tensão do filtro.

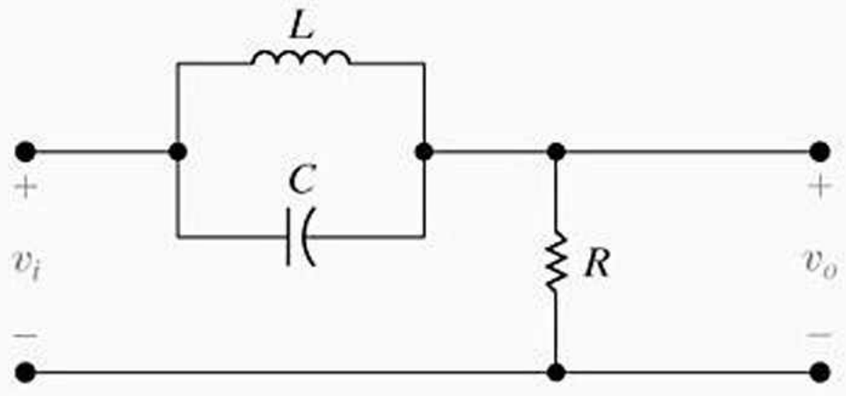
c) Deduza a expressão para a freqüência central do filtro.

d) Deduza as expressões para as freqüências de corte ω_{c1} e ω_{c2}.

e) Qual é a expressão para a largura de faixa do filtro?

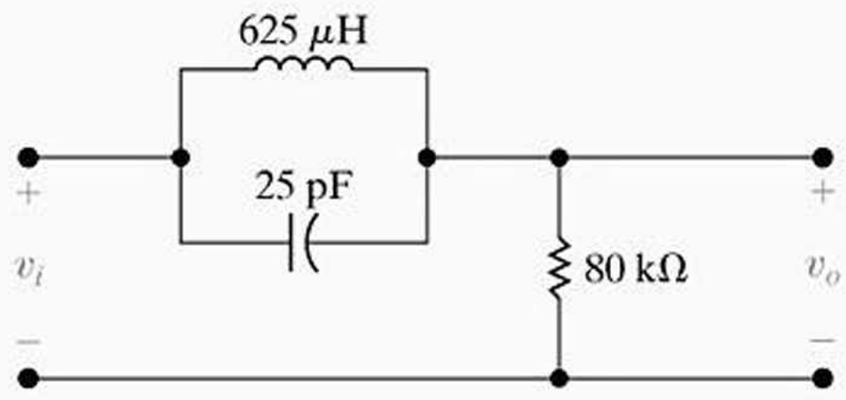
f) Qual é a expressão para o fator de qualidade do circuito?

Figura P14.32



14.33* PSPICE Para o filtro rejeita-faixa na Figura P14.33, calcule (a) ω_o; (b) f_o; (c) Q; (d) ω_{c1}; (e) f_{c1}; (f) ω_{c2}; (g) f_{c2} e (h) β em quilohertz.

Figura P14.33



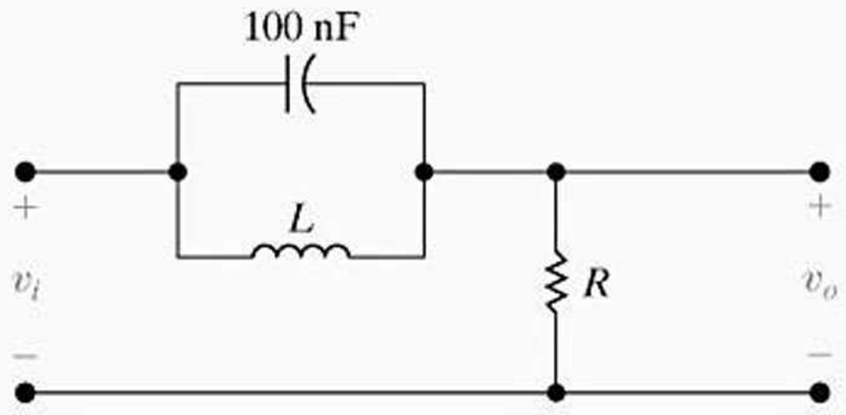
14.34* PROBLEMA DE PROJETO PSPICE Use um capacitor de 100 nF para projetar um filtro rejeita-faixa, como mostrado na Figura P14.34. O filtro tem uma freqüência central de 50 kHz e um fator de qualidade de 8.

a) Especifique os valores numéricos de R e L.

b) Calcule as freqüências de corte, em quilohertz.

c) Calcule a largura de faixa do filtro em quilohertz.

Figura P14.34



14.35 PSPICE Suponha que o filtro rejeita-faixa no Problema 14.34 seja carregado com um resistor de 932 Ω.

a) Qual é o fator de qualidade do circuito carregado?
b) Qual é a largura de faixa (em quilohertz) do circuito carregado?
c) Qual é a freqüência de corte superior em quilohertz?
d) Qual é a freqüência de corte inferior em quilohertz?

14.36 Projete um filtro rejeita-faixa *RLC* (veja a Figura 14.28[a]) com um fator de qualidade de 2/3 e uma freqüência central de 4 krad/s usando um capacitor de 80 nF.

a) Desenhe o circuito do filtro identificando os valores dos componentes e a tensão de saída.
b) Para o filtro do item (a), calcule a largura de faixa e os valores das duas freqüências de corte.

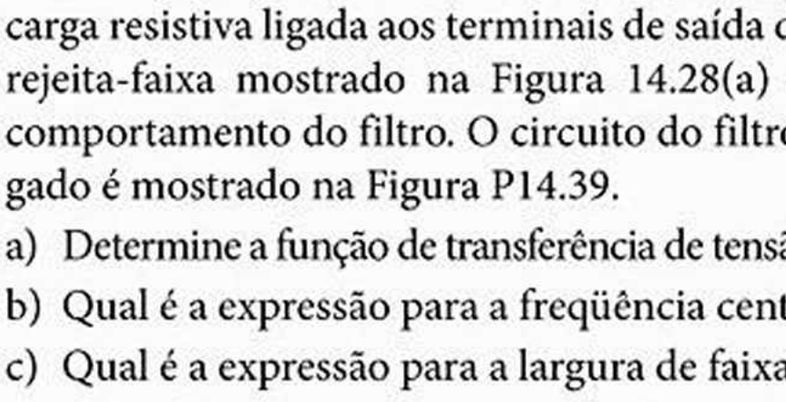
14.37 A entrada para o filtro rejeita-faixa *RLC* projetado no Problema 14.36 é 125 cos ωt mV. Determine a queda de tensão na combinação em série do indutor e capacitor quando (a) $\omega = \omega_o$; (b) $\omega = \omega_{c1}$; (c) $\omega = \omega_{c2}$; (d) $\omega = 0{,}1\omega_o$; (e) $\omega = 10\,\omega_o$.

14.38 A entrada para o filtro rejeita-faixa *RLC* projetado no Problema 14.36 é 125 cos ωt mV. Determine a queda de tensão no resistor quando (a) $\omega = \omega_o$; (b) $\omega = \omega_{c1}$; (c) $\omega = \omega_{c2}$; (d) $\omega = 0{,}1\omega_o$; (e) $\omega = 10\omega_o$.

14.39 A finalidade deste problema é investigar como uma carga resistiva ligada aos terminais de saída do filtro rejeita-faixa mostrado na Figura 14.28(a) afeta o comportamento do filtro. O circuito do filtro carregado é mostrado na Figura P14.39.

a) Determine a função de transferência de tensão V_o/V_i.
b) Qual é a expressão para a freqüência central?
c) Qual é a expressão para a largura de faixa?
d) Qual é a expressão para o fator de qualidade?
e) Calcule $H(j\omega_o)$.
f) Calcule $H(j0)$.
g) Calcule $H(j\infty)$.
h) Quais são as expressões para as freqüências angulares ω_{c1} e ω_{c2}?

Figura P14.39



14.40 PSPICE Os parâmetros do circuito na Figura P14.39 são $R = 5\,\text{k}\Omega$, $L = 400$ mH, $C = 250$ pF e $R_L = 20\,\text{k}\Omega$.

a) Determine ω_o, β (em quilohertz) e Q.
b) Determine $H(j0)$ e $H(j\infty)$.
c) Determine f_{c2} e f_{c1}.
d) Mostre que, se R_L for expresso em quiloohms, o Q do circuito será

$$Q = 8[1 + (5/R_L)]$$

e) Faça um gráfico de Q em função de R_L para $2\,\text{k}\Omega \leq R_L \leq 50\,\text{k}\Omega$.

14.41 PSPICE A carga no circuito do filtro rejeita-faixa mostrado na Figura P14.39 é 36 kΩ. A freqüência central do filtro é 1 Mrad/s e o capacitor é de 400 pF. Em freqüências muito baixas e muito altas, a amplitude da tensão senoidal de saída deve ser no mínimo 96% da amplitude da tensão senoidal de entrada.

a) Especifique os valores numéricos de R e L.
b) Qual é o fator de qualidade do circuito?

Seções 14.1–14.5

14.42 Dada a seguinte função de transferência de tensão:

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{4 \times 10^6}{s^2 + 500s + 4 \times 10^6}.$$

a) Em quais freqüências (em radianos por segundo) a razão V_o/V_i é igual à unidade?
b) Em quais freqüências a razão é máxima?
c) Qual é o valor máximo da razão?

14.43* PERSPECTIVA PRÁTICA PROBLEMA DE PROJETO Projete um filtro passa-faixa *RLC* em série (veja a Figura 14.27) para detectar o tom de baixa freqüência gerado pelo acionamento de uma tecla do telefone mostrado na Figura 14.32.

a) Calcule os valores de L e C que situam as freqüências de corte nos limites da faixa de baixa freqüência do DTMF. Observe que a resistência em circuitos telefônicos padronizados é sempre $R = 600\ \Omega$.
b) Qual é a amplitude da saída desses circuitos em cada uma das faixas de baixa freqüência em relação à amplitude de pico do filtro passa-faixa?
c) Qual é a amplitude da saída desse circuito na freqüência mais baixa da faixa de alta freqüência?

14.44* PERSPECTIVA PRÁTICA PROBLEMA DE PROJETO Projete um filtro DTMF passa-faixa para altas freqüências semelhante ao filtro passa-faixa para baixas freqüências projetado no Problema 14.43. Não se esqueça de incluir o quarto tom de alta freqüência, em 1.633 Hz, em seu projeto. Qual é a amplitude da resposta de seu filtro em relação aos tons DTMF de baixa freqüência?

14.45* PERSPECTIVA PRÁTICA PROBLEMA DE PROJETO O sinal de 20 Hz que aciona a campainha de um telefone tem de ter uma amplitude muito grande para produzir um sinal suficientemente alto. Qual é a relação máxima entre a amplitude do sinal da campainha e a dos sinais de baixa freqüência do sistema DTMF de forma que a resposta do filtro no Problema 14.43 seja no máximo igual à metade da amplitude de qualquer dos sinais do sistema DTMF?

CAPÍTULO

15

Filtros ativos

SUMÁRIO DO CAPÍTULO

15.1 **Filtros ativos passa-baixas e passa-altas de primeira ordem**
15.2 **Mudança de escala**
15.3 **Filtros ativos passa-faixa e rejeita-faixa**
15.4 **Filtros ativos de ordem superior**
15.5 **Filtros ativos passa-faixa e rejeita-faixa de banda estreita**

✔ OBJETIVOS DO CAPÍTULO

1 Conhecer os circuitos com amplificadores operacionais que se comportam como filtros passa-baixas e passa-altas de primeira ordem e saber calcular os valores dos componentes para que esses circuitos atendam às especificações de freqüência de corte e ganho na faixa de passagem.

2 Saber projetar filtros ativos a partir de protótipos e usar mudanças de escala para conseguir as características desejadas.

3 Entender como usar filtros Butterworth de primeira e segunda ordens em cascata para implementar filtros passa-baixas, passa-altas, passa-faixa e rejeita-faixa de qualquer ordem.

4 Saber usar as equações de projeto para calcular os valores dos componentes para filtros protótipos de faixa estreita, passa-faixa e rejeita-faixa que atendam às especificações desejadas.

Até aqui, consideramos apenas filtros passivos, isto é, circuitos que consistem em resistores, indutores e capacitores. Entretanto, há áreas de aplicação nas quais circuitos ativos, aqueles que empregam amplificadores operacionais, têm certas vantagens em relação a filtros passivos. Por exemplo, circuitos ativos podem produzir filtros passa-faixa e rejeita-faixa sem usar indutores. Isso é desejável porque, de modo geral, indutores são grandes, pesados e caros e podem introduzir efeitos eletromagnéticos que comprometem as características desejadas da resposta de freqüência.

Examine as funções de transferência de todos os filtros do Capítulo 14 e você notará que a amplitude máxima não excede 1. Ainda que filtros passivos possam realizar amplificação de tensão e corrente na freqüência de ressonância, em geral eles são incapazes de amplificar, pois a amplitude da saída não excede a da entrada. Essa observação não é surpreendente, pois muitas das funções de transferência no Capítulo 14 foram derivadas usando divisão de tensão ou corrente. Filtros ativos permitem um controle da amplificação, característica não disponível em filtros passivos.

Por fim, lembre-se de que a freqüência de corte e o ganho na faixa de passagem de filtros passivos foram alterados com a adição de uma carga resistiva na saída do filtro. Isso não acontece com filtros ativos, em razão das propriedades dos amplificadores operacionais. Assim, usamos circuitos ativos para implementar projetos de filtros quando ganho, variação de carga e tamanho físico são parâmetros importantes nas especificações de projeto.

Neste capítulo, estudaremos alguns dos muitos circuitos de filtros que empregam amplificadores operacionais. Como você verá, esses circuitos superam as desvantagens dos circuitos passivos. Além disso, mostraremos como os filtros ativos básicos podem ser combinados para obter respostas de freqüência específicas e conseguir uma resposta mais próxima da ideal. Observe que, neste capítulo, admitimos que todo amplificador operacional seja ideal.

Perspectiva prática

Controle de volume de graves

Neste capítulo, continuamos a estudar circuitos de seleção de freqüências. Como descrevemos no Capítulo 14, isso significa que o comportamento do circuito depende da freqüência de sua entrada senoidal. A maioria dos circuitos apresentados aqui pertence a uma das quatro categorias identificadas no Capítulo 14 — filtros passa-baixas, filtros passa-altas, filtros passa-faixa e filtros rejeita-faixa. Contudo, enquanto os circuitos no Capítulo 14 foram construídos usando fontes, resistores, capacitores e indutores, os circuitos deste capítulo empregam amplificadores operacionais. Em breve veremos as vantagens obtidas com um filtro em cuja construção utilizam-se amplificadores operacionais.

Sistemas eletrônicos de áudio como rádios, toca-fitas e toca-CDs costumam apresentar controles de volume separados denominados 'agudos' (*treble*) e 'graves' (*bass*). Esses controles permitem que o usuário selecione o volume de sinais de áudio de alta freqüência ('agudos') independentemente do volume de

sinais de áudio de baixa freqüência ('graves'). A capacidade de ajustar de forma independente a quantidade de amplificação ou atenuação nessas duas faixas de freqüência permite que o ouvinte ajuste o som com mais precisão do que se houvesse um único controle de volume. Daí esses circuitos de controle serem chamados de circuitos de controle de tom.

O exemplo da "Perspectiva prática" no final deste capítulo apresenta um circuito que implementa o controle de volume de graves usando um único amplificador operacional juntamente com resistores e capacitores. Um resistor ajustável provê o controle necessário para a amplificação na faixa de freqüência dos graves.

15.1 Filtros ativos passa-baixas e passa-altas de primeira ordem

Considere o circuito da Figura 15.1. Do ponto de vista qualitativo, quando a freqüência da fonte varia, somente a impedância do capacitor é afetada. Em freqüências muito baixas, o capacitor age como um circuito aberto e o circuito amp op age como um amplificador com um ganho de $-R_2/R_1$. Em freqüências muito altas, o capacitor age como um curto-circuito, ligando a saída do amp op à terra. Assim, o circuito da Figura 15.1 funciona como um filtro passa-baixas com um ganho na faixa de passagem de $-R_2/R_1$.

Para confirmar essa avaliação qualitativa, podemos calcular a função de transferência $H(s) = V_o(s)/V_i(s)$. Observe que o circuito na Figura 15.1 tem a forma do circuito genérico da Figura 15.2, no qual a impedância de entrada (Z_i) é o resistor R_1, e a impedância de realimentação (Z_f) é a combinação em paralelo do resistor R_2 e do capacitor C.

Como o circuito da Figura 15.2 é análogo ao circuito amplificador inversor do Capítulo 5, sua função de transferência é $-Z_f/Z_i$. Assim, a função de transferência do circuito da Figura 15.1 é

$$H(s) = \frac{-Z_f}{Z_i} = \frac{-R_2 \| \left(\frac{1}{sC}\right)}{R_1} = -K\frac{\omega_c}{s + \omega_c}, \tag{15.1}$$

onde

$$K = \frac{R_2}{R_1}, \tag{15.2}$$

e

$$\omega_c = \frac{1}{R_2 C}. \tag{15.3}$$

Observe que a Equação 15.1 tem a mesma forma da equação geral para filtros passa-baixas dada no Capítulo 14, com uma importante exceção: o ganho na faixa de passagem, K, determinado pela razão R_2/R_1. Assim, um filtro ativo passa-baixas permite que seu ganho na faixa de passagem e a sua freqüência de corte sejam especificados independentemente.

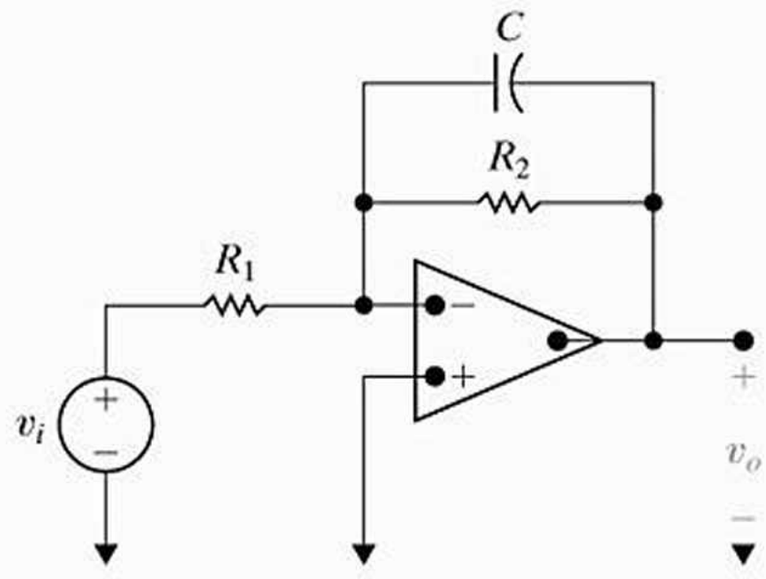


Figura 15.1 ▲ Filtro ativo passa-baixas de primeira ordem.

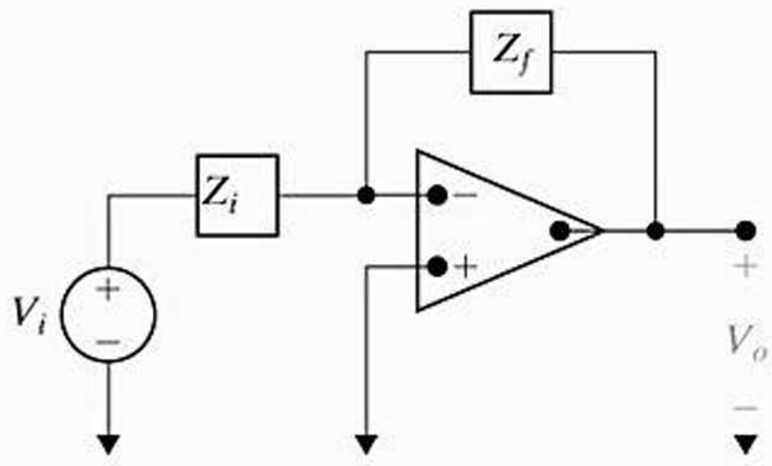


Figura 15.2 ▲ Esquema genérico de um circuito com um amplificador operacional.

Uma observação sobre gráficos de resposta de freqüência

Gráficos de resposta de freqüência, apresentados no Capítulo 14, proporcionam valiosa percepção do modo de funcionamento de um filtro. Por isso, faremos uso extensivo de gráficos de resposta de freqüência também neste capítulo. Esses gráficos no Capítulo 14 eram duplos — um gráfico do módulo da função de transferência em função da freqüência e um gráfico do ângulo de fase (em graus) da função de transferência em função da freqüência. Quando usamos ambos os gráficos, normalmente eles são sobrepostos, de modo que possam compartilhar o mesmo eixo de freqüência.

Neste capítulo, usamos um tipo especial de gráfico de resposta de freqüência denominado *diagrama de Bode*. Os detalhes dos diagramas de Bode são discutidos no Apêndice E, que inclui informações detalhadas sobre como construí-los à mão. Como é provável que você use um computador para construir diagramas de Bode, resumimos aqui as características especiais desses gráficos. Há duas diferenças importantes entre os diagramas de Bode e os gráficos de resposta de freqüência do Capítulo 14.

A primeira é que, em vez de usar um eixo linear para os valores da freqüência, um diagrama de Bode usa um eixo logarítmico, o que nos permite a representação gráfica de uma faixa mais ampla de freqüências de interesse. Normalmente, representamos três ou quatro décadas de freqüências, por exemplo, de 10^2 rad/s a 10^6 rad/s, ou 1 kHz a 1 MHz, escolhendo a faixa de freqüências na qual as características da função de transferência estão variando. Se construirmos diagramas de Bode do módulo e do ângulo de fase, eles também compartilharão o eixo da freqüência.

A segunda diferença é que, em vez de representar diretamente o módulo da função de transferência em função da freqüência, o diagrama de Bode representa o módulo em decibéis (dB) em função do logaritmo da freqüência. O decibel é discutido no Apêndice D. Em resumo, se o módulo da função de transferência for $|H(j\omega)|$, seu valor em dB será dado por

$$A_{\text{dB}} = 20 \log_{10} |H(j\omega)|.$$

É importante lembrar que, embora $|H(j\omega)|$ seja uma quantidade positiva, A_{dB} é uma quantidade que pode assumir valores negativos. Quando $A_{\text{dB}} = 0$, o módulo da função de transferência é 1, visto que $20 \log_{10}(1) = 0$. Quando $A_{\text{dB}} < 0$, o módulo da função de transferência está entre 0 e 1, e quando $A_{\text{dB}} > 0$, o módulo da função de transferência é maior do que 1. Por fim, observe que

$$20 \log_{10}|1/\sqrt{2}| = -3 \text{ dB}.$$

Lembre-se de que definimos a freqüência de corte de filtros determinando a freqüência em que o máximo módulo da função de transferência era reduzido de $1/\sqrt{2}$. Se traduzirmos essa definição para o módulo em dB, definimos a freqüência de corte de um filtro determinando a freqüência em que o máximo módulo da função de transferência em dB se reduz de 3 dB. Por exemplo, se o módulo da função de transferência de um filtro passa-baixas em sua faixa de passagem for 26 dB, o valor usado para determinar a freqüência de corte será 26 − 3 = 23 dB.

O Exemplo 15.1 ilustra o projeto de um filtro ativo passa-baixas de primeira ordem que deve atender às especificações desejadas de ganho na faixa de passagem e freqüência de corte e também ilustra um diagrama de Bode do módulo da função de transferência do filtro.

Exemplo 15.1 Projeto de um filtro ativo passa-baixas

Usando o circuito mostrado na Figura 15.1, calcule valores de C e R_2 para que, junto com $R_1 = 1\ \Omega$, ele funcione como um filtro passa-baixas com um ganho na faixa de passagem de 1 e uma freqüência de corte de 1 rad/s. Determine a função de transferência para esse filtro e use-a para desenhar um diagrama de Bode da amplitude da resposta de freqüência do filtro.

Solução

A Equação 15.2 dá o ganho na faixa de passagem em termos de R_1 e R_2 e, portanto, nos permite calcular o valor de R_2:

$$\begin{aligned} R_2 &= KR_1 \\ &= (1)(1) \\ &= 1\ \Omega. \end{aligned}$$

Então, a Equação 15.3 nos permite calcular C para a freqüência de corte especificada:

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{R_2\omega_c} \\ &= \frac{1}{(1)(1)} \\ &= 1 \text{ F}. \end{aligned}$$

A função de transferência para o filtro passa-baixas é dada pela Equação 15.1:

$$\begin{aligned} H(s) &= -K\frac{\omega_c}{s + \omega_c} \\ &= \frac{-1}{s + 1}. \end{aligned}$$

O diagrama de Bode de $|H(j\omega)|$ é mostrado na Figura 15.3. Esse circuito é denominado *filtro protótipo* passa-baixas ativo, já que usa um resistor de valor 1 Ω e um capacitor de valor 1 F e tem uma freqüência de corte de 1 rad/s. Como veremos na próxima seção, filtros protótipos são úteis como ponto de partida para o projeto de filtros com valores mais realistas de componentes de resposta de freqüência.

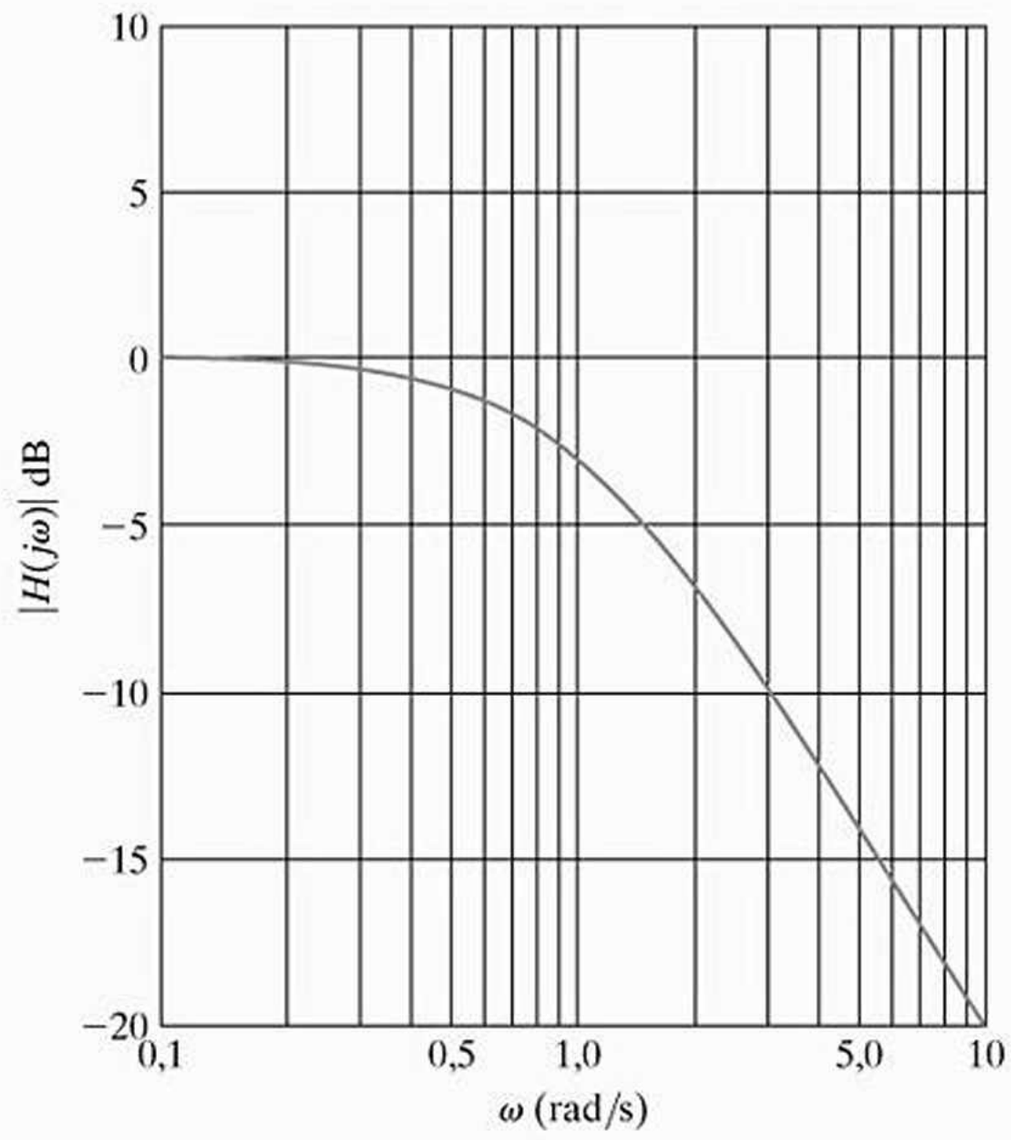


Figura 15.3 ▲ Diagrama de Bode do módulo da função de transferência do filtro ativo passa-baixas do Exemplo 15.1.

Você talvez tenha reconhecido o circuito na Figura 15.1 como o circuito amplificador integrador apresentado no Capítulo 7. Na verdade, eles são o mesmo circuito e, portanto, a integração no domínio do tempo corresponde à filtragem passa-baixas no domínio da freqüência. Essa relação entre integração e filtragem passa-baixas é também confirmada pela transformada operacional de Laplace para integração de derivadas no Capítulo 12.

O circuito da Figura 15.4 é um filtro passa-altas de primeira ordem. Esse circuito também tem a forma geral do circuito na Figura 15.2, mas, agora, a impedância do circuito de entrada é a combinação em série de R_1 e C, e a impedância do circuito de realimentação é o resistor R_2. Assim, a função de transferência para o circuito na Figura 15.4 é

$$H(s) = \frac{-Z_f}{Z_i} = \frac{-R_2}{R_1 + \dfrac{1}{sC}} = -K\frac{s}{s + \omega_c}, \tag{15.4}$$

onde

$$K = \frac{R_2}{R_1}, \tag{15.5}$$

e

$$\omega_c = \frac{1}{R_1 C}. \tag{15.6}$$

Novamente, a forma da função de transferência dada na Equação 15.4 é a mesma que a dada na Equação 14.20, que é a equação dos filtros passivos passa-altas, com uma diferença importante: como um filtro ativo, seu ganho na faixa de passagem pode ser maior do que 1.

O Exemplo 15.2 considera o projeto de um filtro ativo passa-altas que deve atender às especificações de freqüência de determinado diagrama de Bode.

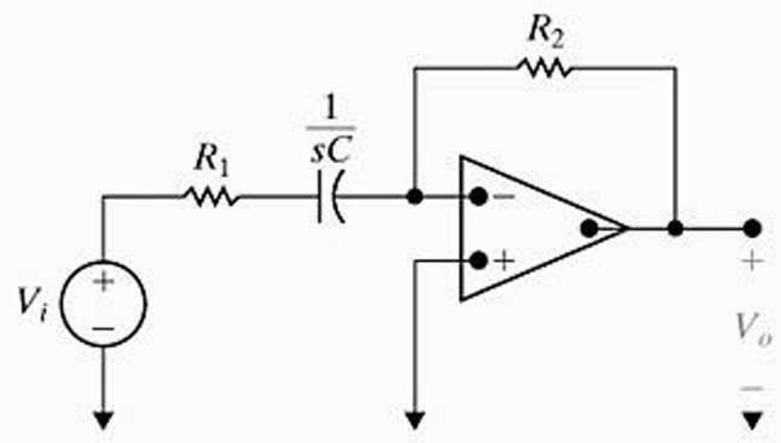


Figura 15.4 ▲ Filtro ativo passa-altas de primeira ordem.

Exemplo 15.2 Projeto de um filtro amp op passa-altas

A Figura 15.5 mostra o diagrama de Bode da amplitude de um filtro passa-altas. Usando o circuito do filtro ativo passa-altas da Figura 15.4, calcule os valores de R_1 e R_2 que produzem a resposta desejada. Use um capacitor de 0,1 μF. Se um resistor de carga de 10 kΩ for adicionado ao filtro, como será alterado o diagrama de Bode da amplitude?

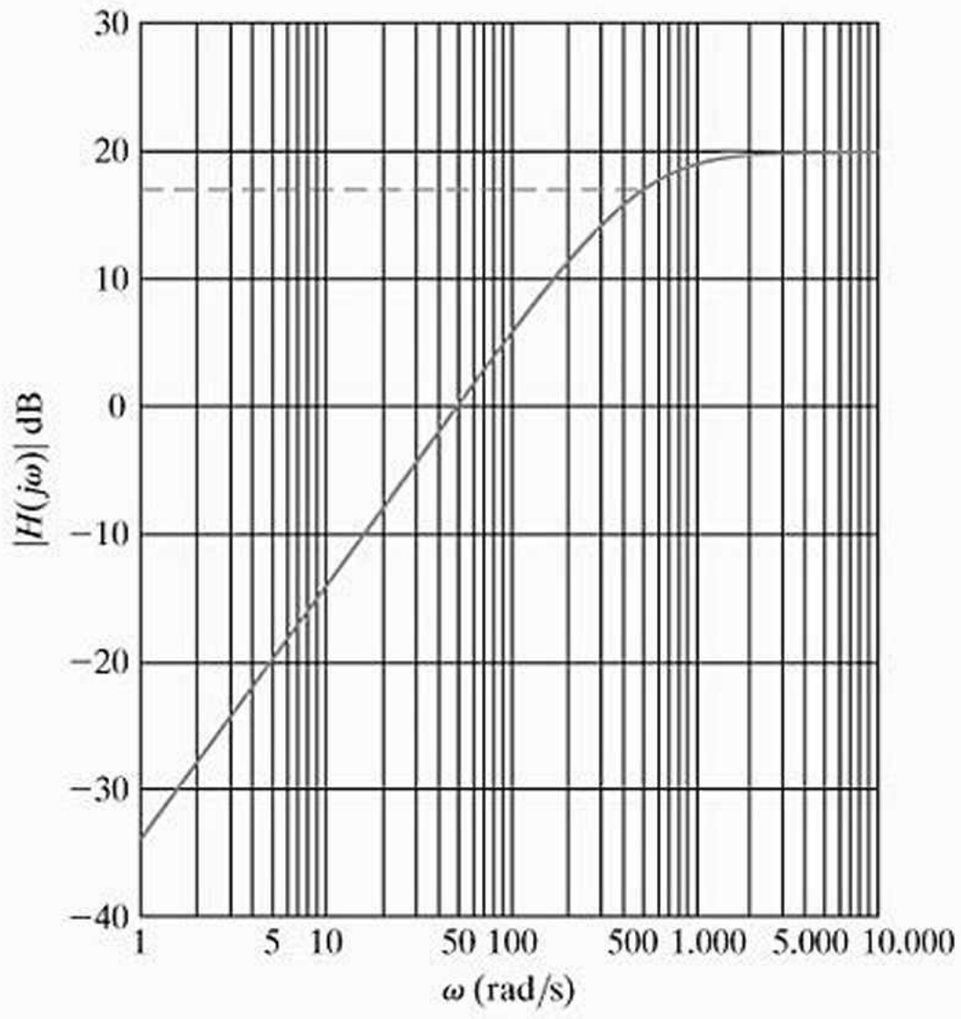


Figura 15.5 ▲ Diagrama de Bode da amplitude do filtro passa-altas para o Exemplo 15.2.

Solução

Comece escrevendo uma função de transferência que tenha o gráfico de amplitude mostrado na Figura 15.5. Para isso, observe que o ganho na faixa de passagem é 20 dB; portanto, $K = 10$. Observe também que a queda de 3 dB em relação ao ganho na faixa de passagem ocorre em 500 rad/s. A Equação 15.4 é a função de transferência geral para um filtro passa-altas e, portanto, a função de transferência cujo diagrama de Bode da amplitude é mostrado na Figura 15.5 é

$$H(s) = \frac{-10s}{s + 500}.$$

Igualando essa expressão à Equação 15.4, podemos obter os valores de R_1 e R_2:

$$H(s) = \frac{-10s}{s + 500} = \frac{-(R_2/R_1)s}{s + (1/R_1C)}.$$

Simplificando, obtemos duas equações:

$$10 = \frac{R_2}{R_1}, \quad 500 = \frac{1}{R_1 C}.$$

Usando o valor especificado de C (0,1 μF), determinamos

$$R_1 = 20\ \text{k}\Omega,\ R_2 = 200\ \text{k}\Omega.$$

O circuito resultante é mostrado na Figura 15.6.

Como adotamos a premissa de que o amplificador operacional nesse circuito de filtro passa-altas é ideal, a adição de qualquer resistor de carga, independentemente de sua resistência, não tem nenhum efeito sobre seu comportamento. Assim, a curva de amplitude de um filtro passa-altas com um resistor de carga é a mesma que a de um filtro passa-altas sem resistor de carga, conforme mostrado na Figura 15.5.

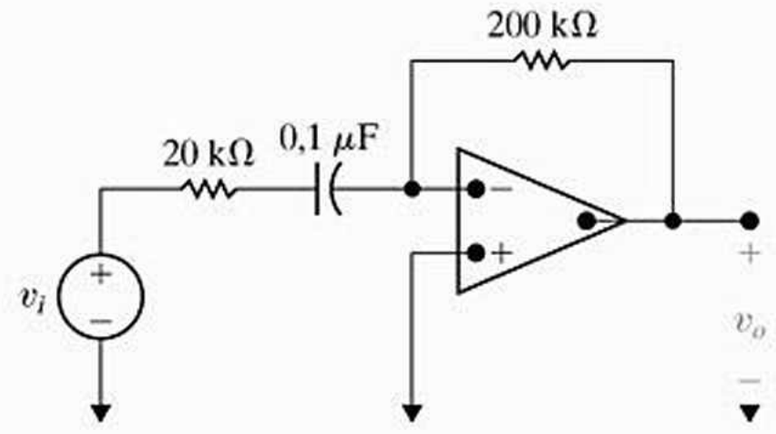


Figura 15.6 ▲ Filtro ativo passa-altas para o Exemplo 15.2.

✔ PROBLEMAS PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 1 — Conhecer os circuitos com amplificadores operacionais que se comportam como filtros passa-baixas e passa-altas de primeira ordem e saber calcular os valores de seus componentes

15.1 Calcule os valores de R_2 e C de um filtro passa-altas com ganho na faixa de passagem de 1 e uma freqüência de corte de 1 rad/s se R_1 for 1 Ω. (*Observação:* esse é o filtro protótipo passa-altas ativo.)

Resposta: $R_2 = 1\ \Omega$, $C = 1$ F.

15.2 Calcule o valor dos resistores para que o filtro passa-baixas na Figura 15.1 tenha a função de transferência

$$H(s) = \frac{-20.000}{s + 5.000}.$$

Use um capacitor de 5 μF.

Resposta: $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 40\ \Omega$.

NOTA: Tente resolver também os problemas 15.4 e 15.7, apresentados no final deste capítulo.

15.2 Mudança de escala

No projeto e análise de circuitos de filtros passivos e ativos é conveniente trabalhar com valores de elementos como 1 Ω, 1 H e 1 F. Embora esses valores não sejam realistas, simplificam muito os cálculos. Depois de fazer cálculos usando valores convenientes de R, L e C, o projetista pode transformar os valores convenientes em valores realistas usando um processo denominado *mudança de escala.*

Há dois tipos de escala: a escala de amplitude e a escala de freqüência. Alteramos a escala de amplitude de um circuito multiplicando sua impedância a uma dada freqüência por um fator de escala k_a. Assim, multiplicamos todos os resistores e indutores por k_a e todos os capacitores por $1/k_a$. Se representarmos os valores iniciais dos componentes por R, L e C e os valores dos componentes depois da mudança de escala por R', L' e C', teremos:

$$R' = k_a R, \quad L' = k_a L, \quad \text{e} \quad C' = C/k_a. \tag{15.7}$$

Observe que k_a é, por definição, um número real positivo que pode ser maior ou menor do que 1.

Para mudar a escala de freqüência, mudamos os parâmetros do circuito de modo que, na nova freqüência, a impedância de cada elemento seja a mesma que era na freqüência original. Como admitimos que os valores de resistência sejam independentes da freqüência, os resistores não são afetados pela mudança da escala de freqüência. Se denominarmos o fator de escala de freqüência k_f, ambos, indutores e capacitores, são multiplicados por $1/k_f$. Desse modo, para mudar a escala de freqüência, fazemos

$$R' = R, \quad L' = L/k_f, \quad \text{e} \quad C' = C/k_f. \tag{15.8}$$

O fator de escala de freqüência, k_f, também é um número real positivo que pode ser menor ou maior do que a unidade.

A escala de um circuito pode ser mudada em amplitude e freqüência simultaneamente. Os valores alterados em termos dos valores originais são

$$\begin{aligned} R' &= k_a R, \\ L' &= \frac{k_a}{k_f} L, \\ C' &= \frac{1}{k_a k_f} C. \end{aligned} \tag{15.9}$$

(Fatores de escala de componentes)

Utilização da mudança de escala no projeto de filtros ativos

Para usar o conceito de mudança de escala no projeto de filtros ativos, faça, em primeiro lugar, a freqüência de corte, ω_c (se estiver projetando filtros passa-baixas ou passa-altas), ou a freqüência central, ω_o (se estiver projetando filtros passa-faixa ou rejeita-faixa), igual a 1 rad/s. Em seguida, selecione um capacitor de 1 F e calcule os valores dos resistores necessários para deter-

minado ganho na faixa de passagem e para que a freqüência de corte ou a freqüência central seja 1 rad/s. Por fim, use a mudança de escala para calcular valores mais realistas dos componentes para a freqüência de corte ou a freqüência central desejada.

O Exemplo 15.3 ilustra o processo de mudança de escala em geral e o Exemplo 15.4 ilustra a utilização da mudança de escala no projeto de um filtro passa-baixas.

Exemplo 15.3 Mudança da escala de um circuito *RLC* em série

O circuito *RLC* em série mostrado na Figura 15.7 tem uma freqüência central de $\sqrt{1/LC} = 1$ rad/s, uma largura de faixa de $R/L = 1$ rad/s e, portanto, um fator de qualidade de 1. Use uma mudança de escala para calcular novos valores de R e L para que o circuito tenha o mesmo fator de qualidade e uma freqüência central de 500 Hz. Use um capacitor de 2 μF.

Solução

Comece calculando o fator de escala que alterará a freqüência central de 1 rad/s para 500 Hz. Temos:

$$k_f = \frac{\omega_o'}{\omega_o} = \frac{2\pi(500)}{1} = 3.141{,}59.$$

Agora, use a Equação 15.9 para calcular o fator de escala da amplitude que, junto com o fator de escala da freqüência, leve a um valor de capacitância de 2 μF:

$$k_a = \frac{1}{k_f}\frac{C}{C'} = \frac{1}{(3.141{,}59)(2\times 10^{-6})} = 159{,}155.$$

Use a Equação 15.9 mais uma vez para calcular os novos valores de R e L:

$$R' = k_a R = 159{,}155\ \Omega,$$

$$L' = \frac{k_a}{k_f}L = 50{,}66\ \text{mH}.$$

Com esses valores dos componentes, a freqüência central do circuito *RLC* em série é de $\sqrt{1/LC} = 3.141{,}61$ rad/s ou 500 Hz, e a largura de faixa é de $R/L = 3.141{,}61$ rad/s ou 500 Hz; assim, o fator de qualidade ainda é 1.

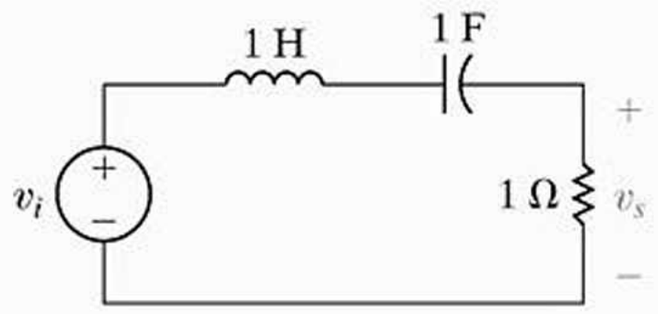


Figura 15.7 ▲ Circuito *RLC* em série para o Exemplo 15.3.

Exemplo 15.4 Mudança da escala de um filtro protótipo passa-baixas ativo

Use o filtro protótipo passa-baixas ativo do Exemplo 15.1, junto com uma mudança de escala de amplitude e freqüência, para calcular os valores de resistores para um filtro passa-baixas com um ganho de 5, uma freqüência de corte de 1.000 Hz e um capacitor de realimentação de 0,01 μF.

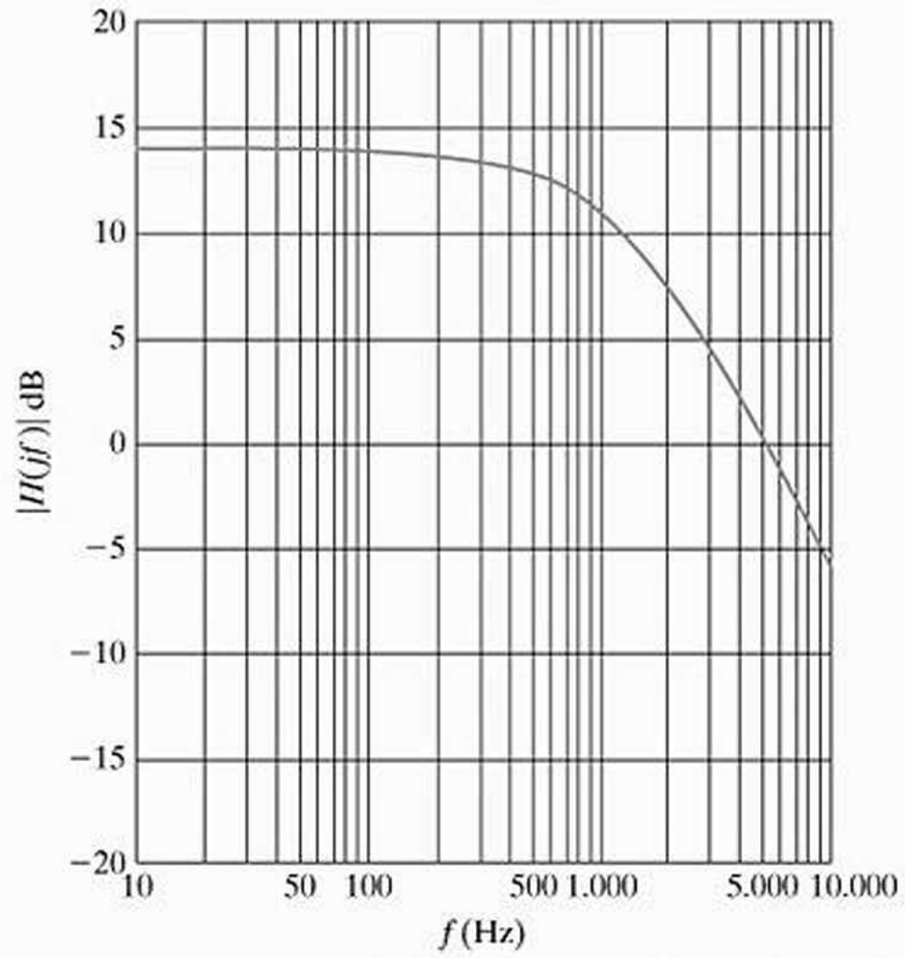


Figura 15.8 ▲ Diagrama de Bode do módulo da função de transferência do filtro ativo passa-baixas do Exemplo 15.4.

Construa um diagrama de Bode do módulo da função de transferência resultante.

Solução

Para começar, use uma mudança de escala de freqüência para localizar a freqüência de corte em 1.000 Hz:

$$k_f = \omega_c'/\omega_c = 2\pi(1.000)/1 = 6.283{,}185,$$

Então, calcule o fator de escala de amplitude que, junto com $k_f = 6.283{,}185$, levará a um valor de capacitância de 0,01 μF:

$$k_a = \frac{1}{k_f}\frac{C}{C'} = \frac{1}{(6283{,}185)(10^{-8})} = 15.915{,}5.$$

Como os valores dos resistores só são afetados pela mudança de escala da amplitude,

$$R_1' = R_2' = k_a R = (15.915{,}5)(1) = 15.915{,}5\ \Omega.$$

Por fim, precisamos satisfazer a especificação do ganho na faixa de passagem. Podemos ajustar o valor tanto de R_1 quanto de R_2, já que $K = R_2/R_1$. Se ajustarmos R_2, mudaremos a freqüência de corte porque $\omega_c = 1/R_2C$. Assim, devemos ajustar o valor de R_1 para alterar apenas o ganho na faixa de passagem:

$$R_1 = R_2/K = (15.915{,}5)/(5) = 3.183{,}1\ \Omega.$$

Os valores finais dos componentes são

$R_1 = 3.183{,}1\ \Omega$, $R_2 = 15.915{,}5\ \Omega$, $C = 0{,}01\ \mu$F.

A função de transferência do filtro é dada por

$$H(s) = \frac{-31.415{,}93}{s + 6283{,}185}.$$

O diagrama de Bode do módulo dessa função de transferência é mostrado na Figura 15.8.

✔ PROBLEMA PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 2 — Saber projetar filtros ativos a partir de protótipos e usar mudanças de escala para conseguir as características desejadas

15.3 Quais fatores de escala de amplitude e freqüência transformarão o filtro protótipo passa-altas em um filtro passa-altas com um capacitor de 0,5 μF e uma freqüência de corte de 10 kHz?

Resposta: $k_f = 62.831{,}85$, $k_a = 31{,}831$.

NOTA: Tente resolver também os problemas 15.13 e 15.14, apresentados no final deste capítulo.

15.3 Filtros ativos passa-faixa e rejeita-faixa

Passamos, agora, à análise e projeto de circuitos ativos que se comportam como filtros passa-faixa e rejeita-faixa. Embora haja uma ampla variedade desses circuitos, nossa abordagem inicial é motivada pela construção do diagrama de Bode mostrado na Figura 15.9. Podemos ver, pelo gráfico, que o filtro passa-faixa consiste em três blocos separados:

1. Um filtro passa-baixas de ganho unitário, cuja freqüência de corte é ω_{c2}, a maior das duas freqüências de corte;

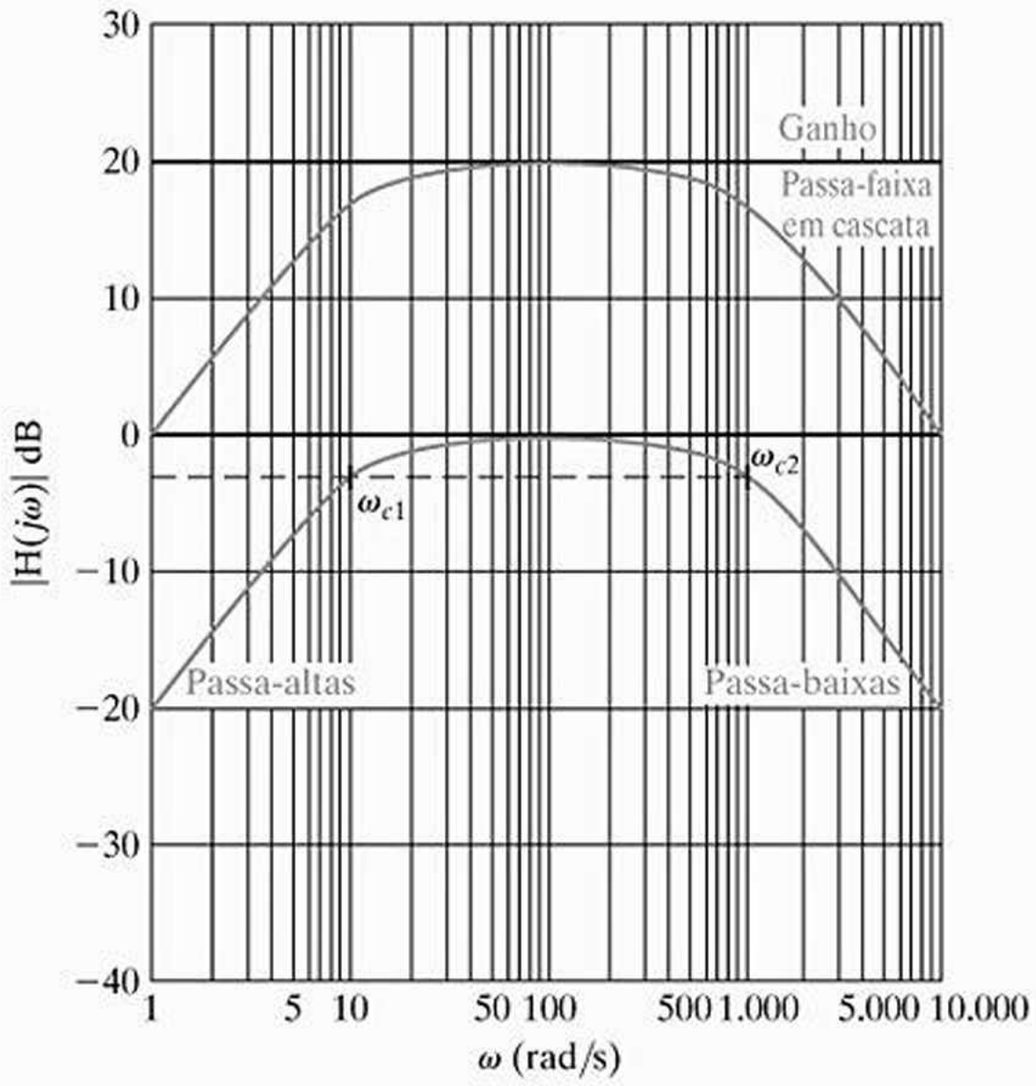


Figura 15.9 ▲ Construção do diagrama de Bode da amplitude de um filtro passa-faixa.

2. Um filtro passa-altas de ganho unitário, cuja freqüência de corte, ω_{c1}, é a menor das duas freqüências de corte; e
3. Um amplificador cujo fator de amplificação é igual ao ganho desejado na faixa de passagem.

Esses três blocos devem ser ligados em cascata. Eles combinam-se aditivamente na construção do diagrama de Bode e, portanto, se combinarão multiplicativamente no domínio da freqüência. É importante observar que esse método de projeto de um filtro passa-faixa supõe que a freqüência de corte inferior (ω_{c1}) seja menor do que freqüência de corte superior (ω_{c2}). O filtro resultante é denominado um filtro passa-faixa de *banda larga*, porque é larga a faixa de freqüências dos sinais que por ele passam. Formalmente, um filtro de banda larga é definido de forma que as duas freqüências de corte satisfaçam a equação

$$\frac{\omega_{c2}}{\omega_{c1}} \geq 2.$$

Como ilustrado pela construção do diagrama de Bode na Figura 15.9, precisamos que a amplitude do filtro passa-altas seja unitária na freqüência de corte do filtro passa-baixas e que a amplitude do filtro passa-baixas seja unitária na freqüência de corte do filtro passa-altas. Então, o filtro passa-faixa terá as freqüências de corte especificadas pelos filtros passa-baixas e passa-altas. Precisamos determinar a relação entre ω_{c1} e ω_{c2} que satisfará os requisitos ilustrados na Figura 15.9.

Podemos construir um circuito que contenha os três blocos mencionados organizando, em cascata, um filtro ativo passa-baixas, um filtro ativo passa-altas e um amplificador inversor (veja a Seção 5.3), como mostra a Figura 15.10(a). A Figura 15.10(a) é denominada *diagrama de blocos.* Cada bloco representa um componente ou subcircuito e a saída de um bloco é a entrada do seguinte, no sentido indicado. Desejamos determinar a relação entre ω_{c1} e ω_{c2} que permitirá que cada subcircuito seja projetado independentemente, sem termos de nos preocupar com os outros

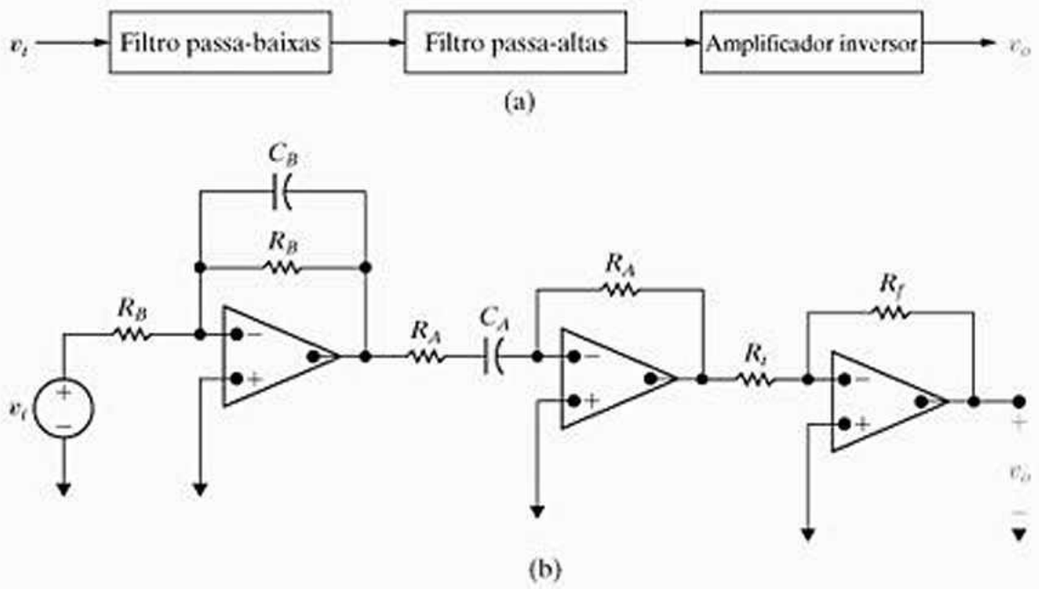


Figura 15.10 ▲ Filtro ativo passa-faixa em cascata. (a) Diagrama de blocos. (b) Circuito.

subcircuitos na cascata. Então, o projeto do filtro passa-faixa é reduzido ao projeto de um filtro passa-baixas de primeira ordem de ganho unitário, um filtro passa-altas de primeira ordem de ganho unitário e um amplificador inversor, cada um dos quais é um circuito simples.

A função de transferência do filtro passa-faixa é o produto das funções de transferência dos três blocos em cascata:

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i}$$

$$= \left(\frac{-\omega_{c2}}{s + \omega_{c2}}\right)\left(\frac{-s}{s + \omega_{c1}}\right)\left(\frac{-R_f}{R_i}\right)$$

$$= \frac{-K\omega_{c2}s}{(s + \omega_{c1})(s + \omega_{c2})}$$

$$= \frac{-K\omega_{c2}s}{s^2 + (\omega_{c1} + \omega_{c2})s + \omega_{c1}\omega_{c2}}. \quad (15.10)$$

Observamos imediatamente que a Equação 15.10 não está na forma padrão para a função de transferência de um filtro passa-faixa discutido no Capítulo 14, ou seja,

$$H_{\text{PF}} = \frac{\beta s}{s^2 + \beta s + \omega_o^2}.$$

Para converter a Equação 15.10 para a forma padrão da função de transferência de um filtro passa-faixa, precisamos que

$$\omega_{c2} >> \omega_{c1}. \quad (15.11)$$

Quando a Equação 15.11 é válida,

$$(\omega_{c1} + \omega_{c2}) \approx \omega_{c2}$$

e a função de transferência para o filtro passa-faixa em cascata (Equação 15.10) torna-se

$$H(s) = \frac{-K\omega_{c2}s}{s^2 + \omega_{c2}s + \omega_{c1}\omega_{c2}}.$$

Uma vez confirmado que a Equação 15.11 é válida para as freqüências de corte especificadas para o filtro passa-faixa desejado, podemos projetar cada estágio do circuito em cascata independentemente e cumprir as especificações do filtro. Calculamos os valores de R_B e C_B no filtro passa-baixas para obter a freqüência de corte superior desejada, ω_{c2}:

$$\omega_{c2} = \frac{1}{R_B C_B}. \quad (15.12)$$

Calculamos os valores de R_A e C_A no filtro passa-altas para obter a freqüência de corte inferior desejada, ω_{c1}:

$$\omega_{c1} = \frac{1}{R_A C_A}. \quad (15.13)$$

Agora, calculamos os valores de R_i e R_f no amplificador inversor para obter o ganho desejado na faixa de passagem. Para tal, consideramos o módulo da função de transferência do filtro passa-faixa, na freqüência central, ω_o:

$$|H(j\omega_o)| = \left|\frac{-K\omega_{c2}(j\omega_o)}{(j\omega_o)^2 + \omega_{c2}(j\omega_o) + \omega_{c1}\omega_{c2}}\right|$$

$$= \frac{K\omega_{c2}}{\omega_{c2}}$$

$$= K. \quad (15.14)$$

Lembre-se de que, no Capítulo 5, aprendemos que o ganho do amplificador inversor é R_f/R_i. Dessa forma,

$$|H(j\omega_o)| = \frac{R_f}{R_i}. \quad (15.15)$$

Qualquer escolha de resistores que satisfaça a Equação 15.15 produzirá o ganho desejado na faixa de passagem.

O Exemplo 15.5 ilustra o projeto de um filtro passa-faixa em cascata.

Exemplo 15.5 Projeto de um filtro ativo passa-faixa de banda larga

Projete um filtro passa-faixa para um equalizador gráfico com fator de amplificação de 2 dentro da faixa de freqüências entre 100 e 10.000 Hz. Use capacitores de 0,2 μF.

Solução

Só podemos projetar cada subcircuito e obedecer aos valores especificados da freqüência de corte se a Equação 15.11 for válida. Nesse caso, $\omega_{c2} = 100\omega_{c1}$ e, portanto, podemos dizer que $\omega_{c2} >> \omega_{c1}$.

Comece com o bloco passa-baixas. Pela Equação 15.12,

$$\omega_{c2} = \frac{1}{R_B C_B} = 2\pi(10.000),$$

$$R_B = \frac{1}{[2\pi(10.000)](0{,}2 \times 10^{-6})}$$

$$\approx 80\ \Omega.$$

Em seguida, passamos para o bloco passa-altas. Pela Equação 15.13,

$$\omega_{c1} = \frac{1}{R_A C_A} = 2\pi(100),$$

$$R_A = \frac{1}{[2\pi(100)](0{,}2 \times 10^{-6})}$$

$$\approx 7.958\ \Omega.$$

Por fim, precisamos do bloco amplificador. Pela Equação 15.15, tendo-se o valor do ganho, o valor de um dos resistores pode ser determinado arbitrariamente. Vamos fazer $R_i = 1$ kΩ. Então, pela Equação 15.15,

$$R_f = 2(1.000),$$
$$= 2.000\ \Omega = 2\ \text{k}\Omega.$$

O circuito resultante é mostrado na Figura 15.11. Deixamos que você verifique se o módulo da função de transferência desse circuito é reduzido de $1/\sqrt{2}$ em ambas as freqüências de corte, comprovando a validade da hipótese $\omega_{c2} >> \omega_{c1}$.

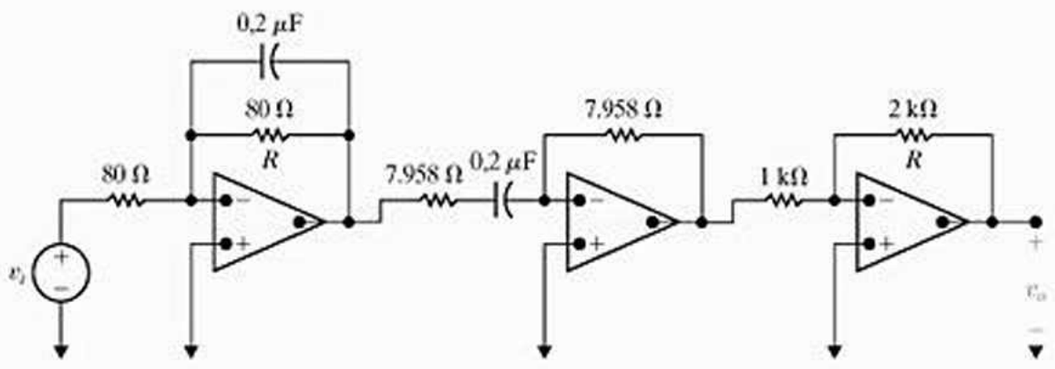


Figura 15.11 ▲ Filtro ativo passa-faixa projetado no Exemplo 15.5.

Podemos usar o conceito de diagrama de blocos para o projeto de filtros ativos rejeita-faixa, como ilustrado na Figura 15.12. Como o filtro passa-faixa, o filtro rejeita-faixa consiste em três blocos separados. Entretanto, há diferenças importantes:

1. O filtro passa-baixas de ganho unitário tem uma freqüência de corte ω_{c1}, que é a menor das duas freqüências de corte.
2. O filtro passa-altas de ganho unitário tem uma freqüência de corte ω_{c2}, que é a maior das duas freqüências de corte.
3. O amplificador determina o ganho desejado na faixa de passagem.

A diferença mais importante é que esses três blocos não podem ser organizados em cascata, pois não se combinam aditivamente no diagrama de Bode. Em vez disso, usamos uma ligação em paralelo e um amplificador somador, como mostrado no diagrama de blocos e no circuito da Figura 15.13. Novamente, admite-se que as duas freqüências de corte sejam amplamente separadas, de modo que o projeto resultante seja um filtro rejeita-faixa de banda larga, e $\omega_{c2} >> \omega_{c1}$. Então, cada bloco em paralelo pode ser projetado independentemente e, ainda assim, as especificações de freqüência de corte serão satisfeitas. A função de transferência do circuito resultante é a soma das funções de transferência dos filtros passa-baixas e passa-altas. Pela Figura 15.13(b),

$$H(s) = \left(-\frac{R_f}{R_i}\right)\left[\frac{-\omega_{c1}}{s + \omega_{c1}} + \frac{-s}{s + \omega_{c2}}\right]$$

$$= \frac{R_f}{R_i}\left(\frac{\omega_{c1}(s + \omega_{c2}) + s(s + \omega_{c1})}{(s + \omega_{c1})(s + \omega_{c2})}\right)$$

$$= \frac{R_f}{R_i}\left(\frac{s^2 + 2\omega_{c1}s + \omega_{c1}\omega_{c2}}{(s + \omega_{c1})(s + \omega_{c2})}\right). \qquad (15.16)$$

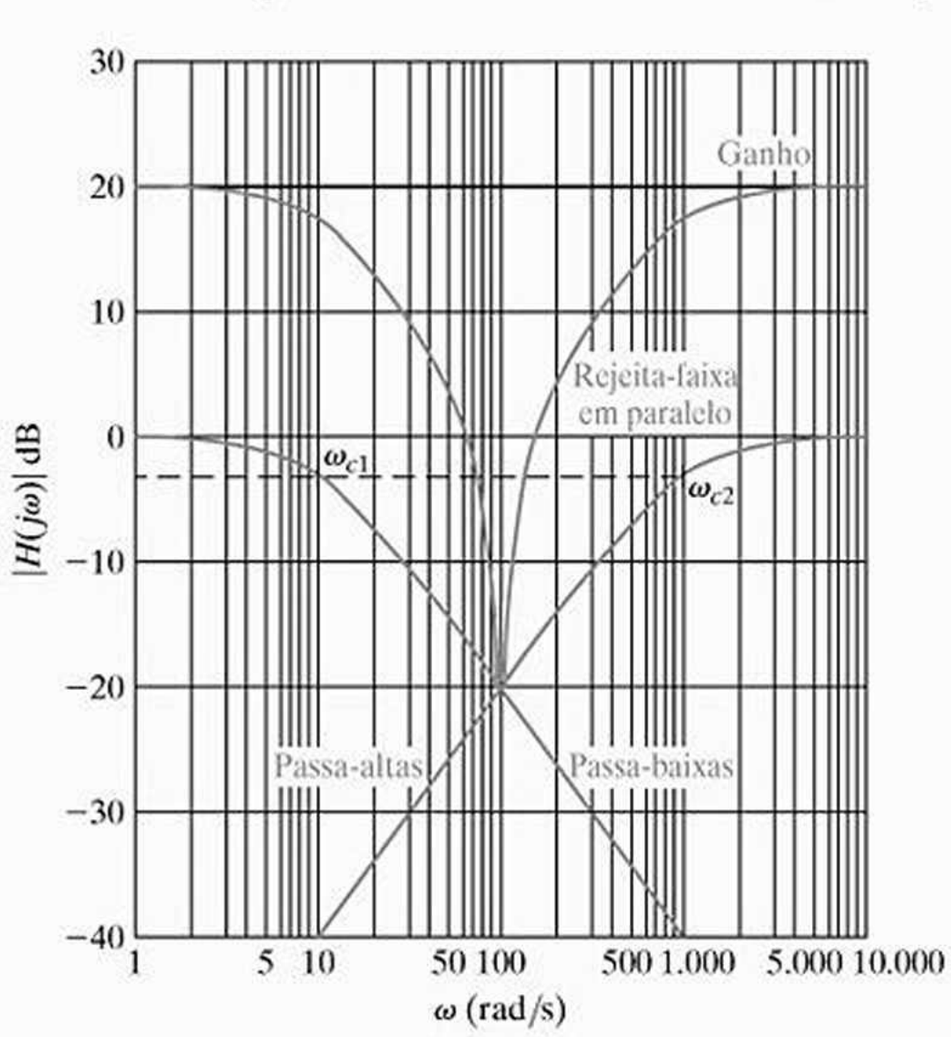


Figura 15.12 ▲ Construção do diagrama de Bode da amplitude da função de transferência de um filtro rejeita-faixa.

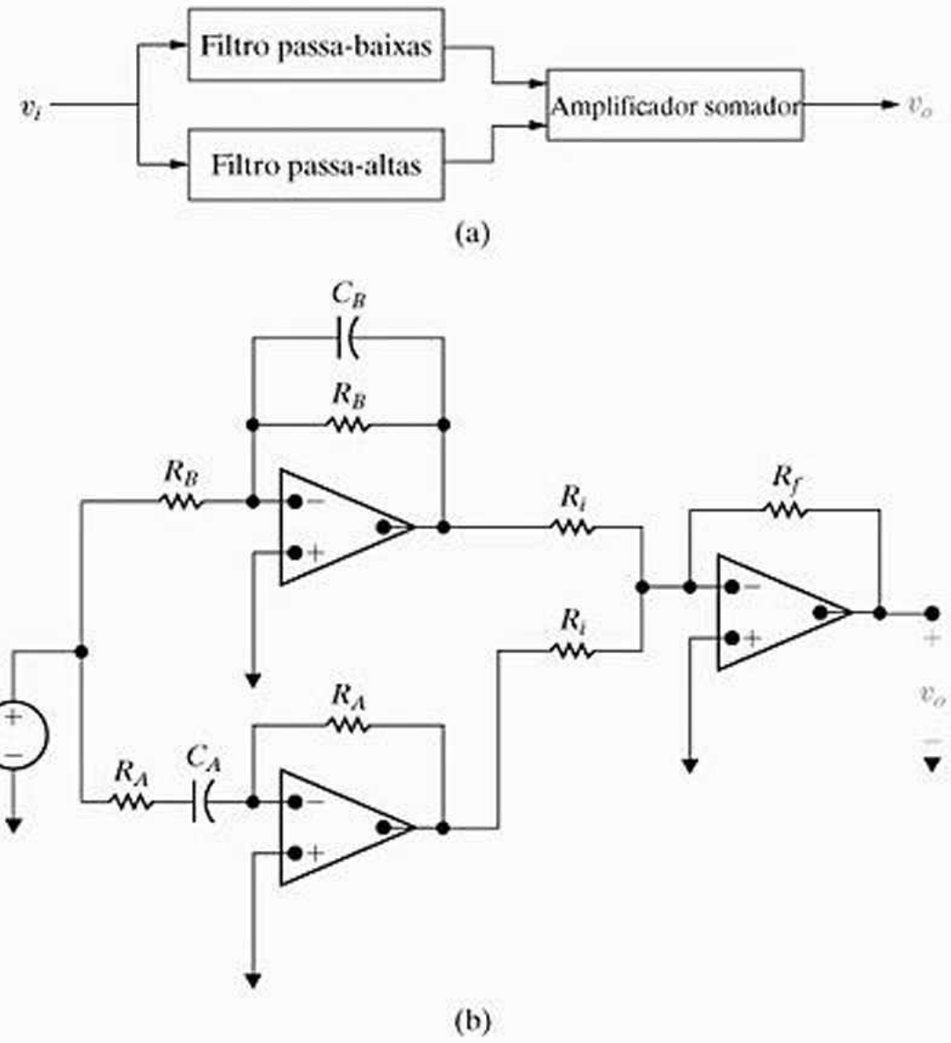


Figura 15.13 ▲ Filtro ativo rejeita-faixa em paralelo. (a) Diagrama de blocos. (b) Circuito.

Usando o mesmo raciocínio utilizado para o filtro passa-faixa em cascata, as duas freqüências de corte para a função de transferência da Equação 15.16 são ω_{c1} e ω_{c2} somente se $\omega_{c2} >> \omega_{c1}$. Então, as freqüências de corte são dadas pelas equações

$$\omega_{c1} = \frac{1}{R_B C_B}, \tag{15.17}$$

$$\omega_{c2} = \frac{1}{R_A C_A}. \tag{15.18}$$

Nas duas faixas de passagem (quando $s \to 0$ e $s \to \infty$), o ganho da função de transferência é R_f/R_i. Portanto,

$$K = \frac{R_f}{R_i}. \tag{15.19}$$

Como no projeto do filtro passa-faixa em cascata, temos seis incógnitas e três equações. Normalmente escolhemos valores de capacitores disponíveis no comércio para C_B e C_A. Então, as equações 15.17 e 15.18 nos permitem calcular R_B e R_A para atender às freqüências de corte especificadas. Por fim, escolhemos um valor para R_f ou para R_i e, então, usamos a Equação 15.19 para calcular a outra resistência.

Observe o módulo da função de transferência na Equação 15.16 na freqüência central, $\omega_o = \sqrt{\omega_{c1}, \omega_{c2}}$:

$$|H(j\omega_o)| = \left| \frac{R_f}{R_i} \left(\frac{(j\omega_o)^2 + 2\omega_{c1}(j\omega_o) + \omega_{c1}\omega_{c2}}{(j\omega_o)^2 + (\omega_{c1} + \omega_{c2})(j\omega_o) + \omega_{c1}\omega_{c2}} \right) \right|$$

$$= \frac{R_f}{R_i} \frac{2\omega_{c1}}{\omega_{c1} + \omega_{c2}}$$

$$\approx \frac{R_f}{R_i} \frac{2\omega_{c1}}{\omega_{c2}}. \tag{15.20}$$

Se $\omega_{c2} >> \omega_{c1}$, então $|H(j\omega_o)| << 2R_f/R_i$ (pois $\omega_{c1}/\omega_{c2} << 1$) e, portanto, a amplitude na freqüência central é muito menor do que a amplitude na faixa de passagem. Assim, o filtro rejeita-faixa consegue rejeitar freqüências próximas da freqüência central, confirmando mais uma vez nossa premissa de que a implementação em paralelo serve para projetos de filtros rejeita-faixa de banda larga.

O Exemplo 15.6 ilustra o projeto de um filtro rejeita-faixa em paralelo.

Exemplo 15.6 Projeto de um filtro ativo rejeita-faixa de banda larga

Projete um circuito baseado no filtro ativo da Figura 15.13(b). O diagrama de Bode para a resposta de amplitude desse filtro é mostrado na Figura 15.14. Use capacitores de 0,5 μF em seu projeto.

Solução

Pelo diagrama de Bode da amplitude da Figura 15.14, vemos que o filtro rejeita-faixa tem freqüências de corte de 100 rad/s e 2.000 rad/s e um ganho de 3 nas faixas de passagem. Assim, $\omega_{c2} = 20\omega_{c1}$ e, portanto, adotamos a premissa de que $\omega_{c2} >> \omega_{c1}$. Comece com o filtro protótipo passa-baixas e use uma mudança de escala para atender às especificações para a freqüência de corte e para o valor do capacitor. O fator de escala da freqüência, k_f, é 100, o que desloca a freqüência de corte de 1 rad/s para 100 rad/s. O fator de escala da amplitude, k_a, é 20.000, o que permite a utilização de um capacitor de 0,5 μF. Esses fatores de escala determinam os seguintes valores para os componentes:

$$R_B = 20\ \text{k}\Omega,$$

$$C_B = 0{,}5\ \mu\text{F}.$$

A freqüência de corte do filtro passa-baixas é

$$\omega_{c1} = \frac{1}{R_B C_B}$$

$$= \frac{1}{(20 \times 10^3)(0{,}5 \times 10^{-6})}$$

$$= 100\ \text{rad/s}.$$

Usamos a mesma abordagem para projetar o filtro passa-altas, começando com o filtro protótipo passa-altas ativo. Nesse caso, o fator de escala da freqüência é $k_f = 2.000$ e o fator de escala da amplitude é $k_a = 1.000$, o que resulta nos seguintes valores para os componentes:

$$R_A = 1\ \text{k}\Omega,$$

$$C_A = 0{,}5\ \mu\text{F}.$$

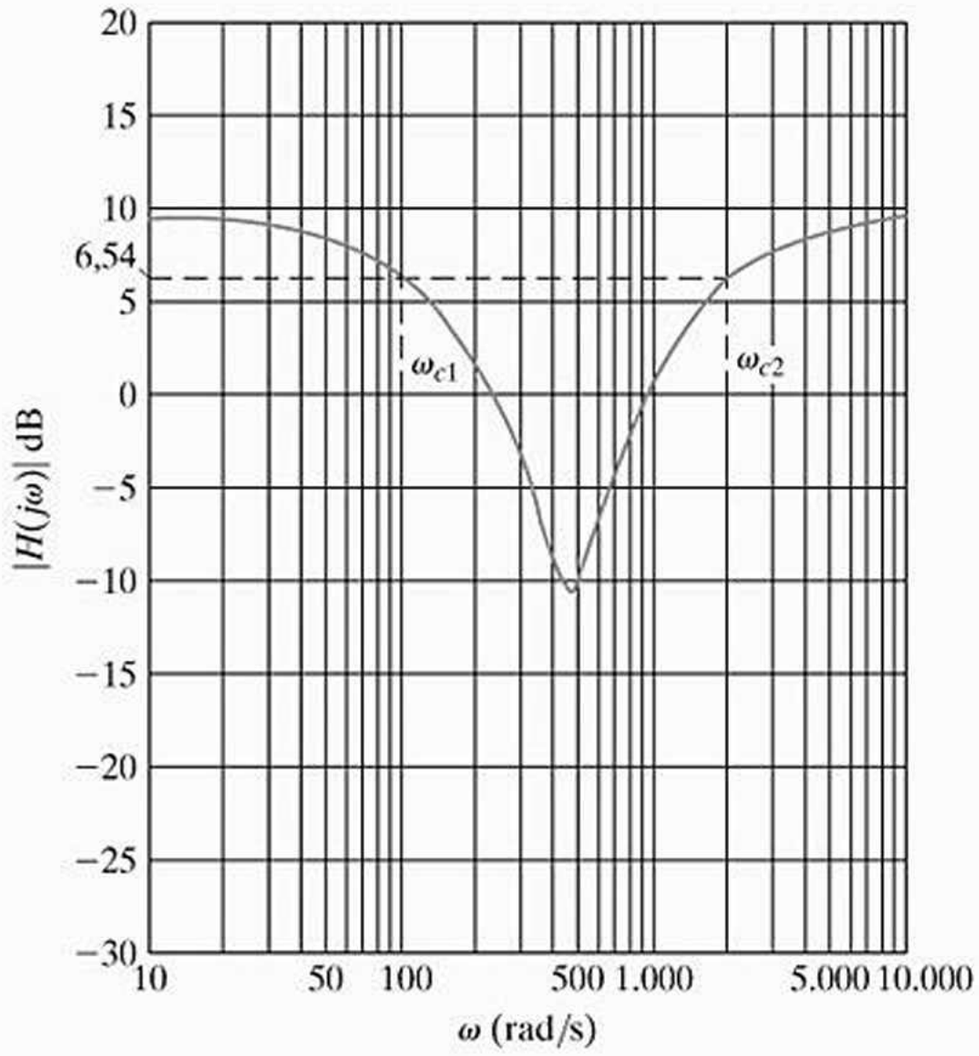


Figura 15.14 ▲ Diagrama de Bode da amplitude para o circuito a ser projetado no Exemplo 15.6.

Por fim, como as freqüências de corte são amplamente separadas, podemos usar a razão R_f/R_i para estabelecer o ganho desejado na faixa de passagem de 3. Vamos escolher $R_i = 1$ kΩ, porque já estamos usando essa resistência para R_A. Então, $R_f = 3$ kΩ e $K = R_f/R_i = 3.000/1.000 = 3$. O circuito do filtro ativo rejeita-faixa resultante é mostrado na Figura 15.15.

Agora, vamos verificar nossa hipótese de que $\omega_{c2} >> \omega_{c1}$ calculando o ganho real nas freqüências de corte especificadas. Fazemos isso com as substituições $s = j2\pi$ (100) e $s = j2\pi$ (2.000) na função de transferência para o filtro rejeita-faixa (Equação 15.16) e calculando a amplitude resultante. Deixamos para o leitor comprovar que a amplitude nas freqüências de corte especificadas é 2,024, o que é menor do que a magnitude de $3/\sqrt{2} = 2{,}12$ que esperávamos. Assim, nossa faixa de rejeição é um pouco mais larga do que a especificada no enunciado do problema.

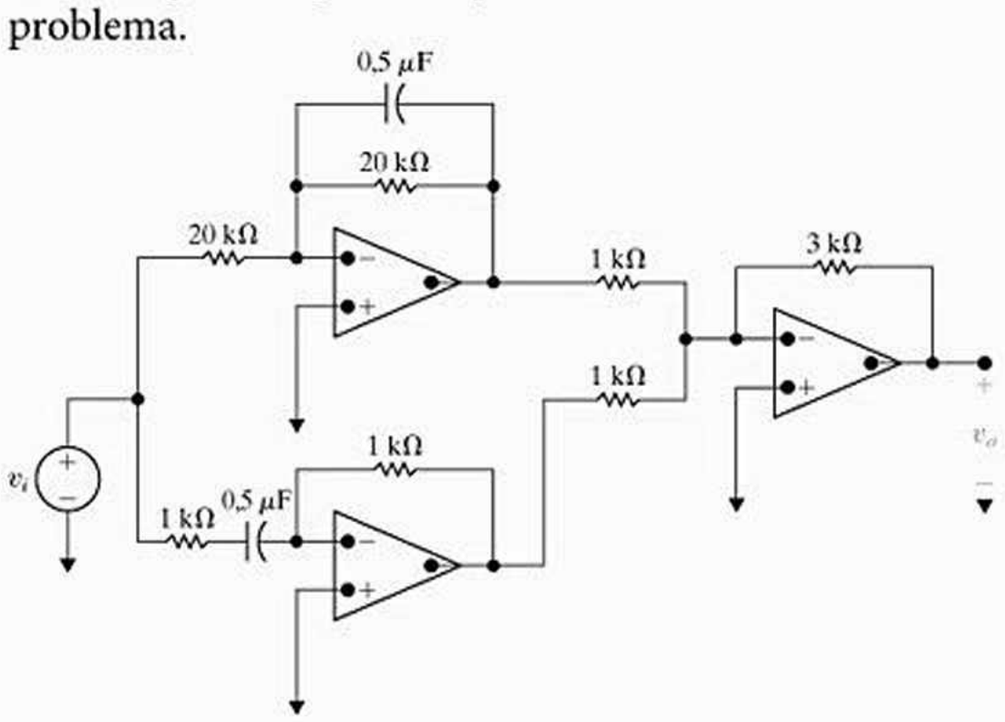


Figura 15.15 ▲ Circuito do filtro rejeita-faixa projetado no Exemplo 15.6.

NOTA: Avalie o que você entendeu desse material tentando resolver os problemas 15.30 e 15.31, apresentados no final deste capítulo.

15.4 Filtros ativos de ordem superior

É provável que você tenha percebido que todos os circuitos de filtros que estudamos até aqui, passivos e ativos, são não ideais. Lembre-se de que dissemos, no Capítulo 14, que um filtro ideal tem uma descontinuidade no ponto de corte, que divide acentuadamente a faixa de passagem e a faixa de rejeição. Embora não possamos esperar construir um circuito com uma resposta de freqüência descontínua, podemos construir circuitos com uma transição mais abrupta, mas ainda assim contínua, na freqüência de corte.

Filtros idênticos em cascata

Como podemos obter uma transição mais acentuada entre a faixa de passagem e a faixa de rejeição? Uma abordagem é a sugerida pelos diagramas de Bode de amplitude da Figura 15.16. Essa figura mostra diagramas de Bode de amplitude de um filtro, de dois, de três e de quatro filtros protótipos em cascata. É óbvio que quanto mais filtros forem adicionados à cascata, mais abrupta torna-se a transição da faixa de passagem para a faixa de rejeição. As regras para construir diagramas de Bode (Apêndice E) nos dizem que, no caso de um único filtro, a transição ocorre com uma inclinação negativa de 20 decibéis por década (dB/dec). Como circuitos em cascata têm seus respectivos diagramas de Bode de amplitudes somados, uma cascata com dois filtros tem uma transição que ocorre com a inclinação negativa de 20 + 20 = 40 dB/dec; para três filtros, a inclinação é de 60 dB/dec, e, para quatro filtros, é de 80 dB/dec, como apresentado na Figura 15.16.

Em geral, uma cascata de filtros passa-baixas idênticos de n elementos fará a transição da faixa de passagem para a faixa de rejeição segundo uma inclinação negativa de $20n$ dB/dec. O diagrama de blocos e o circuito para tal cascata são mostrados na Figura 15.17. É fácil calcular a função de transferência para uma cascata de n filtros protótipos passa-baixas – basta multiplicar as funções de transferência individuais:

$$H(s) = \left(\frac{-1}{s+1}\right)\left(\frac{-1}{s+1}\right)\cdots\left(\frac{-1}{s+1}\right) = \frac{(-1)^n}{(s+1)^n}. \tag{15.21}$$

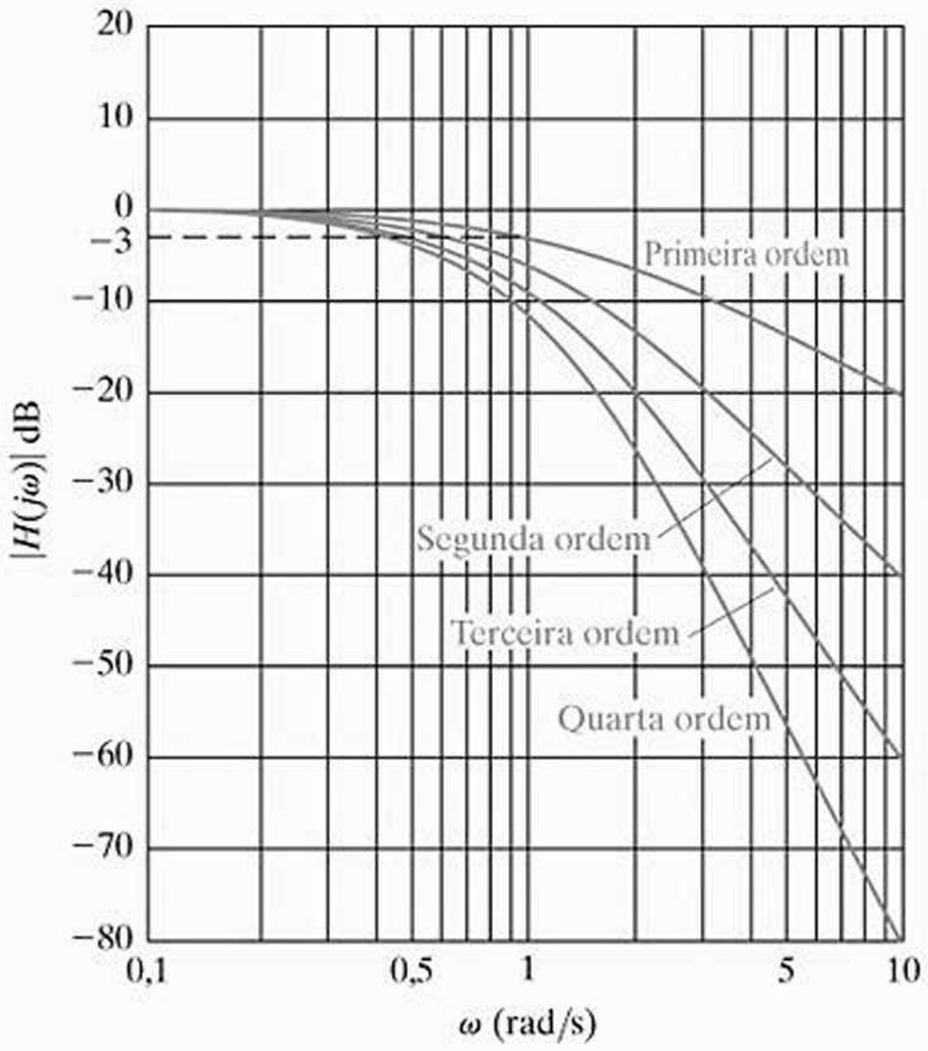


Figura 15.16 ▲ Diagrama de Bode da amplitude de uma cascata de filtros protótipos de primeira ordem idênticos.

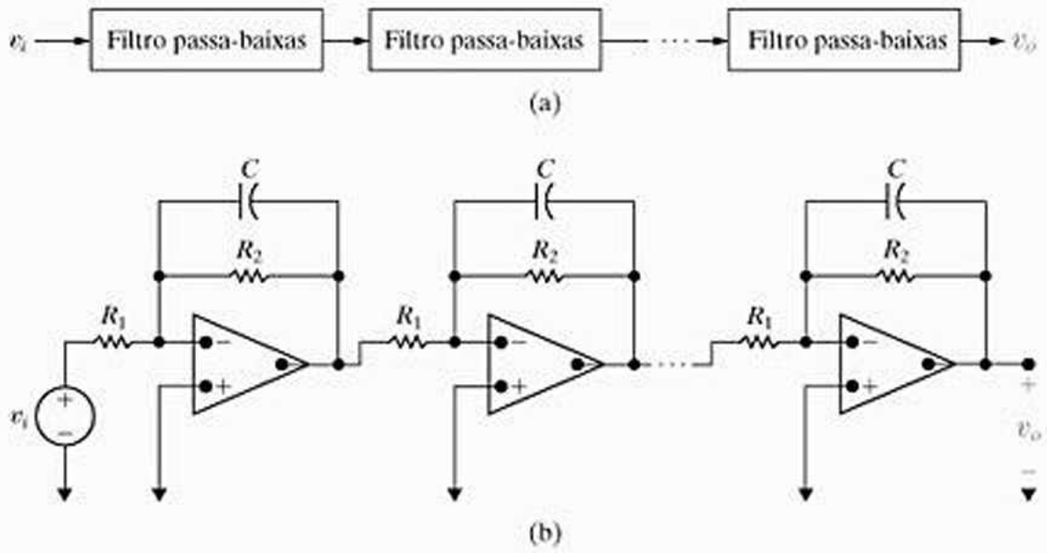


Figura 15.17 ▲ Cascata de filtros passa-baixas idênticos, de ganhos unitários. (a) Diagrama de blocos. (b) Circuito.

A ordem de um filtro é determinada pelo número de pólos em sua função de transferência. Pela Equação 15.21, vemos que uma cascata de filtros passa-baixas de primeira ordem resulta em um filtro de ordem superior. De fato, uma cascata de n filtros de primeira ordem produz um filtro de n-ésima ordem, com n pólos em sua função de transferência e uma inclinação negativa final de $20n$ dB/dec na faixa de transição.

Ainda há uma questão importante a se resolver, como você perceberá se examinar atentamente a Figura 15.16. Como a ordem do filtro passa-baixas é aumentada pela adição de filtros protótipos passa-baixas à cascata, a freqüência de corte também muda. Por exemplo, em uma cascata de dois filtros passa-baixas de primeira ordem, o módulo da função de transferência do filtro de segunda ordem em ω_c é –6 dB e, dessa forma, a freqüência de corte do filtro de segunda ordem não é ω_c. Na verdade, a freqüência de corte é menor do que ω_c.

Contanto que possamos calcular a freqüência de corte dos filtros de ordem superior formados por cascata dos filtros de primeira ordem, podemos usar a mudança de escala de freqüência para calcular valores de componentes que deslocam a freqüência de corte para sua localização especificada. Se começarmos com uma cascata de n filtros protótipos passa-baixas, podemos calcular a freqüência de corte para o filtro passa-baixas resultante de n-ésima ordem. Fazemos isso explicitando o valor de ω_{cn} na equação $|H(j\omega)| = 1/\sqrt{2}$:

$$H(s) = \frac{(-1)^n}{(s+1)^n},$$

$$|H(j\omega_{cn})| = \left|\frac{1}{(j\omega_{cn}+1)^n}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\frac{1}{(\sqrt{\omega_{cn}^2+1})^n} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\frac{1}{\omega_{cn}^2+1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2/n},$$

$$\sqrt[n]{2} = \omega_{cn}^2 + 1,$$

$$\omega_{cn} = \sqrt{\sqrt[n]{2}-1}. \tag{15.22}$$

Para demonstrar a utilização da Equação 15.22, vamos calcular a freqüência de corte de um filtro passa-baixas de quarta ordem de ganho unitário construído por meio de uma cascata de quatro filtros protótipos passa-baixas:

$$\omega_{c4} = \sqrt{\sqrt[4]{2}-1} = 0{,}435 \text{ rad/s}. \tag{15.23}$$

Assim, podemos projetar um filtro passa-baixas de quarta ordem com qualquer freqüência de corte arbitrária começando com uma cascata de quarta ordem consistindo em filtros protótipos passa-baixas e, então, alterando a escala de freqüência dos filtros componentes por meio de um fator $k_f = \omega_c/0{,}435$, para situar a freqüência de corte em qualquer valor desejado de ω_c.

Observe que podemos construir um filtro passa-baixas de ordem superior com um ganho diferente da unidade, adicionando um circuito amplificador inversor à cascata. O Exemplo 15.7 ilustra o projeto de um filtro passa-baixas de quarta ordem com ganho diferente da unidade.

Exemplo 15.7 Projeto de um filtro amp op passa-baixas de quarta ordem

Projete um filtro passa-baixas de quarta ordem com uma freqüência de corte de 500 Hz e um ganho na faixa de passagem de 10. Use capacitores de 1 μF. Faça o diagrama de Bode de amplitude para esse filtro.

Solução

Começamos nosso projeto com uma cascata de quatro filtros protótipos passa-baixas. Já usamos a Equação 15.23 para calcular a freqüência de corte para o filtro passa-baixas de quarta ordem resultante como 0,435 rad/s. Um fator de escala de freqüência de $k_f = 7.222{,}39$ alterará os valores dos componentes a fim de obter uma freqüência de corte de 500 Hz. Um fator de escala de amplitude de $k_a = 138{,}46$ permite a utilização de capacitores de 1 μF. Desse modo, os valores dos componentes são

$$R = 138{,}46\ \Omega;\ C = 1\ \mu\text{F}.$$

Por fim, adicionamos um estágio amplificador inversor com um ganho de $R_f/R_i = 10$. Como sempre, podemos selecionar arbitrariamente um dos dois valores de resistores. Como já estamos usando resistores de 138,46 Ω, fazemos $R_i = 138{,}46\ \Omega$; então,

$$R_f = 10R_i = 1.384{,}6\ \Omega.$$

O circuito para esse filtro passa-baixas de quarta ordem em cascata é mostrado na Figura 15.18. Ele tem a função de transferência

$$H(s) = -10\left[\frac{7.222{,}39}{s+7.222{,}39}\right]^4.$$

O diagrama de Bode do módulo dessa função de transferência é apresentado na Figura 15.19.

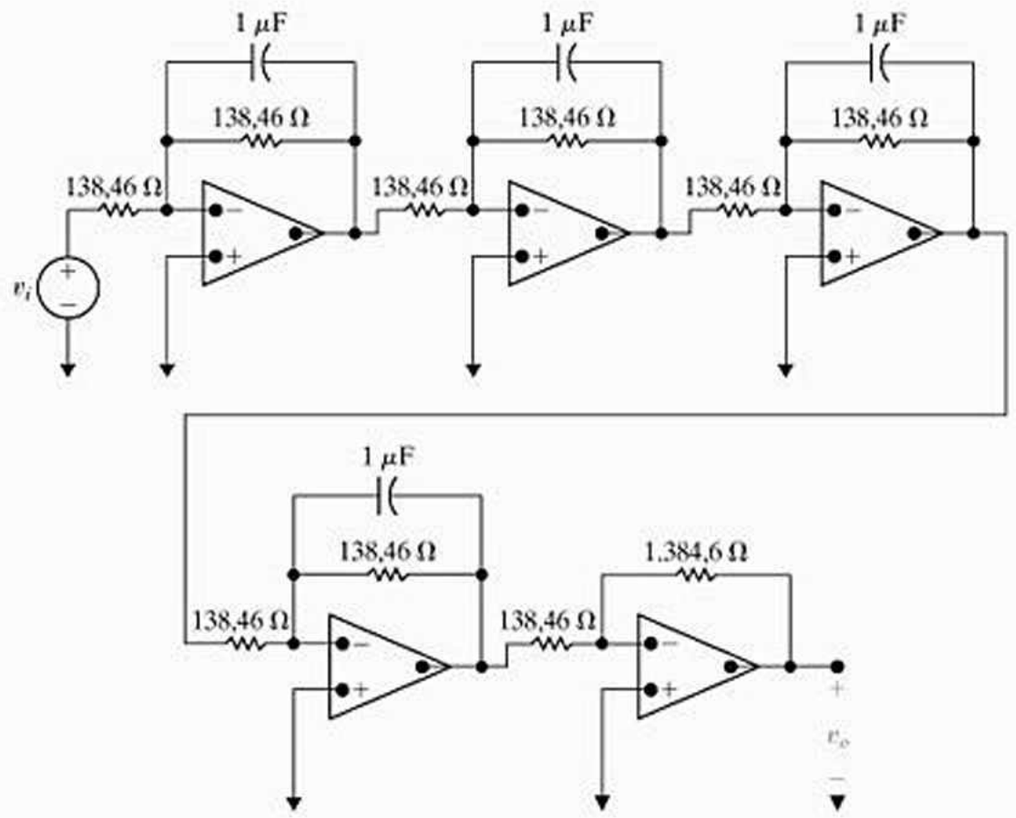


Figura 15.18 ▲ Circuito em cascata para o filtro passa-baixas de quarta ordem do Exemplo 15.7.

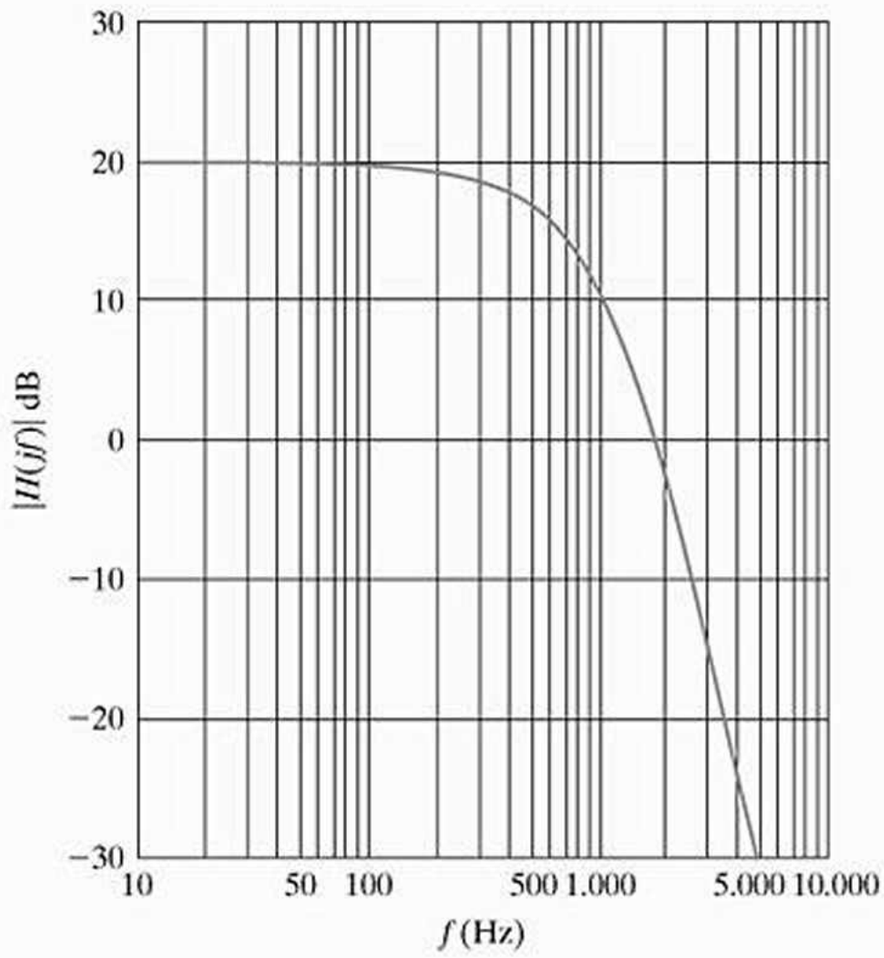


Figura 15.19 ▲ Diagrama de Bode do módulo da função de transferência do filtro passa-baixas de quarta ordem do Exemplo 15.7.

Conectando filtros passa-baixas idênticos em cascata, podemos aumentar a inclinação da curva de amplitude na transição e controlar a localização da freqüência de corte, mas nossa abordagem tem uma séria deficiência: o ganho do filtro não é constante entre zero e a freqüência de corte ω_c. Lembre-se de que, em um filtro passa-baixas ideal, o ganho na faixa de passagem é 1 para todas as freqüências abaixo da freqüência de corte. No entanto, na Figura 15.16, vemos que o ganho é menor do que 1 (0 dB) para freqüências muito menores do que a freqüência de corte.

Entendemos melhor esse comportamento não ideal na faixa de passagem examinando o módulo da função de transferência para uma cascata de filtros passa-baixas de n-ésima ordem com ganho unitário. Como

$$H(s) = \frac{\omega_{cn}^n}{(s + \omega_{cn})^n},$$

o módulo é dado por

$$|H(j\omega)| = \frac{\omega_{cn}^n}{\left(\sqrt{\omega^2 + \omega_{cn}^2}\right)^n}$$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt{(\omega/\omega_{cn})^2 + 1}\right)^n}. \qquad (15.24)$$

Como podemos ver pela Equação 15.24, quando $\omega << \omega_{cn}$, seu denominador é aproximadamente 1 e o módulo da função de transferência também é aproximadamente 1. Contudo, quando $\omega \to \omega_{cn}$, o denominador torna-se maior do que 1 e, portanto, o módulo torna-se menor do que 1. Como a cascata de filtros passa-baixas resulta em um comportamento não ideal na faixa de passagem, são adotadas outras abordagens no projeto de filtros de ordem superior. Uma delas é estudada a seguir.

Filtros Butterworth

Um *filtro Butterworth passa-baixas* de ganho unitário tem uma função de transferência cujo módulo é dado por

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^{2n}}}, \qquad (15.25)$$

em que n é um inteiro que denota a ordem do filtro.[1]

Ao estudar a Equação 15.25, observe o seguinte:

1. A freqüência de corte é ω_c rad/s para todos os valores de n.
2. Se n for suficientemente grande, o denominador estará sempre próximo da unidade quando $\omega < \omega_c$.
3. Na expressão para $|H(j\omega)|$, o expoente de ω/ω_c é sempre par.

Essa última observação é importante porque um expoente par é necessário para que o circuito seja fisicamente realizável (veja o Problema 15.24 no final deste capítulo).

Dada uma equação para o módulo da função de transferência, como determinamos $H(s)$? A determinação de $H(s)$ é muito simplificada com a utilização de um filtro protótipo. Portanto, fazemos ω_c igual a 1 rad/s na Equação 15.25. Como antes, usaremos uma mudança de escala para transformar o filtro protótipo em um filtro que atenda às especificações de filtragem.

Para determinar $H(s)$, primeiro observe que, se N for uma quantidade complexa, então $|N|^2 = NN^*$, onde N^* é o conjugado de N. Decorre que

[1] Esse filtro foi desenvolvido pelo engenheiro britânico S. Butterworth e apresentado na *Wireless Engineering* 7, 1930, p. 536–541.

$$|H(j\omega)|^2 = H(j\omega)H(-j\omega). \tag{15.26}$$

Entretanto, como $s = j\omega$, podemos escrever

$$|H(j\omega)|^2 = H(s)H(-s). \tag{15.27}$$

Agora, observe que $s^2 = -\omega^2$. Assim,

$$\begin{aligned} |H(j\omega)|^2 &= \frac{1}{1 + \omega^{2n}} \\ &= \frac{1}{1 + (\omega^2)^n} \\ &= \frac{1}{1 + (-s^2)^n} \\ &= \frac{1}{1 + (-1)^n s^{2n}}, \end{aligned}$$

ou

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + (-1)^n s^{2n}}. \tag{15.28}$$

O procedimento para determinar $H(s)$, para um dado valor de n, é o seguinte:

1. Determine as raízes do polinômio
$$1 + (-1)^n s^{2n} = 0.$$
2. Atribua as raízes localizadas no plano esquerdo a $H(s)$, e as raízes localizadas no plano direito a $H(-s)$.
3. Combine termos no denominador de $H(s)$ para formar fatores de primeira e segunda ordens.

O Exemplo 15.8 ilustra esse processo.

Exemplo 15.8 Cálculo das funções de transferência de Butterworth

Determine as funções de transferência de Butterworth para $n = 2$ e $n = 3$.

Solução

Para $n = 2$, determinamos as raízes do polinômio

$$1 + (-1)^2 s^4 = 0.$$

Rearranjando termos, determinamos

$$s^4 = -1 = 1\angle 180^\circ.$$

Assim, as quatro raízes são

$$s_1 = 1\angle 45^\circ = 1/\sqrt{2} + j/\sqrt{2},$$

$$s_2 = 1\angle 135^\circ = -1/\sqrt{2} + j/\sqrt{2},$$

$$s_3 = 1\angle 225^\circ = -1/\sqrt{2} + -j/\sqrt{2},$$

$$s_4 = 1\angle 315^\circ = 1/\sqrt{2} + -j/\sqrt{2}.$$

As raízes s_2 e s_3 estão no semiplano esquerdo. Assim,

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{(s + 1/\sqrt{2} - j/\sqrt{2})(s + 1/\sqrt{2} + j/\sqrt{2})} \\ &= \frac{1}{(s^2 + \sqrt{2}s + 1)}. \end{aligned}$$

Para $n = 3$, determinamos as raízes do polinômio

$$1 + (-1)^3 s^6 = 0.$$

Rearranjando os termos,

$$s^6 = 1\angle 0^\circ = 1\angle 360^\circ.$$

Portanto, as seis raízes são

$$s_1 = 1\angle 0^\circ = 1,$$

$$s_2 = 1\angle 60^\circ = 1/2 + j1\ \bar{3}/2,$$

$$s_3 = 1\angle 120^\circ = -1/2 + j1\ \bar{3}/2,$$

$$s_4 = 1\angle 180^\circ = -1 + j0,$$

$$s_5 = 1\angle 240^\circ = -1/2 + -j1\ \bar{3}/2,$$

$$s_6 = 1\angle 300^\circ = 1/2 + -j1\ \bar{3}/2.$$

As raízes s_3, s_4 e s_5 estão no semiplano esquerdo. Assim,

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{(s + 1)(s + 1/2 - j\sqrt{3}/2)(s + 1/2 + j\sqrt{3}/2)} \\ &= \frac{1}{(s + 1)(s^2 + s + 1)}. \end{aligned}$$

Observamos, de passagem, que as raízes do polinômio de Butterworth estão sempre igualmente espaçadas ao redor do círculo unitário no plano s. Para auxiliar no projeto de filtros Butterworth, a Tabela 15.1 apresenta uma lista de polinômios de Butterworth até $n = 8$.

TABELA 15.1 Polinômios de Butterworth normalizados (de modo que $\omega_c = 1$ rad/s) até a oitava ordem

n	Polinômio de Butterworth de n-ésima ordem
1	$(s + 1)$
2	$(s^2 + \sqrt{2}s + 1)$
3	$(s + 1)(s^2 + s + 1)$
4	$(s^2 + 0{,}765s + 1)(s^2 + 1{,}848s + 1)$
5	$(s + 1)(s^2 + 0{,}618s + 1)(s^2 + 1{,}618s + 1)$
6	$(s^2 + 0{,}518s + 1)(s^2 + \sqrt{2} + 1)(s^2 + 1{,}932s + 1)$
7	$(s + 1)(s^2 + 0{,}445s + 1)(s^2 + 1{,}247s + 1)(s^2 + 1{,}802s + 1)$
8	$(s^2 + 0{,}390s + 1)(s^2 + 1{,}111s + 1)(s^2 + 1{,}6663s + 1)(s^2 + 1{,}962s + 1)$

Circuitos de filtros Butterworth

Agora que sabemos como especificar a função de transferência para um filtro Butterworth (seja diretamente, pelo cálculo dos pólos da função de transferência, seja usando a Tabela 15.1), passamos ao projeto de um circuito com tal função de transferência. Observe a forma dos polinômios de Butterworth na Tabela 15.1. Eles são o produto de fatores de primeira e segunda ordens; por conseguinte, podemos construir um circuito cuja função de transferência tenha um polinômio de Butterworth em seu denominador, organizando circuitos em cascata, sendo que cada um deles fornece um dos fatores necessários. Um diagrama de blocos de tal cascata é mostrado na Figura 15.20, usando um polinômio de Butterworth de quinta ordem como exemplo.

Como todos os polinômios de Butterworth de ordem ímpar incluem o fator $(s + 1)$, todos os circuitos de filtros Butterworth de ordem ímpar devem ter um subcircuito que tenha a função de transferência $H(s) = 1/(s + 1)$. Essa é a função de transferência do filtro protótipo passa-baixas ativo da Figura 15.1. Portanto, o que resta é determinar um circuito que forneça uma função de transferência da forma $H(s) = 1/(s^2 + b_1 s + 1)$.

Tal circuito é mostrado na Figura 15.21. A análise desse circuito começa escrevendo-se as equações nodais no domínio da freqüência para o nó V_a:

$$\frac{V_a - V_i}{R} + (V_a - V_o)sC_1 + \frac{V_a - V_o}{R} = 0, \quad (15.29)$$

$$V_o sC_2 + \frac{V_o - V_a}{R} = 0. \quad (15.30)$$

Simplificando as equações 15.29 e 15.30, obtemos

$$(2 + RC_1 s)V_a - (1 + RC_1 s)V_o = V_i, \quad (15.31)$$

$$-V_a + (1 + RC_2 s)V_o = 0. \quad (15.32)$$

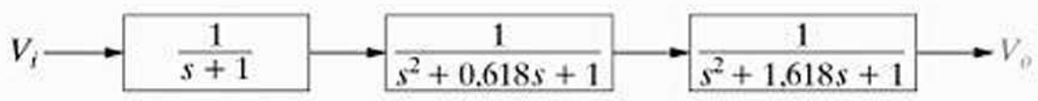


Figura 15.20 ▲ Cascata de circuitos de primeira e segunda ordens com as funções de transferência indicadas, que resultam em um filtro Butterworth passa-baixa de quinta ordem com $\omega_c = 1$ rad/s.

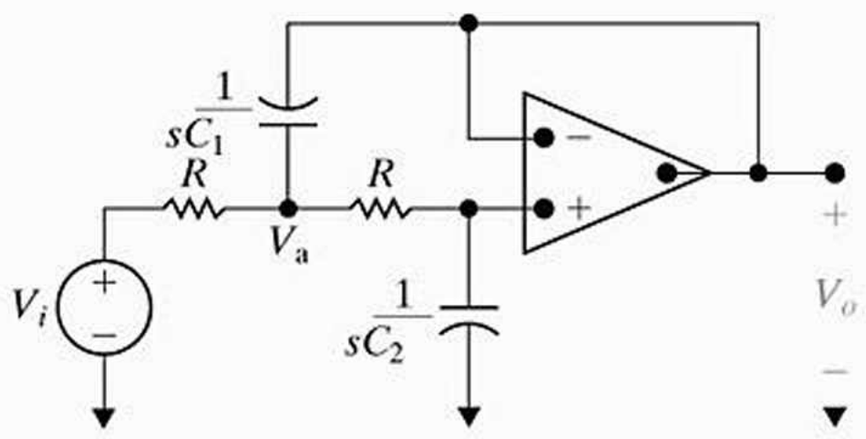


Figura 15.21 ▲ Circuito que gera a função de transferência de segunda ordem dos filtros Butterworth.

Aplicando a regra de Cramer às equações 15.31 e 15.32, determinamos V_o:

$$V_o = \frac{\begin{vmatrix} 2+RC_1 s & V_i \\ -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2+RC_1 s & -(1+RC_1 s) \\ -1 & 1+RC_2 s \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{V_i}{R^2 C_1 C_2 s^2 + 2RC_2 s + 1}. \quad (15.33)$$

Então, rearranjamos os termos da Equação 15.33 para obter a função de transferência para o circuito na Figura 15.21:

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{\frac{1}{R^2 C_1 C_2}}{s^2 + \frac{2}{RC_1}s + \frac{1}{R^2 C_1 C_2}}. \quad (15.34)$$

Por fim, fazemos $R = 1\ \Omega$ na Equação 15.34; então

$$H(s) = \frac{\frac{1}{C_1 C_2}}{s^2 + \frac{2}{C_1}s + \frac{1}{C_1 C_2}}. \quad (15.35)$$

Observe que a Equação 15.35 tem a forma requerida para o circuito de segunda ordem na cascata de Butterworth. Em outras palavras, para obter uma função de transferência da forma

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + b_1 s + 1},$$

usamos o circuito na Figura 15.21 e escolhemos valores de capacitores de modo que

$$b_1 = \frac{2}{C_1} \quad \text{e} \quad 1 = \frac{1}{C_1 C_2}. \quad (15.36)$$

Desse modo, delineamos o procedimento para projetar um filtro Butterworth passa-baixas de n-ésima ordem com uma freqüência de corte, ω_c, de 1 rad/s e um ganho unitário na faixa de passagem. Podemos usar uma mudança de escala de freqüência para calcular novos valores para os capacitores que resultem em qualquer outra freqüência de corte, e podemos usar uma mudança de escala de amplitude para obter valores mais realistas de componentes em nosso projeto. Podemos conectar em cascata um circuito amplificador inversor para obter um ganho na faixa de passagem diferente de 1.

O Exemplo 15.9 ilustra esse projeto.

Exemplo 15.9 Projeto de um filtro Butterworth passa-baixas de quarta ordem

Projete um filtro Butterworth passa-baixas de quarta ordem com uma freqüência de corte de 500 Hz e um ganho na faixa de passagem de 10. Use o maior número possível de resistores de 1 kΩ. Compare o diagrama de Bode da amplitude para esse filtro Butterworth com o da cascata de filtros idênticos do Exemplo 15.7.

Solução

Pela Tabela 15.1, determinamos que o polinômio de Butterworth de quarta ordem é

$$(s^2 + 0{,}765s + 1)(s^2 + 1{,}848s + 1).$$

Por isso, precisaremos de uma cascata de dois filtros de segunda ordem para obter a função de transferência de quarta ordem, além de um circuito amplificador inversor para um ganho na faixa de passagem de 10. O circuito é mostrado na Figura 15.22.

O primeiro estágio da cascata implementa a função de transferência para o polinômio $(s^2 + 0{,}765s + 1)$. Pela Equação 15.36,

$$C_1 = 2{,}61 \text{ F},$$
$$C_2 = 0{,}38 \text{ F}.$$

O segundo estágio da cascata implementa a função de transferência para o polinômio $(s^2 + 1{,}848s + 1)$. Pela Equação 15.36,

$$C_3 = 1{,}08 \text{ F},$$
$$C_4 = 0{,}924 \text{ F}.$$

Os valores precedentes para C_1, C_2, C_3 e C_4 dão um filtro Butterworth de quarta ordem com uma freqüência de corte de 1 rad/s. Um fator de escala de freqüência de $k_f = 3.141{,}6$ deslocará a freqüência de corte para 500 Hz. Um fator de escala de amplitude de $k_a = 1.000$ permitirá a utilização de resistores de 1 kΩ no lugar de resistores de 1 Ω. Os valores resultantes dos componentes são

$$R = 1 \text{ k}\Omega,$$
$$C_1 = 831 \text{ nF},$$
$$C_2 = 121 \text{ nF},$$
$$C_3 = 344 \text{ nF},$$
$$C_4 = 294 \text{ nF}.$$

Por fim, precisamos especificar os valores dos resistores do estágio amplificador inversor para dar um ganho na faixa de passagem de 10. Seja $R_1 = 1$ kΩ; então,

$$R_f = 10R_1 = 10 \text{ k}\Omega.$$

A Figura 15.23 compara as respostas de amplitude da cascata de filtros de quarta ordem idênticos do Exemplo 15.7 e do filtro Butterworth que acabamos de projetar. Observe que ambos os filtros dão um ganho na faixa de passagem de 10 (20 dB) e uma freqüência de corte de 500 Hz, mas o filtro Butterworth está mais próximo de um filtro passa-baixas ideal em razão de sua resposta mais plana na faixa de passagem e do decaimento do ganho mais acentuado após a freqüência de corte. Assim, o filtro Butterworth é melhor que uma cascata de filtros idênticos.

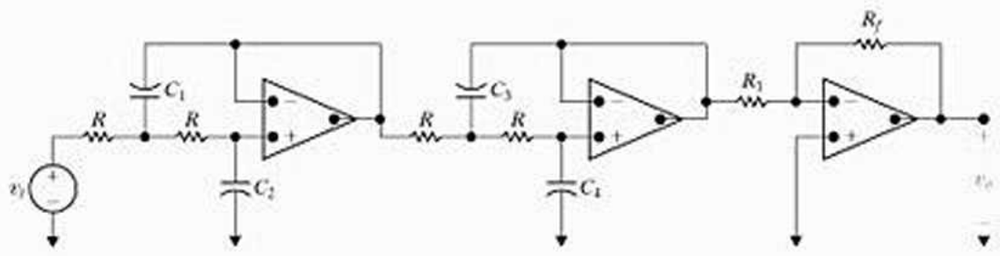


Figura 15.22 ▲ Filtro Butterworth de quarta ordem com ganho diferente da unidade.

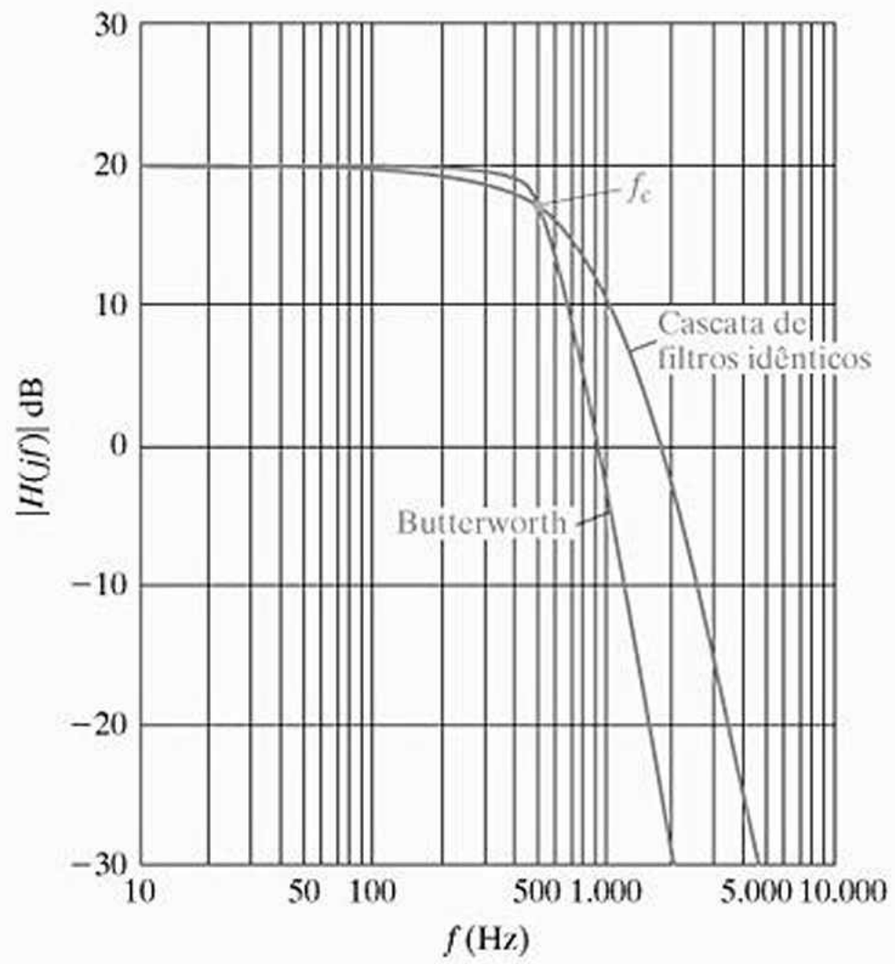


Figura 15.23 ▲ Comparação das respostas de amplitude de um filtro passa-baixas de quarta ordem construído a partir de uma cascata de filtros idênticos e de um filtro Butterworth.

A ordem de um filtro Butterworth

Nesta altura já deve ter ficado evidente que, quanto mais alta a ordem do filtro Butterworth, mais a resposta de amplitude aproxima-se da de um filtro passa-baixas ideal. Em outras palavras, à medida que n cresce, a amplitude permanece próxima da unidade na faixa de passagem, a faixa de transição se estreita e a amplitude permanece próxima de zero na faixa de rejeição. Ao mesmo tempo, à medida que a ordem cresce, o número de componentes do circuito cresce. Então, decorre que um problema fundamental no projeto de um filtro é determinar o menor valor de n que atenderá às especificações de filtragem.

No projeto de um filtro passa-baixas, as especificações de filtragem costumam ser dadas em termos da largura da faixa de transição, como mostra a Figura 15.24. Uma vez identificadas A_p, ω_p, A_s e ω_s, a ordem do filtro Butterworth pode ser determinada.

Para o filtro Butterworth,

$$A_p = 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_p^{2n}}}$$

$$= -10 \log_{10}(1 + \omega_p^{2n}), \tag{15.37}$$

$$A_s = 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_s^{2n}}}$$

$$= -10 \log_{10}(1 + \omega_s^{2n}), \tag{15.38}$$

Decorre da definição de logaritmo que

$$10^{-0,1A_p} = 1 + \omega_p^{2n}, \tag{15.39}$$

$$10^{-0,1A_s} = 1 + \omega_s^{2n}. \tag{15.40}$$

Agora, determinamos ω_p^n e ω_s^n e, então, calculamos a razão $(\omega_s/\omega_p)^n$. Obtemos

$$\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)^n = \frac{\sqrt{10^{-0,1A_s} - 1}}{\sqrt{10^{-0,1A_p} - 1}} = \frac{\sigma_s}{\sigma_p}, \tag{15.41}$$

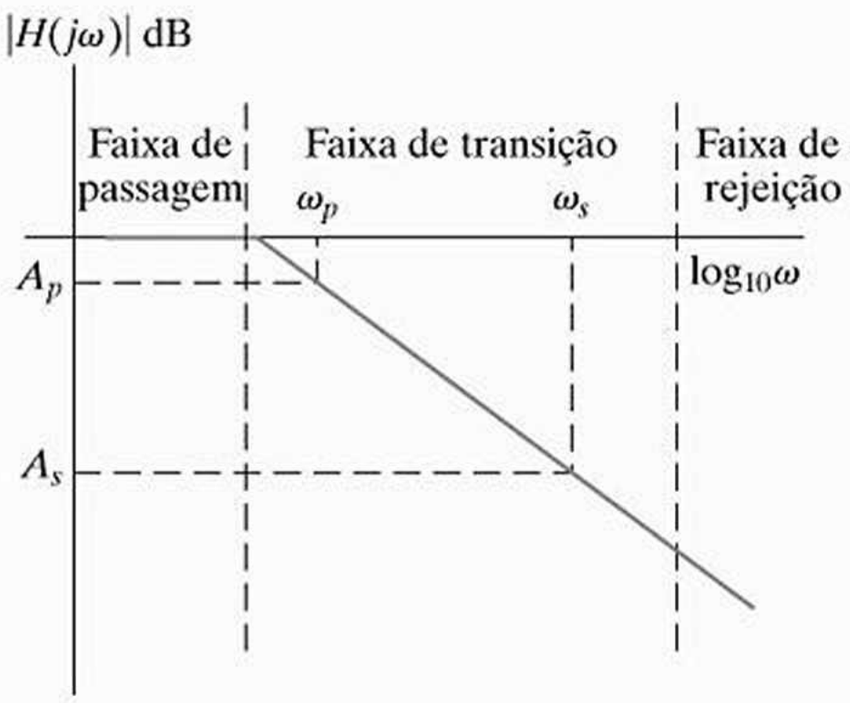


Figura 15.24 ▲ Definição da faixa de transição para um filtro passa-baixas.

onde os símbolos σ_s e σ_p foram introduzidos por conveniência. Pela Equação 15.41, podemos escrever

$$n \log_{10}(\omega_s/\omega_p) = \log_{10}(\sigma_s/\sigma_p),$$

ou

$$n = \frac{\log_{10}(\sigma_s/\sigma_p)}{\log_{10}(\omega_s/\omega_p)}. \tag{15.42}$$

Podemos simplificar a Equação 15.42 se ω_p for a freqüência de corte porque, então, A_p será igual a $-20 \log_{10} \sqrt{2}$, e $\sigma_p = 1$. Daí,

$$n = \frac{\log_{10} \sigma_s}{\log_{10}(\omega_s/\omega_p)}. \tag{15.43}$$

Ainda é possível mais uma simplificação. Estamos usando um filtro Butterworth para obter uma faixa de transição acentuada. Assim, a especificação de filtragem fará com que $10^{-0,1}A_s >> 1$. Assim,

$$\sigma_s \approx 10^{-0,05}A_s, \tag{15.44}$$

$$\log_{10} \sigma_s \approx -0,05A_s. \tag{15.45}$$

Portanto, uma boa aproximação para o cálculo de n é

$$n = \frac{-0,05A_s}{\log_{10}(\omega_s/\omega_p)}. \tag{15.46}$$

Como $\omega_s/\omega_p = f_s/f_p$, podemos trabalhar no cálculo de n tanto com radianos por segundo quanto com hertz.

A ordem do filtro deve ser um mínimo inteiro; daí, usando a Equação 15.42 ou a Equação 15.46, devemos selecionar o valor inteiro mais próximo e maior do que o resultado dado pela equação. Os exemplos a seguir ilustram a utilidade das equações 15.42 e 15.46.

Exemplo 15.10 Determinação da ordem de um filtro Butterworth

a) Determine a ordem de um filtro Butterworth que tem uma freqüência de corte de 1.000 Hz e um ganho de não mais do que –50 dB em 6.000 Hz.

b) Qual é o ganho real, em dB, em 6.000 Hz?

Solução

a) Como a freqüência de corte é dada, sabemos que $\sigma_p = 1$. Além disso, observamos, pela especificação, que $10^{-0,1(-50)}$ é muito maior do que 1. Daí, podemos usar a Equação 15.46:

$$n = \frac{(-0,05)(-50)}{\log_{10}(6.000/1.000)} = 3,21.$$

Dessa forma, precisamos de um filtro Butterworth de quarta ordem.

b) Podemos usar a Equação 15.25 para calcular o ganho real em 6.000 Hz. O ganho em decibéis será

$$K = 20 \log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{1 + 6^8}}\right) = -62,25 \text{ dB}.$$

Exemplo 15.11 Abordagem alternativa para a determinação da ordem de um filtro Butterworth

a) Determine a ordem de um filtro Butterworth cuja amplitude seja 10 dB menor do que a amplitude na faixa de passagem em 500 Hz e no mínimo 60 dB menor do que a amplitude na faixa de passagem em 5.000 Hz.

b) Determine a freqüência de corte do filtro (em hertz).

c) Qual é o ganho real do filtro (em decibéis) em 5.000 Hz?

Solução

a) Como a freqüência de corte não é dada, usamos a Equação 15.42 para determinar a ordem do filtro:

$$\sigma_p = \sqrt{10^{-0,1(-10)} - 1} = 3,$$

$$\sigma_s = \sqrt{10^{-0,1(-60)} - 1} \approx 1.000,$$

$$\omega_s/\omega_p = f_s/f_p = 5.000/500 = 10,$$

$$n = \frac{\log_{10}(1.000/3)}{\log_{10}(10)} = 2{,}52.$$

Portanto, precisamos de um filtro Butterworth de terceira ordem para atender às especificações.

b) Sabendo que o ganho em 500 Hz é −10 dB, podemos determinar a freqüência de corte. Pela Equação 15.25 podemos escrever

$$-10 \log_{10}[1 + (\omega/\omega_c)^6] = -10\,,$$

onde $\omega = 1.000\pi$ rad/s. Assim,

$$1 + (\omega/\omega_c)^6 = 10,$$

e

$$\omega_c = \frac{\omega}{\sqrt[6]{9}}$$

$$= 2.178{,}26 \text{ rad/s}.$$

Disso decorre que

$$f_c = 346{,}68 \text{ Hz}.$$

c) O ganho real do filtro em 5.000 Hz é

$$K = -10 \log_{10}[1 + (5.000/346{,}68)^6]$$

$$= -69{,}54 \text{ dB}.$$

Filtros Butterworth passa-altas, passa-faixa e rejeita-faixa

Um filtro Butterworth passa-altas de n-ésima ordem tem uma função de transferência com o polinômio de Butterworth de n-ésima ordem no denominador, exatamente como o filtro Butterworth passa-baixas de n-ésima ordem. No entanto, no filtro passa-altas, o numerador da função de transferência é s^n, ao passo que, no filtro passa-baixas, o numerador é 1. Usamos, novamente, um circuito em cascata no projeto do filtro Butterworth passa-altas. O fator de primeira ordem é obtido incluindo na cascata um filtro protótipo passa-altas (Figura 15.4, com $R_1 = R_2 = 1\ \Omega$ e $C = 1$ F).

Para obter os fatores de segunda ordem do polinômio de Butterworth, precisamos de um circuito com uma função de transferência da forma

$$H(s) = \frac{s^2}{s^2 + b_1 s + 1}.$$

Tal circuito é mostrado na Figura 15.25.

Esse circuito tem a função de transferência

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{s^2}{s^2 + \frac{2}{R_2 C}s + \frac{1}{R_1 R_2 C^2}}. \qquad (15.47)$$

Fazendo $C = 1$ F, obtemos

$$H(s) = \frac{s^2}{s^2 + \frac{2}{R_2}s + \frac{1}{R_1 R_2}}. \qquad (15.48)$$

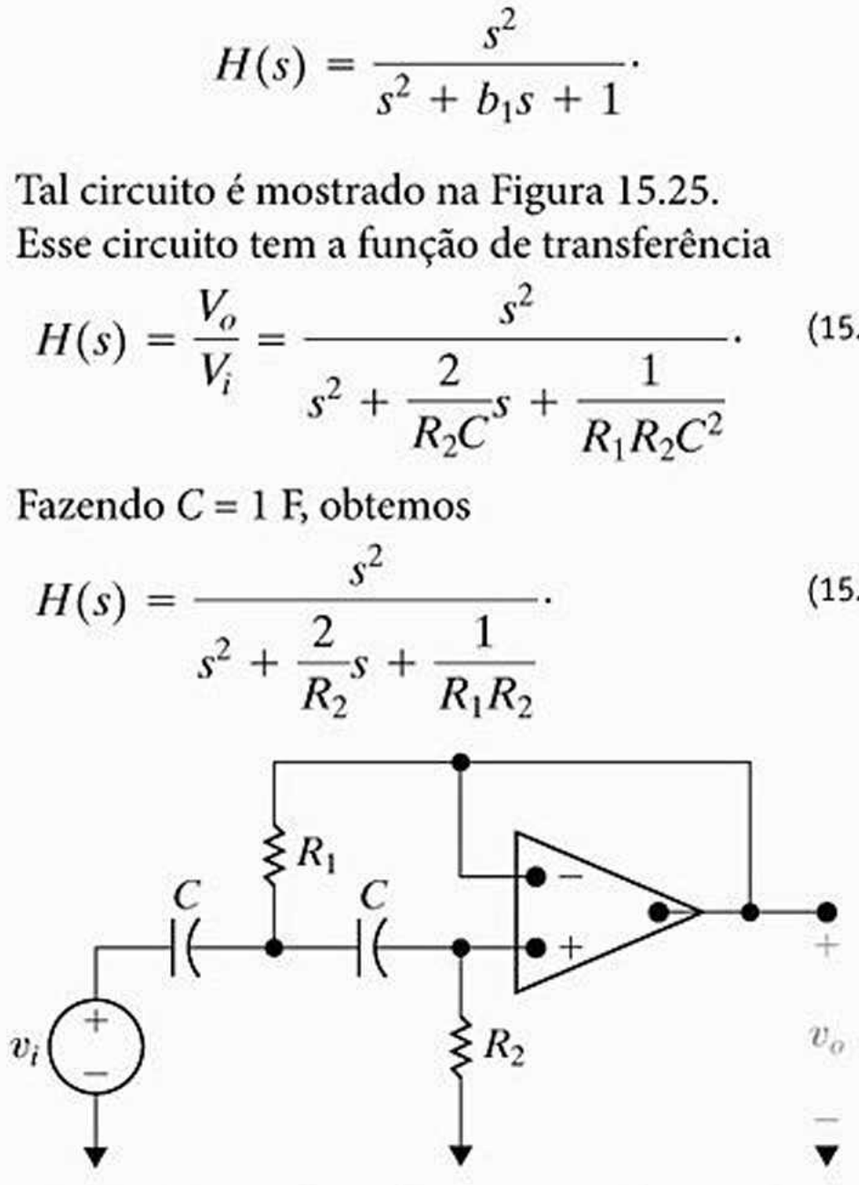


Figura 15.25 ▲ Circuito de um filtro Butterworth passa-altas de segunda ordem.

Assim, podemos obter qualquer fator de segunda ordem em um polinômio de Butterworth da forma $(s^2 + b_1 s + 1)$, incluindo na cascata o circuito de segunda ordem da Figura 15.25, com valores de resistores que satisfaçam a Equação 15.49:

$$b_1 = \frac{2}{R_2} \quad \text{e} \quad 1 = \frac{1}{R_1 R_2}. \qquad (15.49)$$

Neste ponto, fazemos uma pausa para algumas observações relativas às figuras 15.21 e 15.25 e às funções de transferência protótipo $1/(s^2 + b_1 s + 1)$ e $s^2/(s^2 + b_1 s + 1)$. Essas observações são importantes porque, de modo geral, são verdadeiras. Em primeiro lugar, o circuito passa-altas da Figura 15.25 foi obtido do circuito passa-baixas na Figura 15.21 intercambiando resistores e capacitores. Em segundo lugar, a função de transferência de um filtro protótipo passa-altas pode ser obtida de um filtro passa-baixas, substituindo s, na expressão do passa-baixas, por $1/s$ (veja o Problema 15.46, apresentado no final do capítulo).

Podemos usar uma mudança de escala de freqüência e amplitude para projetar um filtro Butterworth passa-altas com valores reais de componentes e uma freqüência de corte diferente de 1 rad/s. Adicionar um amplificador inversor à cascata possibilitará projetos com ganhos na faixa de passagem diferentes da unidade. Os problemas no final do capítulo incluem vários projetos de filtros Butterworth passa-altas.

Agora que podemos projetar filtros Butterworth passa-baixas e passa-altas de n-ésima ordem com freqüências de corte e ganhos arbitrários na faixa de passagem, podemos combiná-los em cascata (como fizemos na Seção 15.3) para produzir filtros Butterworth passa-faixa de n-ésima ordem. Podemos combinar esses filtros em paralelo conectando suas saídas na entrada de um amplificador somador (mais uma vez, como fizemos na Seção 15.3) para produzir filtros Butterworth rejeita-faixa de n-ésima ordem. Os problemas deste capítulo também incluem projetos de filtros Butterworth passa-faixa e rejeita-faixa.

✔ PROBLEMA PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 3 — Entender como usar filtros Butterworth de primeira e segunda ordens em cascata

15.4 Determine valores de R_1 e R_2 para o circuito na Figura 15.25, para que ele se comporte como um filtro protótipo Butterworth passa-altas de segunda ordem.

Resposta: $R_1 = 0{,}707\ \Omega$, $R_2 = 1{,}41\ \Omega$.

NOTA: Tente resolver também os problemas 15.33, 15.36 e 15.37, apresentados no final deste capítulo.

15.5 Filtros ativos passa-faixa e rejeita-faixa de banda estreita

Os projetos de circuitos em cascata e em paralelo para sintetizar filtros passa-faixa e rejeita-faixa, a partir de filtros passa-baixas e passa-altas mais simples, têm uma restrição: somente são obtidos filtros de banda larga, ou de baixo *Q*. (*Q*, é claro, representa *fator de qualidade*.) Essa limitação deve-se principalmente ao fato de que as funções de transferência para filtros passa-faixa em cascata e para filtros rejeita-faixa em paralelo têm pólos reais discretos. As técnicas de síntese funcionam melhor para freqüências de corte amplamente espaçadas e, por conseguinte, para fatores de qualidade mais baixos. No entanto, o maior fator de qualidade que podemos obter com pólos reais discretos surge quando as freqüências de corte e, portanto, as localizações dos pólos são as mesmas. Considere a função de transferência resultante quando as freqüências de corte são as mesmas:

$$H(s) = \left(\frac{-\omega_c}{s + \omega_c}\right)\left(\frac{-s}{s + \omega_c}\right)$$

$$= \frac{s\omega_c}{s^2 + 2\omega_c s + \omega_c^2}$$

$$= \frac{0{,}5\beta s}{s^2 + \beta s + \omega_c^2}. \qquad (15.50)$$

A Equação 15.50 está na forma padrão da função de transferência de um filtro passa-faixa e, por isso, podemos determinar diretamente a largura da faixa e a freqüência central:

$$\beta = 2\omega_c, \qquad (15.51)$$

$$\omega_o^2 = \omega_c^2. \qquad (15.52)$$

Pelas equações 15.51 e 15.52 e pela definição de *Q*, vemos que

$$Q = \frac{\omega_o}{\beta} = \frac{\omega_c}{2\omega_c} = \frac{1}{2}. \qquad (15.53)$$

Assim, com pólos discretos reais, o filtro passa-faixa (ou o filtro rejeita-faixa) da mais alta qualidade que podemos obter tem $Q = 1/2$.

Para construir filtros ativos com altos valores de fator de qualidade, precisamos de um circuito ativo que possa produzir uma função de transferência com pólos complexos conjugados. A Figura 15.26 representa um desses circuitos para nós analisarmos. Na entrada inversora do amplificador operacional, somamos as correntes para obter

$$\frac{V_a}{1/sC} = \frac{-V_o}{R_3}.$$

Explicitando V_a,

$$V_a = \frac{-V_o}{sR_3C}. \qquad (15.54)$$

No nó *a*, somamos as correntes para obter

$$\frac{V_i - V_a}{R_1} = \frac{V_a - V_o}{1/sC} + \frac{V_a}{1/sC} + \frac{V_a}{R_2}.$$

Explicitando V_i,

$$V_i = (1 + 2sR_1C + R_1/R_2)V_a - sR_1CV_o. \qquad (15.55)$$

Substituindo a Equação 15.54 na Equação 15.55 e, então, rearranjando os termos, obtemos uma expressão para a função de transferência V_o/V_i:

$$H(s) = \frac{\dfrac{-s}{R_1C}}{s^2 + \dfrac{2}{R_3C}s + \dfrac{1}{R_{eq}R_3C^2}}, \qquad (15.56)$$

onde

$$R_{eq} = R_1 \| R_2 = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}.$$

Visto que a Equação 15.56 está na forma padrão da função de transferência para um filtro passa-faixa, isto é,

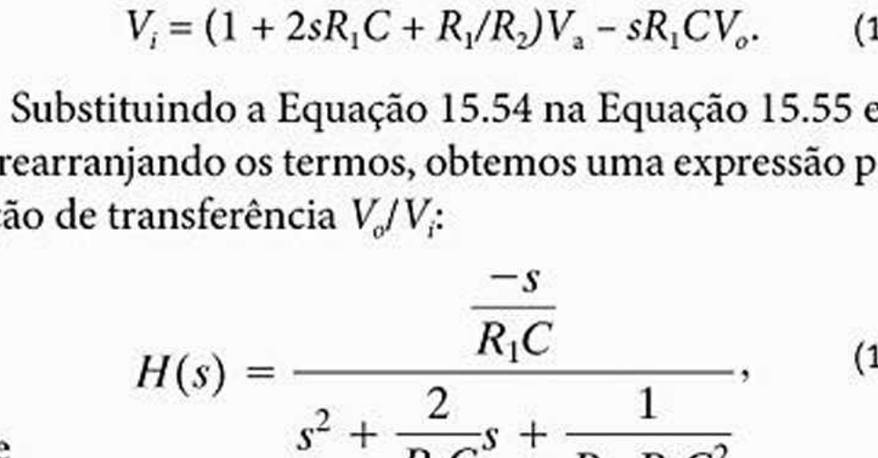


Figura 15.26 ▲ Filtro ativo passa-faixa com alto *Q*.

$$H(s) = \frac{K\beta s}{s^2 + \beta s + \omega_o^2},$$

podemos igualar termos e determinar os valores dos resistores, que determinarão uma freqüência central (ω_o), um fator de qualidade (Q) e ganho na faixa de passagem (K) especificados:

$$\beta = \frac{2}{R_3 C}; \tag{15.57}$$

$$K\beta = \frac{1}{R_1 C}; \tag{15.58}$$

$$\omega_o^2 = \frac{1}{R_{eq} R_3 C^2}. \tag{15.59}$$

Neste ponto, é conveniente definir um circuito protótipo do circuito na Figura 15.25 como um circuito no qual $\omega_o = 1$ rad/s e $C = 1$ F. Então, as expressões para R_1, R_2 e R_3 podem ser dadas em termos do fator de qualidade e do ganho na faixa de passagem desejados. Deixamos que você mostre (no Problema 15.38, apresentado no final do capítulo) que, para o circuito protótipo, as expressões para R_1, R_2 e R_3 são

$$R_1 = Q/K,$$
$$R_2 = Q/(2Q^2 - K),$$
$$R_3 = 2Q.$$

Uma mudança de escala é usada para especificar os valores práticos para os componentes do circuito. Esse projeto é ilustrado no Exemplo 15.12.

Exemplo 15.12 Projeto de um filtro passa-faixa de alto Q

Projete um filtro passa-faixa, usando o circuito na Figura 15.26, que tenha uma freqüência central de 3.000 Hz, um fator de qualidade de 10 e um ganho na faixa de passagem de 2. Use capacitores de 0,01 μF em seu projeto. Calcule a função de transferência de seu circuito e faça o diagrama de Bode de sua amplitude.

Solução

Visto que $Q = 10$ e $K = 2$, os valores para R_1, R_2 e R_3 do circuito protótipo são

$$R_1 = 10/2 = 5,$$
$$R_2 = 10/(200 - 2) = 10/198,$$
$$R_3 = 2(10) = 20.$$

Os fatores de escala são $k_f = 6.000\pi$ e $k_a = 10^8/k_f$. Após aumento de escala,

$$R_1 = 26{,}5\ \text{k}\Omega,$$
$$R_2 = 268{,}0\ \Omega,$$
$$R_3 = 106{,}1\ \text{k}\Omega.$$

O circuito é mostrado na Figura 15.27.

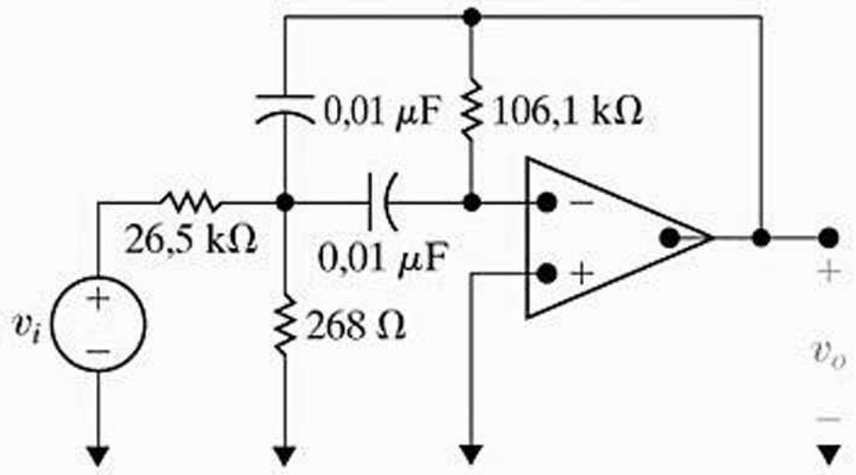


Figura 15.27 ▲ Filtro passa-faixa de alto Q, projetado no Exemplo 15.12.

Substituindo os valores de resistência e capacitância na Equação 15.56, obtemos a função de transferência para esse circuito:

$$H(s) = \frac{-3.770s}{s^2 + 1.885{,}0s + 355 \times 10^6}.$$

É fácil ver que essa função de transferência está de acordo com a especificação do filtro passa-faixa definido no exemplo. O diagrama de Bode de sua amplitude é apresentado na Figura 15.28.

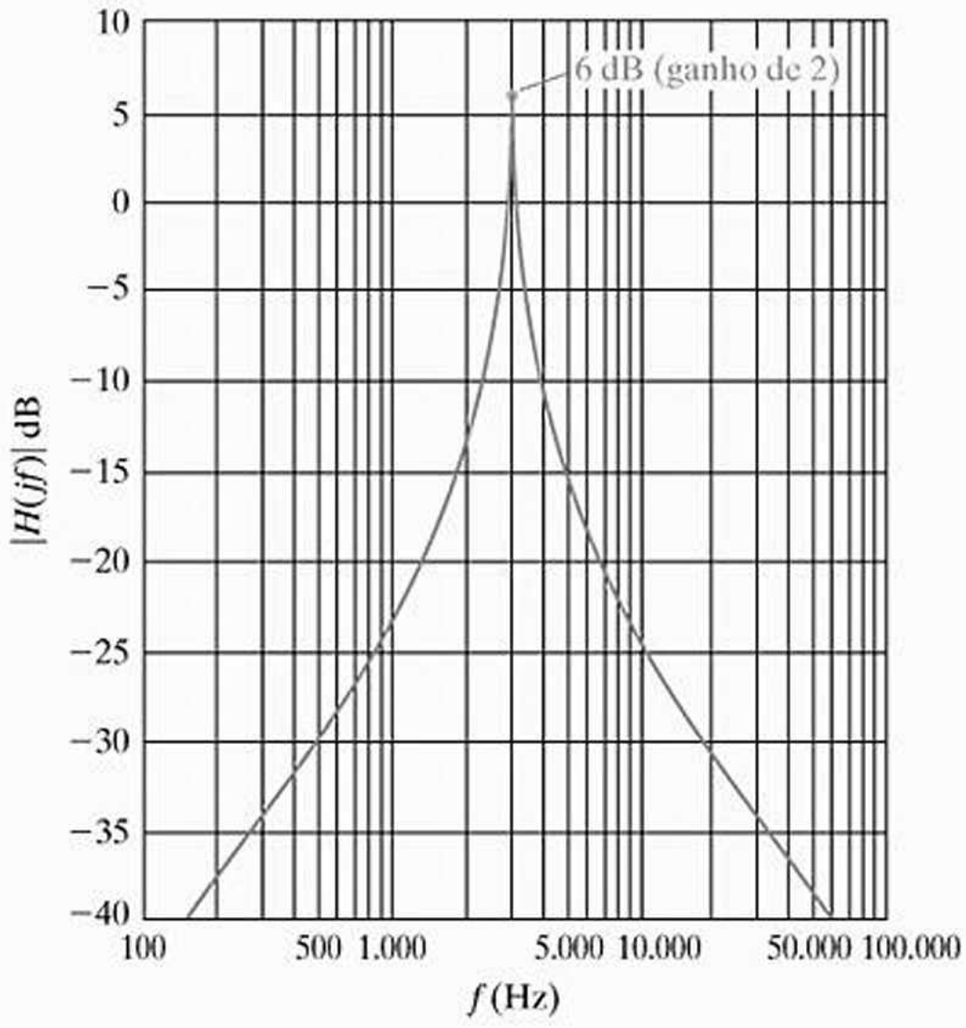


Figura 15.28 ▲ Diagrama de Bode da amplitude para o filtro passa-faixa de alto Q projetado no Exemplo 15.12.

A implementação em paralelo de um filtro rejeita-faixa que combina os filtros passa-baixas e passa-altas com um amplificador somador tem a mesma restrição de baixo Q de um filtro passa-faixa em cascata. O circuito na Figura 15.29 é um filtro ativo rejeita-faixa de alto Q conhecido como um *filtro supressor de faixa duplo-T* por causa dos circuitos em T ligados aos nós denominados a e b.

Começamos a análise desse circuito somando as correntes que saem do nó a:

$$(V_a - V_i)sC + (V_a - V_o)sC + \frac{2(V_a - \sigma V_o)}{R} = 0$$

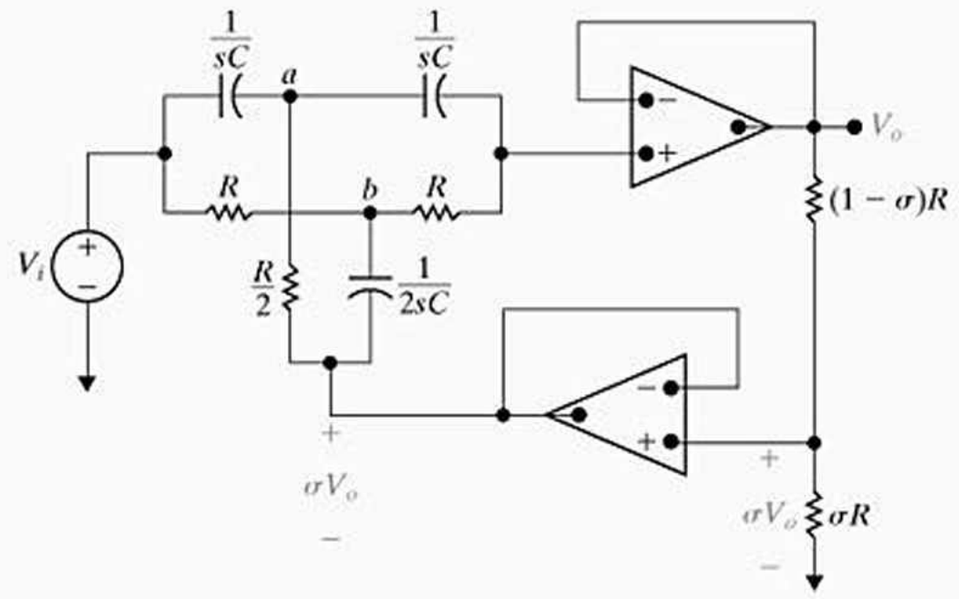


Figura 15.29 ▲ Filtro ativo rejeita-faixa de alto *Q*.

ou

$$V_a[2sCR + 2] - V_o[sCR + 2\sigma] = sCRV_i. \quad (15.60)$$

Somando as correntes que saem do nó *b*, obtemos:

$$\frac{V_b - V_i}{R} + \frac{V_b - V_o}{R} + (V_b - \sigma V_o)2sC = 0$$

ou

$$V_b[2 + 2RCs] - V_o[1 + 2\sigma RCs] = V_i. \quad (15.61)$$

Somando as correntes que saem da entrada não inversora do amplificador operacional superior, obtemos

$$(V_o - V_a)sC + \frac{V_o - V_b}{R} = 0$$

ou

$$-sRCV_a - V_b + (sRC + 1)V_o = 0. \quad (15.62)$$

Usando a regra de Cramer nas equações 15.60–15.62, temos:

$$V_o = \frac{\begin{vmatrix} 2(RCs + 1) & 0 & sCRV_i \\ 0 & 2(RCs + 1) & V_i \\ -RCs & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(RCs + 1) & 0 & -(RCs + 2\sigma) \\ 0 & 2(RCs + 1) & -(2\sigma RCs + 1) \\ -RCs & -1 & RCs + 1 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{(R^2C^2s^2 + 1)V_i}{R^2C^2s^2 + 4RC(1 - \sigma)s + 1}. \quad (15.63)$$

Rearranjando os termos da Equação 15.63, podemos obter a função de transferência:

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{\left(s^2 + \frac{1}{R^2C^2}\right)}{\left[s^2 + \frac{4(1 - \sigma)}{RC}s + \frac{1}{R^2C^2}\right]}, \quad (15.64)$$

que está na forma padrão de um filtro rejeita-faixa:

$$H(s) = \frac{s^2 + \omega_0^2}{s^2 + \beta s + \omega_0^2}. \quad (15.65)$$

Igualando as equações 15.64 e 15.65 obtemos

$$\omega_o^2 = \frac{1}{R^2C^2}, \quad (15.66)$$

$$\beta = \frac{4(1 - \sigma)}{RC}. \quad (15.67)$$

Nesse circuito, temos três parâmetros (*R*, *C* e σ) e duas restrições de projeto (ω_o e β). Assim, um parâmetro é escolhido arbitrariamente; normalmente é o valor do capacitor, pois esse valor costuma oferecer a menor quantidade de opções disponíveis no comércio. Escolhido *C*,

$$R = \frac{1}{\omega_o C}, \quad (15.68)$$

e

$$\sigma = 1 - \frac{\beta}{4\omega_o} = 1 - \frac{1}{4Q}. \quad (15.69)$$

O Exemplo 15.13 ilustra o projeto de um filtro ativo rejeita-faixa de alto *Q*.

Exemplo 15.13 Projeto de um filtro rejeita-faixa de alto *Q*

Projete um filtro ativo rejeita-faixa de alto *Q* (baseado no circuito da Figura 15.29) com uma freqüência central de 5.000 rad/s e uma largura de faixa de 1.000 rad/s. Use capacitores de 1 μF em seu projeto.

Solução

No filtro protótipo rejeita-faixa, $\omega_o = 1$ rad/s, $R = 1\ \Omega$ e $C = 1$ F. Como acabamos de discutir, dados ω_o e *Q*, *C* pode ser escolhido arbitrariamente e *R* e σ podem ser determinados pelas equações 15.68 e 15.69. Pelas especificações, $Q = 5$. Usando as equações 15.68 e 15.69, vemos que

$$R = 200\ \Omega,$$

$$\sigma = 0{,}95.$$

Assim, precisamos de resistores de 200 Ω (*R*), 100 Ω (*R*/2), 190 Ω (σ*R*) e 10 Ω [(1 − σ)*R*]. O projeto final é apresentado na Figura 15.30, e o diagrama de Bode da amplitude é mostrado na Figura 15.31.

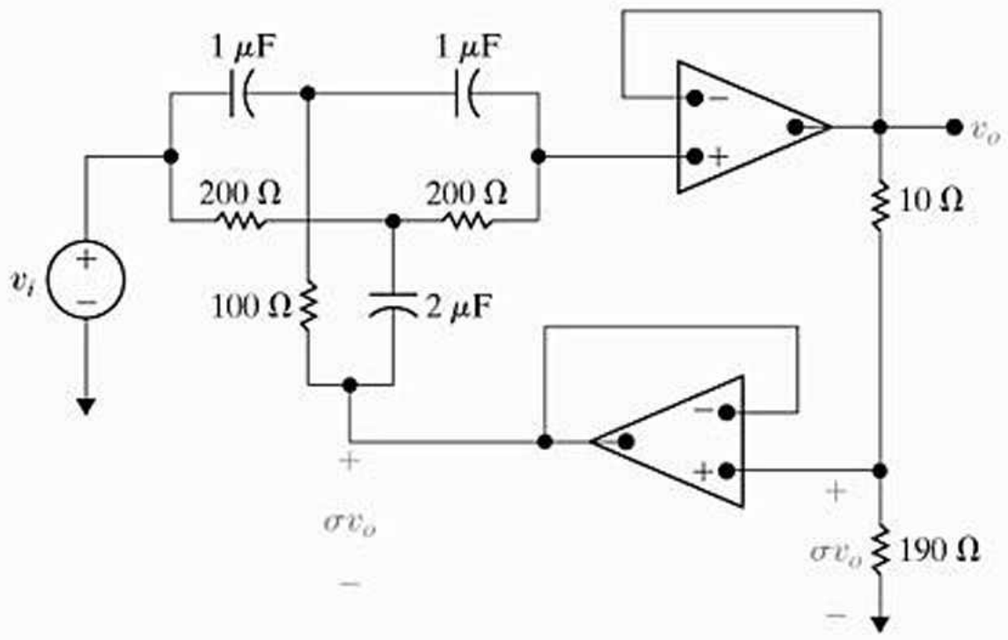


Figura 15.30 ▲ Filtro ativo rejeita-faixa de alto *Q* projetado no Exemplo 15.13.

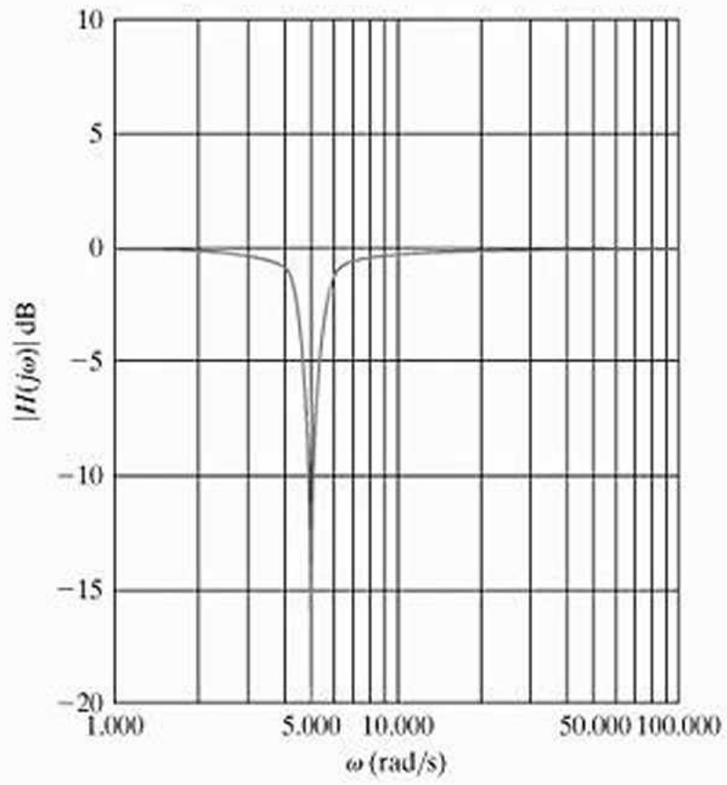


Figura 15.31 ◀ Diagrama de Bode da amplitude para o filtro ativo rejeita-faixa projetado no Exemplo 15.13.

✔ PROBLEMAS PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 4 — Saber usar as equações de projeto para calcular os valores dos componentes para filtros protótipos de faixa estreita, passa-faixa e rejeita-faixa

15.5 Projete um filtro ativo passa-faixa com $Q = 8$, $K = 5$ e $\omega_o = 1.000$ rad/s. Use capacitores de 1 μF e especifique os valores de todos os resistores.

Resposta: $R_1 = 1{,}6$ kΩ, $R_2 = 65{,}04$ Ω, $R_3 = 16$ kΩ.

15.6 Projete um filtro ativo rejeita-faixa de ganho unitário com $\omega_c = 1.000$ rad/s e $Q = 4$. Use capacitores de 2 μF e especifique os valores de R e σ.

Resposta: $R = 500$ Ω, $\sigma = 0{,}9375$.

NOTA: Tente resolver o Problema 15.58, apresentado no final do capítulo.

Perspectiva prática

Controle de volume de graves

Agora estudaremos um circuito ativo que pode ser usado para controlar a amplificação de um sinal de áudio na faixa dos graves. A faixa de áudio consiste em sinais com freqüências de 20 Hz a 20 kHz. A faixa de graves inclui freqüências até 300 Hz. O circuito de controle de volume e sua resposta de freqüência são mostrados na Figura 15.32. A curva de resposta particular, da família de curvas de resposta, é selecionada ajustando-se o potenciômetro da Figura 15.32(a).

Ao estudar as curvas de resposta de freqüência da Figura 15.32(b) observe o seguinte. Em primeiro lugar, o ganho em dB pode ser positivo ou negativo. Se o ganho for positivo, um sinal na faixa dos graves é amplificado ou reforçado. Se o ganho for negativo, o sinal é atenuado ou eliminado. Em segundo lugar, é possível selecionar uma resposta característica com ganho unitário (zero dB) para todas as freqüências na faixa dos graves. Como veremos, se o potenciômetro for ajustado em seu ponto médio, o circuito não terá nenhum efeito sobre os sinais na faixa dos graves. Por fim, à medida que a freqüência aumenta, todas as respostas características aproximam-se de zero dB ou ganho unitário. Daí, o circuito de controle de volume não terá efeito algum sobre os sinais na extremidade superior do espectro, ou faixa de agudos, das freqüências de áudio.

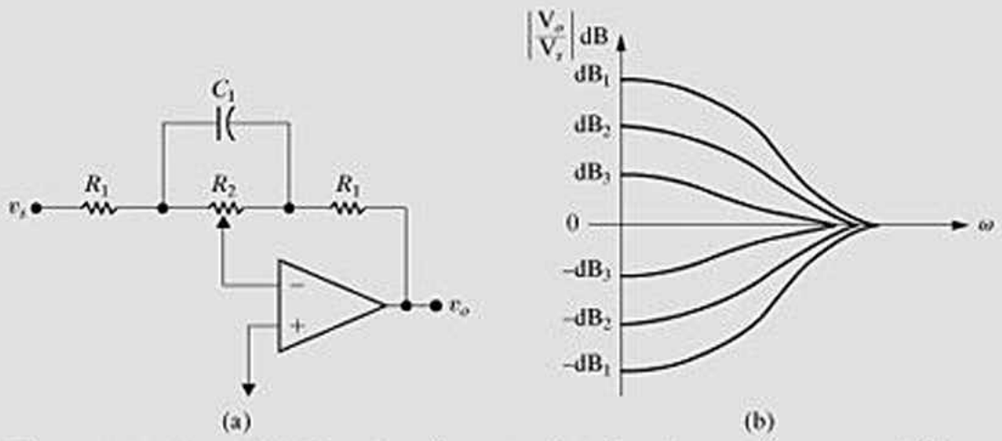


Figura 15.32 ▲ (a) Circuito de controle de volume de graves; (b) Resposta de freqüência do circuito de controle de volume de graves.

A primeira etapa na análise da resposta de freqüência do circuito na Figura 15.32(a) é calcular a função de transferência V_o/V_s. Para facilitar esse cálculo, o circuito equivalente no domínio da freqüência é dado na Figura 15.33. As tensões de nó V_a e V_b foram identificadas no circuito para auxiliar a análise. A posição do potenciômetro é determinada pelo valor numérico de α, como observado na Figura 15.33.

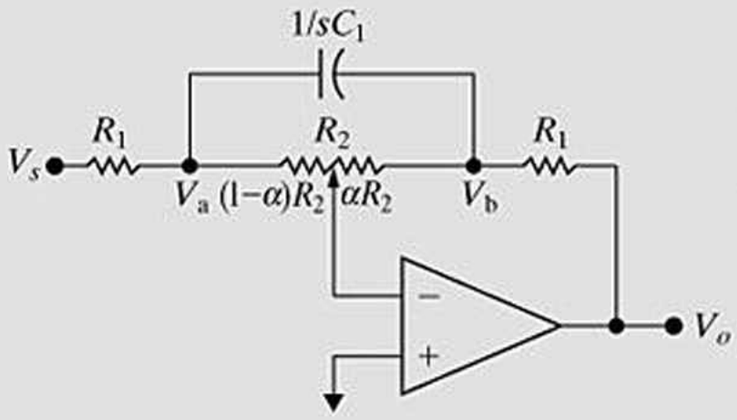


Figura 15.33 ◀ Circuito no domínio da freqüência para o controle de volume de graves. Observe que α determina o ajuste do potenciômetro, portanto $0 \leq \alpha \leq 1$.

Para determinar a função de transferência, escrevemos as três equações de tensões de nó que descrevem o circuito e, então, determinamos a razão V_o/V_s. As equações de tensões de nó são

$$\frac{V_a}{(1-\alpha)R_2} + \frac{V_a - V_s}{R_1} + (V_a - V_b)s\,C_1 = 0;$$

$$\frac{V_b}{\alpha R_2} + (V_b - V_a)s\,C_1 + \frac{V_b - V_o}{R_1} = 0$$

$$\frac{V_a}{(1-\alpha)R_2} + \frac{V_b}{\alpha R_2} = 0$$

Dessas três equações pode-se determinar V_o em função de V_s e, daí, a função de transferência $H(s)$:

$$H(s) = \frac{V_o}{V_s} = \frac{-(R_1 + \alpha R_2 + R_1R_2C_1s)}{R_1 + (1-\alpha)R_2 + R_1R_2C_1s}.$$

Disso decorre diretamente que

$$H(j\omega) = \frac{-(R_1 + \alpha R_2 + j\omega R_1R_2C_1)}{[R_1 + (1-\alpha)R_2 + j\omega R_1R_2C_1]}.$$

Agora, vamos verificar se essa função de transferência gerará a família de curvas de resposta de freqüência representada na Figura 15.32(b). Em primeiro lugar, observe que, quando $\alpha = 0{,}5$, o módulo de $H(j\omega)$ é unitário para todas as freqüências, isto é,

$$|H(j\omega)| = \frac{|R_1 + 0{,}5R_2 + j\omega R_1R_2C_1|}{|R_1 + 0{,}5R_2 + j\omega R_1R_2C_1|} = 1.$$

Quando $\omega = 0$, temos

$$|H(j0)| = \frac{R_1 + \alpha R_2}{R_1 + (1-\alpha)R_2}.$$

Observe que $|H(j0)|$ para $\alpha = 1$ é a recíproca de $|H(j0)|$ para $\alpha = 0$, isto é,

$$|H(j0)|_{\alpha=1} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} = \frac{1}{|H(j0)|_{\alpha=0}}.$$

Basta raciocinar um pouco e o leitor poderá perceber que a relação recíproca é válida para todas as freqüências, e não apenas para $\omega = 0$. Por exemplo, $\alpha = 0{,}4$ e $\alpha = 0{,}6$ são simétricas a $\alpha = 0{,}5$ e

$$H(j\omega)_{\alpha=0,4} = \frac{-(R_1 + 0{,}4R_2) + j\omega R_1R_2C_1}{(R_1 + 0{,}6R_2) + j\omega R_1R_2C_1}$$

enquanto

$$H(j\omega)_{\alpha=0,6} = \frac{-(R_1 + 0{,}6R_2) + j\omega R_1R_2C_1}{(R_1 + 0{,}4R_2) + j\omega R_1R_2C_1}.$$

Daí,

$$H(j\omega)_{\alpha=0,4} = \frac{1}{H(j\omega)_{\alpha=0,6}}.$$

Assim, dependendo do valor de α o circuito de controle de volume pode amplificar ou atenuar o sinal de entrada.

Os valores numéricos de R_1, R_2 e C_1 são determinados por duas decisões de projeto. A primeira decisão de projeto é a amplificação ou a atenuação dos graves na faixa de passagem (quando $\omega \to 0$). A segunda decisão de projeto é a freqüência na qual essa amplificação ou atenuação varia de 3 dB em relação ao máximo. Os valores dos componentes que satisfazem as decisões de projeto são calculados com α igual a 1 ou a 0.

Como já tínhamos observado, o ganho máximo será $(R_1 + R_2)/R_1$ e a atenuação máxima será $R_1/(R_1 + R_2)$. Se admitirmos que $(R_1 + R_2)/R_1 >> 1$, então o ganho (ou atenuação) terá uma diferença de 3 dB em relação a seu valor máximo quando $\omega = 1/R_2C_1$, o que pode ser percebido observando que

$$\left|H\left(j\frac{1}{R_2C_1}\right)\right|_{\alpha=1} = \frac{|R_1 + R_2 + jR_1|}{|R_1 + jR_1|} = \frac{\left|\frac{R_1 + R_2}{R_1} + j1\right|}{|1 + j1|} \approx \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{R_1 + R_2}{R_1}\right)$$

e

$$\left|H\left(j\frac{1}{R_2C_1}\right)\right|_{\alpha=0} = \frac{|R_1 + jR_1|}{|R_1 + R_2 + jR_1|} = \frac{|1 + j1|}{\left|\frac{R_1 + R_2}{R_1} + j1\right|} \approx \sqrt{2}\left(\frac{R_1}{R_1 + R_2}\right).$$

NOTA: Avalie o que entendeu dessa "Perspectiva prática" tentando resolver os problemas 15.59 e 15.60, apresentados no final do capítulo.

Resumo

- Filtros ativos consistem na combinação de amplificadores operacionais, resistores e capacitores. Eles podem ser configurados como filtros passa-baixas, passa-altas, passa-faixa e rejeita-faixa e superam muitas das desvantagens associadas aos filtros passivos.

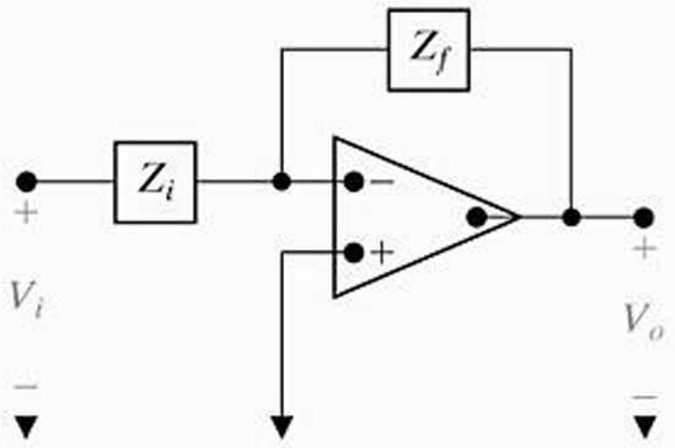
- Os valores dos componentes de um *filtro protótipo passa-baixas* são $R_1 = R_2 = 1\ \Omega$ e $C = 1$ F. Esse filtro tem um ganho unitário na faixa de passagem e uma freqüência de corte de 1 rad/s. Os valores dos componentes de um *filtro protótipo passa-altas* são os mesmos que os do passa-baixas e ele também tem um ganho unitário na faixa de passagem e uma freqüência de corte de 1 rad/s.
- Uma *mudança de escala de amplitude* pode ser usada para mudar valores de componentes sem alterar a resposta de freqüência de um circuito. Para um fator de escala de amplitude de k_a, os valores alterados de resistência, capacitância e indutância são
$$R' = k_aR,\ L' = k_aL \text{ e } C' = C/k_a.$$
- Uma *mudança de escala de freqüência* pode ser usada para deslocar a resposta de freqüência de um circuito para outra região de freqüência, sem alterar sua forma global. Para um fator de escala de freqüência k_f, os valores alterados de resistência, capacitância e indutância são
$$R' = R,\ L' = L/k_f \text{ e } C' = C/k_f.$$
- Uma mudança de escala de amplitude e de freqüência altera os valores dos componentes para
$$R' = k_aR,\ L' = (k_a/k_f)L \text{ e } C' = C/(k_ak_f).$$
- O projeto de filtros ativos passa-baixas e passa-altas pode começar com um circuito protótipo do filtro. Então, pode-se aplicar uma mudança de escala para deslocar a resposta de freqüência para a freqüência de corte desejada, usando componentes de valores disponíveis no comércio.
- Um filtro ativo passa-faixa de banda larga pode ser construído usando uma cascata de um filtro passa-baixas com a freqüência de corte superior à do filtro passa-faixa, um filtro passa-altas com a freqüência de corte inferior à do filtro passa-faixa e (opcionalmente) um amplificador inversor para obter ganho na faixa de passagem diferente da unidade. Filtros passa-faixa implementados dessa maneira devem ser filtros de banda larga ($\omega_{c2} >> \omega_{c1}$), de modo que os elementos da cascata possam ser especificados independentemente um do outro.
- Um filtro ativo rejeita-faixa de banda larga pode ser construído usando uma combinação em paralelo de um filtro passa-baixas com a freqüência de corte inferior à do filtro rejeita-faixa e um filtro passa-altas com a freqüência de corte superior à do filtro rejeita-faixa. Então, as saídas alimentam um amplificador somador, que pode produzir um ganho na faixa de passagem diferente da unidade. Filtros rejeita-faixa implementados desse modo devem ser filtros de banda larga ($\omega_{c2} >> \omega_{c1}$), de maneira que os circuitos dos filtros passa-baixas e passa-altas possam ser projetados independentemente um do outro.
- Filtros ativos de ordem superior têm múltiplos pólos em suas funções de transferência, o que resulta em uma transição mais abrupta da faixa de passagem para a faixa de rejeição e, por isso, em uma resposta de freqüência mais próxima da ideal.
- A função de transferência de um filtro Butterworth passa-baixas de ordem n com uma freqüência de corte igual a 1 rad/s pode ser determinada pela equação
$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + (-1)^n s^{2n}}$$
  - determinando-se as raízes do polinômio do denominador,
  - atribuindo-se as raízes do semiplano esquerdo,
  - escrevendo-se o denominador de $H(s)$ como um produto entre os fatores de primeira e segunda ordens.
- O problema fundamental no projeto de um filtro Butterworth é determinar a ordem do filtro. A especificação do filtro normalmente é feita em termos da largura da faixa de transição por meio das quantidades A_p, ω_p, A_s e ω_s. A partir dessas quantidades, calculamos o menor inteiro maior que a solução de qualquer das equações 15.42 ou 15.46.
- Uma cascata de filtros ativos passa-baixas de segunda ordem (Figura 15.21), com resistores de 1 Ω e capacitores de valores escolhidos de forma a gerar cada fator no polinômio de Butterworth, se constituirá em um filtro Butterworth passa-baixas de ordem par. Se adicionamos um filtro protótipo passa-baixas ativo, obteremos um filtro Butterworth passa-baixas de ordem ímpar.
- Uma cascata de filtros ativos passa-altas de segunda ordem (Figura 15.25), com capacitores de 1 F e valores de resistores escolhidos para produzir cada fator no polinômio de Butterworth, se constituirá em um filtro Butterworth passa-altas de ordem par. Se adicionamos um filtro protótipo passa-altas ativo, obteremos um filtro Butterworth passa-altas de ordem ímpar.
- Podem-se usar mudanças de escala de freqüência e amplitude para ambos os filtros Butterworth, passa-altas e passa-baixas, para deslocar a freqüência de corte de 1 rad/s e para usar, no projeto, componentes com valores realistas. Conectar amplificadores inversores à cascata de filtros permitirá a obtenção de um ganho na faixa de passagem diferente da unidade.
- Podem-se ligar em cascata filtros Butterworth passa-baixas e passa-altas para obter filtros Butterworth passa-faixa de qualquer ordem n. Podem-se combinar filtros Butterworth passa-baixas e passa-altas em paralelo e um amplificador somador para obter um filtro Butterworth rejeita-faixa de qualquer ordem n.
- Se for necessário um filtro passa-faixa ou rejeita-faixa de banda estreita com alto Q, a combinação em cascata ou em paralelo não funcionará. Em vez disso, os circuitos mostrados nas figuras 15.26 e 15.29 são usados. Normalmente, os valores de capacitores são escolhidos entre os disponíveis no comércio e as equações de projeto são usadas para especificar os valores dos resistores.

Problemas

Seção 15.1

15.1 Determine a função de transferência V_o/V_i para o circuito mostrado na Figura P15.1 se Z_f for a impedância equivalente do circuito de realimentação, Z_i, a impedância equivalente do circuito de entrada, e o amplificador operacional for ideal.

Figura P15.1



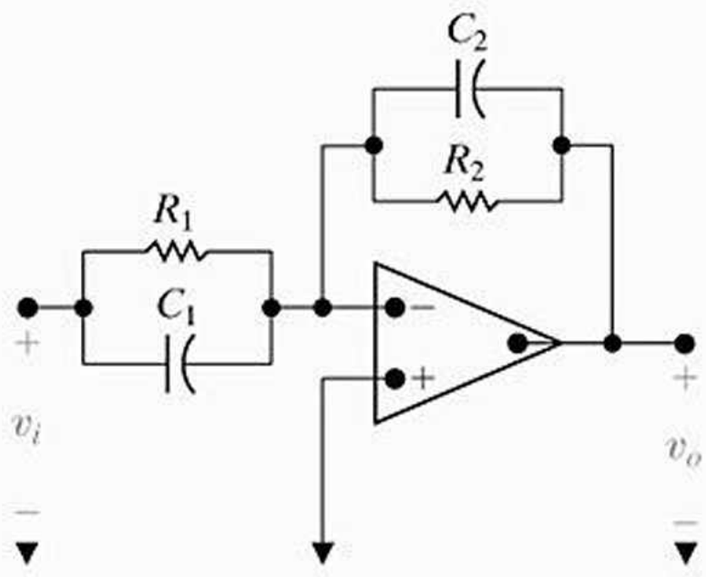
15.2 a) Use os resultados do Problema 15.1 para determinar a função de transferência do circuito mostrado na Figura P15.2.

b) Qual é o ganho do circuito quando $\omega \to 0$?

c) Qual é o ganho do circuito quando $\omega \to \infty$?

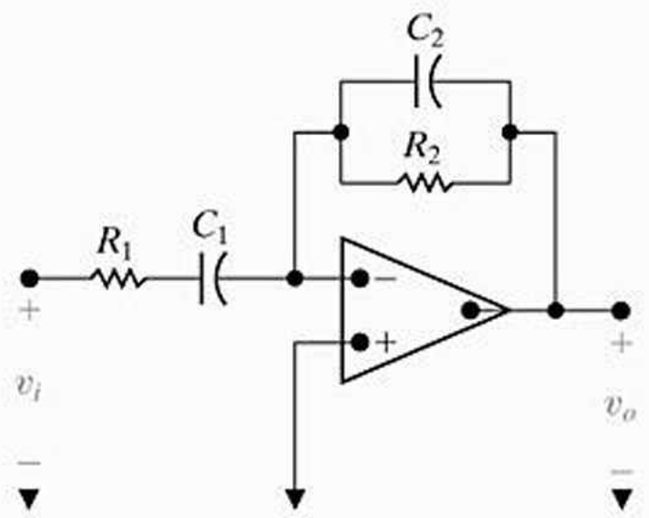
d) Suas respostas para (b) e (c) fazem sentido em termos do comportamento conhecido do circuito?

Figura P15.2



15.3 Repita o Problema 15.2, usando o circuito mostrado na Figura P15.3.

Figura P15.3



15.4* PROBLEMA DE PROJETO

a) Usando o circuito da Figura 15.1, projete um filtro passa-baixas com um ganho de 15 dB na faixa de passagem e uma freqüência de corte de 10 kHz. Admita que haja um capacitor disponível de 5 nF.

b) Desenhe o diagrama do circuito e identifique todos os componentes.

15.5 Projete um filtro ativo passa-baixas com uma freqüência de corte de 500 Hz e um ganho na faixa de passagem de 10, usando um capacitor de 50 nF.

a) Desenhe o circuito identificando os valores dos componentes e a tensão de saída.

b) Se o valor do resistor de realimentação for mudado, mas o valor do resistor de entrada permanecer inalterado, qual característica do filtro será mudada?

15.6 O sinal de entrada para o filtro passa-baixas projetado no Problema 15.5 é $200\cos\omega t$ mV.

a) Suponha que a fonte de alimentação tenha tensões de $\pm V_{cc}$. Qual é o menor valor de V_{cc} que ainda fará com que o amp op funcione em sua região linear?

b) Determine a tensão de saída quando $\omega = \omega_c$.

c) Determine a tensão de saída quando $\omega = 0{,}1\omega_0$.

d) Determine a tensão de saída quando $\omega = 10\omega_0$.

15.7* PROBLEMA DE PROJETO

a) Use o circuito da Figura 15.4 para projetar um filtro passa-altas com uma freqüência de corte de 40 kHz e um ganho na faixa de passagem de 12 dB. Use um capacitor de 680 pF no projeto.

b) Desenhe o diagrama do circuito do filtro e identifique todos os componentes.

15.8 Projete um filtro ativo passa-altas com uma freqüência de corte de 300 Hz e um ganho na faixa de passagem de 5 usando um capacitor de 100 nF.

a) Desenhe o circuito identificando os valores dos componentes e a tensão de saída.

b) Se o valor do resistor de realimentação no filtro for mudado, mas o valor do resistor de entrada permanecer inalterado, qual característica do filtro será mudada?

15.9 O sinal de entrada para o filtro passa-altas projetado no Problema 15.8 é $150\cos\omega t$ mV.

a) Suponha que as tensões da fonte de alimentação sejam $\pm V_{cc}$. Qual é o menor valor de V_{cc} que ainda fará com que o amp op funcione em sua região linear?

b) Determine a tensão de saída quando $\omega = \omega_c$.

c) Determine a tensão de saída quando $\omega = 0{,}1\omega_0$.

d) Determine a tensão de saída quando $\omega = 10\omega_0$.

Seção 15.2

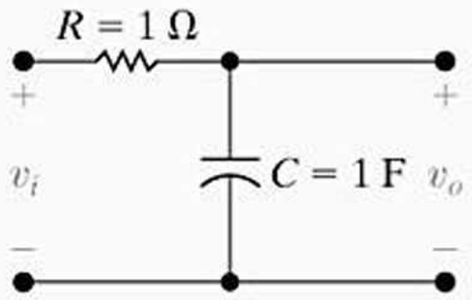
15.10 A função de transferência da tensão de qualquer dos filtros protótipos passa-baixas mostrados na Figura P15.10 é

$$H(s) = \frac{1}{s + 1}.$$

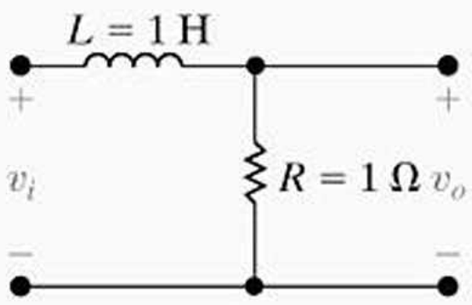
Mostre que, se houver uma mudança de escala de amplitude e freqüência em qualquer dos circuitos, a função de transferência passará a ser

$$H'(s) = \frac{1}{(s/k_f) + 1}.$$

Figura P15.10



(a)



(b)

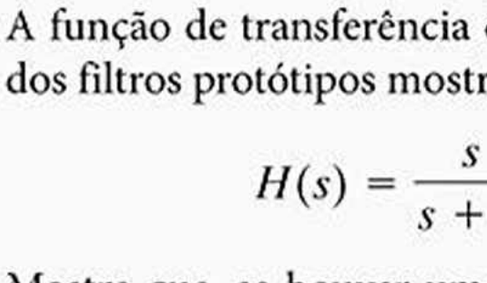
15.11 A função de transferência de tensão para qualquer dos filtros protótipos mostrados na Figura P15.11 é

$$H(s) = \frac{s}{s + 1}.$$

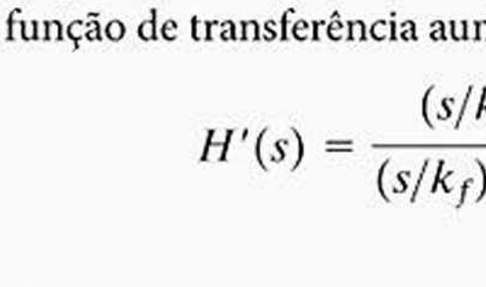
Mostre que, se houver uma mudança de escala de amplitude e freqüência em qualquer dos circuitos, a função de transferência aumentada será

$$H'(s) = \frac{(s/k_f)}{(s/k_f) + 1}.$$

Figura P15.11



(a)



(b)

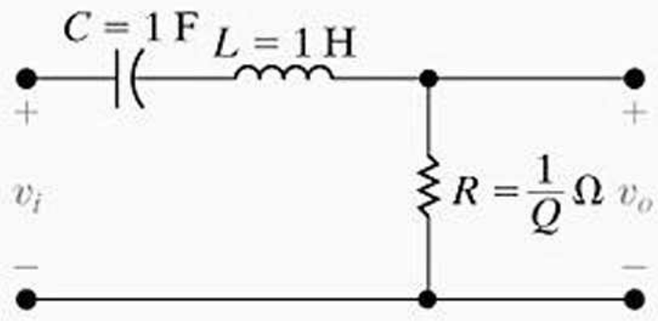
15.12 A função de transferência de tensão do filtro protótipo passa-faixa mostrado na Figura P15.12 é

$$H(s) = \frac{\left(\frac{1}{Q}\right)s}{s^2 + \left(\frac{1}{Q}\right)s + 1}.$$

Mostre que, se houver uma mudança de escala de amplitude e freqüência no circuito, a função de transferência aumentada será

$$H'(s) = \frac{\left(\frac{1}{Q}\right)\left(\frac{s}{k_f}\right)}{\left(\frac{s}{k_f}\right)^2 + \left(\frac{1}{Q}\right)\left(\frac{s}{k_f}\right) + 1}.$$

Figura P15.12



15.13* a) Especifique os valores dos componentes para o filtro protótipo passivo passa-faixa descrito no Problema 15.12 se o fator de qualidade do filtro for 25.

b) Especifique os valores dos componentes para o filtro passa-faixa descrito no Problema 15.12 se o fator de qualidade for 25; a freqüência central, ou de ressonância, for 100 krad/s; e a impedância na ressonância for 3,6 kΩ.

c) Desenhe um diagrama do circuito do filtro modificado e identifique todos os componentes.

15.14* Uma alternativa para o filtro protótipo passa-faixa ilustrado na Figura P15.12 é fazer $\omega_o = 1$ rad/s, $R = 1\ \Omega$ e $L = Q$ henrys.

a) Qual é o valor de C no filtro protótipo?

b) Qual é a função de transferência do filtro protótipo?

c) Use o circuito protótipo alternativo que acabamos de descrever para projetar um filtro passivo passa-faixa que tenha um fator de qualidade de 20, uma freqüência central de 50 krad/s e uma impedância de 5 kΩ na ressonância.

d) Desenhe o diagrama do filtro modificado e identifique todos os componentes.

e) Use os resultados obtidos no Problema 15.12 para escrever uma função de transferência do circuito modificado.

15.15 PROBLEMA DE PROJETO O filtro passivo passa-faixa ilustrado na Figura 14.22 tem dois circuitos protótipos. No primeiro, $\omega_o = 1$ rad/s, $C = 1$ F, $L = 1$ H e $R = Q$ ohms. No segundo, $\omega_o = 1$ rads, $R = 1\ \Omega$, $C = Q$ farads e $L = (1/Q)$ henrys.

a) Use um desses protótipos (você escolhe) para projetar um filtro passivo passa-faixa que tenha um fator de qualidade de 16 e uma freqüência central de 80 krad/s. O resistor R é de 80 kΩ.

b) Desenhe o diagrama do circuito do filtro modificado e identifique todos os componentes.

15.16 A função de transferência para o filtro rejeita-faixa mostrado na Figura 14.28(a) é

$$H(s) = \frac{s^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)}{s^2 + \left(\frac{R}{L}\right)s + \left(\frac{1}{LC}\right)}.$$

Mostre que, se houver uma mudança de escala de amplitude e freqüência, a função de transferência do circuito passará a se igual à função de transferência do circuito original com s substituído por (s/k_f), onde k_f é o fator de escala da freqüência.

15.17 Mostre que a observação feita no Problema 15.16 a respeito da função de transferência para o circuito da Figura 14.28(a) também se aplica ao circuito do filtro rejeita-faixa (o de baixo) na Figura 14.31.

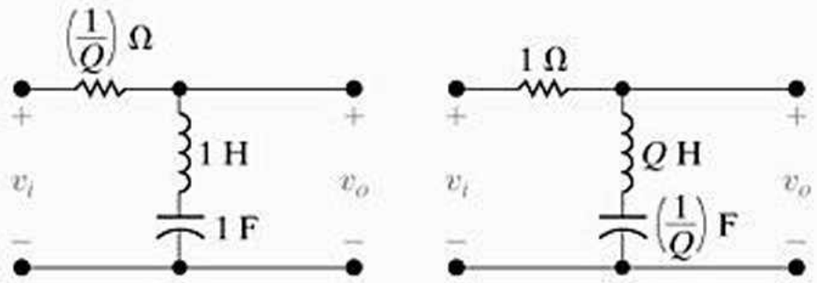
15.18 O filtro passivo rejeita-faixa ilustrado na Figura 14.28(a) tem dois circuitos protótipos mostrados na Figura P15.18.

a) Mostre que, para ambos os circuitos, a função de transferência é

$$H(s) = \frac{s^2 + 1}{s^2 + \left(\frac{1}{Q}\right)s + 1}.$$

b) Escreva a função de transferência para um filtro rejeita-faixa que tenha uma freqüência central de 50 krad/s e um fator de qualidade de 5.

Figura P15.18

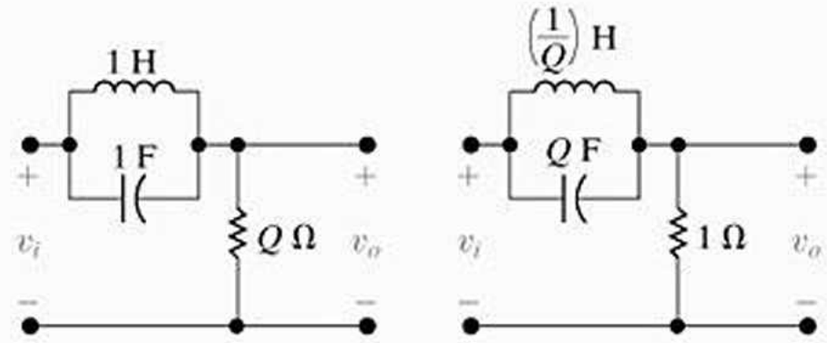


15.19 As duas versões do filtro protótipo passivo rejeita-faixa da Figura 14.31 (circuito de baixo) são mostradas na Figura P15.19(a) e (b).

Mostre que a função de transferência para qualquer das versões é

$$H(s) = \frac{s^2 + 1}{s^2 + \left(\frac{1}{Q}\right)s + 1}.$$

Figura P15.19



15.20 Faça uma mudança de escala no filtro passa-faixa do Problema 14.21 de modo que a freqüência central seja 250 kHz e o fator de qualidade seja 7,5, usando um capacitor de 10 nF. Determine os valores do resistor, do indutor e das duas freqüências de corte do filtro modificado.

15.21 Faça uma mudança de escala no filtro rejeita-faixa do Problema 14.33 para obter uma freqüência central de 500 krad/s, usando um indutor de 50 μH. Determine os valores do resistor, do capacitor e da largura de banda do filtro modificado.

15.22 É feita uma mudança de escala do circuito na Figura P13.26 de modo que o resistor de 4 kΩ seja substituído por um resistor de 20 kΩ e o capacitor de 5 nF seja substituído por um capacitor de 100 pF.

a) Qual será o valor modificado de L?

b) Qual é a expressão para i_o no circuito modificado?

15.23 Faça uma mudança de escala no circuito do Problema 13.29 de modo que o resistor de 10 Ω seja aumentado para 1 kΩ e a freqüência da tensão de saída seja multiplicada por um fator de 1.000. Determine $v_o(t)$.

15.24 a) Mostre que, se houver uma mudança de escala de amplitude e freqüência no circuito do filtro passa-baixas ilustrado na Figura 15.1, a função de transferência do circuito será a mesma da Equação 15.1 com substituição de s por s/k_f, onde k_f é o fator de escala da freqüência.

b) Na versão do filtro protótipo passa-baixas da Figura 15.1, $\omega_c = 1$ rad/s, $C = 1$ F, $R_2 = 1\ \Omega$ e $R_1 = 1/K$ ohms. Qual é a função de transferência do protótipo?

c) Usando o resultado obtido em (a), determine a função de transferência do filtro, em função dos fatores de escala.

15.25 a) Mostre que, se houver uma mudança de escala de amplitude e freqüência no filtro passa-altas ilustrado na Figura 15.4, a função de transferência será a mesma da Equação 15.4 com a substituição de s por s/k_f, onde k_f é o fator de escala da freqüência.

b) Na versão do filtro protótipo passa-altas da Figura 15.4, $\omega_c = 1$ rad/s, $R_1 = 1\ \Omega$, $C = 1$ F e $R_2 = K$ ohms. Qual é a função de transferência do circuito?

c) Usando o resultado de (a), determine a função de transferência do filtro, em função dos fatores de escala.

Seção 15.3

15.26 PROBLEMA DE PROJETO PSPICE

a) Usando capacitores de 20 nF, projete um filtro ativo passa-faixa de banda larga de primeira ordem que tenha uma freqüência de corte inferior de 2.000 Hz, uma freqüência de corte superior de 8.000 Hz e um ganho na faixa de passagem de 10 dB. Use filtros protótipos passa-baixas e passa-altas no projeto (veja os problemas 15.24 e 15.25).

b) Escreva a função de transferência do filtro.

c) Use a função de transferência do item (b) para determinar $H(j\omega_o)$, onde ω_o é a freqüência central do filtro.

d) Qual é o ganho (em decibéis) do filtro em ω_o?

e) Usando um programa de computador de sua escolha, construa um diagrama de Bode de amplitude do filtro.

15.27 PROBLEMA DE PROJETO PSPICE

a) Usando capacitores de 5 nF, projete um filtro ativo passa-faixa de banda larga de primeira ordem que tenha uma freqüência de corte inferior de 1.000 Hz, uma freqüência de corte superior de 5.000 Hz e um ganho na faixa de passagem de 10 dB. Use os filtros protótipos apresentados nos problemas 15.24 e 15.25.

b) Desenhe o diagrama de circuito do filtro e identifique todos os componentes.

c) Qual é a função de transferência do filtro aumentado?

d) Avalie a função de transferência determinada em (c) na freqüência central do filtro.

e) Qual é o ganho (em decibéis) na freqüência central?

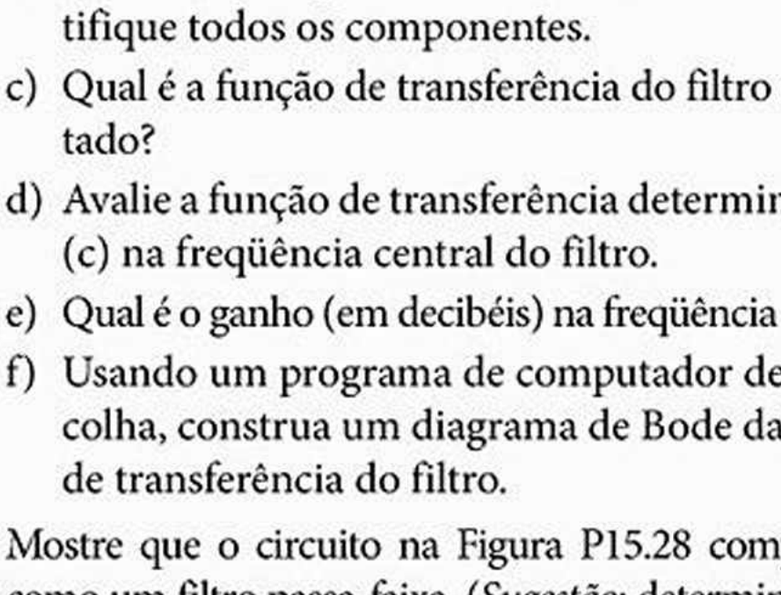
f) Usando um programa de computador de sua escolha, construa um diagrama de Bode da função de transferência do filtro.

15.28 Mostre que o circuito na Figura P15.28 comporta-se como um filtro passa-faixa. (*Sugestão*: determine a função de transferência para esse circuito e mostre que ela tem a mesma forma que a função de transferência de um filtro passa-faixa. Use o resultado do Problema 15.1.)

a) Determine a freqüência central, a largura de faixa e o ganho para esse filtro passa-faixa.

b) Determine as freqüências de corte e o fator de qualidade desse filtro passa-faixa.

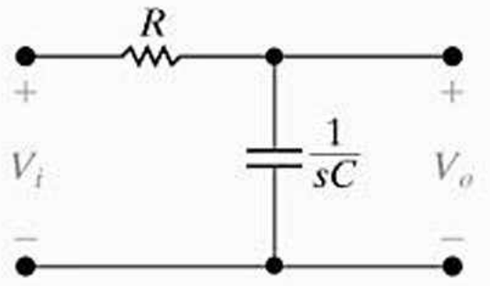
Figura P15.28



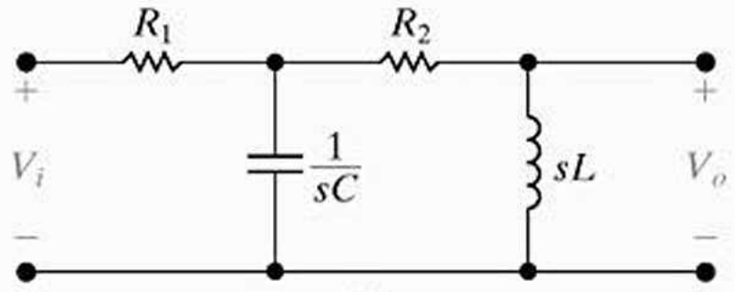
15.29 Para circuitos que consistem em resistores, capacitores, indutores e amp ops, $|H(j\omega)|^2$ envolve somente potências pares de ω. Para ilustrar isso, calcule $|H(j\omega)|^2$ para os três circuitos na Figura P15.29, em que

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i}.$$

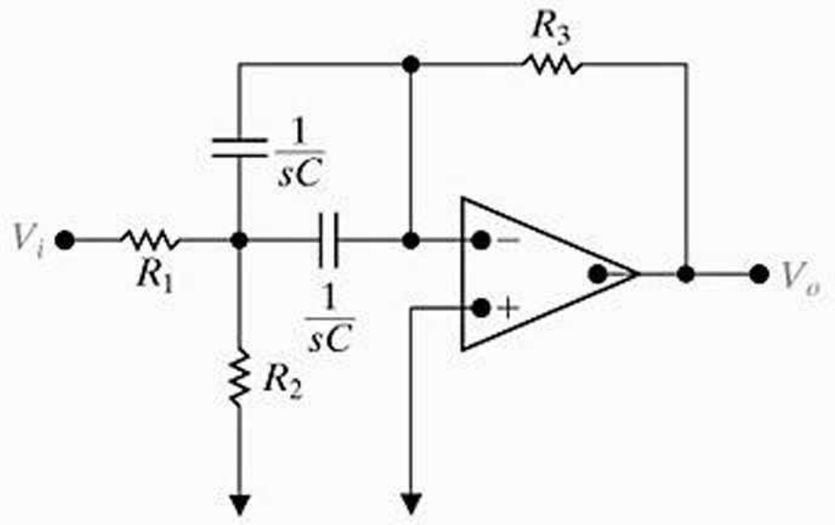
Figura P15.29



(a)



(b)



(c)

15.30* Projete um filtro passa-faixa de ganho unitário usando uma ligação em cascata para obter uma freqüência central de 50 krad/s e uma largura de faixa de 300 krad/s. Use capacitores de 150 nF. Especifique f_{c1}, f_{c2}, R_B e R_A.

15.31* Projete um filtro rejeita-faixa em paralelo que tenha uma freqüência central de 5 kHz, uma largura de faixa de 30 kHz e um ganho na faixa de passagem de 4. Use capacitores de 250 nF e especifique todos os valores de resistores.

Seção 15.4

15.32 A finalidade deste problema é ilustrar a vantagem de um filtro Butterworth passa-baixas de n-ésima ordem em relação a uma cascata de n seções passa-baixas idênticas mediante o cálculo da inclinação (em decibéis por década) de cada gráfico de amplitude na freqüência de corte ω_c. Para facilitar o cálculo, represente a amplitude (em decibéis) por y e faça $x = \log_{10}\omega$. Então, calcule dy/dx em ω_c para cada curva.

a) Mostre que, na freqüência de corte ($\omega_c = 1$ rad/s) de um filtro protótipo Butterworth passa-baixas de n-ésima ordem,

$$\frac{dy}{dx} = -10n \text{ dB/dec.}$$

b) Mostre que, para uma cascata de n seções idênticas de filtros protótipos passa-baixas, a inclinação em ω_c é

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-20n(2^{1/n} - 1)}{2^{1/n}} \text{ dB/dec.}$$

c) Calcule dy/dx para cada tipo de filtro para $n = 1$, 2, 3, 4 e ∞.

d) Discuta o significado dos resultados obtidos no item (c).

15.33* a) Determine a ordem de um filtro Butterworth passa-baixas que tem uma freqüência de corte de 1.000 Hz e um ganho de, no mínimo, – 40 dB em 4.000 Hz.

b) Qual é o ganho real, em decibéis, em 4.000 Hz?

15.34 A função de transferência do circuito na Figura 15.21 é dada pela Equação 15.34. Mostre que, se houver uma mudança de escala de amplitude e freqüência no circuito da Figura 15.21, a função de transferência do circuito será

$$H'(s) = \frac{\frac{1}{R^2C_1C_2}}{\left(\frac{s}{k_f}\right)^2 + \frac{2}{RC_1}\left(\frac{s}{k_f}\right) + \frac{1}{R^2C_1C_2}}.$$

15.35 a) Escreva a função de transferência para o filtro protótipo Butterworth passa-baixas obtido no Problema 15.33(a).

b) Escreva a função de transferência para o filtro do item (a) quando submetido a uma mudança de escala de amplitude e freqüência (veja o Problema 15.34).

c) Verifique a expressão do item (b) usando-a para calcular o ganho (em decibéis) em 4.000 Hz. Compare seu resultado com o encontrado no Problema 15.33(b).

15.36* PROBLEMA DE PROJETO a) Usando resistores de 2 kΩ e amp op ideais, projete o filtro Butterworth passa-baixas especificado no Problema 15.33. O ganho é unitário na faixa de passagem.

b) Faça o diagrama do circuito, identificando todos os valores dos componentes.

15.37* PROBLEMA DE PROJETO a) Usando capacitores de 25 nF e amp op ideais, projete um filtro Butterworth passa-altas de ganho unitário na faixa de passagem com uma freqüência de corte de 5 kHz e um ganho de, no mínimo, –25 dB em 1 kHz.

b) Desenhe o diagrama de circuito e identifique todos os valores de componentes.

15.38 Verifique as expressões da Tabela 15.1 para $n = 5$ e $n = 6$.

15.39 A função de transferência do circuito na Figura 15.25 é dada pela Equação 15.47. Mostre que, se houver uma mudança de escala de amplitude e freqüência, a função de transferência será

$$H'(s) = \frac{\left(\frac{s}{k_f}\right)^2}{\left(\frac{s}{k_f}\right)^2 + \frac{2}{R_2C}\left(\frac{s}{k_f}\right) + \frac{1}{R_1R_2C^2}}.$$

Daí, a função de transferência de um circuito modificado é obtida da função de transferência do circuito original pela simples substituição de s na função de transferência original por s/k_f, onde k_f é o fator de escala da freqüência.

15.40 PROBLEMA DE PROJETO a) Usando resistores de 3 kΩ e amp ops ideais, projete um filtro Butterworth passa-baixas de ganho unitário que tenha uma freqüência de corte de 20 kHz e cuja amplitude caia, pelo menos, 25 dB em 100 kHz.

b) Desenhe o diagrama de circuito e identifique todos os componentes.

15.41 O filtro passa-altas projetado no Problema 15.37 é colocado em cascata com o filtro passa-baixas projetado no Problema 15.40.

a) Descreva o tipo de filtro formado por essa conexão.

b) Especifique as freqüências de corte, a freqüência média e o fator de qualidade do filtro.

c) Use os resultados dos problemas 15.33 e 15.38 para calcular a função de transferência do filtro, em função dos fatores de escala.

d) Verifique o cálculo do item (c) usando-o para determinar $H(j\omega_o)$, onde ω_o é a freqüência média do filtro.

15.42 PROBLEMA DE PROJETO a) Use capacitores de 300 pF no circuito da Figura 15.26 para projetar um filtro passa-faixa com um fator de qualidade de 20, uma freqüência central de 8 kHz e um ganho na faixa de passagem de 40 dB.

b) Desenhe o diagrama do circuito e identifique todos os componentes.

15.43 Mostre que, se $\omega_o = 1$ rad/s e $C = 1$ F na Figura 15.26, o valores de R_1, R_2 e R_3 do filtro protótipo serão

$$R_1 = \frac{Q}{K},$$

$$R_2 = \frac{Q}{2Q^2 - K},$$

$$R_3 = 2Q.$$

15.44 PROBLEMA DE PROJETO a) Projete um filtro Butterworth passa-faixa de banda larga com uma freqüência de corte inferior de 1.000 Hz e uma freqüência de corte superior de 8.000 Hz. O ganho na faixa de passagem do filtro

é 10 dB. O ganho deve baixar, no mínimo, 20 dB em 400 Hz e 20 kHz. Use capacitores de 50 nF no circuito passa-altas e resistores de 5 kΩ no circuito passa-baixas.

b) Desenhe o diagrama de circuito e identifique todos os componentes.

15.45 a) Deduza a expressão para a função de transferência, em função dos fatores de escala, para o filtro projetado no Problema 15.44.

b) Usando a expressão deduzida no item (a), determine o ganho (em decibéis) em 500 Hz e 5.000 Hz.

c) Os valores obtidos no item (b) satisfazem as especificações de filtragem dadas no Problema 15.44?

15.46 Deduza a função de transferência para um filtro protótipo Butterworth passa-altas de quinta ordem escrevendo, primeiro, a função de transferência para um filtro protótipo Butterworth passa-baixas de quinta ordem e, então, substituindo s por $1/s$ na expressão do filtro passa-baixas.

15.47 O filtro Butterworth de quinta ordem do Problema 15.46 é usado em um sistema em que a freqüência de corte é 10 krad/s.

a) Qual é a função de transferência para o filtro, em função dos fatores de escala?

b) Teste a expressão determinada calculando o ganho (em decibéis) na freqüência de corte.

15.48 PROBLEMA DE PROJETO A finalidade deste problema é orientá-lo na análise necessária para estabelecer um procedimento de projeto para a determinação dos componentes de um filtro. O circuito a ser analisado é mostrado na Figura P15.48.

a) Analise o circuito do ponto de vista qualitativo e convença-se de que o circuito é um filtro passa-baixas com um ganho na faixa de passagem R_2/R_1.

b) Comprove sua análise qualitativa deduzindo a função de transferência V_o/V_i. (*Sugestão:* ao deduzir a função de transferência, represente os resistores por suas condutâncias equivalentes, isto é, $G_1 = 1/R_1$ e assim por diante.) Para usar a Tabela 15.1, coloque a função de transferência na forma

$$H(s) = \frac{-Kb_o}{s^2 + b_1 s + b_o}.$$

c) Agora, observe que temos cinco componentes de circuito – R_1, R_2, R_3, C_1 e C_2 – e três restrições aplicadas à função de transferência – K, b_1 e b_o. À primeira vista, parece que temos duas opções livres entre os cinco componentes. Todavia, quando investigamos as relações entre eles e as restrições à função de transferência vemos que, se C_2 for escolhido, há um limite superior para C_1 acima do qual não é possível obter um valor para $R_2(G_2)$. Com isso em mente, mostre que, se $C_2 = 1$ F, as três condutâncias serão dadas pelas expressões

$$G_1 = KG_2;$$

$$G_3 = \left(\frac{b_o}{G_2}\right)C_1;$$

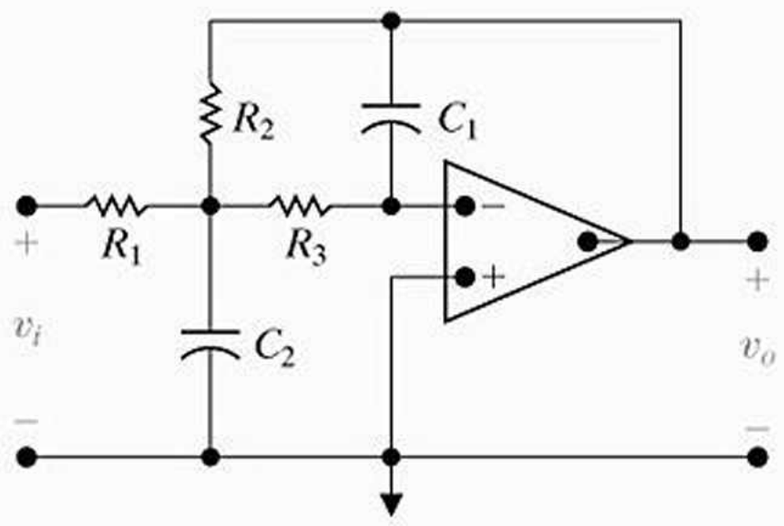
$$G_2 = \frac{b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4b_o(1 + K)C_1}}{2(1 + K)}.$$

Para G_2 ser realizável,

$$C_1 \leq \frac{b_1^2}{4b_o(1 + K)}.$$

d) Com base nos resultados obtidos em (c), esboce o procedimento de projeto para selecionar os componentes do circuito, uma vez conhecidos K, b_o e b_1.

Figura P15.48



15.49 PROBLEMA DE PROJETO Suponha que o circuito analisado no Problema 15.48 seja parte de um filtro Butterworth passa-baixas de terceira ordem com um ganho na faixa de passagem de 8.

a) Se $C_2 = 1$ F na parte do filtro que corresponde à seção de segunda ordem, qual é o limite superior para C_1?

b) Se for escolhido o valor limite de C_1, quais serão os valores prototípicos de R_1, R_2 e R_3?

c) Se a freqüência de corte do filtro for 50 kHz e se for escolhido o valor de 250 pF para C_2, calcule os novos valores de C_1, R_1, R_2 e R_3.

d) Especifique os novos valores dos resistores e do capacitor na seção de primeira ordem do filtro.

e) Faça o diagrama do circuito e identifique todos os valores de componentes no diagrama.

15.50 PROBLEMA DE PROJETO Permute os *R*s e *C*s no circuito da Figura P15.48; isto é, substitua R_1 por C_1, R_2 por C_2, R_3 por C_3, C_1 por R_1 e C_2 por R_2.

a) Descreva o tipo de filtro implementado como resultado da permuta.

b) Confirme o tipo de filtro descrito em (a) deduzindo sua função de transferência V_o/V_i. Escreva a função de transferência na forma que a torne compatível com a Tabela 15.1.

c) Faça $C_2 = C_3 = 1$ F e calcule as expressões para C_1, R_1 e R_2 em termos de K, b_1 e b_o. (Veja o Problema 15.48 para a definição de b_1 e b_o.)

d) Suponha que o filtro descrito em (a) seja usado no mesmo tipo de filtro Butterworth de terceira ordem que tem um ganho na faixa de passagem de 8. Com $C_2 = C_3 = 1$ F, calcule os valores de C_1, R_1 e R_2 na seção de segunda ordem do filtro.

15.51 PROBLEMA DE PROJETO a) Use os circuitos analisados nos problemas 15.48 e 15.50 para implementar um filtro rejeita-faixa de banda larga que tenha um ganho na faixa de passagem de 20 dB, uma freqüência de corte inferior de 800 Hz, uma freqüência de corte superior de 7.200 Hz e uma atenuação de, no mínimo, 20 dB em 1.500 Hz e em 13,5 kHz. Use capacitores de 50 nF sempre que possível.

b) Desenhe o diagrama do circuito e identifique todos os componentes.

15.52 a) Deduza a função de transferência para o filtro rejeita-faixa descrito no Problema 15.51.

b) Use a função de transferência do item (a) para determinar a atenuação (em decibéis) na freqüência central do filtro.

15.53 PROBLEMA DE PROJETO A finalidade deste problema é desenvolver as equações de projeto para o circuito na Figura P15.53. (Veja o Problema 15.48 para sugestões sobre o desenvolvimento de equações de projeto.)

a) Com base em uma análise qualitativa, descreva o tipo de filtro implementado pelo circuito.

b) Verifique a conclusão a que você chegou em (a) derivando a função de transferência V_o/V_i. Escreva a função de transferência na forma que a torne compatível com a Tabela 15.1.

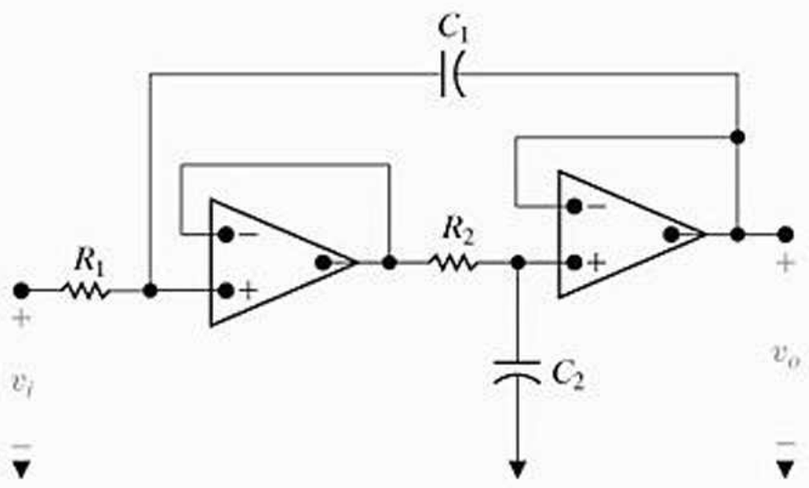
c) Quantas escolhas livres há na seleção dos componentes do circuito?

d) Calcule as expressões para as condutâncias $G_1 = 1/R_1$ e $G_2 = 1/R_2$ em termos de C_1, C_2 e os coeficientes b_o e b_1. (Veja o Problema 15.48 para a definição de b_o e b_1.)

e) Há restrições para C_1 ou C_2?

f) Suponha que o circuito na Figura P15.53 seja usado para projetar um filtro Butterworth passa-baixas de quarta ordem de ganho unitário. Especifique os valores prototípicos de R_1 e R_2 do filtro protótipo se, em cada seção de segunda ordem, forem usados capacitores de 1 F.

Figura P15.53



15.54 PROBLEMA DE PROJETO O filtro Butterworth passa-baixas de quarta ordem de ganho unitário do Problema 15.53 é usado em um sistema em que a freqüência de corte é 25 kHz. O filtro tem capacitores de 750 pF.

a) Especifique os valores numéricos de R_1 e R_2 em cada seção do filtro.

b) Desenhe o diagrama do circuito e identifique todos os componentes.

15.55 PROBLEMA DE PROJETO Permute os *R*s e *C*s no circuito da Figura P15.53, isto é, substitua R_1 por C_1, R_2 por C_2 e vice-versa.

a) Analise o circuito do ponto de vista qualitativo e preveja o tipo de filtro implementado pelo circuito.

b) Verifique a conclusão a que chegou em (a) deduzindo a função de transferência V_o/V_i. Escreva a função de transferência de uma forma que a torne compatível com a Tabela 15.1.

c) Quantas escolhas livres há na seleção dos componentes do circuito?

d) Determine R_1 e R_2 em função de b_o, b_1, C_1 e C_2.

e) Há alguma restrição para C_1 e C_2?

f) Suponha que o circuito seja usado em um filtro Butterworth passa-baixas de terceira ordem do tipo determinado em (a). Especifique os valores de R_1 e R_2 na seção de segunda ordem do filtro protótipo se $C_1 = C_2 = 1$ F.

15.56 PROBLEMA DE PROJETO a) O circuito do Problema 15.55 é usado em um filtro Butterworth passa-altas de terceira ordem cuja freqüência de corte é de 40 kHz. Especifique os valores de R_1 e R_2 se houver capacitores de 360 pF disponíveis para construir o filtro.

b) Especifique os valores de resistência e capacitância na seção de primeira ordem do filtro.

c) Desenhe o diagrama do circuito e identifique todos os componentes.

d) Calcule a função de transferência do filtro.

e) Use a função de transferência do item (d) para determinar o ganho na freqüência de corte em dB.

Seção 15.5

15.57 a) Mostre que a função de transferência de um filtro protótipo rejeita-faixa é

$$H(s) = \frac{s^2 + 1}{s^2 + (1/Q)s + 1}.$$

b) Use o resultado do item (a) para determinar a função de transferência do filtro projetado no Exemplo 15.13.

15.58* PROBLEMA DE PROJETO a) Usando o circuito mostrado na Figura 15.29, projete um filtro rejeita-faixa de banda estreita que tenha uma freqüência central de 4 kHz e um fator de qualidade de 15. Use no projeto $C = 150$ nF.

b) Desenhe o diagrama do circuito e identifique todos os valores dos componentes no diagrama.

c) Qual é a função de transferência do filtro?

Seções 15.1–15.5

15.59* PERSPECTIVA PRÁTICA PROBLEMA DE PROJETO Usando o circuito da Figura 15.32(a), projete um circuito de controle de volume de ganho máximo de 20 dB e ganho de 17 dB em 40 Hz. Use um resistor de 11,1 kΩ e um potenciômetro de 100 kΩ. Teste seu projeto calculando o ganho máximo em $\omega = 0$ e o ganho em $\omega = 1/R_2C_1$ e usando os valores selecionados de R_1, R_2 e C_1.

15.60* PERSPECTIVA PRÁTICA PROBLEMA DE PROJETO Use o circuito da Figura 15.32(a) para projetar um circuito de controle de volume de graves que tenha um ganho máximo de 13,98 dB e que caia 3 dB em 50 Hz.

15.61 PERSPECTIVA PRÁTICA Desenhe o gráfico do ganho máximo, em decibéis, em função de α quando $\omega = 0$ para o circuito projetado no Problema 15.59. Faça α variar de 0 a 1, em incrementos de 0,1.

15.62 PERSPECTIVA PRÁTICA a) Mostre que os circuitos da Figura P15.62(a) e (b) são equivalentes.

b) Mostre que os pontos identificados como x e y na Figura P15.62(b) estão sempre no mesmo potencial.

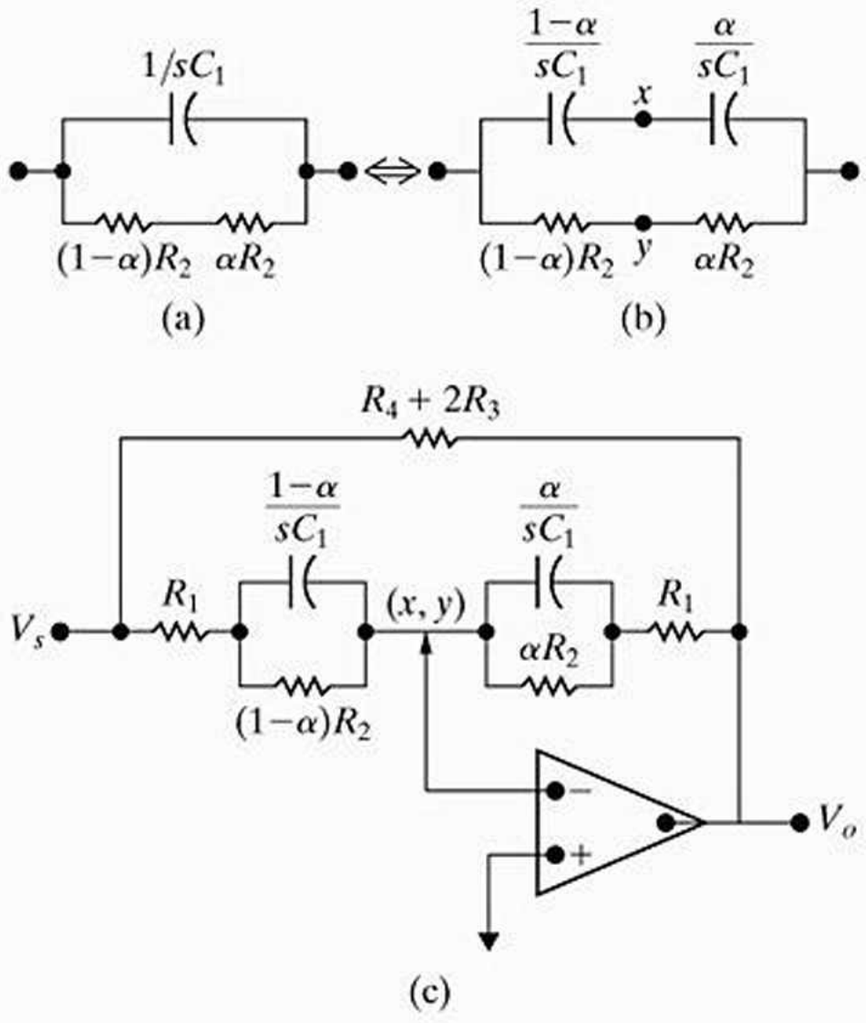
c) Usando as informações de (a) e (b), mostre que o circuito da Figura 15.33 pode ser desenhado como mostra a Figura P15.62(c).

d) Mostre que o circuito da Figura P15.62(c) está na forma do circuito da Figura 15.2, onde

$$Z_i = \frac{R_1 + (1-\alpha)R_2 + R_1R_2C_1s}{1 + R_2C_1s},$$

$$Z_f = \frac{R_1 + \alpha R_2 + R_1R_2C_1s}{1 + R_2C_1s}.$$

Figura P15.62



15.63 PERSPECTIVA PRÁTICA Um gerente de projetos de engenharia recebeu uma proposta de um subordinado que afirma que o circuito mostrado na Figura P15.63 poderia ser usado como um circuito de controle de volume de agudos se $R_4 >> R_1 + R_3 + 2R_2$. O subordinado afirma ainda que a função de transferência de tensão para o circuito é

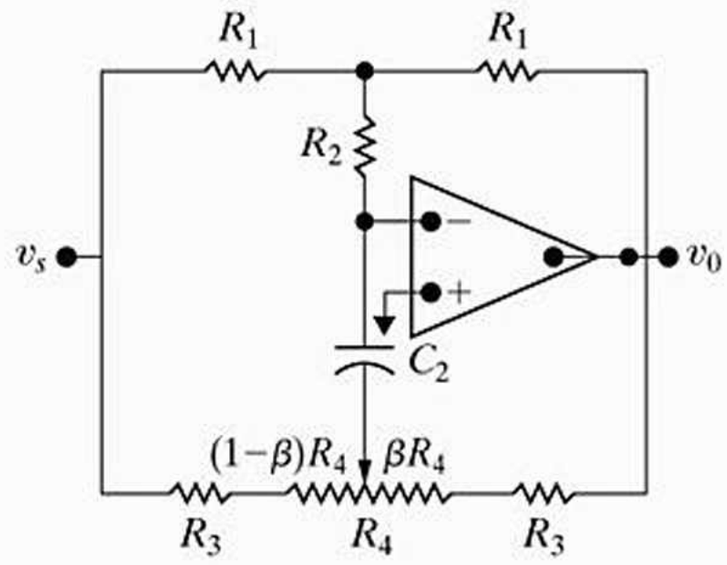
$$H(s) = \frac{V_o}{V_s}$$

$$= \frac{-\{(2R_3 + R_4) + [(1-\beta)R_4 + R_o](\beta R_4 + R_3)C_2s\}}{\{(2R_3 + R_4) + [(1-\beta)R_4 + R_3](\beta R_4 + R_o)C_2s\}}$$

onde $R_o = R_1 + R_3 + 2R_2$. Felizmente, o engenheiro projetista dispõe de um estagiário estudante de engenharia elétrica e, por conseguinte, pede a ele que verifique a proposta do subordinado.

O estudante deve verificar o comportamento da função de transferência quando $\omega \to 0$; quando $\omega \to \infty$; e o comportamento quando $\omega = \infty$ e β varia entre 0 e 1. Com base nos testes que realizou, você acha que o circuito poderia ser usado como um controle de volume de agudos? Explique.

Figura P15.63



15.64 PERSPECTIVA PRÁTICA No circuito da Figura P15.63, os valores dos componentes são $R_1 = R_2 = 20\ \text{k}\Omega$, $R_3 = 5{,}9\ \text{k}\Omega$, $R_4 = 500\ \text{k}\Omega$ e $C_2 = 2{,}7\ \text{nF}$.

a) Calcule a amplificação máxima em decibéis.

b) Calcule a atenuação máxima em decibéis.

c) R_4 é significativamente maior do que R_o?

d) Quando $\beta = 1$, qual é a amplificação, em decibéis, quando $\omega = 1/R_3C_2$?

e) Quando $\beta = 0$, qual é a atenuação, em decibéis, quando $\omega = 1/R_3C_2$?

f) Com base nos resultados obtidos em (d) e (e), qual é o significado da freqüência $1/R_3C_2$ quando $R_4 >> R_0$?

15.65 PERSPECTIVA PRÁTICA Usando os valores dos componentes dados no Problema 15.64, faça o gráfico do ganho máximo em decibéis em função de β quando $\omega = 0$. Faça β variar de 0 a 1 em incrementos de 0,1.

CAPÍTULO

16

Séries de Fourier

SUMÁRIO DO CAPÍTULO

16.1 **Séries de Fourier: uma visão geral**

16.2 **Coeficientes de Fourier**

16.3 **Efeito da simetria sobre os coeficientes de Fourier**

16.4 **Forma trigonométrica alternativa da série de Fourier**

16.5 **Exemplo de aplicação**

16.6 **Cálculos de potência média de funções periódicas**

16.7 **Valor eficaz de uma função periódica**

16.8 **Forma exponencial da série de Fourier**

16.9 **Espectros de amplitude e de fase**

✔ OBJETIVOS DO CAPÍTULO

1. Saber calcular, a partir da definição, a forma trigonométrica dos coeficientes de Fourier de uma onda periódica, usando as simplificações possíveis quando a forma de onda exibir um ou mais tipos de simetria.
2. Saber analisar a resposta de um circuito a uma forma de onda periódica usando coeficientes de Fourier e o princípio de superposição.
3. Saber estimar a potência média fornecida a um resistor usando poucos coeficientes de Fourier.
4. Saber calcular a forma exponencial dos coeficientes de Fourier para uma onda periódica e usá-los para traçar gráficos de espectro de amplitude e fase para essa onda.

Nos capítulos anteriores, dedicamos um espaço considerável à análise do regime permanente senoidal. A razão do interesse pela função senoidal é que ela nos permite determinar a resposta de regime permanente a funções periódicas não senoidais. A *função periódica* é uma função que se repete a cada T segundos. Por exemplo, a onda triangular ilustrada na Figura 16.1 é não senoidal, porém periódica.

Uma função periódica é aquela que satisfaz a relação

$$f(t) = f(t \pm nT), \tag{16.1}$$

onde n é um número inteiro (1, 2, 3, . . .) e T é o período. A função mostrada na Figura 16.1 é periódica, pois

$$f(t_0) = f(t_0 - T) = f(t_0 + T) = f(t_0 + 2T) = \ldots$$

para qualquer valor de t_0 escolhido arbitrariamente. Observe que T é o menor intervalo de tempo no qual uma função periódica pode ser deslocada (em ambos os sentidos) para produzir uma função idêntica a si mesma.

Por que o interesse em funções periódicas? Uma razão é que muitas fontes reais de energia elétrica geram formas de onda periódicas. Por exemplo, retificadores elétricos, sem filtro de saída, alimentados por uma fonte de tensão senoidal produzem tensões senoidais retificadas que não são ondas senoidais, embora periódicas. As Figuras 16.2(a) e (b) mostram as formas de onda de tensão na saída de retificadores de onda completa e de meia-onda, respectivamente.

O gerador de varredura utilizado para controlar o feixe de elétrons de um osciloscópio de raios catódicos produz uma onda triangular periódica como a da Figura 16.3.

Osciladores eletrônicos, que são usados para testar equipamentos em laboratórios e oficinas, são projetados para produzir formas de onda periódicas não senoidais. Geradores de função, que são capazes de produzir ondas quadradas, ondas triangulares e de pulso retangular, são encontrados na maioria dos laboratórios. A Figura 16.4 ilustra formas de onda típicas.

Outro problema prático que estimula o interesse em funções periódicas é que geradores de energia, embora projetados para produzir uma forma de onda senoidal, não conseguem produzir uma senóide perfeita. Contudo, a onda senoidal distorcida é periódica. Naturalmente, os engenheiros têm interesse em averiguar as conseqüências de excitar sistemas de potência com uma tensão de forma ligeiramente diferente da senoidal.

O interesse em funções periódicas também surge da observação geral de que qualquer não linearidade introduzida em um circuito linear faz aparecer nele uma função periódica não senoidal. O circuito retificador a que aludimos antes é um exemplo desse fenômeno. A saturação magnética, que ocorre em máquinas e também em transformadores, é outro exemplo de uma não linearidade que gera uma função periódica não senoidal. Circuitos limitadores que usam a saturação de transistores para limitar corrente ou tensão são outro exemplo.

Além disso, funções periódicas não senoidais são importantes em outros ramos da engenharia. Problemas que envolvem vibração mecânica, escoamento de fluidos e transmissão de calor fazem uso de funções periódicas. Na verdade, foram o estudo e a análise da transmissão de calor em uma barra de metal que levaram o matemático francês Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830) à representação de uma função periódica por meio de uma série trigonométrica. Essa série recebe seu nome e é o ponto de partida para determinar a resposta de regime permanente de circuitos submetidos a excitações periódicas não senoidais.

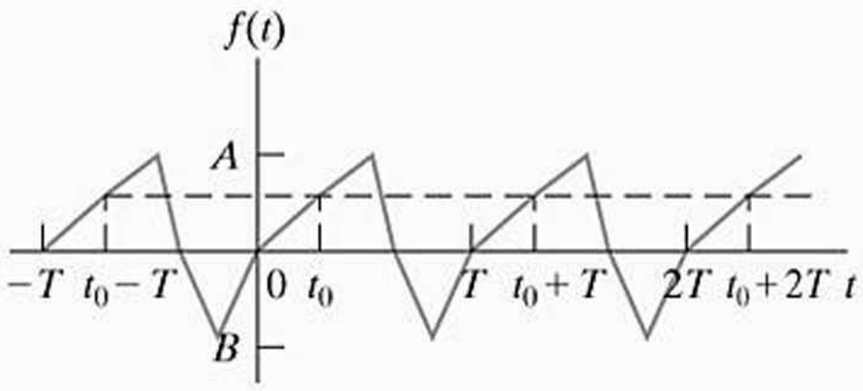


Figura 16.1 ▲ Onda periódica.

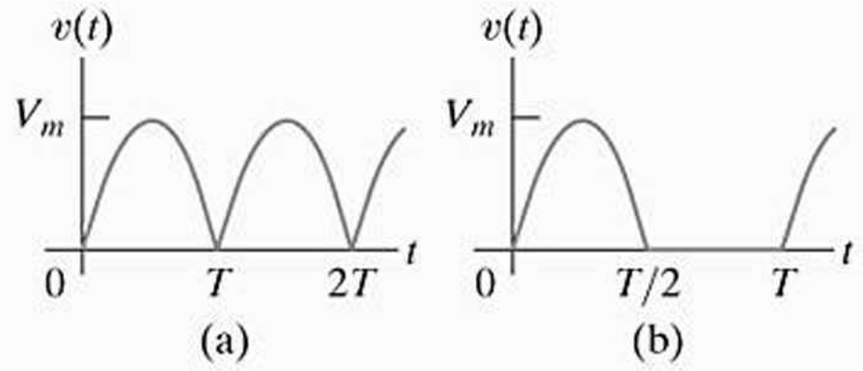


Figura 16.2 ▲ Formas de onda na saída de um retificador. (a) Retificação de onda completa. (b) Retificação de meia-onda.

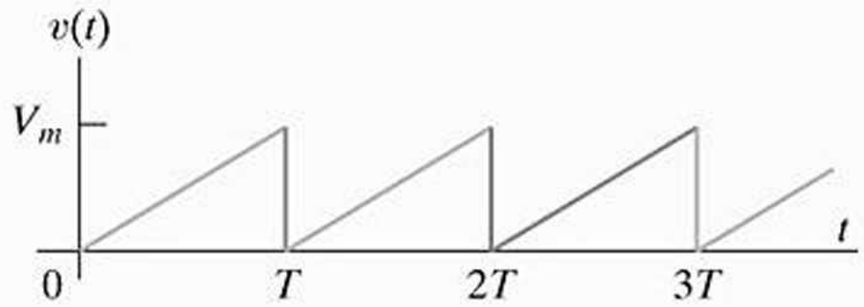
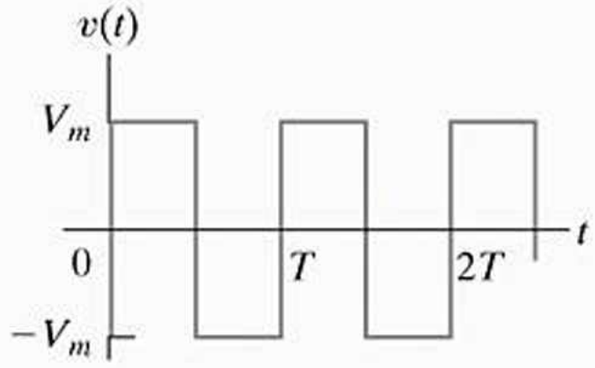
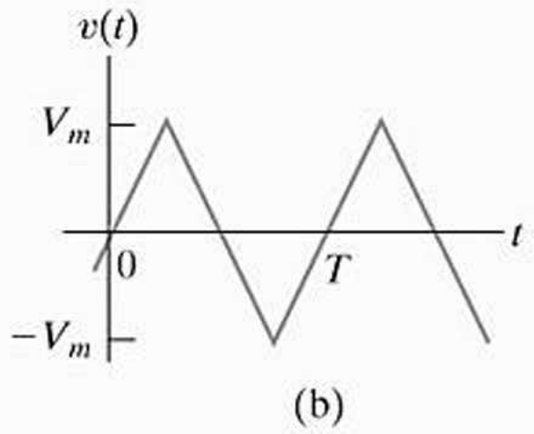


Figura 16.3 ▲ Forma de onda triangular de um gerador de varredura.





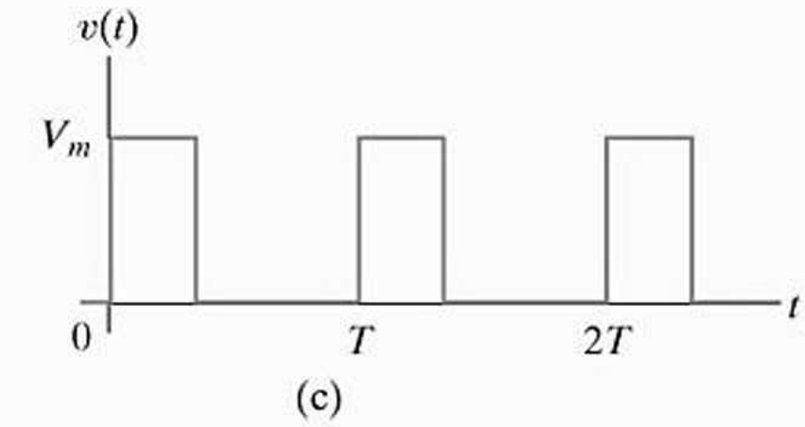


Figura 16.4 ▲ Formas de onda produzidas por geradores de função usados em laboratórios. (a) Onda quadrada. (b) Onda triangular. (c) Pulsos retangulares.

16.1 Séries de Fourier: uma visão geral

O que Fourier descobriu ao investigar problemas de transmissão de calor é que uma função periódica pode ser representada por uma soma infinita de funções seno ou coseno de freqüências múltiplas. Em outras palavras, o período de qualquer termo trigonométrico na série infinita é um múltiplo inteiro, ou harmônico, do período fundamental T da função periódica. Assim, Fourier mostrou que uma função $f(t)$ periódica pode ser expressa como

$$f(t) = a_v + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t, \quad (16.2)$$

(Representação em série de Fourier de uma função periódica)

onde n é a seqüência de números inteiros 1, 2, 3,...

Na Equação 16.2, a_v, a_n e b_n são conhecidos como *coeficientes de Fourier* e calculados a partir de $f(t)$. O termo ω_0 (que é igual a $2\pi/T$) representa a *freqüência fundamental* da função periódica $f(t)$. Os múltiplos inteiros de ω_0 — isto é, $2\omega_0$, $3\omega_0$, $4\omega_0$ — são conhecidos como *freqüências harmônicas* de $f(t)$. Assim, $2\omega_0$ é o segundo harmônico, $3\omega_0$ é o terceiro harmônico e $n\omega_0$ é o n-ésimo harmônico de $f(t)$.

Discutiremos a determinação dos coeficientes de Fourier na Seção 16.2. Antes de entrarmos nos detalhes da utilização da série de Fourier em análise de circuitos, precisamos estudar, em primeiro lugar, o processo em termos gerais. Do ponto de vista de aplicações, podemos expressar todas as funções periódicas de interesse em termos de uma série de Fourier. Do ponto de vista matemático, as condições que uma função periódica $f(t)$ deve satisfazer para que seja possível expressá-la como uma série de Fourier convergente (conhecidas como *condições de Dirichlet*) são as seguintes

1. $f(t)$ deve ser unívoca,
2. o número de descontinuidades de $f(t)$ no intervalo periódico deve ser finito,
3. o número de máximos e mínimos de $f(t)$ no intervalo periódico deve ser finito,
4. a integral

$$\int_{t_0}^{t_0+T} |f(t)|\,dt$$

deve existir.

Qualquer função periódica gerada por uma fonte fisicamente realizável satisfaz as condições de Dirichlet. Essas condições são *suficientes*, mas não *necessárias*. Assim, se $f(t)$ satisfizer esses requisitos, sabemos que podemos expressá-la como uma série de Fourier. Contudo, se $f(t)$ não atender a esses re-

quisitos, pode ainda ser possível expressá-la como uma série de Fourier. As condições necessárias não são conhecidas.

Após termos determinado $f(t)$ e calculado os coeficientes de Fourier (a_v, a_n e b_n), substituímos a fonte periódica por uma fonte contínua (a_v) mais uma soma de fontes senoidais (a_n e b_n). Como a fonte periódica está excitando um circuito linear, podemos usar o princípio da superposição para determinar a resposta de regime permanente. Em particular, primeiro calculamos a resposta a cada fonte da representação em série de Fourier de $f(t)$ e, então, somamos as respostas individuais para obter a resposta total. A resposta de regime permanente devida a uma fonte senoidal específica é determinada com mais facilidade pelo método fasorial.

O procedimento é direto, não envolve nenhuma técnica nova de análise de circuitos e produz a representação em série de Fourier da resposta de regime permanente. Em conseqüência, a forma real da resposta é desconhecida. Além do mais, a forma de onda da resposta só pode ser estimada pela soma de um número suficiente de termos. Ainda que a abordagem da série de Fourier, para determinar a resposta de regime permanente, tenha algumas desvantagens, ela apresenta um novo modo de pensar, que é tão importante quanto obter resultados quantitativos. Na verdade, sob alguns aspectos, o aspecto conceitual é até mais importante do que o quantitativo.

16.2 Coeficientes de Fourier

Uma vez definida a função periódica, determinamos os coeficientes de Fourier pelas relações

$$a_v = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,dt, \tag{16.3}$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos k\omega_0 t\,dt, \tag{16.4}$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,\text{sen}\,k\omega_0 t\,dt. \tag{16.5}$$

(Coeficientes de Fourier)

Nas equações 16.4 e 16.5, o índice k indica o k-ésimo coeficiente na seqüência de números inteiros 1, 2, 3,... Observe que a_v é o valor médio de $f(t)$, a_k é duas vezes o valor médio de $f(t)\cos k\omega_0 t$, e b_k é duas vezes o valor médio de $f(t)\,\text{sen}\,k\omega_0 t$.

Podemos facilmente deduzir as equações 16.3–16.5 da Equação 16.2, recordando as seguintes relações integrais, válidas quando m e n forem inteiros:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \text{sen}\,m\omega_0 t\,dt = 0, \quad \text{para todo } m, \tag{16.6}$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \cos m\omega_0 t\,dt = 0, \quad \text{para todo } m, \tag{16.7}$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \cos m\omega_0 t\,\text{sen}\,n\omega_0 t\,dt = 0, \quad \text{para todo } m \text{ e } n, \tag{16.8}$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \text{sen}\,m\omega_0 t\,\text{sen}\,n\omega_0 t\,dt = \begin{cases} 0, & \text{para todo } m \neq n, \\ \dfrac{T}{2}, & \text{para } m = n, \end{cases} \tag{16.9}$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \cos m\omega_0 t\cos n\omega_0 t\,dt = \begin{cases} 0, & \text{para todo } m \neq n, \\ \dfrac{T}{2}, & \text{para } m = n. \end{cases} \tag{16.10}$$

Fica a cargo do leitor a demonstração das equações 16.6–16.10 (Problema 16.5).

Para deduzir a Equação 16.3, simplesmente integramos ambos os lados da Equação 16.2 em um período:

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)dt &= \int_{t_0}^{t_0+T}\left(a_v + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos n\omega_0 t + b_n\,\text{sen}\,n\omega_0 t\right)dt \\ &= \int_{t_0}^{t_0+T} a_v dt + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{t_0}^{t_0+T}(a_n\cos n\omega_0 t + b_n\,\text{sen}\,n\omega_0 t)\,dt \\ &= a_v T + 0.\end{aligned} \tag{16.11}$$

A Equação 16.3 decorre diretamente da Equação 16.11.

Para deduzir a expressão para o k-ésimo valor de a_n, multiplicamos primeiro a Equação 16.2 por $\cos k\omega_0 t$ e, então, integramos ambos os lados em um período de $f(t)$:

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos k\omega_0 t\,dt &= \int_{t_0}^{t_0+T} a_v\cos k\omega_0 t\,dt \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{t_0}^{t_0+T}(a_n\cos n\omega_0 t\cos k\omega_0 t + b_n\,\text{sen}\,n\omega_0 t\cos k\omega_0 t)\,dt \\ &= 0 + a_k\left(\frac{T}{2}\right) + 0.\end{aligned} \tag{16.12}$$

Explicitando a_k na Equação 16.12, obtemos a Equação 16.4.

Obtemos a expressão para o k-ésimo valor de b_n multiplicando primeiro ambos os lados da Equação 16.2 por $\text{sen}\,k\omega_0 t$ e, então, integrando cada lado em um período de $f(t)$. O Exemplo 16.1 mostra como usar as equações 16.3–16.5 para determinar os coeficientes de Fourier para uma função periódica específica.

Exemplo 16.1 Determinação da série de Fourier de uma onda triangular não-simétrica

Determinar a série de Fourier para a tensão periódica da Figura 16.5.

Solução

Quando usamos as equações 16.3–16.5 para determinar a_v, a_k e b_k, podemos escolher o valor de t_0. Para a

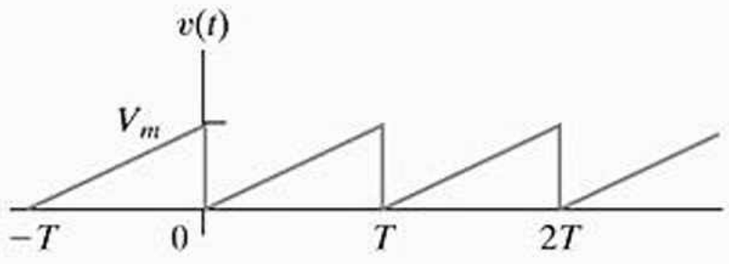


Figura 16.5 ◄ Tensão periódica para o Exemplo 16.1.

tensão periódica da Figura 16.5, a melhor escolha para t_0 é zero. Qualquer outra dificultaria as integrações necessárias. A expressão para $v(t)$ entre 0 e T é

$$v(t) = \left(\frac{V_m}{T}\right)t.$$

A equação para a_v é

$$a_v = \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{V_m}{T}\right)t\,dt = \frac{1}{2}V_m.$$

Esse é claramente o valor médio da onda da Figura 16.5.
A equação para o k-ésimo valor de a_n é

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T \left(\frac{V_m}{T}\right)t\cos k\omega_0 t\,dt$$

$$= \frac{2V_m}{T^2}\left(\frac{1}{k^2\omega_0^2}\cos k\omega_0 t + \frac{t}{k\omega_0}\operatorname{sen} k\omega_0 t\right)\Bigg|_0^T$$

$$= \frac{2V_m}{T^2}\left[\frac{1}{k^2\omega_0^2}(\cos 2\pi k - 1)\right] = 0 \text{ para todo } k.$$

A equação para o k-ésimo valor de b_n é

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T \left(\frac{V_m}{T}\right)t\operatorname{sen} k\omega_0 t\,dt$$

$$= \frac{2V_m}{T^2}\left(\frac{1}{k^2\omega_0^2}\operatorname{sen} k\omega_0 t - \frac{t}{k\omega_0}\cos k\omega_0 t\right)\Bigg|_0^T$$

$$= \frac{2V_m}{T^2}\left(0 - \frac{T}{k\omega_0}\cos 2\pi k\right)$$

$$= \frac{-V_m}{\pi k}.$$

A série de Fourier para $v(t)$ é

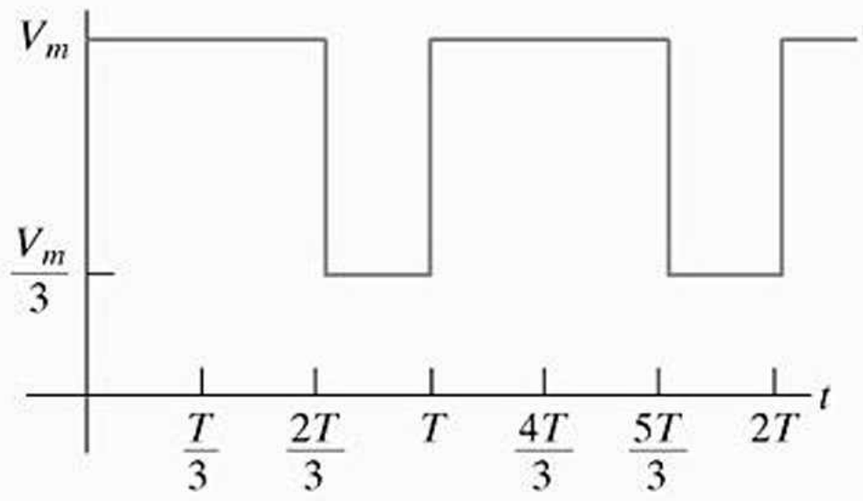
$$v(t) = \frac{V_m}{2} - \frac{V_m}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\operatorname{sen} n\omega_0 t$$

$$= \frac{V_m}{2} - \frac{V_m}{\pi}\operatorname{sen}\omega_0 t - \frac{V_m}{2\pi}\operatorname{sen} 2\omega_0 t - \frac{V_m}{3\pi}\operatorname{sen} 3\omega_0 t - \cdots$$

✔ PROBLEMAS PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 1 — Saber calcular a forma trigonométrica dos coeficientes de Fourier de uma onda periódica

16.1 Calcule as expressões para a_v, a_k e b_k para a função periódica mostrada se $V_m = 9\pi$ V.



Resposta: $a_v = 21{,}99$ V,

$$a_k = \tfrac{6}{k}\operatorname{sen}\tfrac{4k\pi}{3} \text{ V},$$

$$b_k = \tfrac{6}{k}\left(1 - \cos\tfrac{4k\pi}{3}\right) \text{ V}.$$

16.2 Considere o Problema para Avaliação 16.1.
a) Qual é o valor médio da tensão periódica?
b) Calcule os valores numéricos de $a_1 - a_5$ e $b_1 - b_5$.
c) Se $T = 125{,}66$ ms, qual é a freqüência fundamental em radianos por segundo?
d) Qual é a freqüência do terceiro harmônico em hertz?
e) Escreva a série de Fourier até o quinto harmônico, inclusive.

Resposta: (a) 21,99 V;

(b) −5,2 V, 2,6 V, 0 V, −1,3 e 1,04 V;
9 V, 4,5 V, 0 V, 2,25 V e 1,8 V;

(c) 50 rad/s;

(d) 23,87 Hz;

(e) $v(t) = 21{,}99 - 5{,}2\cos 50t + 9\operatorname{sen} 50t + 2{,}6\cos 100t + 4{,}5\operatorname{sen} 100t - 1{,}3\cos 200t + 2{,}25\operatorname{sen} 200t + 1{,}04\cos 250t + 1{,}8\operatorname{sen} 250t$ V.

NOTA: Tente resolver também os problemas 16.1–16.3, apresentados no final do capítulo.

De modo geral, determinar os coeficientes de Fourier é tedioso. Em conseqüência, qualquer coisa que simplifique a tarefa é benéfica. Felizmente, uma função periódica que possua certos tipos de simetria reduz muito a quantidade de trabalho envolvida ao determinar os coeficientes. Na Seção 16.3 discutiremos como a simetria afeta os cálculos dos coeficientes em uma série de Fourier.

16.3 Efeito da simetria sobre os coeficientes de Fourier

Quatro tipos de simetria podem ser usados para simplificar o cálculo dos coeficientes de Fourier:

- simetria das funções pares,
- simetria das funções ímpares,
- simetria de meia-onda,
- simetria de quarto de onda.

O efeito de cada tipo de simetria é discutido nas seções seguintes.

Simetria das funções pares

Uma função é definida como par se

$$f(t) = f(-t). \tag{16.13}$$

(Função par)

Funções que satisfazem a Equação 16.13 são denominadas pares porque polinômios que têm somente expoentes pares possuem essa característica. Para funções periódicas pares, as equações para os coeficientes de Fourier reduzem-se a

$$a_v = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\,dt, \tag{16.14}$$

$$a_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos k\omega_0 t\,dt, \tag{16.15}$$

$$ba_k = 0, \quad \text{para todo } k. \tag{16.16}$$

Observe que todos os coeficientes b são zero se a função periódica for par. A Figura 16.6 mostra uma função periódica par. As equações 16.14–16.16 decorrem diretamente das equações 16.3–16.5. Para mostrar isso, selecionamos $t_0 = -T/2$ e, então, dividimos o intervalo de integração em duas partes, de $-T/2$ a 0 e de 0 a $T/2$, ou

$$\begin{aligned} a_v &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt \\ &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{0} f(t)\,dt + \frac{1}{T}\int_0^{T/2} f(t)\,dt. \end{aligned} \tag{16.17}$$

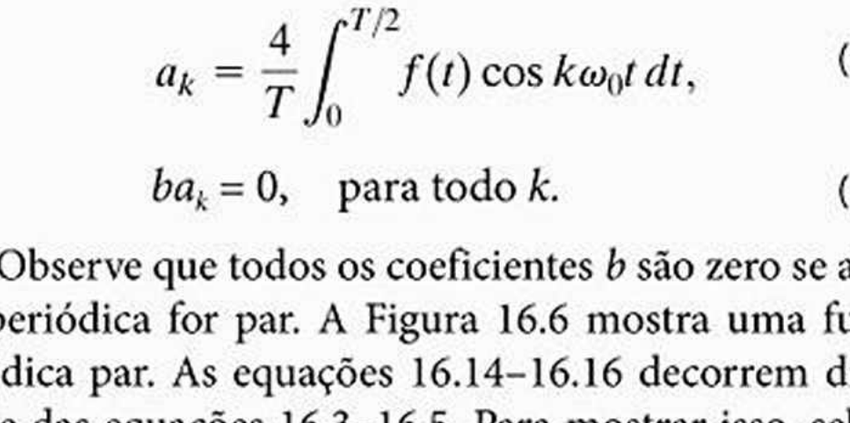


Figura 16.6 ▲ Função periódica par, $f(t) = f(-t)$.

Agora, mudamos a variável de integração na primeira integral do lado direito da Equação 16.17. Especificamente, fazemos $t = -x$ e observamos que $f(t) = f(-x) = f(x)$ porque a função é par. Além disso, observamos que $x = T/2$ quando $t = -T/2$ e $dt = -dx$. Então,

$$\int_{-T/2}^{0} f(t)\,dt = \int_{T/2}^{0} f(x)(-dx) = \int_0^{T/2} f(x)\,dx, \tag{16.18}$$

que mostra que a integração de $-T/2$ a 0 é idêntica à de 0 a $T/2$; em conseqüência, a Equação 16.17 é idêntica à Equação 16.14. A dedução da Equação 16.15 é feita de forma semelhante. Nesse caso,

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{0} f(t)\cos k\omega_0 t\,dt \\ &\quad + \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos k\omega_0 t\,dt, \end{aligned} \tag{16.19}$$

mas

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{0} f(t)\cos k\omega_0 t\,dt &= \int_{T/2}^{0} f(x)\cos(-k\omega_0 x)(-dx) \\ &= \int_0^{T/2} f(x)\cos k\omega_0 x\,dx. \end{aligned} \tag{16.20}$$

Como antes, a integração de $-T/2$ a 0 é idêntica à de 0 a $T/2$. Combinando a Equação 16.20 com a Equação 16.19, obtemos a Equação 16.15.

Todos os coeficientes b são zero quando $f(t)$ é uma função periódica par, porque a integração de $-T/2$ a 0 é igual à integração de 0 a $T/2$ com o sinal trocado, isto é,

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{0} f(t)\,\text{sen}\,k\omega_0 t\,dt &= \int_{T/2}^{0} f(x)\,\text{sen}(-k\omega_0 x)(-dx) \\ &= -\int_0^{T/2} f(x)\,\text{sen}\,k\omega_0 x\,dx. \end{aligned} \tag{16.21}$$

Quando usamos as equações 16.14 e 16.15 para determinar os coeficientes de Fourier, o intervalo de integração deve ser de 0 a $T/2$.

Simetria das funções ímpares

Uma função é definida como ímpar se

$$f(t) = -f(-t). \tag{16.22}$$

(Função ímpar)

Funções que satisfazem a Equação 16.22 são denominadas ímpares porque polinômios que têm apenas expoentes ímpares possuem essa característica. As expressões para os coeficientes de Fourier são

$$a_v = 0; \tag{16.23}$$

$$a_k = 0, \text{ para todo } k; \tag{16.24}$$

$$b_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\,\text{sen}\,k\omega_0 t\,dt. \tag{16.25}$$

Observe que todos os coeficientes a são zero se a função periódica for ímpar. A Figura 16.7 mostra uma função periódica ímpar.

Usamos o mesmo processo para deduzir as equações 16.23–16.25 que o para deduzir as equações 16.14–16.16. Deixamos essas deduções a cargo do leitor (Problema 16.6, apresentado no final do capítulo).

Uma função periódica pode se tornar par ou ímpar ao ser deslocada ao longo do eixo do tempo. Em outras palavras, a escolha sensata do local onde $t = 0$ pode criar uma simetria par ou ímpar em uma função periódica.

Por exemplo, a função triangular mostrada na Figura 16.8(a) não é nem par nem ímpar. Contudo, podemos transformá-la em função par, como mostra a Figura 16.8(b), ou em função ímpar, como mostra a Figura 16.8(c).

Simetria de meia-onda

Uma função periódica possui simetria de meia-onda se satisfizer a equação

$$f(t) = -f(t - T/2). \tag{16.26}$$

De acordo com a Equação 16.26, uma função periódica tem simetria de meia-onda se, após ser deslocada metade de um período e invertida, for idêntica à função original. Por exemplo, as funções mostradas nas figuras 16.7 e 16.8 têm simetria de meia-onda, ao passo que as das figuras 16.5 e 16.6 não têm. Observe que simetria de meia-onda não é função do local onde $t = 0$.

Se uma função periódica tiver simetria de meia-onda, a_k e b_k serão ambos zero para valores pares de k. Além do mais, a_v também é zero, pois o valor médio de uma função com simetria de meia-onda é zero. As expressões para os coeficientes de Fourier são

$$a_v = 0, \tag{16.27}$$

$$a_k = 0, \quad \text{para } k \text{ par;} \tag{16.28}$$

$$a_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos k\omega_0 t\, dt, \quad \text{para } k \text{ ímpar;} \tag{16.29}$$

$$b_k = 0, \quad \text{para } k \text{ par;} \tag{16.30}$$

$$b_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\,\text{sen}k\omega_0 t\, dt, \quad \text{para } k \text{ ímpar.} \tag{16.31}$$

Deduzimos as equações 16.27–16.31 começando com as equações 16.3–16.5 e escolhendo o intervalo de integração de $-T/2$ a $T/2$. Então, dividimos esse intervalo em intervalos de $-T/2$ a 0 e de 0 a $T/2$. Por exemplo, o cálculo de a_k fica

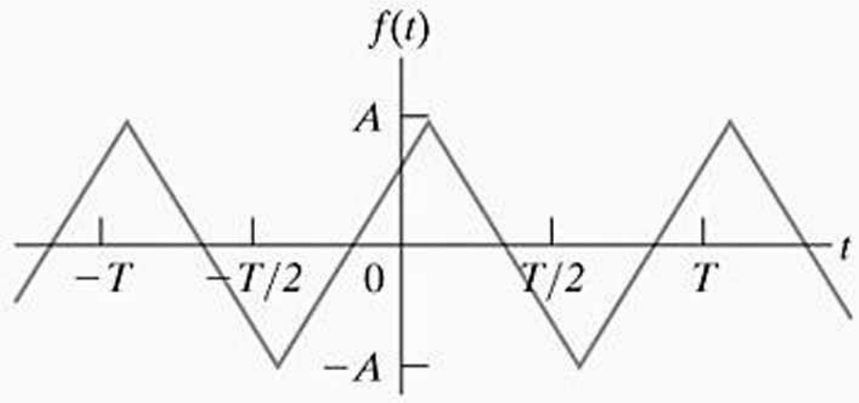
$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos k\omega_0 t\, dt \\ &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos k\omega_0 t\, dt \\ &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{0} f(t)\cos k\omega_0 t\, dt \\ &\quad + \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\cos k\omega_0 t\, dt. \end{aligned} \tag{16.32}$$

Agora, mudamos a variável de integração da primeira integral do lado direito da Equação 16.32. Especificamente, fazemos

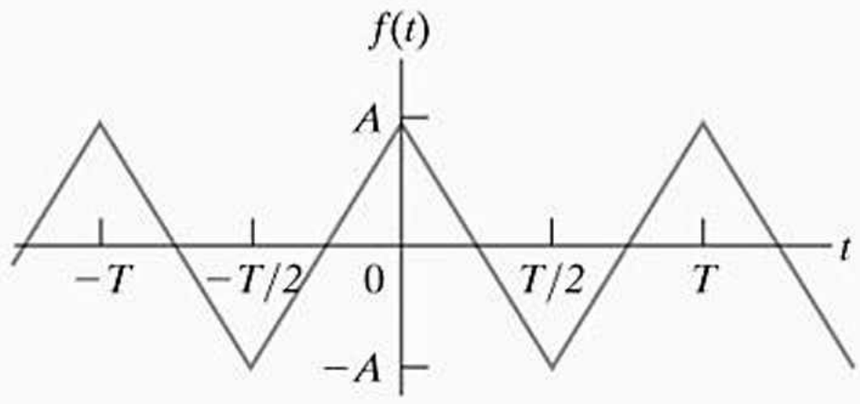
$$t = x - T/2.$$

Então,

$$x = T/2, \quad \text{quando } t = 0;$$



(a)



(b)

(c)

Figura 16.8 ▲ Um exemplo de como a escolha do local onde $t = 0$ pode determinar que uma função periódica seja par, ímpar ou nenhuma das duas coisas. (a) Onda triangular periódica que não é nem par nem ímpar. (b) Onda triangular de (a) transformada em função par pelo deslocamento da função ao longo do eixo t. (c) Onda triangular de (a) transformada em função ímpar pelo deslocamento da função ao longo do eixo t.

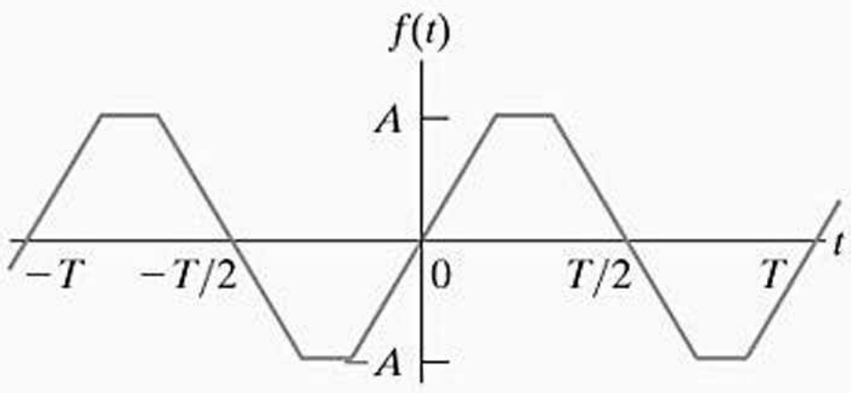


Figura 16.7 ▲ Função periódica ímpar, $f(t) = -f(-t)$.

$x = 0$, quando $t = -T/2$;

$dt = dx$.

Reescrevemos a primeira integral como

$$\int_{-T/2}^{0} f(t) \cos k\omega_0 t \, dt = \int_{0}^{T/2} f(x - T/2) \cos k\omega_0 (x - T/2) \, dx. \tag{16.33}$$

Observe que

$$\cos k\omega_0(x - T/2) = \cos (k\omega_0 x - k\pi) = \cos k\pi \cos k\omega_0 x$$

e que, por hipótese,

$$f(x - T/2) = -f(x).$$

Em conseqüência, a Equação 16.33 torna-se

$$\int_{-T/2}^{0} f(t) \cos k\omega_0 t \, dt = \int_{0}^{T/2} [-f(x)] \cos k\pi \cos k\omega_0 x \, dx. \tag{16.34}$$

Incorporando a Equação 16.34 na Equação 16.32 obtemos

$$a_k = \frac{2}{T}(1 - \cos k\pi) \int_{0}^{T/2} f(t) \cos k\omega_0 t \, dt. \tag{16.35}$$

Mas $\cos k\pi$ é 1 quando k é par e -1 quando k é ímpar. Em conseqüência, da Equação 16.35 deduzem-se as equações 16.28 e 16.29.

Deixamos que você verifique se esse mesmo processo pode ser usado para deduzir as equações 16.30 e 16.31 (veja o Problema 16.7, apresentado no final do capítulo).

Resumimos nossas observações afirmando que a representação em série de Fourier de uma função periódica com simetria de meia-onda tem valor médio nulo e contém somente harmônicos ímpares.

Simetria de quarto de onda

O termo *simetria de quarto de onda* descreve uma função periódica que tem simetria de meia-onda e, além disso, é simétrica em relação aos pontos médios dos semiciclos positivo e negativo. A função mostrada na Figura 16.9(a) tem simetria de quarto de onda em relação ao ponto médio dos semiciclos positivo e negativo. A função na Figura 16.9(b) não tem simetria de quarto de onda, embora tenha simetria de meia-onda.

Uma função periódica que tenha simetria de quarto de onda sempre pode ser transformada em par ou ímpar pela escolha adequada do ponto onde $t = 0$. Por exemplo, a função mostrada na Figura 16.9(a) é ímpar e pode ser transformada em par deslocando a função $T/4$ unidades para a direita ou para a esquerda, ao longo do eixo t. Todavia, a função na Figura 16.9(b) nunca poderá ser transformada em par ou em ímpar. Para aproveitar a vantagem da simetria de quarto de onda no cálculo dos coeficientes de Fourier, você deve escolher o ponto onde $t = 0$, de forma a transformar a função em par ou em ímpar.

Se a função for transformada em par, então

$a_v = 0$, por causa da simetria de meia-onda;

$a_k = 0$, para k par, por causa da simetria de meia-onda;

$$a_k = \frac{8}{T} \int_{0}^{T/4} f(t) \cos k\omega_0 t \, dt, \text{ para } k \text{ ímpar;}$$

$b_k = 0$, para todo k, porque a função é par. (16.36)

As Equações 16.36 resultam da simetria de quarto de onda da função, além do fato de ela ser par. Lembre-se de que como a simetria de quarto de onda implica a simetria de meia-onda, podemos eliminar a_v e a_k para k par. Comparando a expressão para a_k, k ímpar, nas Equações 16.36 com a Equação 16.29, vemos que combinar simetria de quarto de onda com a simetria das funções pares permite diminuir o intervalo de integração de 0 a $T/2$ para 0 a $T/4$. Fica a cargo do leitor a dedução das Equações 16.36 (Problema 16.8, apresentado no final do capítulo).

Se a função com simetria de quarto de onda for transformada em ímpar,

$a_v = 0$, porque a função é ímpar;

$a_k = 0$, para todo k, porque a função é ímpar;

$b_k = 0$, para k par, por causa da simetria de meia-onda;

$$b_k = \frac{8}{T} \int_{0}^{T/4} f(t) \operatorname{sen} k\omega_0 t \, dt, \qquad \text{para } k \text{ ímpar.} \tag{16.37}$$

As Equações 16.37 são uma conseqüência direta de a função ter simetria de quarto de onda e ser ímpar. Novamente, isso permite diminuir o intervalo de integração de 0 a $T/2$ para 0 a $T/4$. Fica a cargo do leitor a dedução das Equações 16.37 (Problema 16.9, apresentado no final do capítulo).

O Exemplo 16.2 mostra como usar a simetria para simplificar o cálculo dos coeficientes de Fourier.

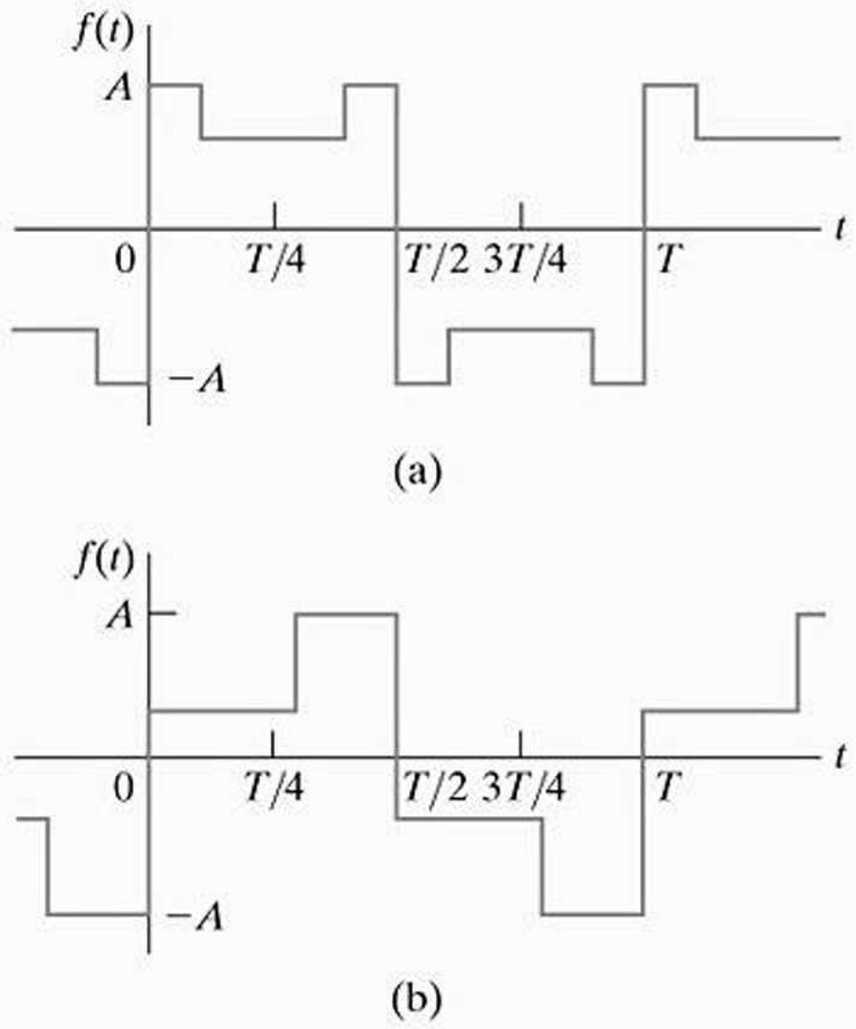


Figura 16.9 ▲ (a) Função com simetria de quarto de onda. (b) Função que não tem simetria de quarto de onda.

Exemplo 16.2 Determinação da série de Fourier de uma função ímpar com simetria

Determinar a série de Fourier para a onda de corrente da Figura 16.10.

Solução

Começamos procurando, na onda, graus de simetria. Vemos que a função é ímpar e, além disso, tem simetria de meia-onda e de quarto de onda. Como a função é ímpar, todos os coeficientes a são zero; isto é, $a_v = 0$ e $a_k = 0$ para todo k. Como a função tem simetria de meia-onda, $b_k = 0$ para valores pares de k. Como a função tem simetria de quarto de onda, a expressão para b_k para valores ímpares de k é

$$b_k = \frac{8}{T}\int_0^{T/4} i(t)\operatorname{sen} k\omega_0 t\, dt.$$

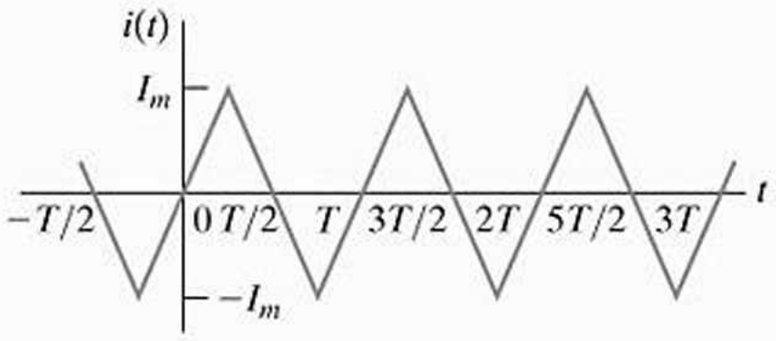


Figura 16.10 ▲ Onda periódica para o Exemplo 16.2.

No intervalo $0 \le t \le T/4$, a expressão para $i(t)$ é

$$i(t) = \frac{4I_m}{T}t.$$

Assim,

$$b_k = \frac{8}{T}\int_0^{T/4}\frac{4I_m}{T}t\operatorname{sen} k\omega_0 t\, dt$$

$$= \frac{32I_m}{T^2}\left(\frac{\operatorname{sen} k\omega_0 t}{k^2\omega_0^2} - \frac{t\cos k\omega_0 t}{k\omega_0}\Bigg|_0^{T/4}\right)$$

$$= \frac{8I_m}{\pi^2 k^2}\operatorname{sen}\frac{k\pi}{2} \qquad (k \text{ é ímpar}).$$

A representação de $i(t)$ em série de Fourier é

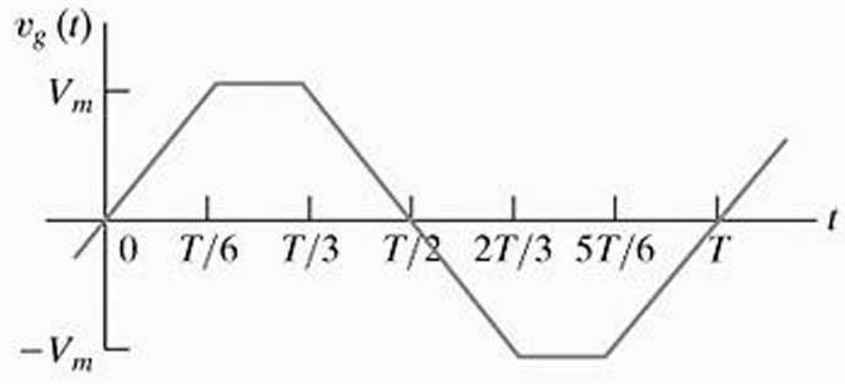
$$i(t) = \frac{8I_m}{\pi^2}\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{1}{n^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}\operatorname{sen} n\omega_0 t$$

$$= \frac{8I_m}{\pi^2}\left(\operatorname{sen}\omega_0 t - \frac{1}{9}\operatorname{sen} 3\omega_0 t + \frac{1}{25}\operatorname{sen} 5\omega_0 t - \frac{1}{49}\operatorname{sen} 7\omega_0 t + \cdots\right).$$

✔ PROBLEMA PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 1 — Saber calcular a forma trigonométrica dos coeficientes de Fourier de uma onda periódica

16.3 Calcule a série de Fourier para a tensão periódica mostrada.



Resposta: $v_g(t) = \dfrac{12V_m}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(n\pi/3)}{n^2}\operatorname{sen} n\omega_0 t.$

NOTA: Tente resolver também os problemas 16.10 e 16.11, apresentados no final deste capítulo.

16.4 Forma trigonométrica alternativa da série de Fourier

Em aplicações da série de Fourier a circuitos, combinamos termos em co-seno e seno em um único termo por conveniência. Isso nos permite a representação de cada harmônico de $v(t)$ ou $i(t)$ como uma única quantidade fasorial. Os termos em co-seno e seno podem ser combinados em uma expressão de co-seno ou em uma expressão de seno. Como escolhemos o co-seno na análise fasorial (veja o Capítulo 9), também escolheremos aqui o co-seno para a forma alternativa da série. Por isso, escrevemos a série de Fourier da Equação 16.2 como

$$f(t) = a_v + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos(n\omega_0 t - \theta_n), \qquad (16.38)$$

onde A_n e θ_n são definidos pela grandeza complexa

$$a_n - jb_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\underline{/-\theta_n} = A_n\underline{/-\theta_n}. \qquad (16.39)$$

Deduzimos as equações 16.38 e 16.39 usando o método fasorial para somar os termos em co-seno e seno na Equação 16.2. Começamos expressando as funções seno como funções co-seno; isto é, reescrevemos a Equação 16.2 como

$$f(t) = a_v + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos n\omega_0 t + b_n\cos(n\omega_0 t - 90^\circ). \qquad (16.40)$$

Ao adicionar os termos do somatório usando fasores, obtemos

$$\mathcal{P}\{a_n \cos n\omega_0 t\} = a_n \angle 0^\circ \tag{16.41}$$

e

$$\mathcal{P}\{b_n \cos(n\omega_0 t - 90^\circ)\} = b_n \angle -90^\circ = -jb_n. \tag{16.42}$$

Então

$$\begin{aligned}\mathcal{P}\{a_n \cos(n\omega_0 t + b_n \cos(n\omega_0 t - 90^\circ)\} &= a_n - jb_n.\\ &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\angle -\theta_n\\ &= A_n \angle -\theta_n.\end{aligned} \tag{16.43}$$

Quando executamos a transformada fasorial inversa da Equação 16.43, obtemos

$$\begin{aligned}a_n \cos n\omega_0 t + b_n \cos(n\omega_0 t - 90^\circ) &= \mathcal{P}^{-1}\{A_n \angle -\theta_n\}\\ &= A_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n).\end{aligned} \tag{16.44}$$

Substituindo a Equação 16.44 na Equação 16.40 obtemos a Equação 16.38. A Equação 16.43 corresponde à Equação 16.39. Se a função periódica for par ou ímpar, A_n reduz-se a a_n (par) ou b_n (ímpar), e θ_n é 0° (par) ou 90° (ímpar).

A dedução da forma alternativa da série de Fourier para uma dada função periódica é ilustrada no Exemplo 16.3.

Exemplo 16.3 Cálculo das formas da série trigonométrica de Fourier para uma tensão periódica

a) Calcule as expressões de a_k e b_k para a função periódica da Figura 16.11.

b) Escreva os quatro primeiros termos da série de Fourier de $v(t)$ usando a forma da Equação 16.38.

Solução

a) A tensão $v(t)$ não é par nem ímpar, nem tem simetria de meia-onda. Em conseqüência, usamos as equações 16.4 e 16.5 para determinar a_k e b_k. Escolhendo t_0 como zero, obtemos

$$a_k = \frac{2}{T}\left[\int_0^{T/4} V_m \cos k\omega_0 t\, dt + \int_{T/4}^{T} (0)\cos k\omega_0 t\, dt\right]$$

$$= \frac{2V_m \operatorname{sen} k\omega_0 t}{T \quad k\omega_0}\Bigg|_0^{T/4} = \frac{V_m}{k\pi}\operatorname{sen}\frac{k\pi}{2}$$

e

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^{T/4} V_m \operatorname{sen} k\omega_0 t\, dt$$

$$= \frac{2V_m}{T}\left(\frac{-\cos k\omega_0 t}{k\omega_0}\Bigg|_0^{T/4}\right)$$

$$= \frac{V_m}{k\pi}\left(1 - \cos\frac{k\pi}{2}\right).$$

b) O valor médio de $v(t)$ é

$$a_v = \frac{V_m(T/4)}{T} = \frac{V_m}{4}.$$

Os valores de $a_k - jb_k$ para $k = 1, 2$ e 3 são

$$a_1 - jb_1 = \frac{V_m}{\pi} - j\frac{V_m}{\pi} = \frac{\sqrt{2}V_m}{\pi}\angle -45^\circ,$$

$$a_2 - jb_2 = 0 - j\frac{V_m}{\pi} = \frac{V_m}{\pi}\angle -90^\circ,$$

$$a_3 - jb_3 = \frac{-V_m}{3\pi} - j\frac{V_m}{3\pi} = \frac{\sqrt{2}V_m}{3\pi}\angle -135^\circ.$$

Assim, os quatro primeiros termos da série de Fourier de $v(t)$ são

$$v(t) = \frac{V_m}{4} + \frac{\sqrt{2}V_m}{\pi}\cos(\omega_0 t - 45^\circ) + \frac{V_m}{\pi}\cos(2\omega_0 t - 90^\circ) + \frac{\sqrt{2}V_m}{3\pi}\cos(3\omega_0 t - 135^\circ) + \cdots$$

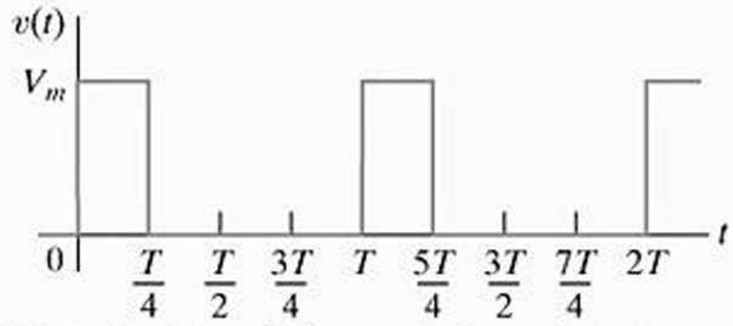
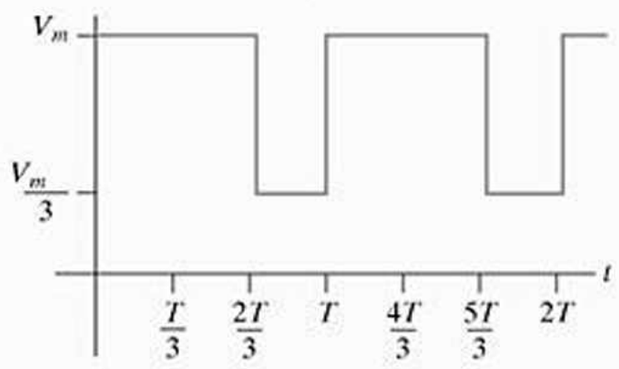


Figura 16.11 ▲ Função periódica para o Exemplo 16.3.

✔ PROBLEMA PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 1 — Saber calcular a forma trigonométrica dos coeficientes de Fourier de uma onda periódica

16.4 a) Calcule $A_1 - A_5$ e $\theta_1 - \theta_5$ para a função periódica mostrada se $V_m = 9\pi$ V.



b) Usando a forma da Equação 16.38, escreva a série de Fourier para $v(t)$ até o quinto harmônico, inclusive, admitindo que $T = 125{,}66$ ms.

Resposta: (a) 10,4; 5,2; 0; 2,6; 2,1 V e −120°, −60°; não definido; −120°; −60°;

(b) $v(t) = 21{,}99 + 10{,}4\cos(50t - 120^\circ) + 5{,}2\cos(100t - 60^\circ) + 2{,}6\cos(200t - 120^\circ) + 2{,}1\cos(250t - 60^\circ)$ V.

NOTA: Tente resolver também o Problema 16.18, apresentado no final deste capítulo.

16.5 Exemplo de aplicação

Por meio do circuito *RC* da Figura 16.12(a), ilustramos como usar a série de Fourier de uma função periódica para determinar a resposta de regime permanente de um circuito linear. O circuito é energizado com a onda quadrada de tensão mostrada na Figura 16.12(b). A tensão no capacitor é o sinal de resposta, ou saída, desejado.

A primeira etapa na determinação da resposta de regime permanente é representar a fonte de excitação periódica por sua série de Fourier. Depois de observar que a fonte tem simetria ímpar, de meia-onda e de quarto de onda, sabemos que os coeficientes de Fourier reduzem-se a b_k, com k restrito a valores inteiros ímpares:

$$b_k = \frac{8}{T}\int_0^{T/4} V_m \operatorname{sen} k\omega_0 t\, dt$$

$$= \frac{4V_m}{\pi k} \quad (k \text{ é ímpar}). \tag{16.45}$$

Então, a representação em série de Fourier de v_g é

$$v_g = \frac{4V_m}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{1}{n}\operatorname{sen} n\omega_0 t. \tag{16.46}$$

Escrevendo a série em forma expandida, temos

$$v_g = \frac{4V_m}{\pi}\operatorname{sen}\omega_0 t + \frac{4V_m}{3\pi}\operatorname{sen}3\omega_0 t + \frac{4V_m}{5\pi}\operatorname{sen}5\omega_0 t + \frac{4V_m}{7\pi}\operatorname{sen}7\omega_0 t + \cdots \tag{16.47}$$

A fonte de tensão dada pela Equação 16.47 é equivalente a um número infinitamente grande de fontes senoidais ligadas em série, cada qual com a própria amplitude e freqüência. Para determinar a contribuição de cada fonte para a tensão de saída, usamos o princípio da superposição.

Para qualquer uma das fontes senoidais, a expressão fasorial para a tensão de saída é

$$\mathbf{V}_o = \frac{\mathbf{V}_g}{1 + j\omega RC}. \tag{16.48}$$

Como todas as fontes de tensão são expressas como funções seno, interpretamos um fasor em termos do seno, em vez do co-seno. Em outras palavras, quando passarmos do domínio fasorial para o domínio do tempo, simplesmente escreveremos as expressões no domínio do tempo como $\operatorname{sen}(\omega t + \theta)$ em vez de $\cos(\omega t + \theta)$.

A tensão fasorial de saída devida à freqüência fundamental da fonte senoidal é

$$\mathbf{V}_{o1} = \frac{(4V_m/\pi)\angle 0^\circ}{1 + j\omega_0 RC}. \tag{16.49}$$

Escrevendo $\mathbf{V}_{o1}$ em forma polar, obtemos

$$\mathbf{V}_{o1} = \frac{(4V_m)\angle -\beta_1}{\pi\sqrt{1 + \omega_0^2 R^2 C^2}}, \tag{16.50}$$

onde

$$\beta_1 = \operatorname{tg}^{-1}\omega_0 RC. \tag{16.51}$$

Pela Equação 16.50, a expressão no domínio do tempo para o componente da freqüência fundamental de v_o é

$$v_{o1} = \frac{4V_m}{\pi\sqrt{1 + \omega_0^2 R^2 C^2}}\operatorname{sen}(\omega_0 t - \beta_1). \tag{16.52}$$

Calculamos o componente do terceiro harmônico da tensão de saída de modo semelhante. A tensão fasorial do terceiro harmônico é

$$\mathbf{V}_{o3} = \frac{(4V_m/3\pi)\angle 0^\circ}{1 + j3\omega_0 RC} = \frac{4V_m}{3\pi\sqrt{1 + 9\omega_0^2 R^2 C^2}}\angle -\beta_3, \tag{16.53}$$

onde

$$\beta_3 = \operatorname{tg}^{-1} 3\omega_0 RC. \tag{16.54}$$

A expressão no domínio do tempo para a tensão de saída do terceiro harmônico é

$$v_{o3} = \frac{4V_m}{3\pi\sqrt{1 + 9\omega_0^2 R^2 C^2}}\operatorname{sen}(3\omega_0 t - \beta_3) \tag{16.55}$$

Daí, a expressão para o componente do k-ésimo harmônico da tensão de saída é

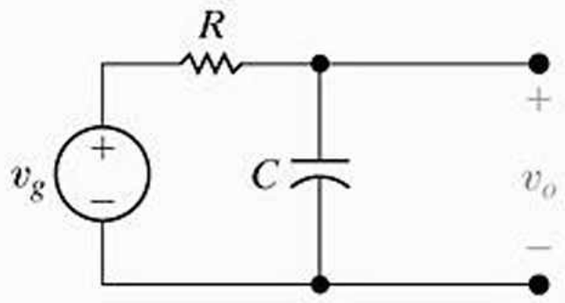
$$v_{ok} = \frac{4V_m}{k\pi\sqrt{1 + k^2\omega_0^2 R^2 C^2}}\operatorname{sen}(k\omega_0 t - \beta_k) \ (k \text{ é ímpar}) \tag{16.56}$$

onde

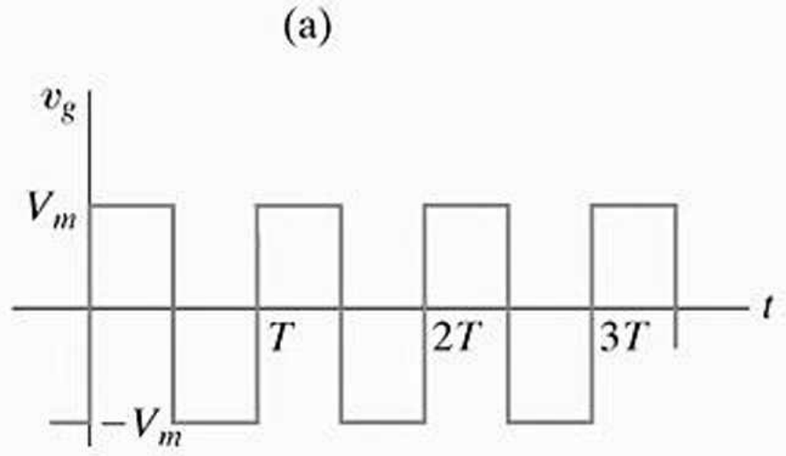
$$\beta_k = \operatorname{tg}^{-1} k\omega_0 RC. \ (k \text{ é ímpar}). \tag{16.57}$$

Escrevemos, agora, a representação em série de Fourier da tensão de saída:

$$v_o(t) = \frac{4V_m}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(n\omega_0 t - \beta_n)}{n\sqrt{1 + (n\omega_0 RC)^2}}. \tag{16.58}$$



(a)



(b)

Figura 16.12 ▲ Um circuito *RC* excitado por uma tensão periódica. (a) Circuito *RC* em série. (b) Tensão aplicada.

A dedução da Equação 16.58 não foi difícil. Contudo, embora tenhamos uma expressão analítica para a tensão de saída de regime permanente, a forma de $v_o(t)$ não fica imediatamente clara pela Equação 16.58. Como mencionamos antes, essa deficiência é um problema da série de Fourier. Todavia, a Equação 16.58 não é inútil, porque nos dá uma idéia da forma de onda de regime permanente de $v_o(t)$, se examinarmos a resposta de freqüência do circuito. Por exemplo, se C for grande, $1/n\omega_0 C$ é pequeno para os harmônicos de ordem superior. Assim, o capacitor curto-circuita os componentes de alta freqüência da onda de entrada e os harmônicos de ordem superior da Equação 16.58 são desprezíveis em comparação com os de ordem inferior. A Equação 16.58 reflete essa condição no sentido de que, para C grande,

$$v_o \approx \frac{4V_m}{\pi\omega_0 RC} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{sen}(n\omega_0 t - 90^\circ)$$

$$\approx \frac{-4V_m}{\pi\omega_0 RC} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos n\omega_0 t. \qquad (16.59)$$

A Equação 16.59 mostra que a amplitude dos harmônicos na tensão de saída decresce proporcionalmente a $1/n^2$, enquanto os harmônicos da tensão de entrada têm amplitude decrescente com $1/n$. Se C for tão grande que somente o componente fundamental é significativo, então, como primeira aproximação

$$v_o(t) \approx \frac{-4V_m}{\pi\omega_0 RC} \cos \omega_0 t, \qquad (16.60)$$

e a análise de Fourier nos diz que a onda quadrada de entrada é deformada, resultando uma saída senoidal.

Vamos ver, agora, o que acontece quando $C \to 0$. O circuito mostra que v_o e v_g são iguais quando $C = 0$, pois o ramo capacitivo parece como um circuito aberto em todas as freqüências. A Equação 16.58 prevê o mesmo resultado, pois à medida que $C \to 0$,

$$v_o = \frac{4V_m}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} n\omega_0 t. \qquad (16.61)$$

Mas a Equação 16.61 é idêntica à Equação 16.46 e, em conseqüência, $v_o \to v_g$ quando $C \to 0$.

Desse modo, a Equação 16.58 mostrou-se útil ao nos auxiliar a prever que a forma de onda da saída será uma versão muito distorcida da forma de onda da entrada, se C for grande, e uma versão razoavelmente fiel, se C for pequeno. No Capítulo 13, estudamos a distorção entre a entrada e a saída em termos da memória que a função de peso do sistema possui. No domínio da freqüência, examinamos a distorção entre a entrada e a saída de regime permanente em termos do modo como são alteradas a amplitude e a fase dos harmônicos do sinal de entrada. Quando o circuito altera significativamente as relações de amplitude e fase dos harmônicos da saída em relação aos da entrada, a saída é uma versão distorcida da entrada. Assim, no domínio da freqüência, falamos em distorção de amplitude e fase.

Para o circuito que apresentamos, a distorção de amplitude está presente porque as amplitudes dos harmônicos de entrada decrescem com $1/n$, ao passo que as amplitudes dos harmônicos de saída decrescem com

$$\frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{1 + (n\omega_0 RC)^2}}.$$

Esse circuito também exibe distorção de fase porque o ângulo de fase de cada harmônico de entrada é zero, ao passo que a fase do n-ésimo harmônico da saída é $-\text{tg}^{-1}\, n\omega_0 RC$.

Determinação direta da resposta de regime permanente

Podemos calcular a expressão para a resposta de regime permanente para o circuito RC simples da Figura 16.12(a) sem recorrer à representação em série de Fourier da dos sinais de entrada. Essa análise adicional acrescenta algo mais ao que já entendemos da abordagem da série de Fourier.

Para determinar a expressão de regime permanente para v_o por análise direta do circuito, raciocinamos da seguinte forma: a onda quadrada de excitação carrega o capacitor ora com $+V_m$, ora com $-V_m$. Depois de o circuito atingir o regime permanente, esse carregamento alternado torna-se periódico. Pela análise do circuito RC (Capítulo 7), sabemos que sua resposta a mudanças abruptas na tensão é exponencial. Assim, a forma de onda da tensão de regime permanente no capacitor da Figura 16.12(a) é a mostrada na Figura 16.13.

As expressões analíticas para $v_o(t)$ nos intervalos de tempo $0 \le t \le T/2$ e $T/2 \le t \le T$ são

$$v_o = V_m + (V_1 - V_m)e^{-t/RC}, \quad 0 \le t \le T/2; \qquad (16.62)$$

$$v_o = -V_m + (V_2 + V_m)e^{-[t-(T/2)]/RC}, \quad T/2 \le t \le T. \qquad (16.63)$$

Calculamos as equações 16.62 e 16.63 usando os métodos do Capítulo 7, como resumidos pela Equação 7.60. Obtemos os valores de V_1 e V_2 observando, pela Equação 16.62, que

$$V_2 = -V_m + (V_1 - V_m)e^{-T/2RC}, \qquad (16.64)$$

e, pela Equação 16.63, que

$$V_1 = -V_m + (V_2 + V_m)e^{-T/2RC}. \qquad (16.65)$$

Explicitando V_1 e V_2 nas equações 16.64 e 16.65, obtemos

$$V_2 = -V_1 = \frac{V_m(1 - e^{-T/2RC})}{1 + e^{-T/2RC}}. \qquad (16.66)$$

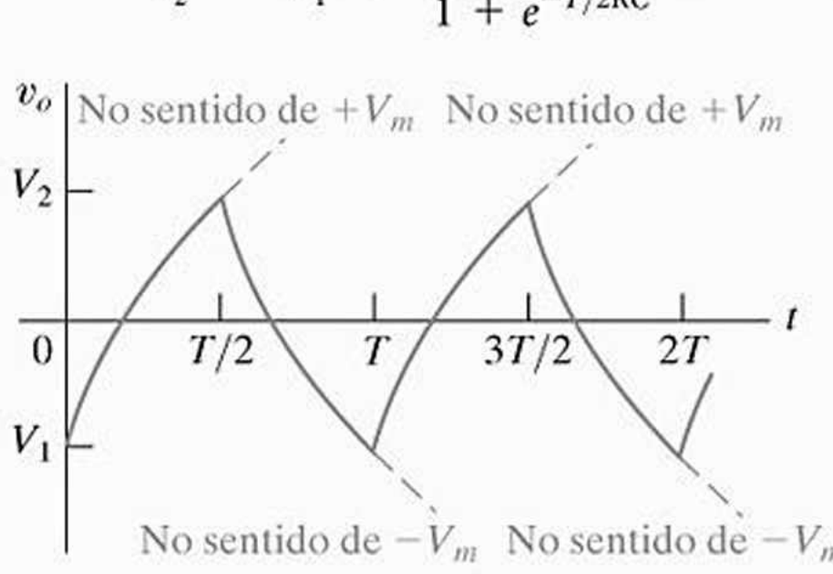


Figura 16.13 ▲ Forma de onda de regime permanente de v_o para o circuito na Figura 16.12(a).

Substituindo a Equação 16.66 nas equações 16.62 e 16.63, temos

$$v_o = V_m - \frac{2V_m}{1 + e^{-T/2RC}} e^{-t/RC}, \quad 0 \le t \le T/2, \tag{16.67}$$

e

$$v_o = -V_m + \frac{2V_m}{1 + e^{-T/2RC}} e^{-[t-(T/2)]/RC}, \quad T/2 \le t \le T. \tag{16.68}$$

As equações 16.67 e 16.68 indicam que $v_o(t)$ tem simetria de meia-onda e que, portanto, o valor médio de v_o é zero. Esse resultado está de acordo com a solução por série de Fourier para a resposta de regime permanente — ou seja, como o sinal de entrada não tem nenhum componente de freqüência zero, a resposta também não pode ter. As equações 16.67 e 16.68 também mostram o efeito da variação do valor do capacitor. Se C for pequeno, as funções exponenciais desaparecem rapidamente e $v_o = V_m$ entre 0 e $T/2$, e $v_o = -V_m$ entre $T/2$ e T. Em outras palavras, $v_o \to v_g$ quando $C \to 0$. Se C for grande, a forma da onda da saída torna-se triangular, como mostra a Figura 16.14. Observe que, para C grande, podemos aproximar os termos exponenciais $e^{-t/RC}$ e $e^{-[t-(T/2)]/RC}$ pelos termos lineares $1 - (t/RC)$ e $1 - \{[t - (T/2)]/RC\}$, respectivamente. A Equação 16.59 expressa a série de Fourier dessa forma de onda triangular.

A Figura 16.14 resume os resultados. A linha tracejada é a tensão de entrada, a linha sólida cinza representa a tensão de saída quando C é pequeno e a linha sólida preta representa a tensão de saída quando C é grande.

Por fim, a resposta de regime permanente das equações 16.67 e 16.68 é equivalente à solução da série de Fourier da Equação 16.58. Para verificar isso, simplesmente calculamos a série de Fourier da função periódica descrita pelas equações 16.67 e 16.68. Já percebemos que a resposta de tensão tem simetria de meia-onda. Em conseqüência, a série de Fourier contém somente harmônicos ímpares. Para k ímpar,

$$a_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2}\left(V_m - \frac{2V_m e^{-t/RC}}{1 + e^{-T/2RC}}\right)\cos k\omega_0 t\, dt$$

$$= \frac{-8RCV_m}{T[1 + (k\omega_0 RC)^2]} \quad (k \text{ é ímpar}), \tag{16.69}$$

$$b_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2}\left(V_m - \frac{2V_m e^{-t/RC}}{1 + e^{-T/2RC}}\right)\operatorname{sen} k\omega_0 t\, dt$$

$$= \frac{4V_m}{k\pi} - \frac{8k\omega_0 V_m R^2 C^2}{T[1 + (k\omega_0 RC)^2]} \quad (k \text{ é ímpar}). \tag{16.70}$$

Para mostrar que os resultados obtidos pelas equações 16.69 e 16.70 são consistentes com a Equação 16.58, temos de provar que

$$\sqrt{a_k^2 + b_k^2} = \frac{4V_m}{k\pi}\frac{1}{\sqrt{1 + (k\omega_0 RC)^2}}, \tag{16.71}$$

e que

$$\frac{a_k}{b_k} = -k\omega_0 RC. \tag{16.72}$$

Fica a cargo do leitor verificar as equações 16.69–16.72, nos problemas 16.22 e 16.23, apresentados no final do capítulo. As equações 16.71 e 16.72 são usadas com as equações 16.38 e 16.39 para calcular a expressão da série de Fourier da Equação 16.58; deixamos os detalhes para o Problema 16.24, no final do capítulo.

Com esse circuito ilustrativo, mostramos como usar a série de Fourier, em conjunto com o princípio da superposição, para obter a resposta de regime permanente para uma função de alimentação periódica. Novamente, a principal deficiência da série de Fourier é a dificuldade de visualizar a forma de onda da resposta. Contudo, raciocinando em termos da resposta de freqüência de um circuito, podemos deduzir uma razoável aproximação da resposta de regime permanente, usando um número finito de termos adequados na representação em série de Fourier. (Veja os problemas 16.28 e 16.29, apresentados no final deste capítulo.)

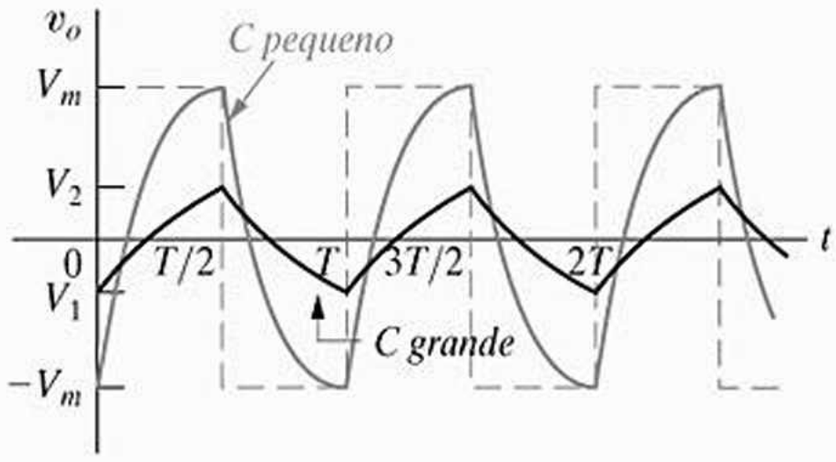
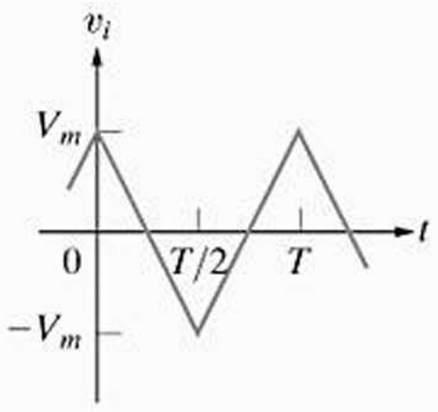


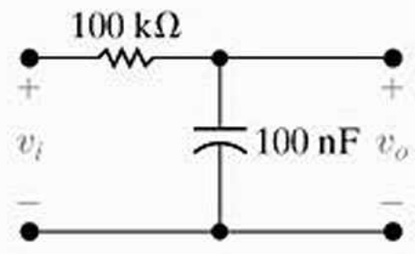
Figura 16.14 ▲ Efeito do valor do capacitor na resposta de regime permanente.

✔ PROBLEMAS PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 2 — Saber analisar a resposta de um circuito a uma forma de onda periódica

16.5 A onda de tensão triangular vista à esquerda é aplicada ao circuito mostrado à direita. Calcule os três primeiros termos não-nulos da série de Fourier da tensão de regime permanente v_o se $V_m = 281{,}25\pi^2$ mV e o período da tensão de entrada for 200π ms.



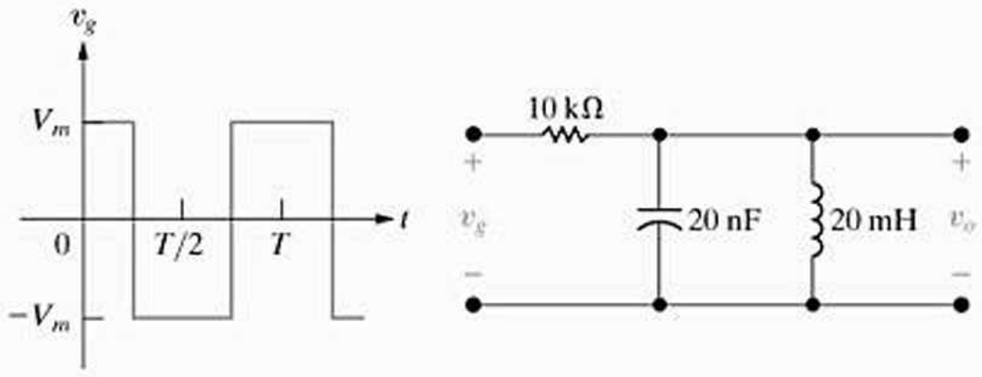


Resposta: 2.238,83 cos(10t – 5,71°) + 239,46 cos(30t – 16,70°) + 80,50 cos(50t – 26,57°) + ... mV

16.6 A onda de tensão quadrada mostrada à esquerda é aplicada ao circuito mostrado à direita.

a) Calcule os quatro primeiros termos não-nulos da série de Fourier da tensão de regime permanente v_o se $V_m = 210\pi$ V e o período da tensão de entrada for $0{,}2\pi$ ms.

b) Qual harmônico domina a tensão de saída? Explique.



Resposta: (a) $17{,}5\cos(10.000t + 88{,}81°) + 26{,}14\cos(30.000t - 95{,}36°) + 168\cos(50.000t) + 17{,}32\cos(70.000t + 98{,}30°) + \ldots$ V;

(b) O quinto harmônico cuja freqüência regular é 10.000 rad/s, pois o circuito é um filtro passa-faixa com uma freqüência central de 50.000 rad/s e um fator de qualidade de 10.

NOTA: Tente resolver também os problemas 16.27 e 16.28, apresentados no final deste capítulo.

16.6 Cálculos de potência média de funções periódicas

Se tivermos a representação em série de Fourier da tensão e da corrente nos terminais de um circuito linear de parâmetros concentrados, podemos expressar facilmente a potência média do circuito em função das tensões e correntes harmônicas. Usando a forma trigonométrica da série de Fourier, expressa na Equação 16.38, escrevemos a tensão e a corrente periódicas nos terminais de uma rede como

$$v = V_{cc} + \sum_{n=1}^{\infty} V_n \cos(n\omega_0 t - \theta_{vn}), \qquad (16.73)$$

$$i = I_{cc} + \sum_{n=1}^{\infty} I_n \cos(n\omega_0 t - \theta_{in}). \qquad (16.74)$$

A notação usada nas equações 16.73 e 16.74 é definida da seguinte forma:

V_{cc} = a amplitude do componente contínuo da tensão,

V_n = a amplitude do harmônico de ordem n da tensão,

θ_{vn} = o ângulo de fase do harmônico de ordem n da tensão,

I_{cc} = a amplitude do componente contínuo da corrente,

I_n = a amplitude do harmônico de ordem n da corrente,

θ_{in} = o ângulo de fase do harmônico de ordem n da corrente.

Consideramos que o sentido de referência da corrente seja o da queda de tensão nos terminais (usando a convenção passiva), de modo que a potência instantânea nos terminais seja vi. A potência média é

$$P = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} p\,dt = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} vi\,dt. \qquad (16.75)$$

Para determinar a expressão para a potência média, substituímos as equações 16.73 e 16.74 na Equação 16.75 e integramos. À primeira vista, a tarefa parece colossal, pois vi é o produto de duas séries finitas. Contudo, os únicos termos que sobrevivem à integração são os que envolvem produtos de tensão e corrente de mesma freqüência. Uma revisão das equações 16.8–16.10 deve convencê-lo da validade dessa observação. Assim, a Equação 16.75 reduz-se a

$$P = \frac{1}{T}V_{cc}I_{cc}t\Big|_{t_0}^{t_0+T} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} V_n I_n \cos(n\omega_0 t - \theta_{vn}) \times \cos(n\omega_0 t - \theta_{in})\,dt. \qquad (16.76)$$

Agora, usando a identidade trigonométrica

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha + \beta),$$

simplificamos a Equação 16.76 para

$$P = V_{cc}I_{cc} + \frac{1}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_n I_n}{2}\int_{t_0}^{t_0+T}[\cos(\theta_{vn} - \theta_{in}) + \cos(2n\omega_0 t - \theta_{vn} - \theta_{in})]dt, \qquad (16.77)$$

Como a integral do segundo termo do integrando é nula,

$$P = V_{cc}I_{cc} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_n I_n}{2}\cos(\theta_{vn} - \theta_{in}). \qquad (16.78)$$

A Equação 16.78 é particularmente importante porque mostra que, no caso de uma interação entre uma tensão periódica e a corrente periódica correspondente, a potência média total é a soma das potências médias obtidas da interação entre correntes e tensões de mesma freqüência. Correntes e tensões de freqüências diferentes não interagem para produzir potência média. Portanto, em cálculos de potência média envolvendo funções periódicas, a potência média total é a soma das potências médias de cada harmônico de tensão e corrente consideradas separadamente. O Exemplo 16.4 ilustra o cálculo da potência média envolvendo uma tensão periódica.

Exemplo 16.4 Cálculo da potência média para um circuito com uma fonte de tensão periódica

Suponha que a onda quadrada do Exemplo 16.3 seja aplicada aos terminais de um resistor de 15 Ω. O valor de V_m é 60 V e o de T é 5 ms.

a) Escreva os primeiros cinco termos não-nulos da série de Fourier de $v(t)$. Use a forma trigonométrica dada na Equação 16.38.

b) Calcule a potência média associada a cada termo em (a).

c) Calcule a potência média total fornecida ao resistor de 15 Ω.

d) Qual porcentagem da potência total é fornecida pelos primeiros cinco termos da série de Fourier?

Solução

a) O componente contínuo de $v(t)$ é

$$a_v = \frac{(60)(T/4)}{T} = 15 \text{ V}.$$

Pelo Exemplo 16.3, temos

$$A_1 = \sqrt{2}\,60/\pi = 27{,}01 \text{ V},$$
$$\theta_1 = 45°,$$
$$A_2 = 60/\pi = 19{,}10 \text{ V},$$
$$\theta_2 = 90°,$$
$$A_3 = 20\sqrt{2}/\pi = 9{,}00 \text{ V},$$
$$\theta_3 = 135°,$$
$$A_4 = 0,$$
$$\theta_4 = 0°,$$
$$A_5 = 5{,}40 \text{ V},$$
$$\theta_5 = 45°,$$
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi(1000)}{5} = 400\pi \text{ rad/s}.$$

Assim, usando os primeiros cinco termos não-nulos da série de Fourier,

$$v(t) = 15 + 27{,}01\cos(400\pi t - 45°) + 19{,}10\cos(800\pi t - 90°) + 9{,}00\cos(1.200\pi t - 135°) + 5{,}40\cos(2.000\pi t - 45°) + \ldots \text{ V}.$$

b) Como a tensão é aplicada aos terminais de um resistor, podemos determinar a potência associada a cada termo da seguinte forma:

$$P_{cc} = \frac{15^2}{15} = 15 \text{ W},$$
$$P_1 = \frac{1}{2}\frac{27{,}01^2}{15} = 24{,}32 \text{ W},$$
$$P_2 = \frac{1}{2}\frac{19{,}10^2}{15} = 12{,}16 \text{ W},$$
$$P_3 = \frac{1}{2}\frac{9^2}{15} = 2{,}70 \text{ W},$$
$$P_5 = \frac{1}{2}\frac{5{,}4^2}{15} = 0{,}97 \text{ W}.$$

c) Para obter a potência média total fornecida ao resistor de 15 Ω, em primeiro lugar calculamos o valor eficaz de $v(t)$:

$$V_{ef} = \sqrt{\frac{(60)^2(T/4)}{T}} = \sqrt{900} = 30 \text{ V}.$$

A potência média total fornecida ao resistor de 15 Ω é

$$P_T = \frac{30^2}{15} = 60 \text{ W}.$$

d) A potência total fornecida pelos cinco primeiros termos não-nulos é

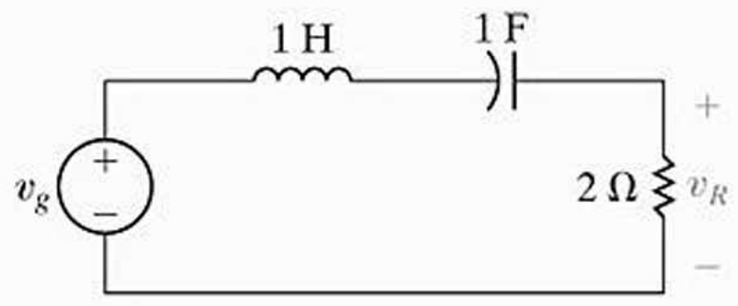
$$P = P_{cc} + P_1 + P_2 + P_3 + P_5 = 55{,}15 \text{ W}.$$

Isto é, (55,15/60)(100), ou 91,92% do total.

✔ PROBLEMA PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 3 — Saber estimar a potência média fornecida a um resistor usando poucos coeficientes de Fourier

16.7 A tensão trapezoidal do Problema para Avaliação 16.3 é aplicada ao circuito mostrado. Se $12V_m$ = 296,09 V e T = 2.094,4 ms, calcule a potência média fornecida ao resistor de 2 Ω.



Resposta: 60,75 W.

NOTA: Tente resolver também os problemas 16.32 e 16.33, apresentados no final deste capítulo.

16.7 Valor eficaz de uma função periódica

O valor eficaz de uma função periódica pode ser expresso em termos dos coeficientes de Fourier; por definição,

$$F_{\text{ef}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)^2\,dt}. \tag{16.79}$$

Representando $f(t)$ por sua série de Fourier, obtemos

$$F_{\text{ef}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\left[a_v + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(n\omega_0 t - \theta_n\right)\right]^2 dt}. \tag{16.80}$$

O cálculo da integral do quadrado da função é simplificado pelo fato de os únicos termos que sobrevivem à integração serem os relacionados ao termo constante e aos produtos dos harmônicos de mesma freqüência. A integral de todos os outros produtos é zero. Assim, a Equação 16.80 reduz-se a

$$F_{\text{ef}} = \sqrt{\frac{1}{T}\left(a_v^2 T + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{T}{2}A_n^2\right)}$$

$$= \sqrt{a_v^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n^2}{2}}$$

$$= \sqrt{a_v^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{\sqrt{2}}\right)^2}. \tag{16.81}$$

A Equação 16.81 mostra que o valor eficaz de uma função periódica é a raiz quadrada da soma do quadrado do valor eficaz de cada harmônico e do quadrado do valor constante. Por exemplo, vamos supor que uma tensão periódica seja representada pela série finita

$$v = 10 + 30\cos(\omega_0 t - \theta_1) + 20\cos(2\omega_0 t - \theta_2) + 5\cos(3\omega_0 t - \theta_3) + 2\cos(5\omega_0 t - \theta_5).$$

O valor eficaz dessa tensão é

$$V = \sqrt{10^2 + (30/\sqrt{2})^2 + (20/\sqrt{2})^2 + (5/\sqrt{2})^2 + (2/\sqrt{2})^2}$$
$$= \sqrt{764{,}5} = 27{,}65\ \text{V}.$$

Normalmente, é necessário um número infinito de termos para representar uma função periódica por uma série de Fourier e, em conseqüência, a Equação 16.81 dá como resultado uma estimativa do valor verdadeiro. Ilustramos esse resultado no Exemplo 16.5.

16.8 Forma exponencial da série de Fourier

A forma exponencial da série de Fourier é interessante porque nos permite expressar a série com concisão. A forma exponencial da série é

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}, \tag{16.82}$$

onde

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt. \tag{16.83}$$

Para chegar às equações 16.82 e 16.83, voltemos à Equação 16.2 e substituamos as funções co-seno e seno por combinações de exponenciais:

$$\cos n\omega_0 t = \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2}, \tag{16.84}$$

$$\operatorname{sen} n\omega_0 t = \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2j}. \tag{16.85}$$

Substituindo as equações 16.84 e 16.85 na Equação 16.2, obtemos

$$\begin{aligned} f(t) &= a_v + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2}(e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}) + \frac{b_n}{2j}(e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}) \\ &= a_v + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n - jb_n}{2}\right)e^{jn\omega_0 t} + \left(\frac{a_n + jb_n}{2}\right)e^{-jn\omega_0 t}. \end{aligned} \tag{16.86}$$

Agora, definimos C_n como

$$C_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = \frac{A_n}{2}\angle -\theta_n, \quad n = 1, 2, 3, \cdots \tag{16.87}$$

Pela definição de C_n,

$$C_n = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt - j\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\operatorname{sen} n\omega_0 t\,dt\right]$$

Exemplo 16.5 Estimativa do valor eficaz de uma função periódica

Use a Equação 16.81 para estimar o valor eficaz da tensão no Exemplo 16.4.

Solução

Pelo Exemplo 16.4,

$V_{cc} = 15$ V,

$V_1 = 27{,}01/\sqrt{2}$ V, o valor eficaz da fundamental,

$V_2 = 19{,}10/\sqrt{2}$ V, o valor eficaz do segundo harmônico,

$V_3 = 9{,}00/\sqrt{2}$ V, o valor eficaz do terceiro harmônico,

$V_5 = 5{,}40/\sqrt{2}$ V, o valor eficaz do quinto harmônico.

Assim,

$$V_{\text{ef}} = \sqrt{15^2 + \left(\frac{27{,}01}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{19{,}10}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{9{,}00}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{5{,}40}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$= 28{,}76\ \text{V}.$$

Pelo Exemplo 16.4, o valor eficaz correto é 30 V. Aproximamo-nos desse valor incluindo cada vez mais harmônicos na Equação 16.81. Por exemplo, se incluirmos harmônicos até $k = 9$, o valor calculado passa a ser 29,32 V.

NOTA: Avalie o que você entendeu desse material tentando resolver os problemas 16.36 e 16.37, apresentados no final deste capítulo.

$$= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)(\cos n\omega_0 t - j\,\text{sen}\, n\omega_0 t)\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt, \tag{16.88}$$

o que conclui a dedução da Equação 16.83. Para completarmos a dedução da Equação 16.82, observamos, em primeiro lugar, que, da Equação 16.88,

$$C_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} {}_{t_0} f(t)\,dt = a_v. \tag{16.89}$$

Em seguida, observamos que

$$C_{-n} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{jn\omega_0 t}\,dt = C_n^* = \frac{1}{2}(a_n + jb_n). \tag{16.90}$$

Substituindo as equações 16.87, 16.89 e 16.90 na Equação 16.86, obtemos

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(C_n e^{jn\omega_0 t} + C_n^* e^{-jn\omega_0 t})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n^* e^{-jn\omega_0 t}. \tag{16.91}$$

Observe que o segundo somatório do lado direito da Equação 16.91 é equivalente a somar os termos $C_n e^{jn\omega_0 t}$ quando n varia de -1 a $-\infty$; isto é,

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n^* e^{-jn\omega_0 t} = \sum_{n=-1}^{-\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}. \tag{16.92}$$

Como o somatório de -1 a $-\infty$ é o mesmo que o somatório de $-\infty$ a -1, usamos a Equação 16.92 para reescrever a Equação 16.91:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{-\infty}^{-1} C_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}, \tag{16.93}$$

o que conclui a dedução da Equação 16.82.

Também podemos expressar o valor eficaz de uma função periódica em termos dos coeficientes complexos de Fourier. Pelas equações 16.81, 16.87 e 16.89,

$$F_{\text{ef}} = \sqrt{a_v^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2 + b_n^2}{2}}, \tag{16.94}$$

$$|C_n| = \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2}, \tag{16.95}$$

$$C_0^2 = a_v^2. \tag{16.96}$$

Substituindo as equações 16.95 e 16.96 na Equação 16.94, obtemos a expressão desejada:

$$F_{\text{ef}} = \sqrt{C_0^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty}|C_n|^2}. \tag{16.97}$$

O Exemplo 16.6 ilustra o processo de representação de uma função periódica em série de Fourier na forma exponencial.

Exemplo 16.6 Determinação da forma exponencial da série de Fourier

Determine a forma exponencial da série de Fourier para a tensão da Figura 16.15.

Solução

Usando $-\tau/2$ como ponto de partida para a integração temos, pela Equação 16.83,

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_m e^{-jn\omega_0 t}\,dt$$

$$= \frac{V_m}{T}\left(\frac{e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0}\right)\Bigg|_{-\tau/2}^{\tau/2}$$

$$= \frac{jV_m}{n\omega_0 T}(e^{-jn\omega_0\tau/2} - e^{jn\omega_0\tau/2})$$

$$= \frac{2V_m}{n\omega_0 T}\,\text{sen}\, n\omega_0\tau/2.$$

Nesse caso, como $v(t)$ tem simetria par, $b_n = 0$ para todo n e, portanto, C_n deve ser real. Além do mais, C_n é proporcional a $(\text{sen}\, x)/x$, já que pode ser expresso como

$$C_n = \frac{V_m\tau}{T}\frac{\text{sen}\,(n\omega_0\tau/2)}{n\omega_0\tau/2}.$$

Falaremos mais sobre esse assunto na Seção 16.9. A representação em série exponencial de $v(t)$ é

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{V_m\tau}{T}\right)\frac{\text{sen}\,(n\omega_0\tau/2)}{n\omega_0\tau/2}e^{jn\omega_0 t}$$

$$= \left(\frac{V_m\tau}{T}\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\text{sen}\,(n\omega_0\tau/2)}{n\omega_0\tau/2}e^{jn\omega_0 t}.$$

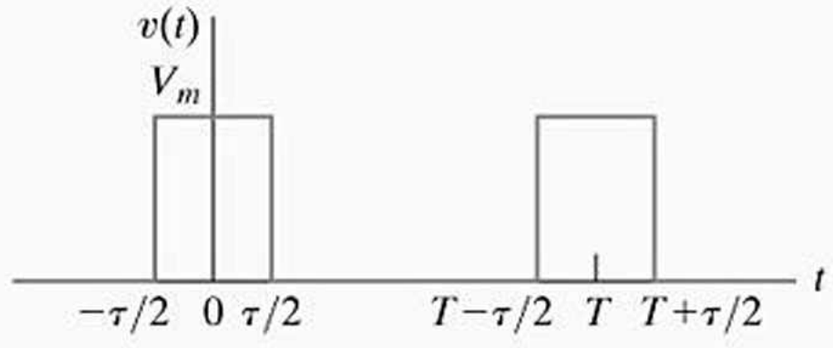


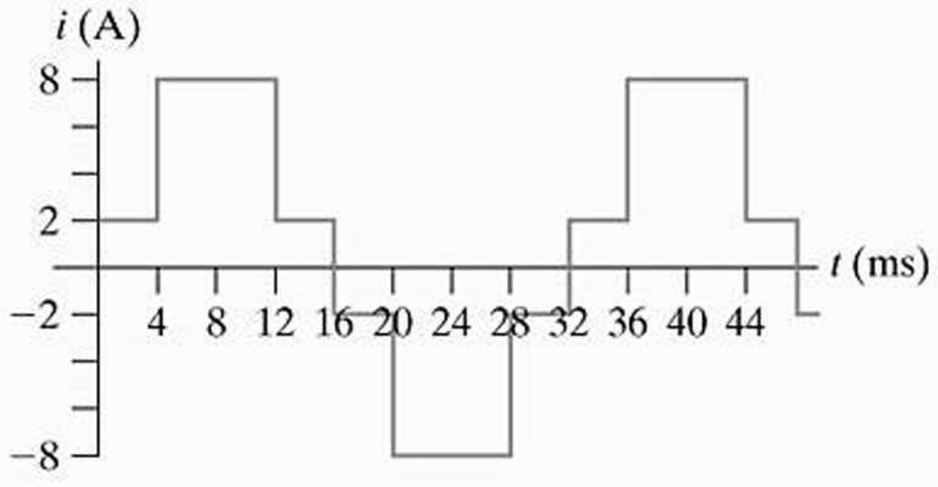
Figura 16.15 ▲ Tensão periódica para o Exemplo 16.6.

✔ PROBLEMAS PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 4 — Saber calcular a forma exponencial dos coeficientes de Fourier para uma onda periódica

16.8 Calcule os coeficientes C_n de Fourier para a função periódica mostrada.

Sugestão: aproveite o fato de que $C_n = (a_n - jb_n)/2$.



Resposta: $C_n = -j\frac{4}{\pi n}(1 + 3\cos\frac{n\pi}{4})$, n ímpar.

16.9 a) Calcule o valor eficaz da corrente do Problema para avaliação 16.8.

b) Estime o valor eficaz usando os coeficientes de C_1 a C_{11}.

c) Qual é a porcentagem de erro no valor obtido em (b), com base no valor verdadeiro determinado em (a)?

d) No caso dessa função periódica, poderíamos usar um número menor de termos para estimar o valor eficaz e, ainda assim, garantir que o erro fosse menor do que 1%?

Resposta: (a) $\sqrt{34}$ A; (b) 5,777 A; (c) –0,93%; (d) sim; se fossem usados os coeficientes de C_1 a C_9, o erro seria –0,98%.

NOTA: Tente resolver também os problemas 16.44 e 16.45, apresentados no final deste capítulo.

16.9 Espectros de amplitude e de fase

Uma função do tempo periódica é definida por seus coeficientes de Fourier e seu período. Em outras palavras, quando conhecemos a_0, a_n, b_n e T, podemos construir $f(t)$, ao menos teoricamente. Quando conhecemos a_n e b_n, também conhecemos a amplitude (A_n) e o ângulo de fase ($-\theta_n$) de cada harmônico. Mais uma vez, de modo geral, não podemos visualizar o aspecto da função periódica no domínio do tempo, a partir dos coeficientes e dos ângulos de fase; contudo, reconhecemos que essas quantidades caracterizam a função periódica completamente. Desse modo, se dispusermos de tempo de computação suficiente, poderemos sintetizar a forma de onda no domínio do tempo pelos dados de amplitude e ângulo de fase. Além disso, quando uma função periódica alimenta um circuito de alta seletividade de freqüência, a série de Fourier da resposta de regime permanente é dominada por apenas alguns termos. Assim, a descrição da resposta em termos de amplitude e fase pode nos dizer qual é a forma de onda da saída.

Podemos representar graficamente uma função periódica em termos da amplitude e do ângulo de fase de cada termo da série de Fourier de $f(t)$. O gráfico da amplitude de cada termo em relação à freqüência é denominado *espectro de amplitude* de $f(t)$ e o gráfico do ângulo de fase em relação à freqüência é denominado *espectro de fase* de $f(t)$. Como a amplitude e ângulo de fase são especificados para valores discretos da freqüência (isto é, em ω_0, $2\omega_0$, $3\omega_0$, ...), esses gráficos também são denominados *espectros de linhas*.

Um exemplo de espectros de amplitude e de fase

Espectros de amplitude e de fase são constituídos a partir da Equação 16.38 (A_n e $-\theta_n$) ou da Equação 16.82 (C_n). Usaremos a Equação 16.82 e deixaremos os gráficos baseados na Equação 16.38 para o Problema 16.48, no final do capítulo. Para ilustrar os espectros de amplitude e de fase, a partir da forma exponencial da série de Fourier, usamos a tensão periódica do Exemplo 16.6. Para auxiliar a discussão, admitimos que $V_m = 5$ V e $\tau = T/5$.

Pelo Exemplo 16.6,

$$C_n = \frac{V_m\tau}{T}\frac{\operatorname{sen}(n\omega_0\tau/2)}{n\omega_0\tau/2}, \tag{16.98}$$

que, para os valores de V_m e τ definidos anteriormente, reduz-se a

$$C_n = 1\frac{\operatorname{sen}(n\pi/5)}{n\pi/5}. \tag{16.99}$$

A Figura 16.16 mostra o gráfico do módulo de C_n dado pela Equação 16.99, para valores de n na faixa de –10 a +10. A figura mostra claramente que a envoltória do espectro da amplitude é a função $|(\operatorname{sen} x)/x|$. Usamos a ordem do harmônico como escala de freqüência porque o valor numérico de T não é especificado. Quando conhecemos T, também conhecemos ω_0 e a freqüência correspondente a cada harmônico.

A Figura 16.17 apresenta o gráfico de $|(\operatorname{sen} x)/x|$ em relação a x, que está em radianos. Ele mostra que a função passa por zero sempre que x for um inteiro múltiplo de π. Pela Equação 16.98,

$$n\omega_0\left(\frac{\tau}{2}\right) = \frac{n\pi\,\tau}{T} = \frac{n\pi}{T/\tau}. \tag{16.100}$$

Pela Equação 16.100, deduzimos que o espectro da amplitude passa por zero sempre que $n\tau/T$ for um inteiro. Por exemplo, no gráfico, τ/T é 1/5 e, em conseqüência, a envoltória passa por zero em n = 5, 10, 15, 10, 15 e assim por diante. Em outras palavras, o quinto, décimo, décimo quinto... harmônicos são todos nulos. Se aumentarmos a recíproca de τ/T, o número de harmônicos a cada π radianos aumentará. Se $n\pi/T$ não for um número inteiro, ainda assim o espectro da amplitude tem como envoltória $|(\text{sen}\,x)/x|$. Contudo, ela não é nula em múltiplos inteiros de ω_0.

Como C_n é real para todo n, o ângulo de fase associado a C_n é zero ou 180°, dependendo do sinal algébrico de (sen $n\pi/5$)/($n\pi/5$). Por exemplo, o ângulo de fase é zero para n = 0, ±1, ±2, ±3 e ±4. Não é definido em $n = \pm 5$, pois $C_{\pm 5}$ é zero. O ângulo de fase é 180° em $n = \pm 6, \pm 7, \pm 8$ e ±9 e não é definido em ±10. Esse padrão se repete à medida que n cresce. A Figura 16.18 mostra o gráfico do ângulo de C_n dado pela Equação 16.98.

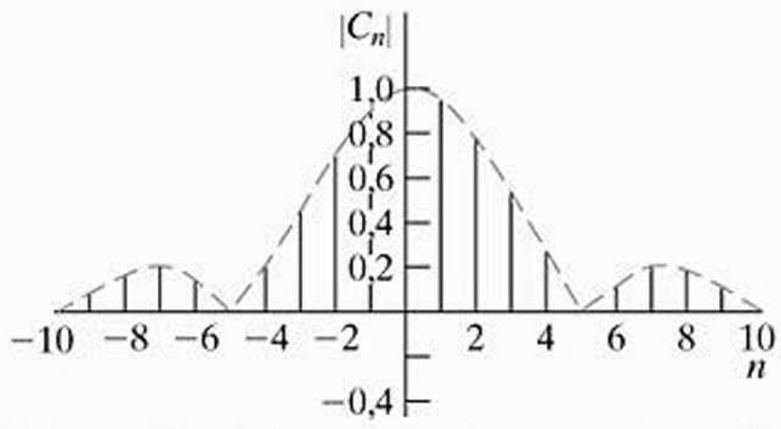


Figura 16.16 ▲ Gráfico de $|C_n|$ em relação a n quando $\tau = T/5$ para a tensão do Exemplo 16.6.

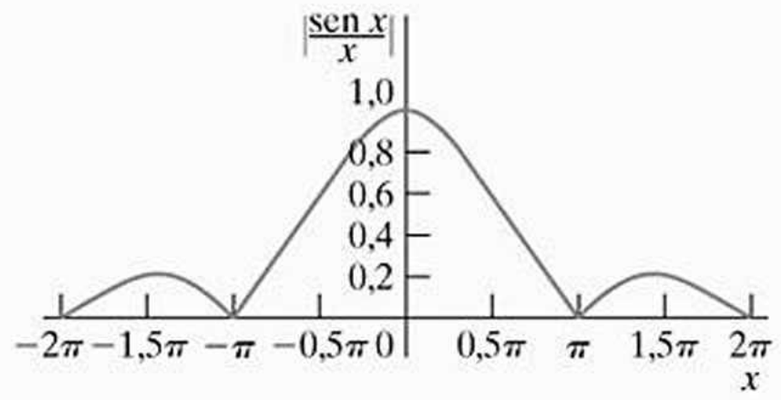


Figura 16.17 ▲ Gráfico de $|(\text{sen}\,x)/x|$ em relação a x.

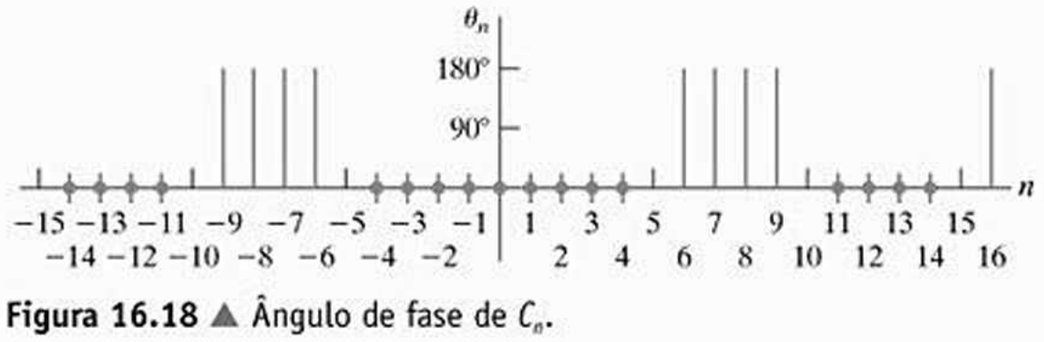


Figura 16.18 ▲ Ângulo de fase de C_n.

O que acontece com os espectros de amplitude e fase se $f(t)$ for deslocada ao longo do eixo do tempo? Para saber, deslocamos a tensão periódica do Exemplo 16.6 t_0 unidades para a direita. Por hipótese,

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}. \tag{16.101}$$

Portanto,

$$v(t - t_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0(t-t_0)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-jn\omega_0 t_0} e^{jn\omega_0 t}, \tag{16.102}$$

o que indica que deslocar a origem não tem nenhum efeito sobre o espectro da amplitude, pois

$$|C_n| = |C_n e^{-jn\omega_0 t_0}|. \tag{16.103}$$

Contudo, se observarmos a Equação 16.87, perceberemos que o espectro de fase mudou para $-(\theta_n + n\omega_0 t_0)$ rads. Por exemplo, vamos deslocar a tensão periódica do Exemplo 16.1 $\tau/2$ unidades para a direita. Como antes, admitimos que $\tau = T/5$; então, o novo ângulo de fase θ'_n é

$$\theta'_n = -(\theta_n + n\pi/5). \tag{16.104}$$

Plotamos a Equação 16.104 no gráfico da Figura 16.19 para n na faixa de −8 a +8. Observe que não há nenhum ângulo de fase associado ao coeficiente de amplitude zero.

O leitor talvez esteja se perguntando por que demos tanta atenção ao espectro de amplitude da forma de onda do Exemplo 16.6. A razão é que essa forma de onda proporciona um excelente exemplo para a transição da representação de uma função periódica em série de Fourier para a representação de uma função não periódica por meio da transformada de Fourier. Discutiremos a transformada de Fourier no Capítulo 17.

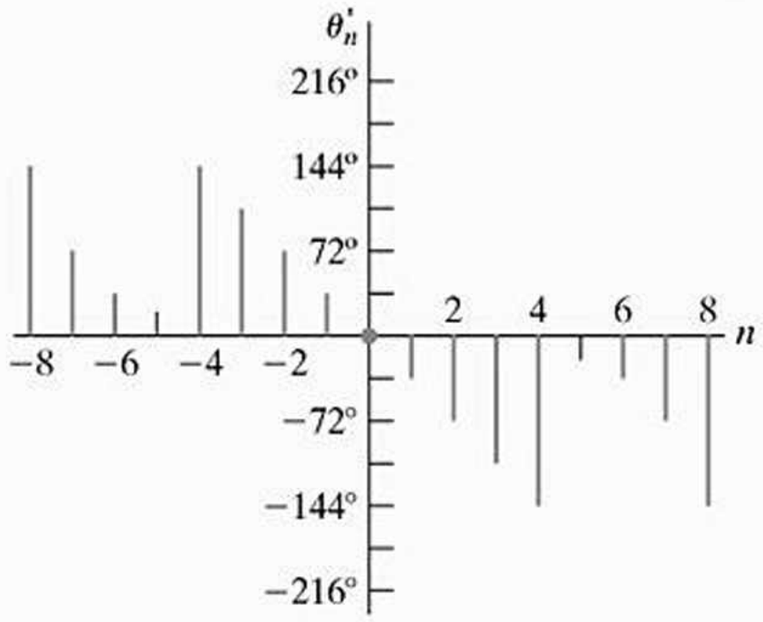


Figura 16.19 ▲ Gráfico de θ'_n *versus* n para a Equação 16.104.

✔ PROBLEMA PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 4 — Saber calcular a forma exponencial dos coeficientes de Fourier para uma onda periódica

16.10 A função do Problema para avaliação 16.8 é deslocada 8 ms para a direita ao longo do eixo do tempo. Escreva a série de Fourier na forma exponencial para a corrente periódica.

Resposta:

$$i(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=-\infty\,(\text{ímpar})}^{\infty} \frac{1}{n}(1 + 3\cos\frac{n\pi}{4})e^{-(j\pi/2)(n+1)}e^{jn\omega_0 t}\ \text{A}.$$

NOTA: Tente resolver também os problemas 16.48 e 16.49, apresentados no final deste capítulo.

Resumo

Função periódica é aquela que se repete a intervalos regulares.

- Período é o menor intervalo de tempo (T) que uma função periódica pode ser deslocada para produzir uma função idêntica a ela mesma.
- Série de Fourier é uma série infinita usada para representar uma função periódica. A série consiste em um termo constante e um número infinito de co-senóides e senóides relacionados harmonicamente.
- *Freqüência fundamental* é a freqüência correspondente ao período fundamental ($f_0 = 1/T$ ou $\omega_0 = 2\pi f_0$).
- *Harmônicos* são múltiplos inteiros da freqüência fundamental.
- *Coeficientes de Fourier* são o termo constante e as amplitudes das senóides e co-senóides da série de Fourier. (Veja as equações 16.3–16.5.)
- Cinco tipos de simetria são usados para simplificar o cálculo dos coeficientes de Fourier:
  - *das funções pares,* em que todos os termos em seno se anulam
  - *das funções ímpares*, em que todos os termos em co-seno e o termo constante se anulam
  - *de meia-onda,* em que todos os harmônicos pares se anulam
  - *de quarto de onda par,* em que a série contém somente harmônicos ímpares em co-seno
  - *de quarto de onda ímpar,* em que a série contém somente harmônicos ímpares em seno.
- Na forma alternativa da série de Fourier, cada harmônico é representado por um único termo da forma $A_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n)$.
- No regime permanente, o sinal de saída de um circuito linear é determinado pela soma (superposição) da resposta do circuito a cada componente de Fourier do sinal de entrada. A resposta a cada componente individual da entrada é determinada por análise no domínio da freqüência.
- A forma de onda do sinal de resposta é difícil de se obter sem a ajuda de um computador. Às vezes, as características de resposta de freqüência do circuito podem ser usadas para averiguar o grau de semelhança entre o sinal de saída e o sinal de entrada.
- Somente harmônicos de mesma freqüência interagem para produzir a potência média. A potência média total é a soma das potências médias associadas a cada freqüência.
- O valor eficaz de uma função periódica pode ser estimado pelos coeficientes de Fourier. (Veja as equações 16.81, 16.94 e 16.97.)
- A série de Fourier também pode ser escrita em forma exponencial, usando a identidade de Euler para substituir os termos em co-seno e seno por expressões exponenciais equivalentes.
- A série de Fourier é usada para prever a resposta de regime permanente de um sistema quando ele é submetido a um sinal periódico. A série auxilia a determinação da resposta de regime permanente, transferindo a análise do domínio do tempo para o domínio da freqüência.

Problemas

Seções 16.1–16.2

16.1* Para cada uma das funções periódicas da Figura P16.1, especifique

a) ω_0 em radianos por segundo

b) f_0 em hertz

c) o valor de a_v

d) as equações para a_k e b_k

e) $v(t)$ como uma série de Fourier

16.2* Determine as expressões da série de Fourier para as tensões periódicas da Figura P16.2. Observe que a Figura P16.2(a) mostra uma onda quadrada; a Figura P16.2(b) mostra uma onda na saída de um retificador de onda completa, onde $v(t) = V_m \operatorname{sen}(\pi/T)t$, $0 \leq t \leq T$ e a Figura P16.2(c) ilustra uma onda na saída de um retificador de meia-onda, onde $v(t) = V_m \operatorname{sen}(2\pi/T)t$, $0 \leq t \leq T/2$.

Figura P16.1

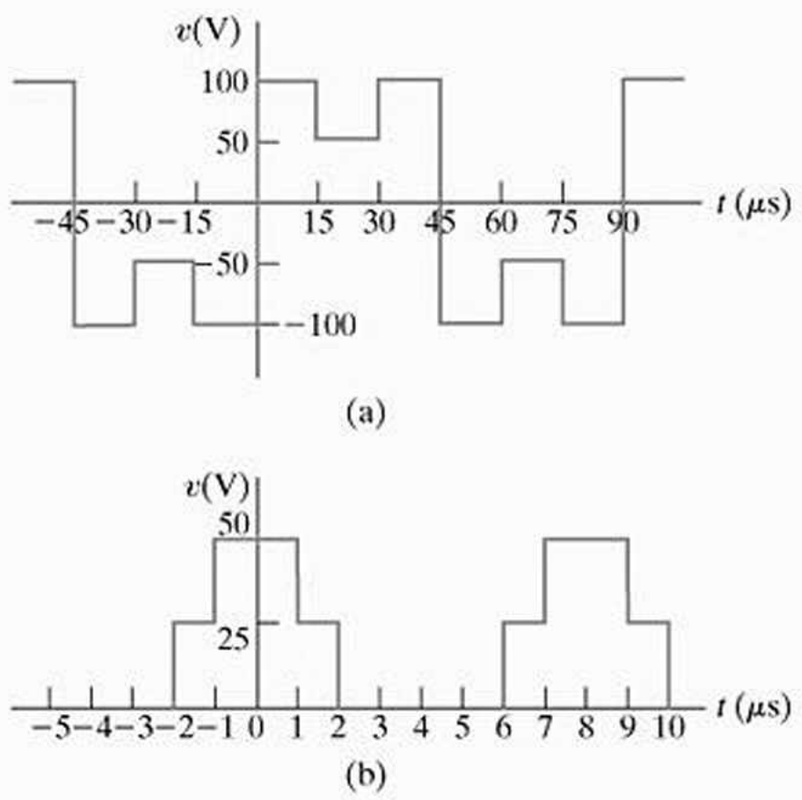
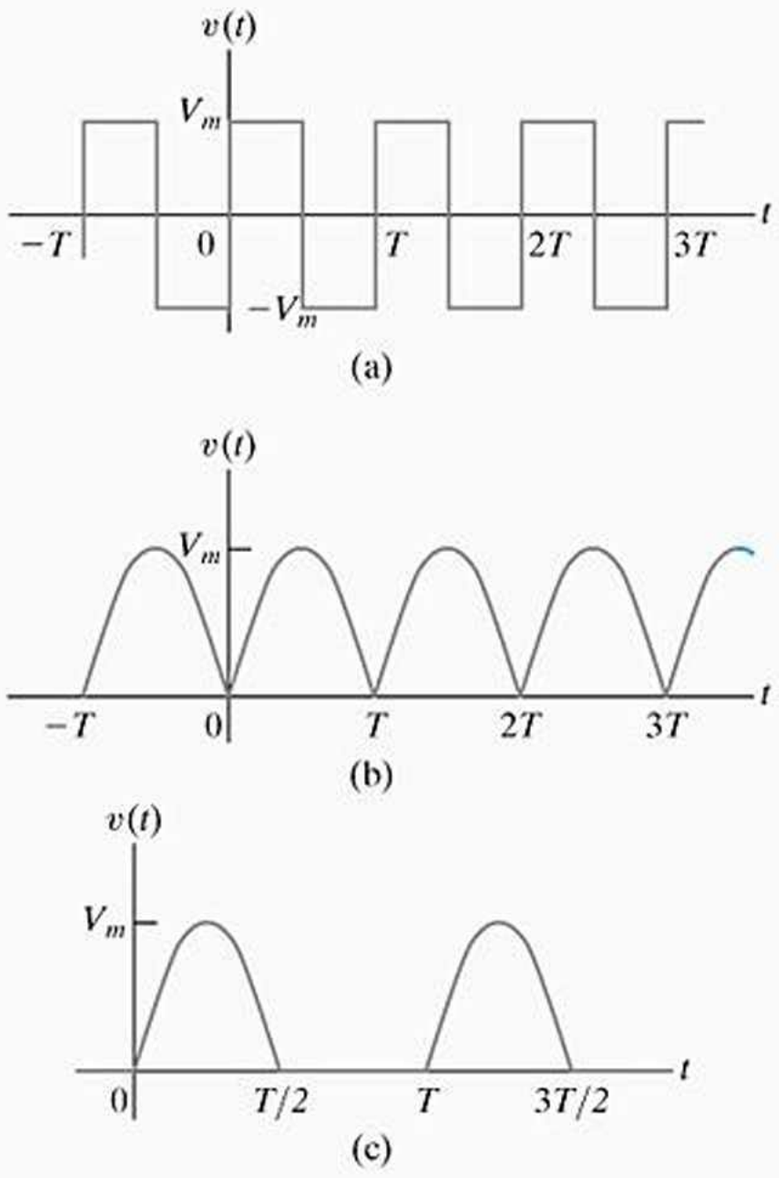


Figura P16.2

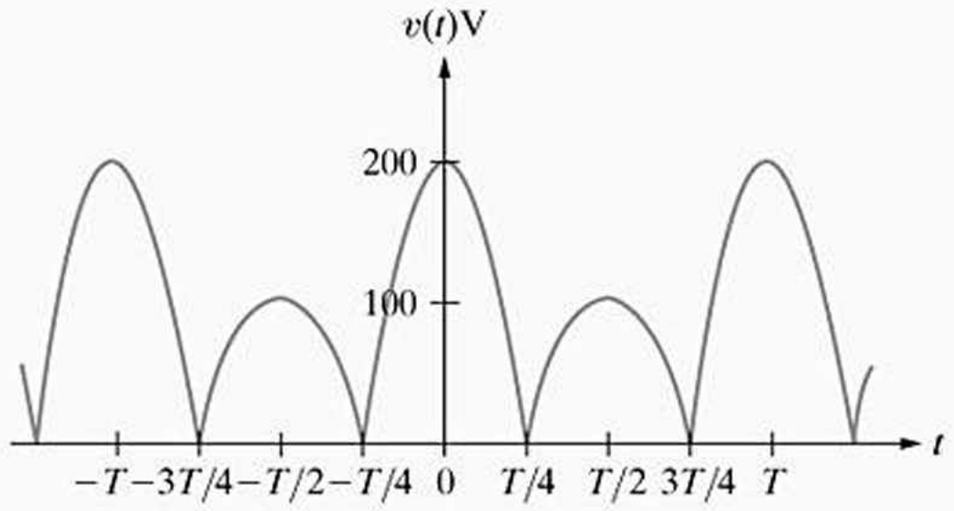


16.3* Calcule a série de Fourier para a tensão periódica da Figura P16.3, dado que

$$v(t) = 200\cos\frac{2\pi}{T}tV, \qquad \frac{-T}{4} \leq t \leq \frac{T}{4};$$

$$v(t) = -100\cos\frac{2\pi}{T}tV, \qquad \frac{T}{4} \leq t \leq \frac{3T}{4}.$$

Figura P16.3



16.4 Deduza a Equação 16.5.

16.5 a) Verifique as equações 16.6 e 16.7.

b) Verifique a Equação 16.8. *Sugestão:* Use a identidade trigonométrica

$\cos\alpha\ \text{sen}\beta = \frac{1}{2}\text{sen}(\alpha + \beta) - \frac{1}{2}\text{sen}(\alpha - \beta)$.

c) Verifique a Equação 16.9. *Sugestão:* Use a identidade trigonométrica

$\text{sen}\,\alpha\ \text{sen}\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2}\cos(\alpha + \beta)$.

d) Verifique a Equação 16.10. *Sugestão:* Use a identidade trigonométrica

$\cos\alpha\ \cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha + \beta)$.

Seção 16.3

16.6 Calcule as expressões para os coeficientes de Fourier de uma função periódica ímpar. *Sugestão:* use a mesma técnica empregada no texto para deduzir as equações 16.14–16.16.

16.7 Mostre que, se $f(t) = -f(t - T/2)$, os coeficientes de Fourier b_k serão dados pelas expressões

$b_k = 0$ para k par;

$$b_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\,\text{sen}\,k\omega_o t\,dt, \text{ para } k \text{ ímpar.}$$

Sugestão: use a mesma técnica empregada no texto para deduzir as equações 16.28 e 16.29.

16.8 Deduza as Equações 16.36. *Sugestão:* comece com a Equação 16.29 e divida o intervalo de integração em 0 a $T/4$ e $T/4$ a $T/2$. Observe que, em razão da simetria de função par e da simetria de quarto de onda, $f(t) = -f(T/2 - t)$ no intervalo $T/4 \leq t \leq T/2$. Faça $x = T/2 - t$ no segundo intervalo e combine a integral resultante com a integração entre 0 e $T/4$.

16.9 Deduza as Equações 16.37. Siga a sugestão dada no Problema 16.8 exceto que, em razão da simetria de função ímpar e da simetria de quarto de onda, $f(t) = f(T/2 - t)$ no intervalo $T/4 \leq t \leq T/2$.

16.10* Um período de uma função periódica é descrito pelas seguintes equações:

$i(t) = 4.000t$ A, $\quad 0 \leq t \leq 1{,}25$ ms;

$i(t) = 5$ A, $\quad 1{,}25$ ms $\leq t \leq 3{,}75$ ms;

$i(t) = 20 - 4.000t$ A, $\quad 3{,}75$ ms $\leq t \leq 6{,}25$ ms;

$i(t) = -5$ A, $\quad 6{,}25$ ms $\leq t \leq 8{,}75$ ms;

$i(t) = -40 + 4.000t$ A, $\quad 8{,}75$ ms $\leq t \leq 10$ ms.

a) Qual é a freqüência fundamental em hertz?

b) A função é par?

c) A função é ímpar?

d) A função tem simetria de meia-onda?

e) A função tem simetria de quarto de onda?

f) Calcule a_v, a_k e b_k.

16.11* É dado que $v(t) = 20t\cos 0{,}25\pi t$ V no intervalo $-6 \leq t \leq 6$ s. Depois disso, a função se repete.

a) Qual é a freqüência fundamental em radianos por segundo?

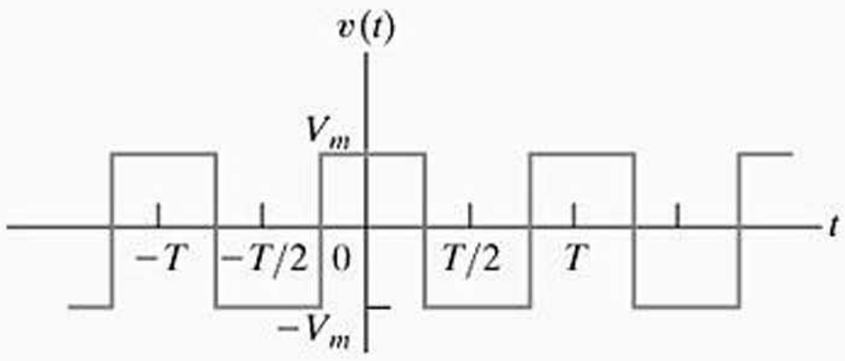
b) A função é par?

c) A função é ímpar?

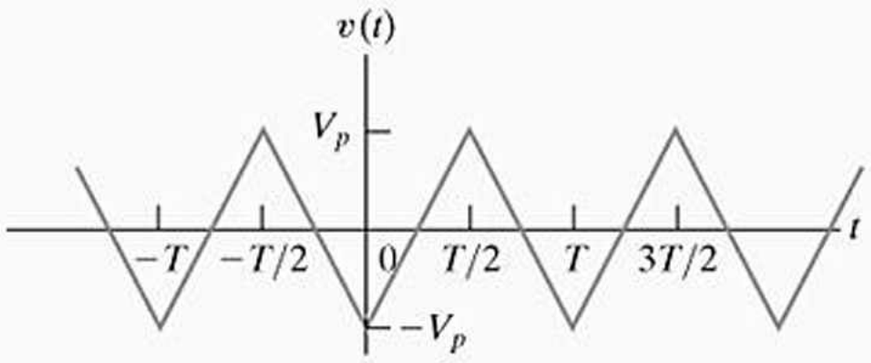
d) A função tem simetria de meia-onda?

16.12 Determine a série de Fourier de cada função periódica da Figura P16.12.

Figura P16.12



(a)

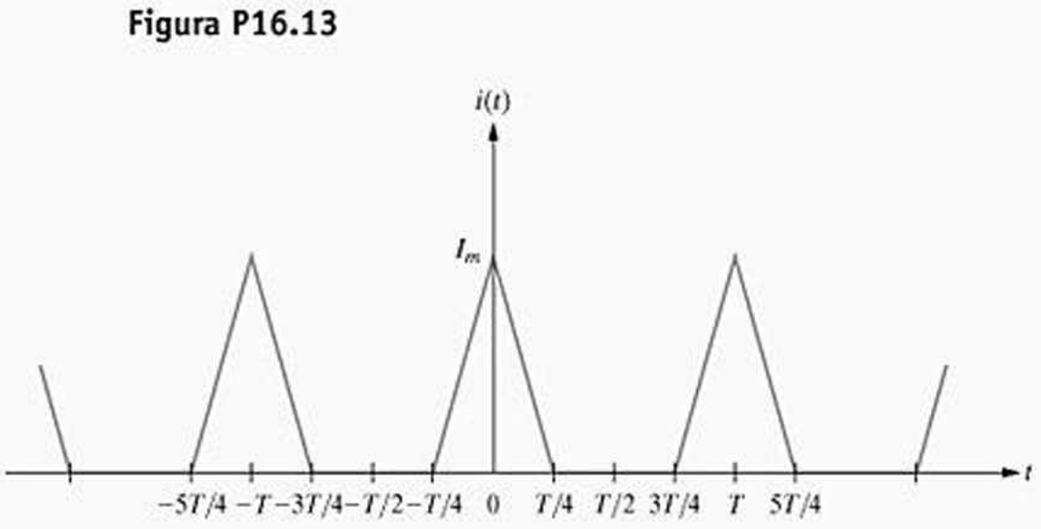


(b)

16.13 a) Deduza a série de Fourier para a tensão periódica da Figura P16.13.

b) Repita (a) com o eixo vertical de referência deslocado $T/2$ unidades para a esquerda.

Figura P16.13



16.14 É dado que $f(t) = 0{,}4t^2$ no intervalo $-5 < t < 5$ s.

a) Construa uma função periódica que seja igual a $f(t)$ entre –5 e +5, tenha um período de 20 s e simetria de meia-onda.

b) A função é par ou ímpar?

c) A função tem simetria de quarto de onda?

d) Calcule a série de Fourier para $f(t)$.

e) Calcule a série de Fourier para $f(t)$ se $f(t)$ for deslocada 5 s para a direita.

16.15 Repita o Problema 16.14 com $f(t) = 0{,}4t^3$ no intervalo $-5 < t < 5$ s.

16.16 A função periódica da Figura P16.16 é par e tem simetria de meia-onda e de quarto de onda.

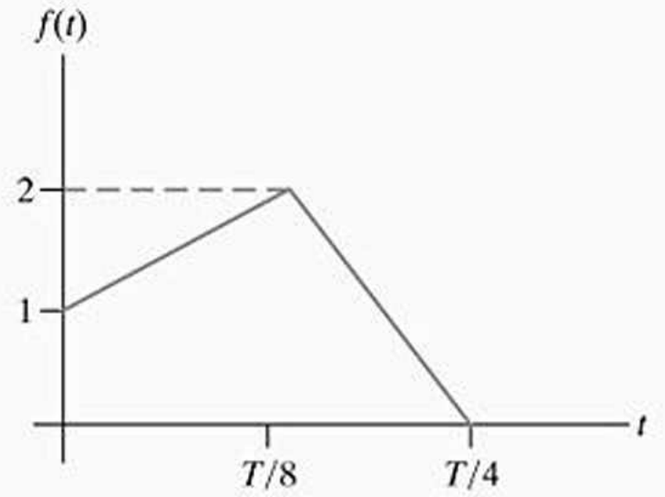
a) Faça o gráfico de um ciclo completo da função no intervalo $-T/4 \leq t \leq 3T/4$.

b) Calcule os coeficientes de Fourier a_k.

c) Escreva os primeiros três termos não-nulos da série de Fourier de $f(t)$.

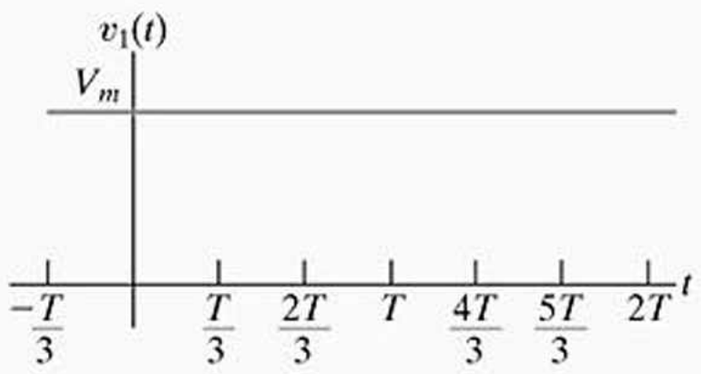
d) Use os primeiros três termos não-nulos para estimar $f(T/8)$.

Figura P16.16

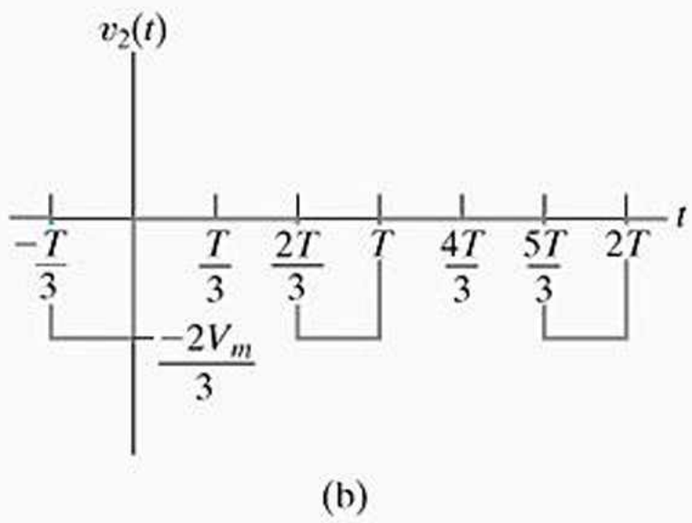


16.17 Às vezes, é possível usar simetrias para determinar os coeficientes de Fourier, ainda que a função original não seja simétrica! Com isso em mente, considere a função do Problema para Avaliação 16.1. Observe que $v(t)$ pode ser dividida nas duas funções da Figura P16.17(a) e (b). Além do mais, podemos transformar $v_2(t)$ em uma função par deslocando-a $T/6$ unidades para a direita, o que é mostrado na Figura P16.17(c). Nesse ponto, observamos que $v(t) = v_1(t) + v_2(t)$ e que a série de Fourier de $v_1(t)$ é uma série de um único termo, V_m. Para determinar a série de Fourier de $v_2(t)$, em primeiro lugar, determinamos a série de Fourier de $v_2(t - T/6)$ e, então, deslocamos essa série $T/6$ unidades para a esquerda. Use a técnica que acabamos de descrever para verificar a série de Fourier dada como resposta ao Problema para Avaliação 16.2(e).

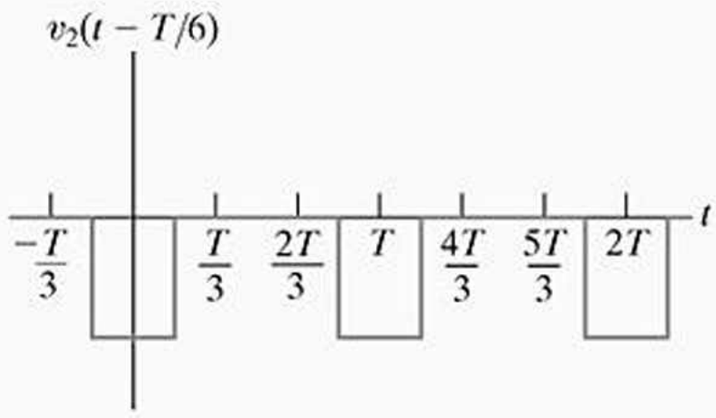
Figura P16.17



(a)



(b)



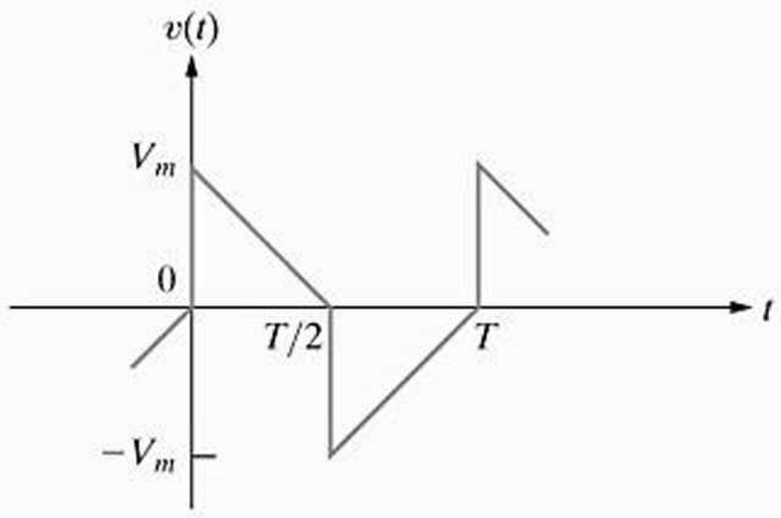
(c)

Seção 16.4

16.18* a) Calcule a série de Fourier para a função periódica da Figura P16.18 quando $V_m = 378\pi$ V. Escreva a série na forma da Equação 16.38.

b) Use os cinco primeiros termos não-nulos para estimar $v(T/8)$.

Figura P16.18



16.19 Calcule a série de Fourier para cada uma das funções periódicas da Figura P16.1, usando a forma da Equação 16.38.

16.20 Calcule a série de Fourier para a função periódica descrita no Problema 16.10, usando a forma da Equação 16.38.

16.21 Calcule a série de Fourier para a função periódica construída no Problema 16.14, usando a forma da Equação 16.38.

Seção 16.5

16.22 Deduza as equações 16.69 e 16.70.

16.23 a) Deduza a Equação 16.71. *Sugestão:* Observe que $b_k = 4V_m/\pi k + k\omega_o RCa_k$. Use essa expressão de b_k para determinar $a_k^2 + b_k^2$ em termos de a_k. Então, use a expressão de a_k para deduzir a Equação 16.71.

b) Deduza a Equação 16.72.

16.24 Mostre que, quando combinamos as equações 16.71 e 16.72 com as equações 16.38 e 16.39, o resultado é a Equação 16.58. *Sugestão:* observe, pela definição de β_k, que

$$\frac{a_k}{b_k} = -\operatorname{tg}\beta_k,$$

e, pela definição de θ_k, que

$$\operatorname{tg}\theta_k = -\operatorname{cotg}\beta_k.$$

Agora, use a identidade trigonométrica

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{cotg}(90 - x)$$

para mostrar que $\theta_k = (90 + \beta_k)$.

16.25 a) Mostre que, para valores grandes de C, a Equação 16.67 pode ser aproximada pela expressão

$$v_o(t) \approx \frac{-V_m T}{4RC} + \frac{V_m}{RC}t.$$

Observe que essa expressão é a equação da onda triangular para $0 \le t \le T/2$. *Sugestões*: (1) Suponha que $e^{-t/RC} \approx 1 - (t/RC)$ e $e^{-T/2RC} \approx 1 - (T/2RC)$; (2) coloque a expressão resultante sobre o denominador comum $2 - (T/2RC)$; (3) simplifique o numerador; e (4) para C grande, admita que $T/2RC$ seja muito menor do que 2.

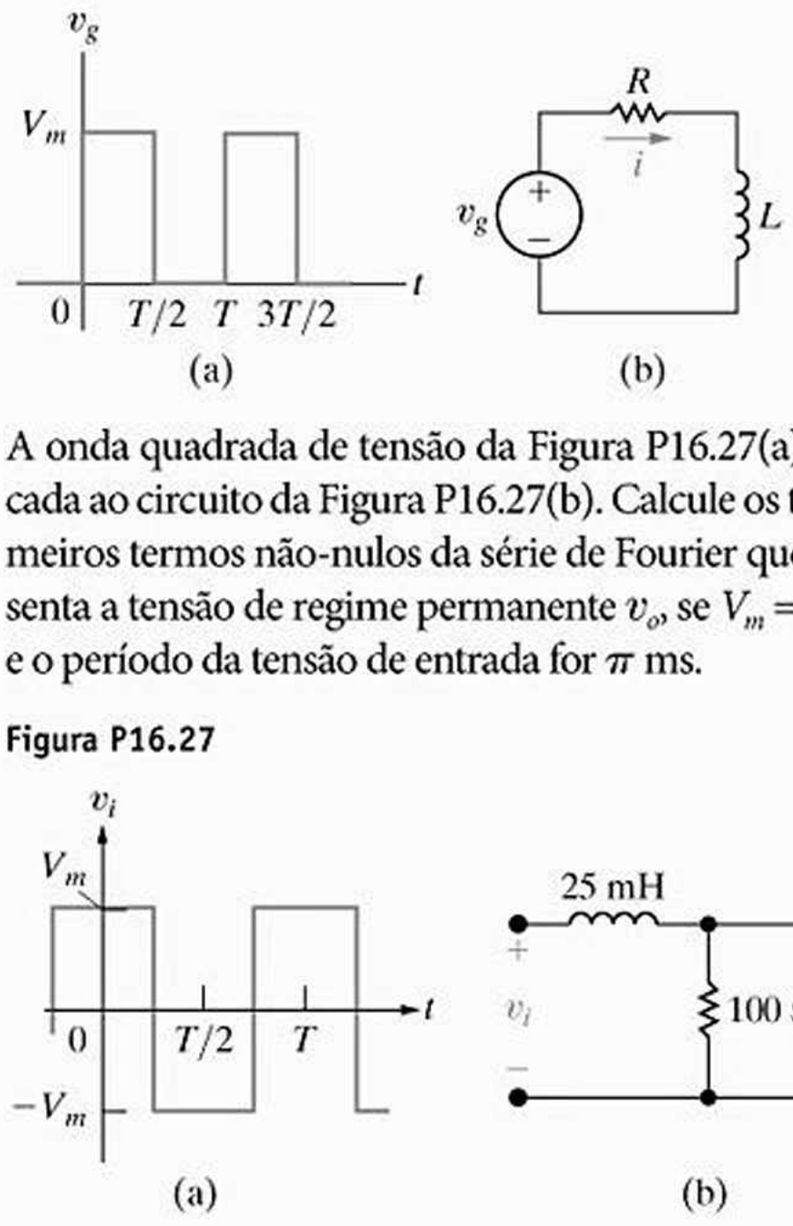
b) Substitua o valor de pico da onda triangular na solução do Problema 16.12 [veja a Figura P16.12(b)] e mostre que o resultado é a Equação 16.59.

16.26 PSPICE A onda quadrada de tensão da Figura P16.26(a) é aplicada ao circuito da Figura P16.26(b).

a) Determine a série de Fourier da corrente i de regime permanente.

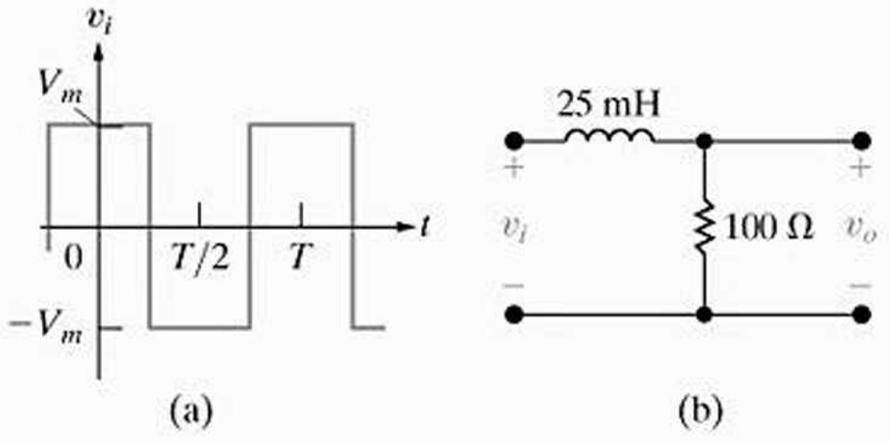
b) Determine a expressão de regime permanente para i por análise elementar de circuitos.

Figura P16.26



16.27* A onda quadrada de tensão da Figura P16.27(a) é aplicada ao circuito da Figura P16.27(b). Calcule os três primeiros termos não-nulos da série de Fourier que representa a tensão de regime permanente v_o, se $V_m = 60\pi$ V e o período da tensão de entrada for π ms.

Figura P16.27

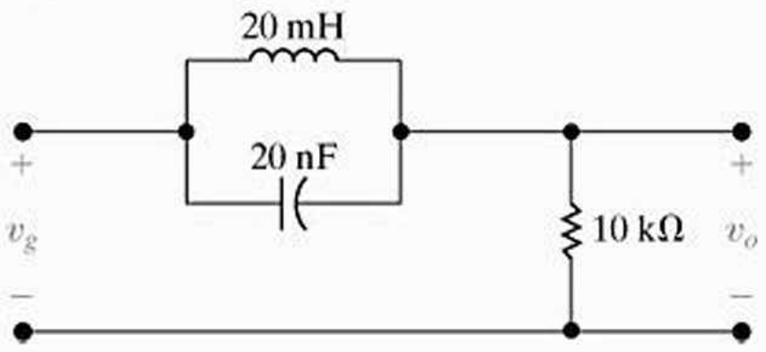


16.28* PSPICE A onda quadrada de tensão do Problema para Avaliação 16.6 é aplicada ao circuito da Figura P16.28.

a) Calcule os quatro primeiros termos não-nulos da série de Fourier que representa a tensão de regime permanente v_o.

b) Quais harmônicos da tensão de entrada não estão presentes na tensão de saída? Explique por quê.

Figura P16.28

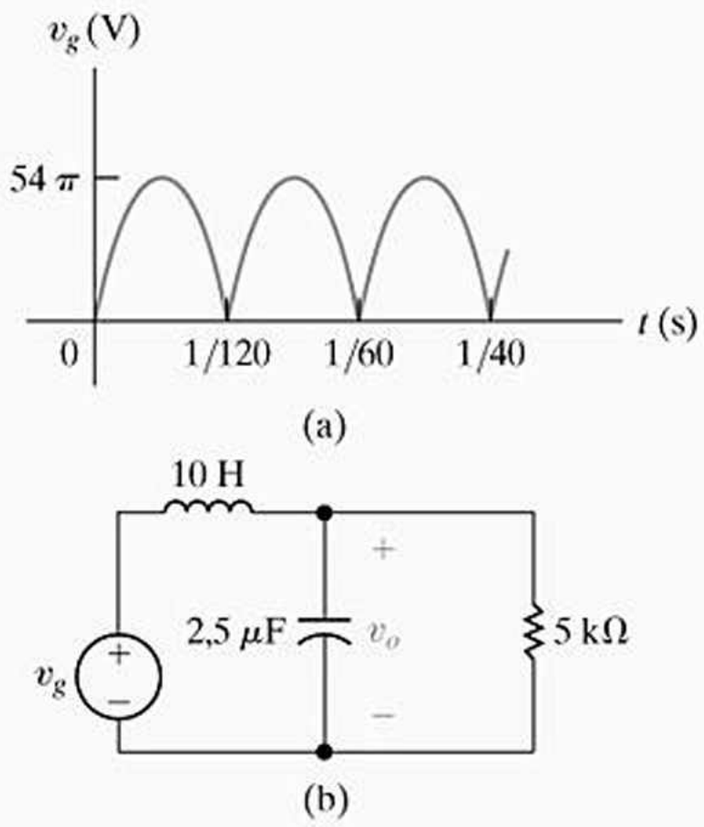


16.29 A tensão de saída de um retificador de onda completa da Figura P16.29(a) é aplicada ao circuito da Figura P16.29(b).

a) Determine os quatro primeiros termos não-nulos da série de Fourier de v_o.

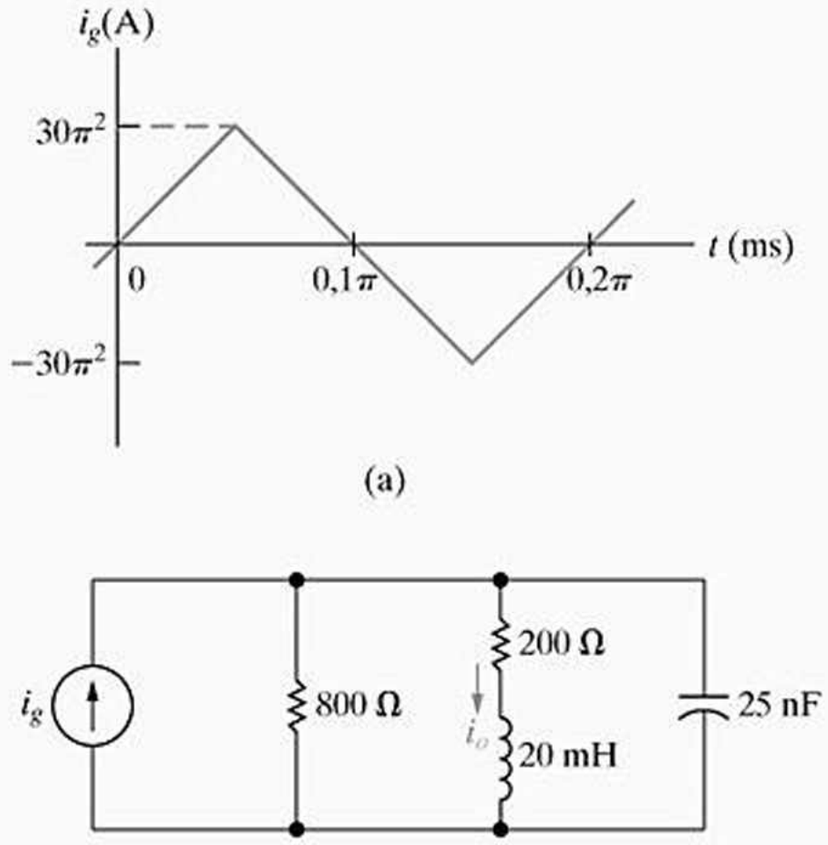
b) Sua solução para v_o faz sentido? Explique.

Figura P16.29



16.30 A corrente periódica da Figura P16.30(a) é usada para alimentar o circuito da Figura P16.30(b). Escreva a expressão no domínio do tempo do quinto harmônico da expansão da corrente em série de Fourier.

Figura P16.30



16.31 Uma tensão periódica com um período de 0,1π ms é dada pela seguinte série de Fourier:

$$v_g = 45 \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{\pi^2 n^2 - 8}{n^3} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \cos n\omega_o t \text{ V}.$$

Essa tensão é aplicada ao circuito da Figura P16.31. Determine a amplitude e o ângulo de fase da componente de v_o cuja freqüência é 300 krad/s.

Figura P16.31

Seção 16.6

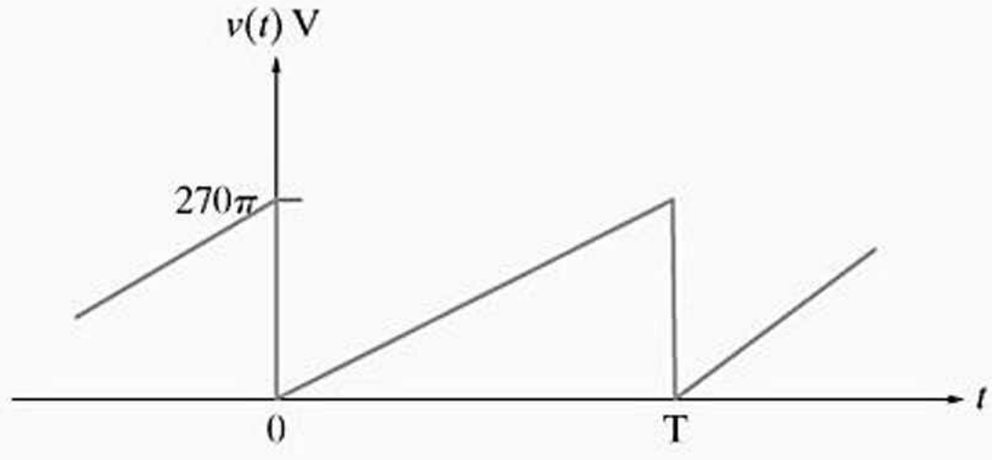
16.32* A tensão periódica nos terminais de um resistor de 81 π^2 kΩ é mostrada na Figura P16.32.

a) Use os primeiros quatro termos não-nulos da série de Fourier de $v(t)$ para estimar a potência média dissipada no resistor.

b) Calcule o valor exato da potência média dissipada no resistor de 81 π^2 kΩ.

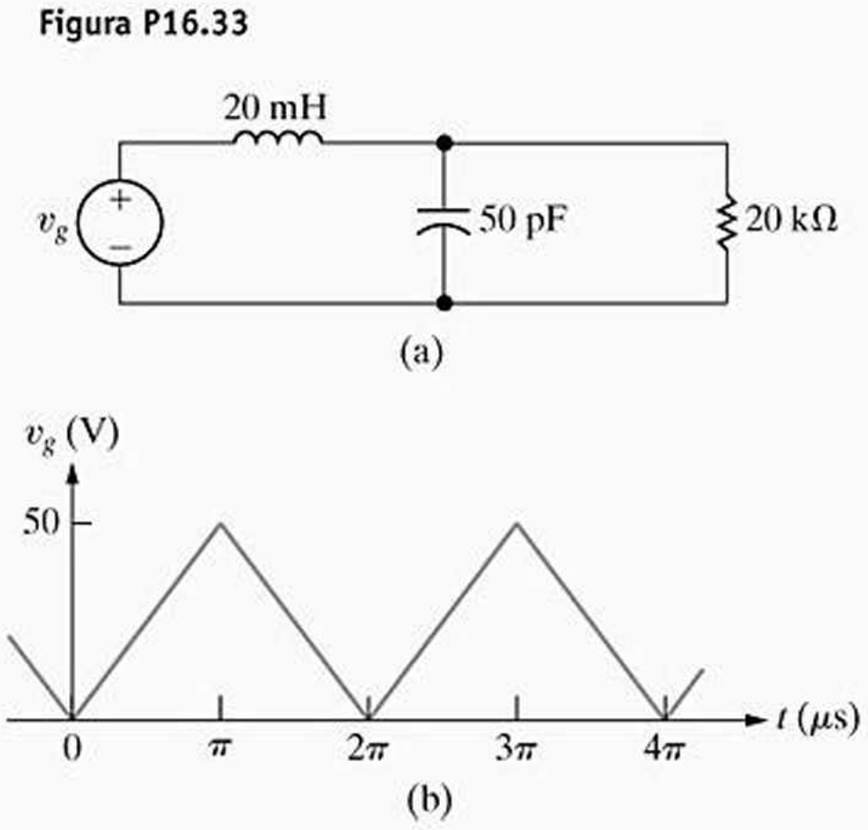
c) Qual é o erro percentual no valor estimado da potência média dissipada?

Figura P16.32



16.33* Uma fonte de tensão de onda triangular alimenta o circuito da Figura P16.33(a). A tensão da fonte é mostrada na Figura P16.33(b). Estime a potência média fornecida ao resistor de 20 kΩ, quando o circuito está funcionando em regime permanente.

Figura P16.33



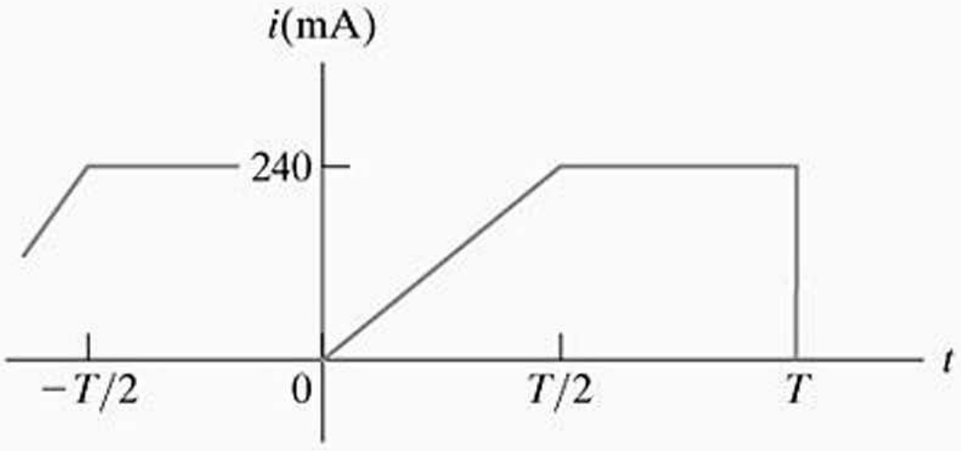
16.34 A corrente periódica da Figura P16.34 é aplicada a um resistor de 1 kΩ.

a) Use os três primeiros termos não-nulos da série de Fourier de $i(t)$ para estimar a potência média dissipada no resistor de 1 kΩ.

b) Calcule o valor exato da potência média dissipada no resistor de 1 kΩ.

c) Qual é a porcentagem de erro no valor estimado da potência média?

Figura P16.34



Seção 16.7

16.35 A tensão e a corrente nos terminais de um circuito são

$$v = 80 + 200\cos(500t + 45°) + 60\,\text{sen}\,1.500t\ \text{V},$$

$$i = 10 + 6\,\text{sen}(500t + 75°) + 3\cos(1.500t + 30°)\ \text{A}.$$

A corrente está no sentido da queda de tensão nos terminais.

a) Qual é a potência média nos terminais?

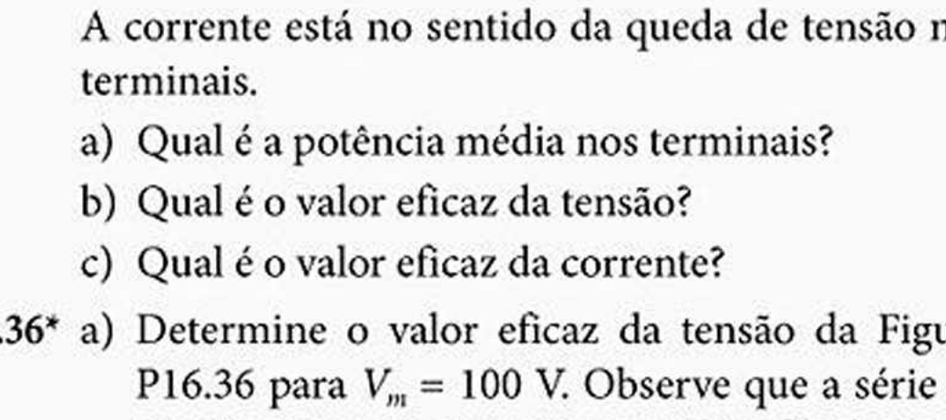
b) Qual é o valor eficaz da tensão?

c) Qual é o valor eficaz da corrente?

16.36* a) Determine o valor eficaz da tensão da Figura P16.36 para $V_m = 100$ V. Observe que a série de Fourier para essa tensão periódica foi determinada no Problema para Avaliação 16.3.

b) Estime o valor eficaz da tensão usando os três primeiros termos não-nulos da série de Fourier de $v_g(t)$.

Figura P16.36



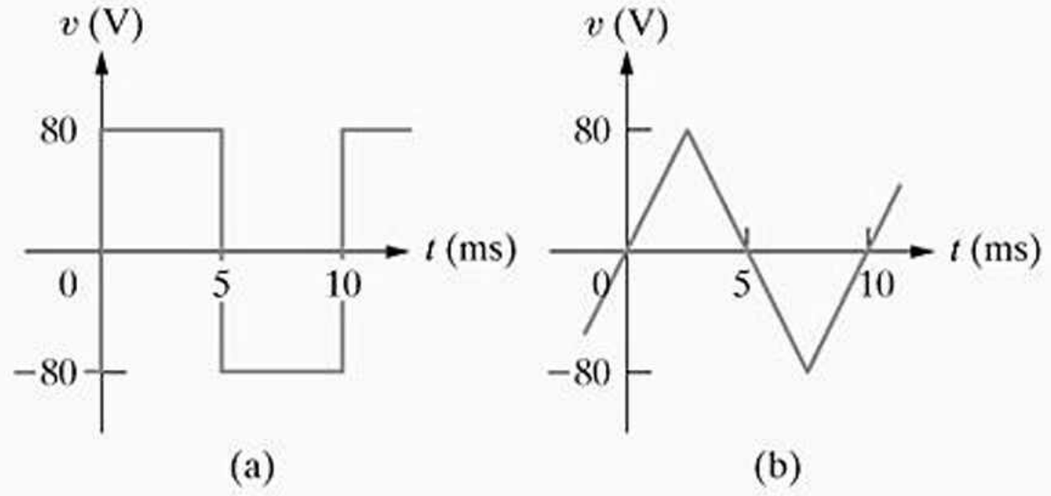
16.37* a) Estime o valor eficaz da onda quadrada de tensão da Figura P16.37(a) usando os cinco primeiros termos não-nulos da série de Fourier de $v(t)$.

b) Calcule a porcentagem de erro na estimativa se

$$\%\ \text{erro} = \left[\frac{\text{valor estimado}}{\text{valor exato}} - 1\right] \times 100.$$

c) Repita os itens (a) e (b) se a onda quadrada de tensão for substituída pela onda triangular de tensão da Figura P16.37(b).

Figura P16.37

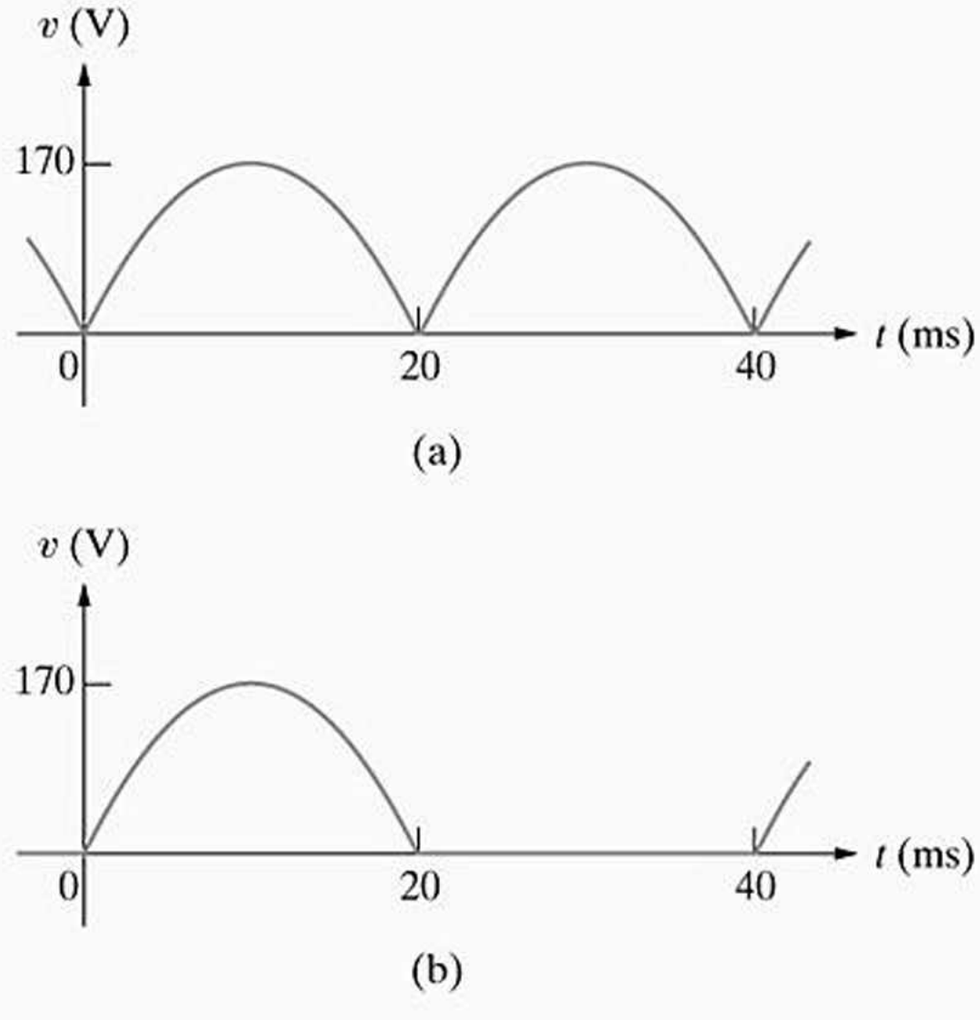


16.38 a) Estime o valor eficaz da tensão mostrada na Figura P16.38(a) usando os três primeiros termos não-nulos da série de Fourier de $v(t)$.

b) Calcule a porcentagem de erro na estimativa (veja o Problema 16.37).

c) Repita os itens (a) e (b) se a tensão for substituída pela tensão da Figura P16.38(b).

Figura P16.38

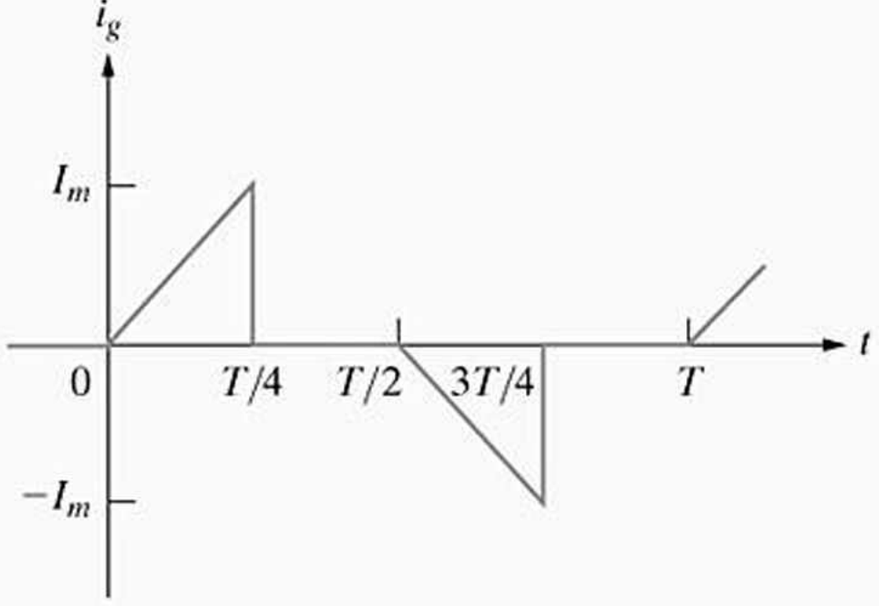


16.39 a) Calcule as expressões para os coeficientes de Fourier para a corrente periódica da Figura P16.39.

b) Escreva os quatro primeiros termos não-nulos da série usando a forma trigonométrica alternativa dada pela Equação 16.39.

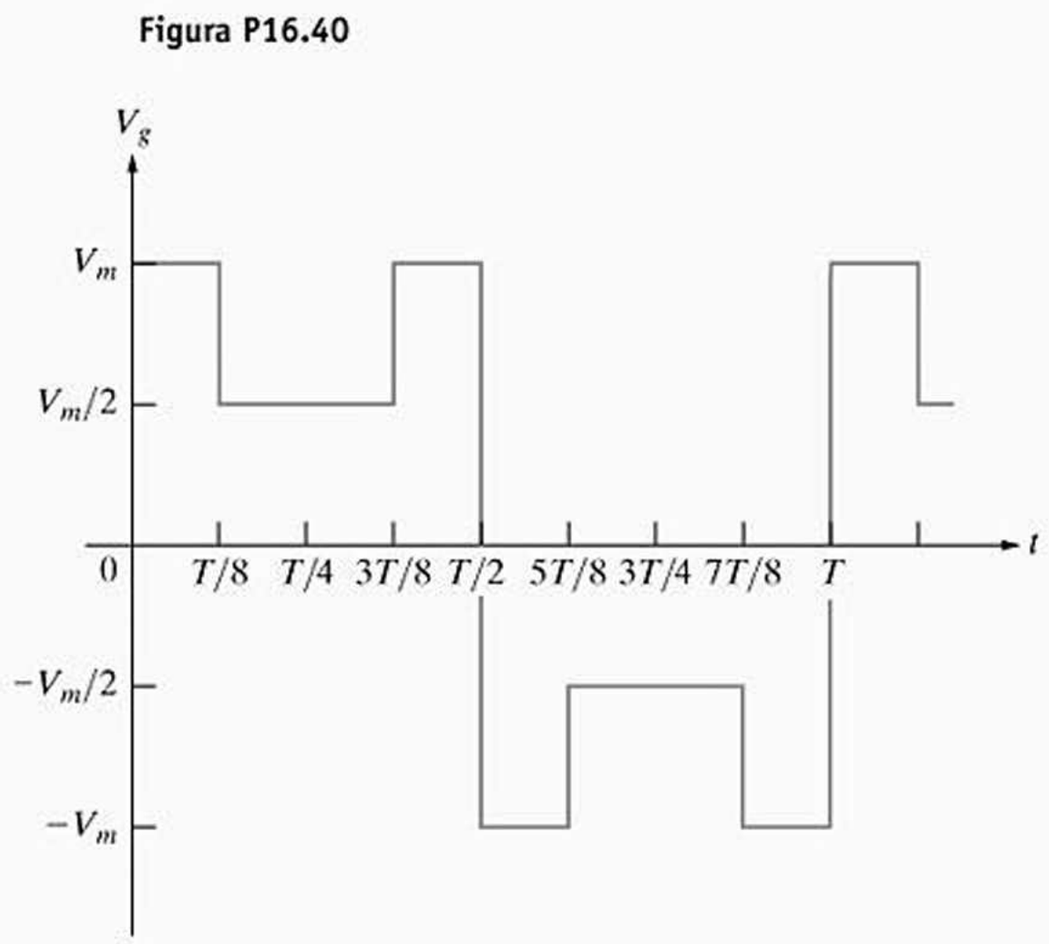
c) Use os quatro primeiros termos não-nulos da expressão encontrada no item (b) para estimar o valor eficaz de i_g.
d) Determine o valor eficaz exato de i_g.
e) Calcule a porcentagem de erro no valor eficaz estimado.

Figura P16.39



16.40 a) Use os quatro primeiros termos não-nulos da aproximação por série de Fourier da tensão periódica da Figura P16.40 para estimar seu valor eficaz.
b) Calcule o valor eficaz correto.
c) Calcule a porcentagem de erro no valor estimado.

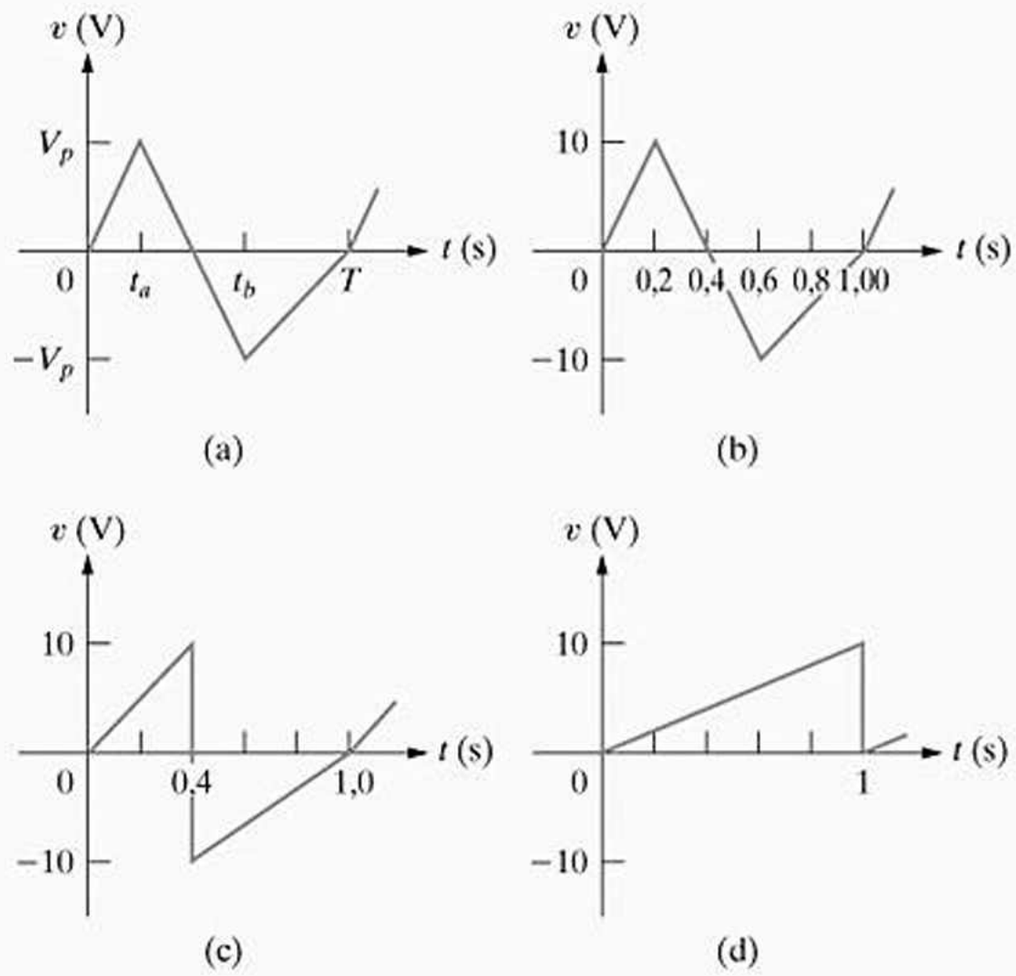
Figura P16.40



16.41 Suponha que a função periódica descrita no Problema 16.16 seja uma corrente i_g com uma amplitude de pico de 2 A.
a) Determine o valor eficaz da corrente.
b) Se essa corrente passar por um resistor de 54 Ω, qual será a potência média dissipada no resistor?
c) Se i_g for aproximada usando apenas o termo de freqüência fundamental de sua série de Fourier, qual será a potência média fornecida ao resistor de 54 Ω?
d) Qual é a porcentagem de erro na estimativa da potência dissipada?

16.42 O valor eficaz de qualquer onda periódica triangular que tenha a forma representada na Figura P16.42(a) é independente de t_a e t_b. Observe que, para a função ser unívoca, $t_a \leq t_b$. O valor eficaz é igual a $V_p/\sqrt{3}$. Verifique essa observação, determinando o valor eficaz das três formas de onda da Figura P16.42(b)–(d).

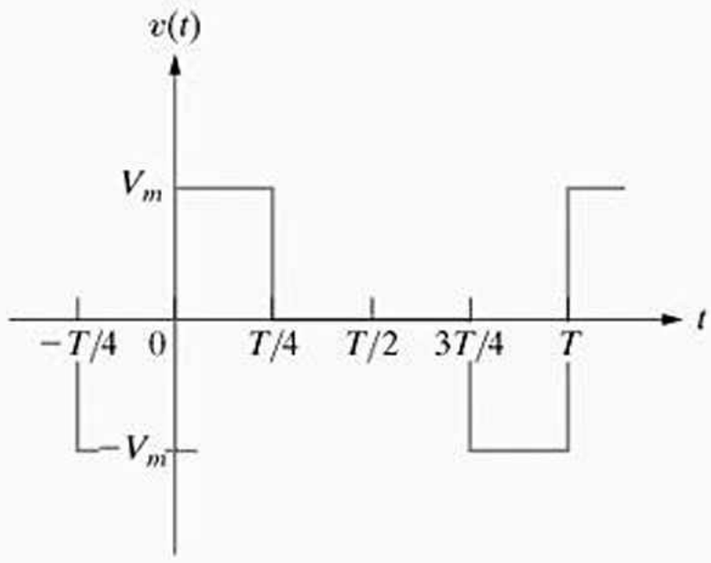
Figura P16.42



Seção 16.8

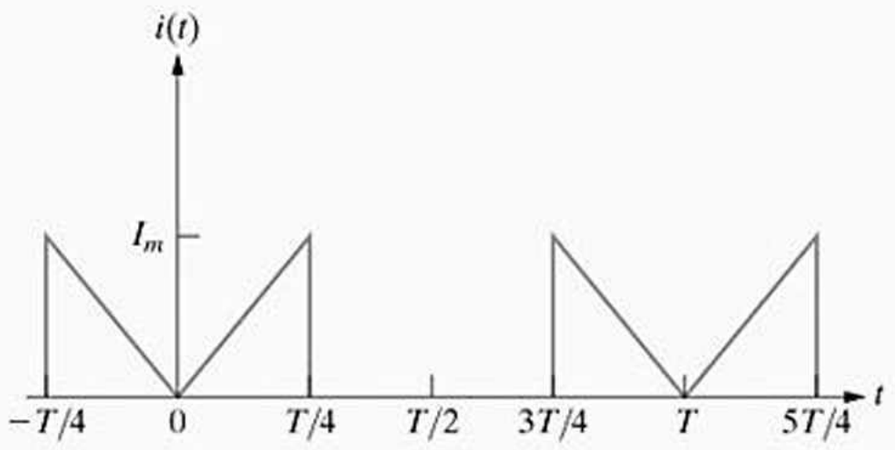
16.43 Use a forma exponencial da série de Fourier para escrever uma expressão para a tensão da Figura P16.43.

Figura P16.43



16.44* Deduza a expressão para os coeficientes complexos de Fourier para a corrente periódica da Figura P 16.44.

Figura P16.44



16.45* a) A corrente periódica do Problema 16.44 é aplicada a um resistor de 60 Ω. Se $I_m = 20$ A, qual é a potência média fornecida ao resistor?

b) Admita que $i(t)$ seja aproximada por uma forma exponencial truncada da série de Fourier consistindo nos sete primeiros termos não-nulos, isto é, $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ e 7. Qual é o valor eficaz da corrente usando essa aproximação?

c) Se a aproximação do item (b) for usada para representar i, qual será a porcentagem de erro na potência calculada?

16.46 A fonte de tensão periódica no circuito da Figura P16.46(a) tem a forma de onda da Figura P16.46(b).

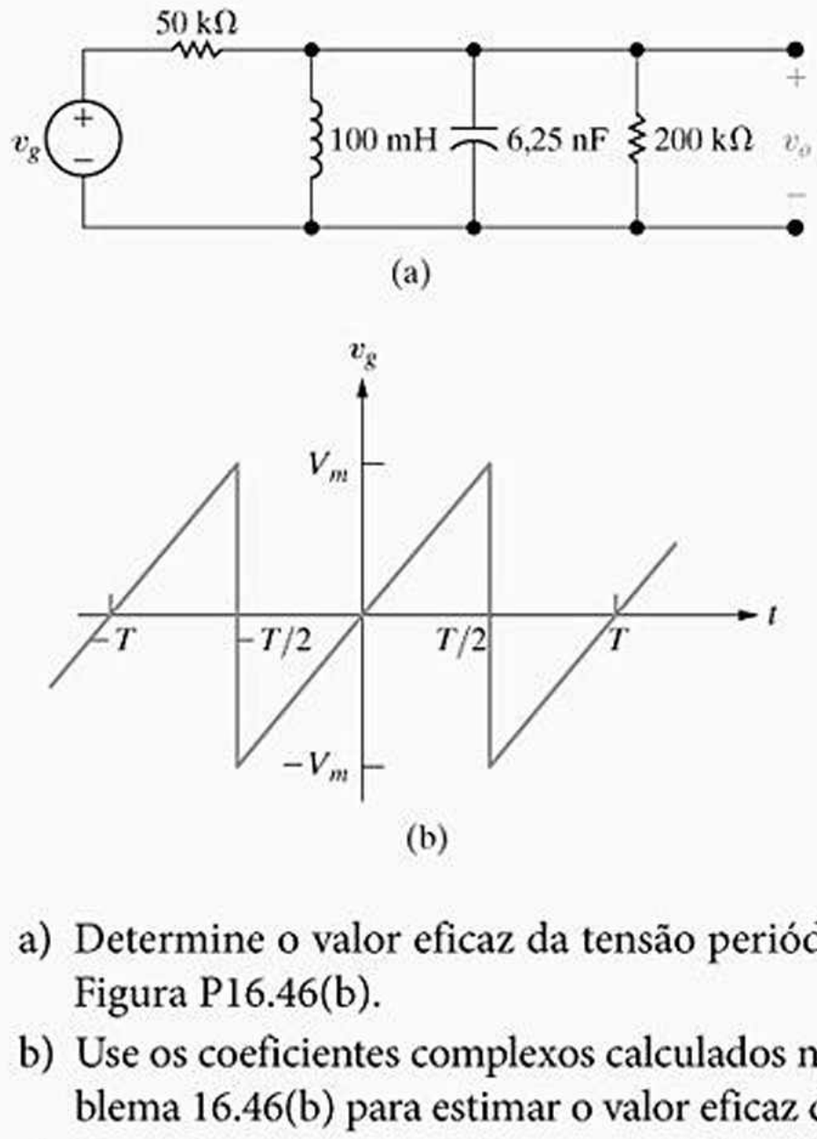
a) Calcule a expressão para C_n.

b) Determine os valores dos coeficientes complexos C_o, C_{-1}, C_1, C_{-2}, C_2, C_{-3}, C_3, C_{-4} e C_4 para a tensão de entrada v_g se $V_m = 72\pi$ V e $T = 50\pi$ μs.

c) Repita os cálculos do item (b) para v_o.

d) Use os coeficientes complexos determinados no item (c) para estimar a potência média fornecida ao resistor de 200 kΩ.

Figura P16.46



16.47 a) Determine o valor eficaz da tensão periódica da Figura P16.46(b).

b) Use os coeficientes complexos calculados no Problema 16.46(b) para estimar o valor eficaz de v_g.

c) Qual é a porcentagem de erro no valor eficaz estimado de v_g?

Seção 16.9

16.48* a) Faça um gráfico de amplitude e fase baseado na Equação 16.38 para a tensão periódica do Exemplo 16.3. Suponha que V_m seja 40 V. Plote amplitude e fase em função de $n\omega_o$, onde $n = 0, 1, 2, 3, ...$

b) Repita o item (a), fazendo os gráficos de acordo com a Equação 16.82.

16.49* a) Faça o gráfico de amplitude e fase baseado na Equação 16.38 para a tensão periódica do Exemplo 16.32. Ambas, amplitude e fase, devem ser plotadas em função de $n\omega_o$, onde $n = 0, 1, 2, ...$

b) Repita o item (a), fazendo os gráficos de acordo com a Equação 16.82.

16.50 Uma tensão periódica é representada por uma série de Fourier truncada. Os espectros de amplitude e fase são mostrados na Figura P16.50(a) e (b), respectivamente.

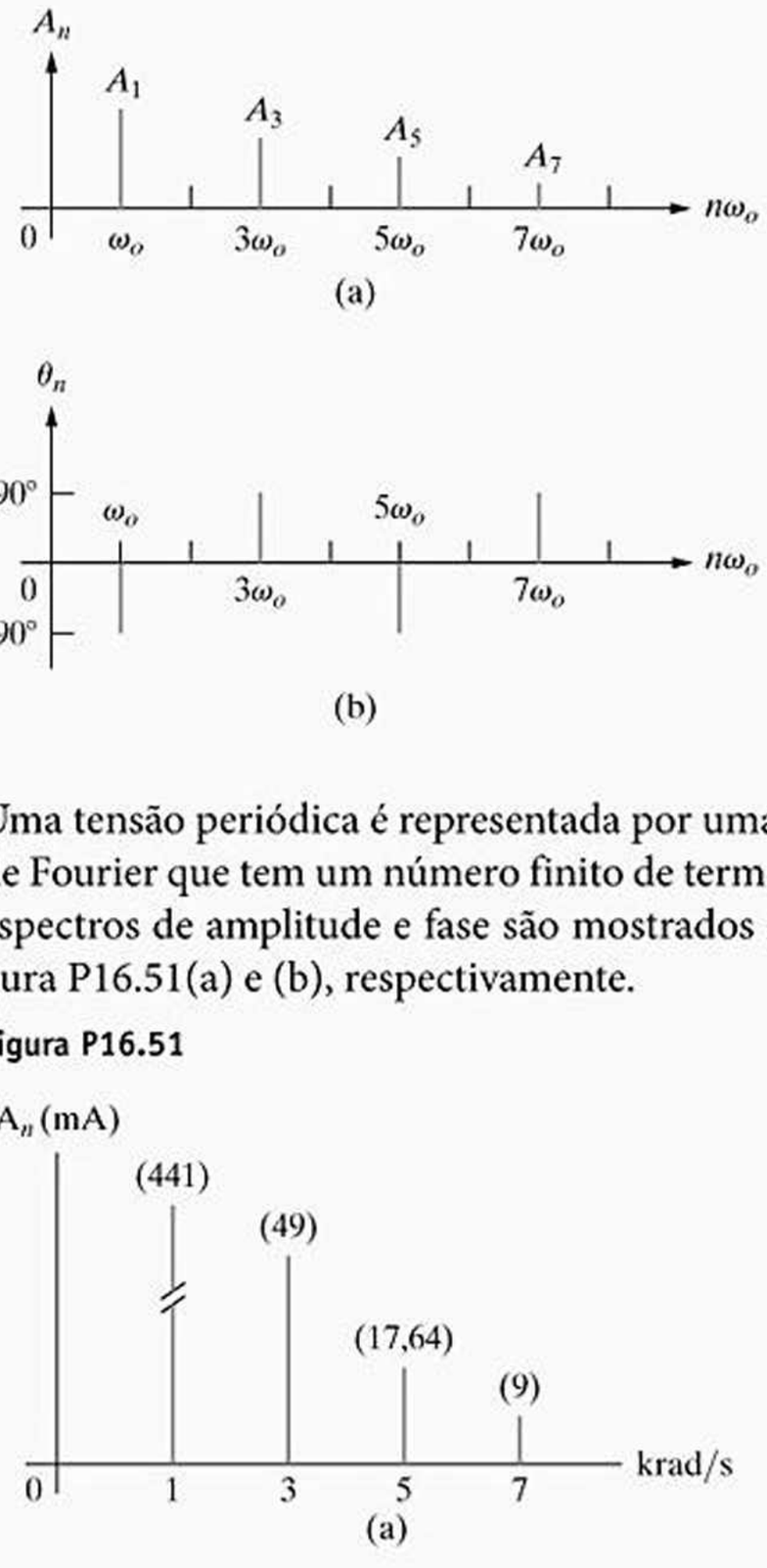
a) Escreva uma expressão para a tensão periódica usando a forma dada pela Equação 16.38.

b) A tensão é uma função par ou ímpar de t?

c) A tensão tem simetria de meia-onda?

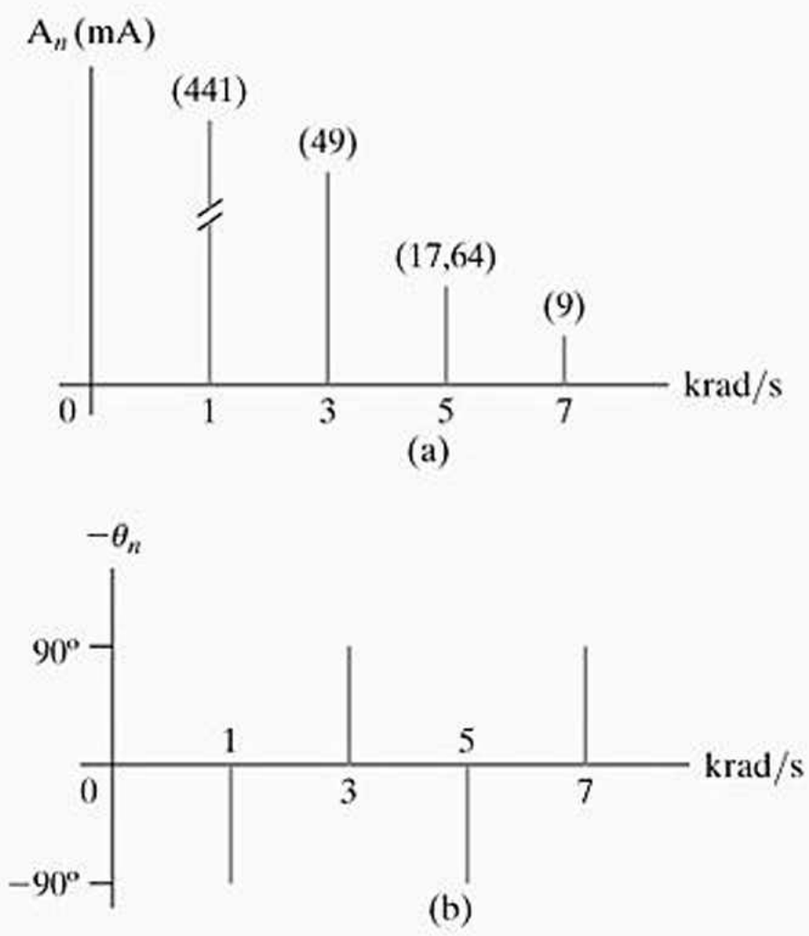
d) A tensão tem simetria de quarto de onda?

Figura P16.50



16.51 Uma tensão periódica é representada por uma série de Fourier que tem um número finito de termos. Os espectros de amplitude e fase são mostrados na Figura P16.51(a) e (b), respectivamente.

Figura P16.51

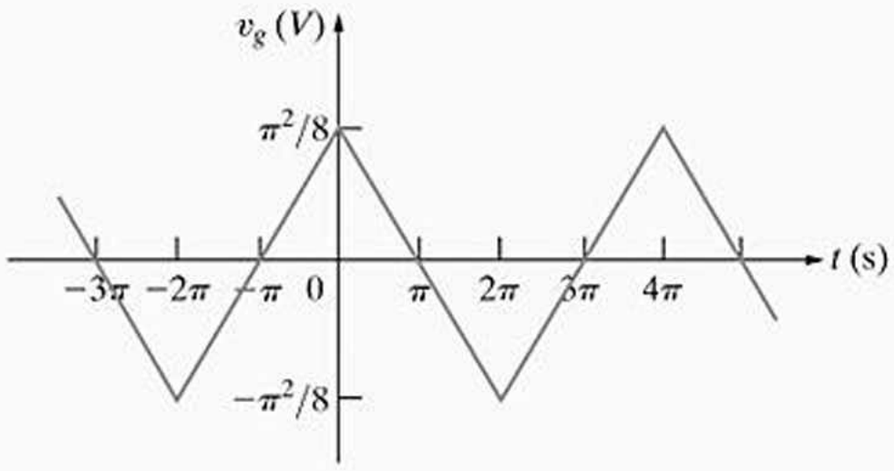


a) Escreva a expressão para a corrente periódica usando a forma dada pela Equação 16.38.
b) A corrente é uma função par ou ímpar de t?
c) A corrente tem simetria de meia-onda?
d) Calcule o valor eficaz da corrente em miliampères.
e) Escreva a forma exponencial da série de Fourier.
f) Desenhe os gráficos de espectro de amplitude e fase com base na série exponencial.

Seções 16.1–16.9

16.52 O sinal de entrada para um filtro Butterworth passa-baixas de terceira ordem é a onda triangular de tensão da Figura P16.52. A freqüência de corte do filtro é 1 rad/s. Escreva os três primeiros termos da série de Fourier que representa a tensão de saída de regime permanente do filtro.

Figura P16.52



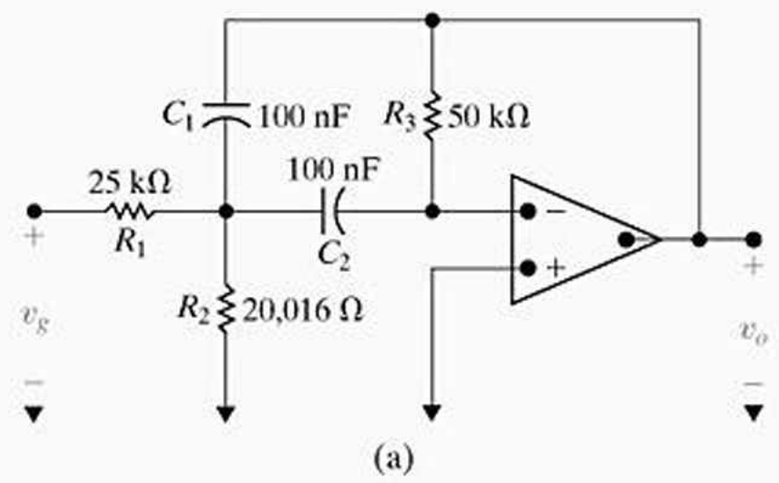
16.53 O sinal de entrada para um filtro Butterworth passa-baixas de segunda ordem é uma onda de saída de um retificador de onda completa com uma amplitude de $2{,}5\pi$ V e uma freqüência fundamental de 5.000 rad/s. A freqüência de corte do filtro é 1 krad/s. Escreva os dois primeiros termos da série de Fourier que representa a tensão de saída de regime permanente do filtro.

16.54 A função de transferência (V_o/V_g) para o filtro passa-faixa de banda estreita da Figura P16.54(a) é

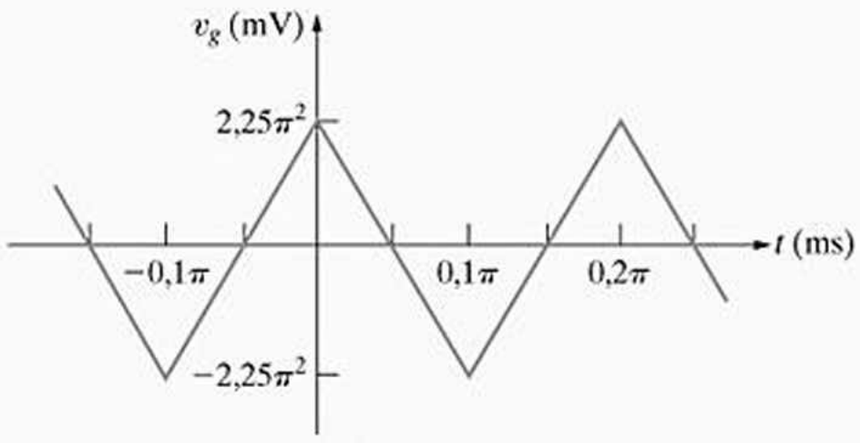
$$H(s) = \frac{-K_o\beta s}{s^2 + \beta s + \omega_o^2}.$$

a) Determine K_o, β e ω_o^2 como funções dos parâmetros do circuito R_1, R_2, R_3, C_1 e C_2.
b) Escreva os três primeiros termos da série de Fourier de v_o se v_g for a tensão periódica da Figura P16.54(b).

Figura P16.54



(a)



(b)

CAPÍTULO

17 A transformada de Fourier

SUMÁRIO DO CAPÍTULO

17.1 **Dedução da transformada de Fourier**
17.2 **Convergência da integral de Fourier**
17.3 **Uso de transformadas de Laplace para calcular transformadas de Fourier**
17.4 **Uso de limites para calcular transformadas de Fourier**
17.5 **Algumas propriedades matemáticas**
17.6 **Transformadas operacionais**
17.7 **Aplicações em análise de circuitos**
17.8 **Teorema de Parseval**

✔ OBJETIVOS DO CAPÍTULO

1 Saber calcular a transformada de Fourier de uma função por meio da definição da transformada de Fourier ou por meio das:
- transformadas de Laplace;
- propriedades matemáticas da transformada de Fourier;
- transformadas operacionais.

2 Saber como usar a transformada de Fourier para determinar a resposta de um circuito.

3 Entender e saber usar o teorema de Parseval para avaliar a energia contida dentro de faixas específicas de freqüência.

No Capítulo 16, discutimos a representação de uma função periódica por meio de uma série de Fourier. Essa representação possibilita a descrição da função periódica em termos de seus atributos no domínio da freqüência (amplitude e fase). A transformada de Fourier estende a representação no domínio da freqüência a funções que não são periódicas. Já apresentamos a idéia de transformar uma função periódica no domínio do tempo para o domínio da freqüência por meio da transformada de Laplace. Então, é bem possível que você esteja imaginando por que ainda é necessário outro tipo de transformação. Na verdade, a transformada de Fourier não é uma nova transformada. Ela é um caso especial da transformada bilateral de Laplace na qual a parte real da freqüência complexa é anulada. Todavia, sob o ponto de vista de uma interpretação física, a transformada de Fourier é um caso-limite de uma série de Fourier. Apresentamos esse ponto de vista na Seção 17.1, onde deduzimos as equações da transformada de Fourier.

A transformada de Fourier é mais útil do que a transformada de Laplace em certos problemas relacionados ao processamento de sinais e à teoria de comunicações. Embora não possamos estudar a transformada de Fourier em detalhes, apresentá-la aqui nos parece adequado, enquanto as idéias que fundamentam a transformada de Laplace e a série de Fourier ainda estão frescas em sua memória.

17.1 Dedução da transformada de Fourier

Começamos a dedução da transformada de Fourier, como um caso-limite de uma série de Fourier, com a forma exponencial da série:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}, \tag{17.1}$$

onde

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt. \tag{17.2}$$

Na Equação 17.2, optamos por iniciar a integração em $t_0 = -T/2$.

Ao se fazer o período fundamental T tender ao infinito, passa-se de uma função periódica a uma função aperiódica. Em outras palavras, se T vai se infinito, a função nunca se repetirá e, portanto, vai se tornar aperiódica. À medida que T aumenta, a separação entre freqüências harmônicas adjacentes fica cada vez menor. Em particular,

$$\Delta\omega = (n+1)\omega_0 - n\omega_0 = \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \tag{17.3}$$

e, à medida que T cresce, a separação incremental $\Delta\omega$ tende a uma separação diferencial $d\omega$. Pela Equação 17.3,

$$\frac{1}{T} \to \frac{d\omega}{2\pi} \quad \text{quando} \quad T \to \infty. \tag{17.4}$$

À medida que o período cresce, a freqüência deixa de ser uma variável discreta e passa a ser uma variável contínua, ou

$$n\omega_0 \to \omega \text{ quando } T \to \infty. \tag{17.5}$$

Em termos da Equação 17.2, à medida que o período aumenta, os coeficientes de Fourier, C_n, diminuem. No limite, $C_n \to 0$ quando $T \to \infty$. Esse resultado faz sentido, pois os coeficientes de Fourier supostamente desaparecem à medida que a função perde sua periodicidade. Entretanto,

observe o valor-limite do produto C_nT; isto é,

$$C_nT \to \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt \quad \text{quando} \quad T \to \infty. \tag{17.6}$$

Quando escrevemos a Equação 17.6, levamos em conta a Equação 17.5. A integral na Equação 17.6 é a *transformada de Fourier* de $f(t)$ e é representada da seguinte forma:

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt. \tag{17.7}$$

(Transformada de Fourier)

Obtemos uma expressão explícita para a transformada inversa de Fourier investigando a forma-limite da Equação 17.1 quando $T \to \infty$. Começamos multiplicando e dividindo a equação por T:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (C_nT)e^{jn\omega_0 t}\left(\frac{1}{T}\right). \tag{17.8}$$

À medida que $T \to \infty$, o somatório tende à integral, $C_nT \to F(\omega)$, $n\omega_0 \to \omega$ e $1/T \to d\omega/2\pi$. Assim, no limite, a Equação 17.8 torna-se

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega. \tag{17.9}$$

(Transformada inversa de Fourier)

As equações 17.7 e 17.9 definem a transformada de Fourier. A Equação 17.7 transforma a expressão no domínio do tempo, $f(t)$, em sua expressão correspondente no domínio da freqüência, $F(\omega)$. A Equação 17.9 define a operação inversa, ou seja, a transformação de $F(\omega)$ em $f(t)$.

Calculemos, agora, a transformada de Fourier do pulso mostrado na Figura 17.1. Observe que esse pulso corresponde à tensão periódica do Exemplo 16.6 se fizermos $T \to \infty$. A transformada de Fourier de $v(t)$ pode ser calculada diretamente da Equação 17.7:

$$V(\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_m e^{-j\omega t}\,dt$$

$$= V_m \frac{e^{-j\omega t}}{(-j\omega)}\bigg|_{-\tau/2}^{\tau/2}$$

$$= \frac{V_m}{-j\omega}\left(-2j\,\text{sen}\frac{\omega\tau}{2}\right), \tag{17.10}$$

que pode ser colocada na forma de (sen x)/x multiplicando o numerador e o denominador por τ. Então,

$$V(\omega) = V_m\tau\frac{\text{sen}\,\omega\tau/2}{\omega\tau/2}. \tag{17.11}$$

A expressão para os coeficientes de Fourier da seqüência infinita de pulsos do Exemplo 16.6 é

$$C_n = \frac{V_m\tau}{T}\frac{\text{sen}\,n\omega_0\tau/2}{n\omega_0\tau/2}. \tag{17.12}$$

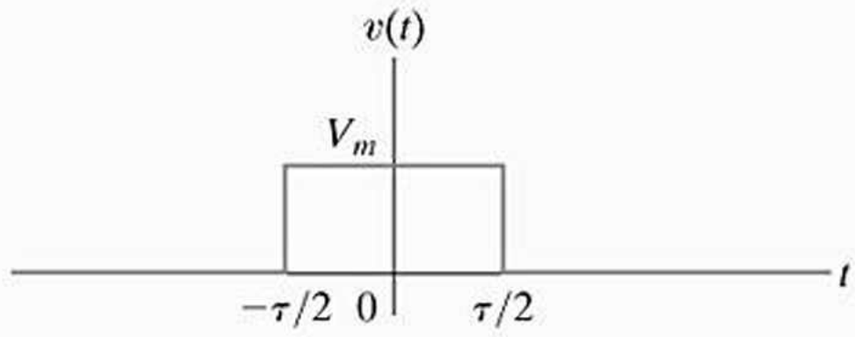


Figura 17.1 ▲ Pulso de tensão.

Comparando as equações 17.11 e 17.12 vê-se claramente que, à medida que a função no domínio do tempo passa de periódica para aperiódica, o espectro da amplitude passa de um espectro discreto para um espectro contínuo. Além do mais, a envoltória do espectro discreto tem a mesma forma do espectro contínuo. Desse modo, à medida que T aumenta, o espectro discreto fica mais denso e as amplitudes ficam menores, mas a forma da envoltória não muda. A transformada de Fourier $V(\omega)$ pode ser interpretada, portanto, como uma medida do conteúdo de freqüências de $v(t)$. A Figura 17.2 ilustra essas observações. O gráfico do espectro de amplitude pressupõe que τ permaneça constante à medida que T cresce.

17.2 Convergência da integral de Fourier

Uma função do tempo $f(t)$ tem uma transformada de Fourier se a integral na Equação 17.7 convergir. Se $f(t)$ for uma função não-nula bem-comportada em um intervalo

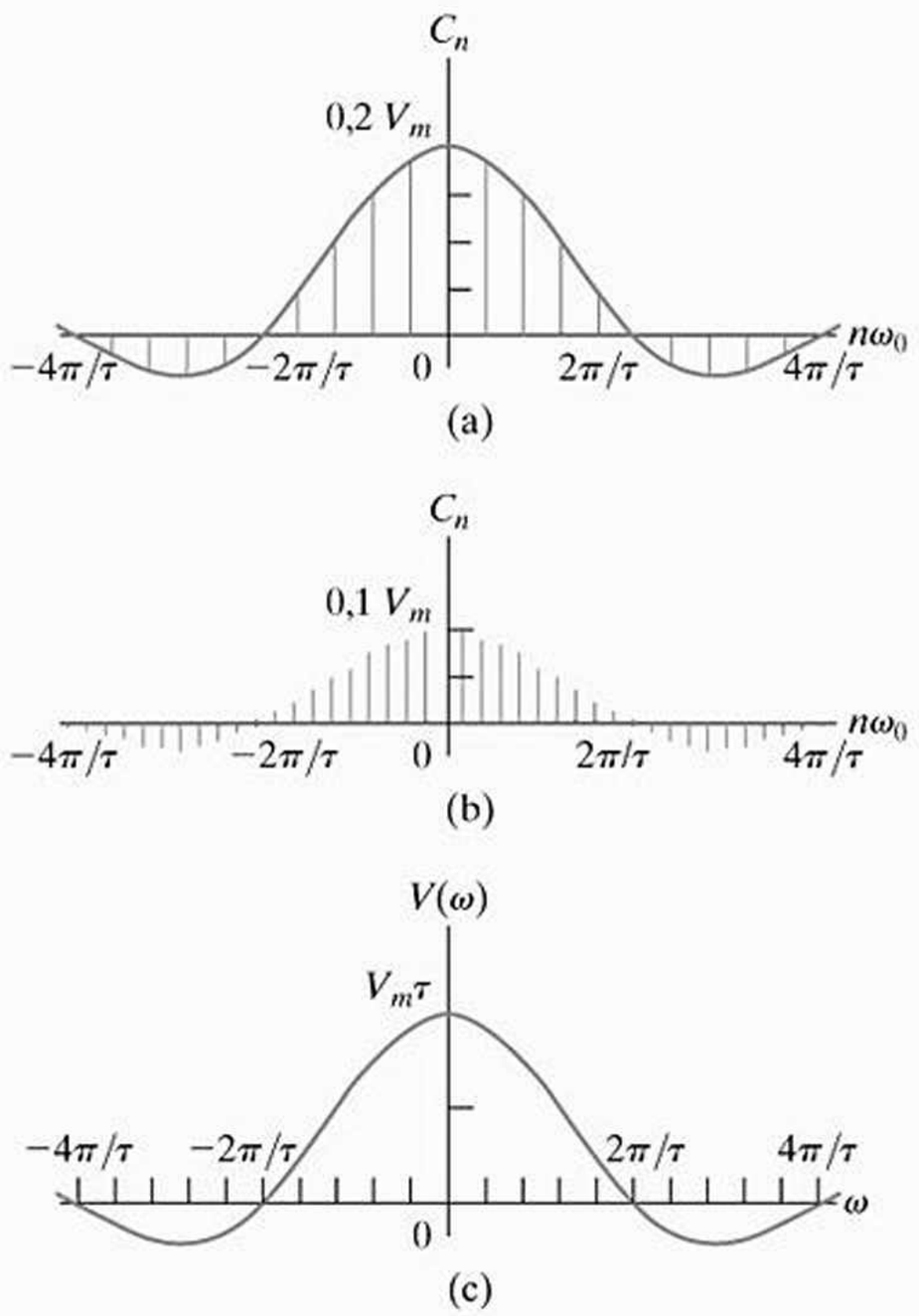


Figura 17.2 ▲ Transição do espectro de amplitude à medida que $f(t)$ passa de periódica a aperiódica. (a) C_n em relação a $n\omega_0$, $T/\tau = 5$; (b) C_n em relação a $n\omega_0$, $T/\tau = 10$; (c) $V(\omega)$ em relação a ω.

de tempo finito, a convergência não é problema. *Bem-comportada* implica que $f(t)$ seja unívoca e limitada em seu domínio. Em termos práticos, todos os pulsos de duração finita que nos interessam são funções bem-comportadas. A avaliação da transformada de Fourier do pulso retangular discutida na Seção 17.1 ilustra esse ponto.

Se $f(t)$ for diferente de zero em um intervalo infinito, a convergência da integral de Fourier dependerá do comportamento de $f(t)$ quando $t \to \infty$. Uma função não-nula e unívoca em um intervalo infinito tem uma transformada de Fourier se a integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt$$

existir e se quaisquer descontinuidades em $f(t)$ forem finitas. A função exponencial decrescente ilustrada na Figura 17.3 é um exemplo de tal função. Sua transformada de Fourier é

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\, dt = \int_{0}^{\infty} Ke^{-at}e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= \frac{Ke^{-(a+j\omega)t}}{-(a + j\omega)}\bigg|_0^{\infty} = \frac{K}{-(a + j\omega)}(0-1)$$

$$= \frac{K}{a + j\omega}, \quad a > 0. \tag{17.13}$$

Um grupo importante de funções de grande interesse prático não possui, a rigor, transformada de Fourier. Por exemplo, a integral na Equação 17.7 não converge se $f(t)$ for uma constante. O mesmo acontece se $f(t)$ for uma função senoidal, cos $\omega_0 t$, ou um degrau, $Ku(t)$. Essas funções são de grande interesse em análise de circuitos, mas, para incluí-las na análise de Fourier, temos de recorrer a alguns subterfúgios matemáticos. Em primeiro lugar, criamos uma função auxiliar no domínio do tempo que tenha uma transformada de Fourier e, ao mesmo tempo, possa ser transformada em uma função arbitrariamente próxima da função de interesse. Em seguida, determinamos a transformada de Fourier da função auxiliar e, então, avaliamos o valor-limite de $F(\omega)$ quando essa função tende a f(t). Por último, definimos o valor-limite de $F(\omega)$ como a transformada de Fourier de $f(t)$.

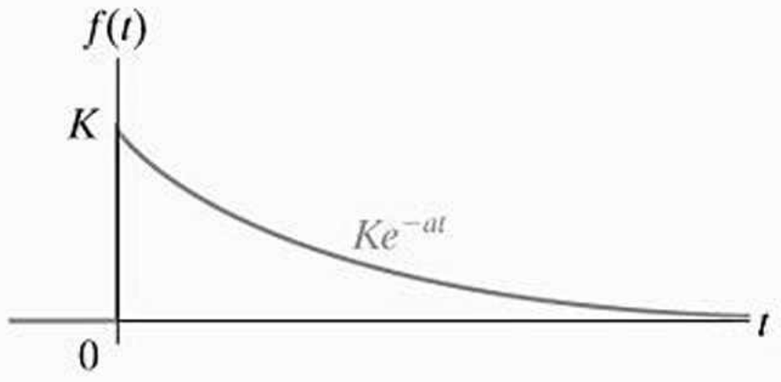


Figura 17.3 ▲ Função exponencial decrescente $Ke^{-at}u(t)$.

Vamos ilustrar essa técnica determinando a transformada de Fourier de uma constante. Podemos aproximar uma constante por meio da função exponencial

$$f(t) = Ae^{-\epsilon|t|}, \epsilon > 0. \tag{17.14}$$

À medida que $\epsilon \to 0, f(t) \to A$. A Figura 17.4 mostra uma representação gráfica da aproximação. A transformada de Fourier de $f(t)$ é

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{0} Ae^{\epsilon t}e^{-j\omega t}\, dt + \int_{0}^{\infty} Ae^{-\epsilon t}e^{-j\omega t}\, dt. \tag{17.15}$$

Resolvendo a integração, obtemos

$$F(\omega) = \frac{A}{\epsilon - j\omega} + \frac{A}{\epsilon + j\omega} = \frac{2\epsilon A}{\epsilon^2 + \omega^2}. \tag{17.16}$$

A função dada pela Equação 17.16 se transforma numa função impulso em $\omega = 0$, à medida que $\epsilon \to 0$. Você pode verificar esse resultado mostrando que (1) $F(\omega)$ tende ao infinito em $\omega = 0$, à medida que $\epsilon \to 0$; (2) a duração de $F(\omega)$ tende a zero à medida que $\epsilon \to 0$; e (3) a área sob a curva de $F(\omega)$ é independente de ϵ. A área sob $F(\omega)$ é a intensidade do impulso e é dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\epsilon A}{\epsilon^2 + \omega^2}\, d\omega = 4\epsilon A \int_{0}^{\infty} \frac{d\omega}{\epsilon^2 + \omega^2} = 2\pi A. \tag{17.17}$$

No limite, $f(t)$ tende a uma constante A, e $F(\omega)$ tende a uma função impulso $2\pi A\delta(\omega)$. Assim, a transformada de Fourier de uma constante A é definida como $2\pi A\delta(\omega)$, ou

$$\mathcal{F}\{A\} = 2\pi A\delta(\omega). \tag{17.18}$$

Na Seção 17.4, voltaremos a tratar de transformadas de Fourier definidas por meio de limites. Antes disso, mostraremos na Seção 17.3 como usar a transformada de Laplace para determinar a transformada de Fourier de funções para as quais a integral de Fourier converge.

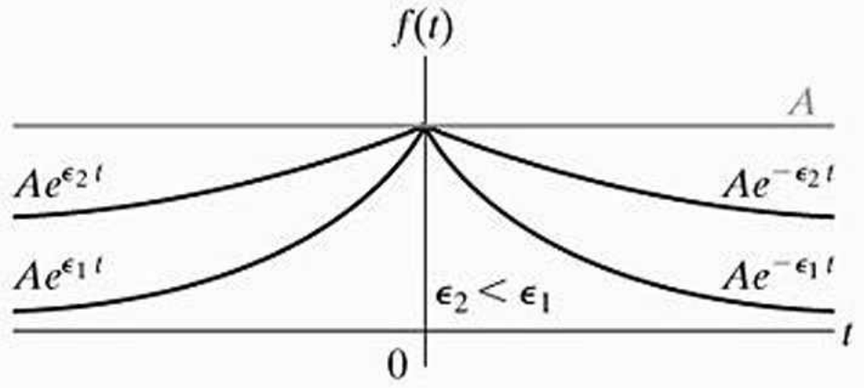


Figura 17.4 ▲ Aproximação de uma constante por meio de uma função exponencial.

✔ PROBLEMAS PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 1 — Saber calcular a transformada de Fourier de uma função

17.1 Use a integral de definição para determinar a transformada de Fourier das seguintes funções:

a) $f(t) = -A, \ -\tau/2 \leq t < 0;$
$f(t) = A, \ 0 < t \leq \tau/2;$
$f(t) = 0$ em todos os outros valores de t.

b) $f(t) = 0, \quad t < 0;$
$f(t) = te^{-at}, \quad t \geq 0, a > 0.$

Resposta: (a) $-j\left(\frac{2A}{\omega}\right)\left(1 - \cos\frac{\omega\tau}{2}\right);$

(b) $\frac{1}{(a + j\omega)^2}.$

17.2 A transformada de Fourier de $f(t)$ é dada por
$F(\omega) = 0, \quad -\infty \leq \omega < -3;$
$F(\omega) = 4, \quad -3 < \omega < -2;$
$F(\omega) = 1, \quad -2 < \omega < 2;$
$F(\omega) = 4, \quad 2 < \omega < 3;$
$F(\omega) = 0, \quad 3 < \omega \leq \infty.$
Determine $f(t)$.

Resposta: $f(t) = \frac{1}{\pi t}(4 \operatorname{sen} 3t - 3 \operatorname{sen} 2t).$

NOTA: Tente resolver também os problemas 17.2 e 17.3, apresentados no final do capítulo.

17.3 Uso de transformadas de Laplace para calcular transformadas de Fourier

Podemos usar uma tabela de pares de transformadas de Laplace unilaterais para determinar a transformada de Fourier de funções para as quais a integral de Fourier converge. A integral de Fourier converge quando todos os pólos de $F(s)$ encontram-se na metade esquerda do plano s. Observe que, se $F(s)$ tiver pólos na metade direita do plano s ou ao longo do eixo imaginário, $f(t)$ não satisfaz a restrição de que $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt$ existe.

As seguintes regras aplicam-se à utilização de transformadas de Laplace para calcular as transformadas de Fourier nos casos possíveis.

1. Se $f(t)$ for zero para $t \leq 0^-$, obtemos a transformada de Fourier de $f(t)$ pela transformada de Laplace de $f(t)$ com a simples substituição de s por $j\omega$. Assim,

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}_{s=j\omega}. \tag{17.19}$$

Por exemplo, digamos que
$f(t) = 0, \quad t \leq 0^-;$
$f(t) = e^{-at}\cos\omega_0 t, \quad t \geq 0^+.$
Então,

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \left.\frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega_0^2}\right|_{s=j\omega} = \frac{j\omega + a}{(j\omega + a)^2 + \omega_0^2}.$$

2. Como o intervalo de integração da integral de Fourier vai de $-\infty$ a $+\infty$, existe a transformada de Fourier de uma função definida para valores negativos do tempo. Tal função de tempo negativo é não-nula para valores negativos de tempo e zero para valores positivos de tempo. Para determinar a transformada de Fourier dessa função, fazemos o seguinte: em primeiro lugar, refletimos a função de tempo negativo para o domínio do tempo positivo e, então, determinamos sua transformada unilateral de Laplace. Obtemos a transformada de Fourier da função original substituindo s por $-j\omega$. Assim, quando $f(t) = 0$ para $t \geq 0^+$,

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{f(-t)\}_{s=-j\omega}. \tag{17.20}$$

Por exemplo, se
$f(t) = 0, \quad$ (para $t \geq 0^+$);
$f(t) = e^{at}\cos\omega_0 t, \quad$ (para $t \leq 0^-$).
então
$f(-t) = 0, \quad$ (para $t \leq 0^-$);
$f(-t) = e^{-at}\cos\omega_0 t, \quad$ (para $t \geq 0^+$).

Tanto a $f(t)$ como sua imagem especular estão representadas em gráfico na Figura 17.5.

A transformada de Fourier de $f(t)$ é

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{f(-t)\}_{s=-j\omega} = \left.\frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega_0^2}\right|_{s=-j\omega}$$
$$= \frac{-j\omega + a}{(-j\omega + a)^2 + \omega_0^2}.$$

3. Funções não-nulas em todo o intervalo de tempo podem ser transformadas em uma soma de funções de tempo positivo e negativo. Usamos as equações 17.19 e 17.20 para calcular a transformada de Fourier das funções de tempo positivo e negativo, respectivamente. A transformada de Fourier da função original é a soma das duas transformadas. Assim, se fizermos

$f^+(t) = f(t) \quad$ (para $t > 0$),
$f^-(t) = f(t) \quad$ (para $t < 0$),

então

$$f(t) = f^+(t) + f^-(t)$$

e

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{F}\{f^+(t)\} + \mathcal{F}\{f^-(t)\}$$
$$= \mathcal{L}\{f^+(t)\}_{s=j\omega} + \mathcal{L}\{f^-(-t)\}_{s=-j\omega}. \tag{17.21}$$

Um exemplo da utilização da Equação 17.21 é o cálculo da transformada de Fourier de $e^{-a|t|}$. As funções de tempo positivo e negativo para a função original são

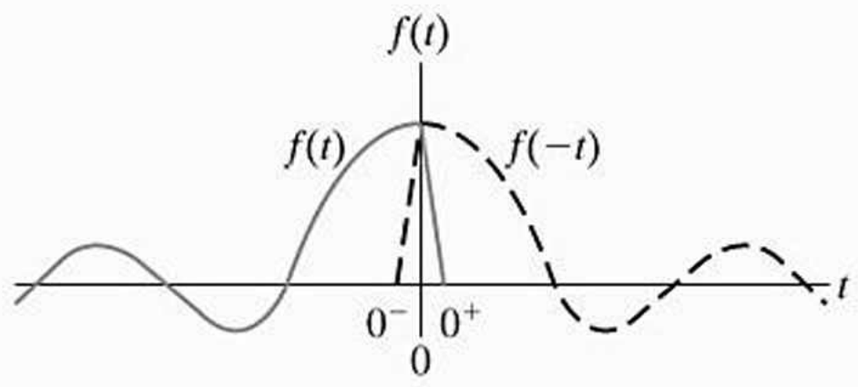


Figura 17.5 ▲ Reflexão de uma função de tempo negativo no domínio do tempo positivo.

$$f^+(t) = e^{-at} \quad \text{e} \quad f^-(t) = e^{at}.$$

Então

$$\mathcal{L}\{f^+(t)\} = \frac{1}{s + a},$$

$$\mathcal{L}\{f^-(-t)\} = \frac{1}{s + a}.$$

Portanto, pela Equação 17.21,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{e^{-a|t|}\} &= \frac{1}{s + a}\bigg|_{s=j\omega} + \frac{1}{s + a}\bigg|_{s=-j\omega} \\ &= \frac{1}{j\omega + a} + \frac{1}{-j\omega + a} \\ &= \frac{2a}{\omega^2 + a^2}.\end{aligned}$$

Se $f(t)$ for par, a Equação 17.21 reduz-se a

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}_{s=j\omega} + \mathcal{L}\{f(t)\}_{s=-j\omega}. \quad (17.22)$$

Se $f(t)$ for ímpar, então a Equação 17.21 torna-se

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}_{s=j\omega} - \mathcal{L}\{f(t)\}_{s=-j\omega}. \quad (17.23)$$

17.4 Uso de limites para calcular transformadas de Fourier

Como indicamos na Seção 17.2, as transformadas de Fourier de várias funções de interesse prático só podem ser calculadas por um processo de cálculo de limites. Agora, voltaremos a esses tipos de funções e determinaremos suas transformadas.

Transformada de Fourier da função sinal

Mostramos, na Equação 17.18, que a transformada de Fourier de uma constante A é $2\pi A\delta(\omega)$. A próxima função de interesse é a função sinal, definida como +1 para $t > 0$ e -1 para $t < 0$. A função sinal, $\text{sgn}(t)$, pode ser expressa em termos de funções degrau unitário, ou

$$\text{sgn}(t) = u(t) - u(-t). \quad (17.24)$$

A Figura 17.6 mostra a função em gráfico.

Para determinar a transformada de Fourier da função sinal, em primeiro lugar, criamos uma função que tende, no limite, à função sinal:

$$\text{sgn}(t) = \lim_{\epsilon \to 0}[e^{-\epsilon t}u(t) - e^{\epsilon t}u(-t)], \quad \epsilon > 0. \quad (17.25)$$

A função entre colchetes, apresentada na Figura 17.7, tem uma transformada de Fourier, pois a integral de Fourier converge. Como $f(t)$ é uma função ímpar, usamos a Equação 17.23 para determinar sua transformada de Fourier:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f(t)\} &= \frac{1}{s + \epsilon}\bigg|_{s=j\omega} - \frac{1}{s + \epsilon}\bigg|_{s=-j\omega} \\ &= \frac{1}{j\omega + \epsilon} - \frac{1}{-j\omega + \epsilon} \\ &= \frac{-2j\omega}{\omega^2 + \epsilon^2}. \quad (17.26)\end{aligned}$$

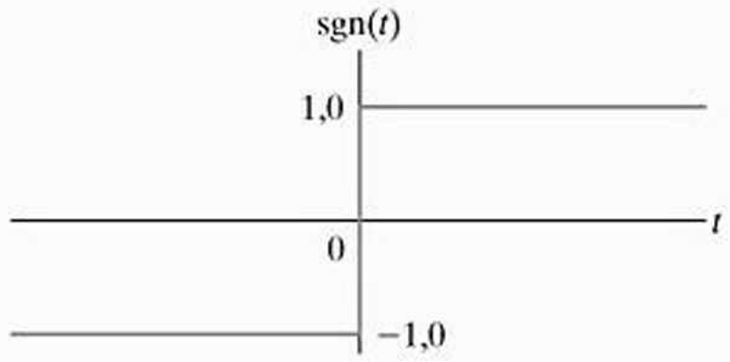


Figura 17.6 ◀
Função sinal.

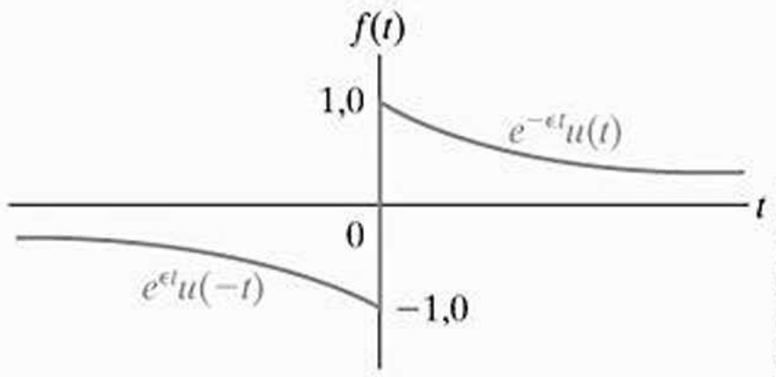


Figura 17.7 ◀
Função que tende a sgn(t) à medida que ϵ aproxima-se de zero.

✔ PROBLEMA PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 1 — Saber calcular a transformada de Fourier de uma função

17.3 Determine a transformada de Fourier de cada função. Em cada caso, a é uma constante real positiva.

a) $f(t) = 0, \quad t < 0,$
$f(t) = e^{-at}\text{sen}\ \omega_0 t, \quad t \geq 0.$

b) $f(t) = 0, \quad t > 0,$
$f(t) = -te^{at}, \quad t \leq 0.$

c) $f(t) = te^{-at}, \quad t \geq 0,$
$f(t) = te^{at}, \quad t \leq 0.$

Resposta: (a) $\dfrac{\omega_0}{(a + j\omega)^2 + \omega_0^2}$;

(b) $\dfrac{1}{(a - j\omega)^2}$;

(c) $\dfrac{-j4a\omega^2}{(a^2 + \omega^2)^2}$.

NOTA: Tente resolver também o Problema 17.4, apresentado no final do capítulo.

Quando $\epsilon \to 0, f(t) \to \text{sgn}(t)$ e $\mathcal{F}\{f(t)\} \to 2/j\omega$. Assim,

$$\mathcal{F}\{\text{sgn}(t)\} = \frac{2}{j\omega}. \tag{17.27}$$

Transformada de Fourier da função degrau unitário

Para determinar a transformada de Fourier da função degrau unitário, usamos as equações 17.18 e 17.27. Para tal, reconhecemos que a função degrau unitário pode ser expressa como

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{sgn}(t). \tag{17.28}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{u(t)\} &= \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}\right\} + \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}\text{sgn}(t)\right\} \\ &= \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}.\end{aligned} \tag{17.29}$$

Transformada de Fourier da função co-seno

Para determinar a transformada de Fourier de $\cos \omega_0 t$, voltamos à integral da transformada inversa da Equação 17.9 e observamos que, se

$$F(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0), \tag{17.30}$$

então

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[2\pi\delta(\omega - \omega_0)]e^{j\omega t}\,d\omega. \tag{17.31}$$

Usando a propriedade da filtragem da função impulso, reduzimos a Equação (17.31) a

$$f(t) = e^{j\omega_0 t}. \tag{17.32}$$

Então, pelas equações 17.30 e 17.32,

$$\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}\} = 2\pi\delta(\omega - \omega_0). \tag{17.33}$$

Usamos, agora, a Equação 17.33 para determinar a transformada de Fourier de $\cos \omega_0 t$, pois

$$\cos \omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}. \tag{17.34}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\cos \omega_0 t\} &= \frac{1}{2}(\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}\} + \mathcal{F}\{e^{-j\omega_0 t}\}) \\ &= \frac{1}{2}[2\pi\delta(\omega - \omega_0) + 2\pi\delta(\omega + \omega_0)] \\ &= \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0).\end{aligned} \tag{17.35}$$

A transformada de Fourier de sen $\omega_0 t$ pode ser calculada de forma semelhante, o que deixamos para o Problema 17.5, apresentado no final do capítulo. A Tabela 17.1 apresenta um resumo de pares de transformadas de Fourier das funções elementares importantes.

Agora, voltamos às propriedades da transformada de Fourier que aperfeiçoam nossa capacidade de descrever o comportamento aperiódico no domínio do tempo em termos do comportamento no domínio da freqüência.

17.5 Algumas propriedades matemáticas

A primeira propriedade matemática importante é que $F(\omega)$ é uma quantidade complexa e pode ser expressa em forma retangular ou polar. Assim,

$$\begin{aligned}F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(\cos\ \omega t\ -\ j\ \text{sen}\ \omega t)\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\ \omega t\,dt\ -\ j\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\text{sen}\ \omega t\,dt.\end{aligned} \tag{17.36}$$

TABELA 17.1 Transformadas de Fourier de funções elementares

Tipo	$f(t)$	$F(\omega)$
impulso	$\delta(t)$	1
constante	A	$2\pi\ A\delta(\omega)$
sinal	$\text{sgn}(t)$	$2/j\omega$
degrau	$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + 1/j\omega$
exponencial de tempo positivo	$e^{-at}u(t)$	$1/(a + j\omega), \quad a > 0$
exponencial de tempo negativo	$e^{-at}u(-t)$	$1/(a - j\omega), \quad a > 0$
exponencial de tempo positivo e negativo	$e^{-a\|t\|}$	$2a/(a^2 - \omega^2), \quad a > 0$
exponencial complexa	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
co-seno	$\cos \omega_0 t$	$\pi[(\omega - \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$
seno	$\text{sen}\ \omega_0 t$	$j\pi[\delta\ (\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$

Agora, façamos

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt \tag{17.37}$$

$$B(\omega) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \operatorname{sen} \omega t \, dt. \tag{17.38}$$

Então, usando as equações 17.37 e 17.38 na Equação 17.36, obtemos:

$$F(\omega) = A(\omega) + jB(\omega) = |F(\omega)|e^{j\theta(\omega)}. \tag{17.39}$$

As seguintes observações são pertinentes:

- A parte real de $F(\omega)$ — isto é, $A(\omega)$ — é uma função par de ω; em outras palavras, $A(\omega) = A(-\omega)$.
- A parte imaginária de $F(\omega)$ — isto é, $B(\omega)$ — é uma função ímpar de ω; em outras palavras, $B(\omega) = -B(-\omega)$.
- O módulo de $F(\omega)$ — isto é, $\sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}$ — é uma função par de ω.
- O ângulo de fase de $F(\omega)$ — isto é, $\theta(\omega) = \text{tg}^{-1}B(\omega)/A(\omega)$ — é uma função ímpar de ω.
- Para obter o complexo conjugado de $F(\omega)$, basta substituir ω por $-\omega$; em outras palavras, $F(-\omega) = F^*(\omega)$.

Então, se $f(t)$ for uma função par, $F(\omega)$ será real, e se $f(t)$ for uma função ímpar, $F(\omega)$ será imaginária. Se $f(t)$ for par, pelas equações 17.37 e 17.38,

$$A(\omega) = 2\int_{0}^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt \tag{17.40}$$

e

$$B(\omega) = 0. \tag{17.41}$$

Se $f(t)$ for uma função ímpar,

$$A(\omega) = 0. \tag{17.42}$$

e

$$B(\omega) = -2\int_{0}^{\infty} f(t) \operatorname{sen} \omega t \, dt. \tag{17.43}$$

Deixamos ao leitor as deduções das equações 17.40 – 17.43 (problemas 17.10 e 17.11, apresentados no final do capítulo).

Se $f(t)$ for uma função par, sua transformada de Fourier será uma função par, e se $f(t)$ for uma função ímpar, sua transformada de Fourier será uma função ímpar. Além do mais, se $f(t)$ for uma função par, pela integral inversa de Fourier,

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)e^{j\omega t}\, d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)(\cos \omega t + j \operatorname{sen} \omega t)\, d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \cos \omega t \, d\omega + 0 \\ &= \frac{2}{2\pi}\int_{0}^{\infty} A(\omega) \cos \omega t \, d\omega. \end{aligned} \tag{17.44}$$

Compare, agora, a Equação 17.44 com a Equação 17.40. Observe que, exceto por um fator de $1/2\pi$, essas duas equações têm a mesma forma. Assim, as formas de onda de $A(\omega)$ e $f(t)$ tornam-se intercambiáveis se $f(t)$ for uma função par. Por exemplo, já observamos que um pulso retangular no domínio do tempo produz um espectro de freqüência da forma $(\operatorname{sen} \omega)/\omega$. Especificamente, a Equação 17.11 expressa a transformada de Fourier do pulso de tensão mostrado na Figura 17.1. Assim, um pulso retangular no domínio da fre-qüência deve ser gerado por uma função da forma $(\operatorname{sen} t)/t$. Podemos ilustrar esse fato determinando a função $f(t)$ correspondente ao espectro de freqüência da Figura 17.8.

Pela Equação 17.44,

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{2}{2\pi}\int_{0}^{\omega_0/2} M\cos \omega t \, d\omega = \frac{2M}{2\pi}\left(\frac{\operatorname{sen} \omega t}{t}\right)\Bigg|_{0}^{\omega_0/2} \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(M\frac{\operatorname{sen} \omega_0 t/2}{t/2}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(M\omega_0\frac{\operatorname{sen} \omega_0 t/2}{\omega_0 t/2}\right). \end{aligned} \tag{17.45}$$

Falaremos mais sobre o espectro de freqüência de um pulso retangular depois de apresentarmos o teorema de Parseval.

17.6 Transformadas operacionais

As transformadas de Fourier, assim como as de Laplace, podem ser classificadas como funcionais e operacionais. Até aqui, nós nos concentramos nas funcionais. Agora, discutiremos algumas das transformadas operacionais importantes. No que se refere à transformada de Laplace, essas transformadas operacionais são semelhantes às discutidas no Capítulo 12. Por isso, deixamos ao leitor essas provas (problemas 17.12–17.19, apresentados no final do capítulo).

Multiplicação por uma constante

Pela integral que define a transformada de Fourier

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega),$$

então

$$\mathcal{F}\{Kf(t)\} = KF(\omega). \tag{17.46}$$

Assim, a multiplicação de $f(t)$ por uma constante corresponde à multiplicação de $F(\omega)$ pela mesma constante.

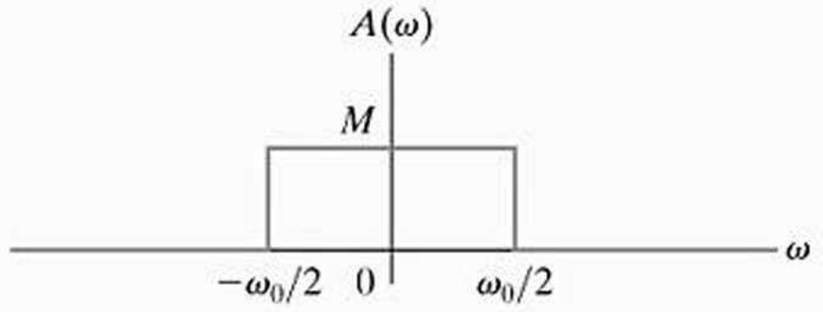


Figura 17.8 ▲ Espectro de freqüência retangular.

Adição (Subtração)

A adição (subtração) no domínio do tempo corresponde à adição (subtração) no domínio da freqüência. Assim, se

$$\mathcal{F}\{f_1(t)\} = F_1(\omega),$$
$$\mathcal{F}\{f_2(t)\} = F_2(\omega),$$
$$\mathcal{F}\{f_3(t)\} = F_3(\omega),$$

então

$$\mathcal{F}\{f_1(t) - f_2(t) + f_3(t)\} = F_1(\omega) - F_2(\omega) + F_3(\omega), \tag{17.47}$$

que pode ser deduzida substituindo a soma algébrica de funções no domínio do tempo na integral que define a transformada de Fourier.

Diferenciação

A transformada de Fourier da derivada de primeira ordem de $f(t)$ é

$$\mathcal{F}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = j\omega F(\omega). \tag{17.48}$$

A derivada de ordem n de $f(t)$ é

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = (j\omega)^n F(\omega). \tag{17.49}$$

As equações 17.48 e 17.49 são válidas apenas se $f(t)$ for zero em $\pm\infty$.

Integração

Se

$$g(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx,$$

então

$$\mathcal{F}\{g(t)\} = \frac{F(\omega)}{j\omega}. \tag{17.50}$$

A Equação 17.50 é válida apenas se

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 0.$$

Mudança de escala

Dimensionalmente, tempo e freqüência são recíprocos. Assim, quando o tempo é ampliado, a freqüência é comprimida (e vice-versa), como mostra a transformada funcional

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad a > 0. \tag{17.51}$$

Observe que, quando $0 < a < 1$, o tempo é ampliado, ao passo que, quando $a > 1$, o tempo é comprimido.

Deslocamento no domínio do tempo

O efeito de deslocar uma função no domínio do tempo é alterar o espectro de fase e deixar o espectro de amplitude inalterado. Assim,

$$\mathcal{F}\{f(t - a)\} = e^{-j\omega a}F(\omega). \tag{17.52}$$

Se a for positivo na Equação 17.52, $f(t)$ será atrasada; se a for negativo, $f(t)$ será adiantada.

Deslocamento no domínio da freqüência

O deslocamento no domínio da freqüência corresponde à multiplicação por uma exponencial complexa no domínio do tempo:

$$\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}f(t)\} = F(\omega - \omega_0). \tag{17.53}$$

Modulação

Modulação de amplitude é o processo de variar a amplitude de uma onda senoidal (portadora), de acordo com um sinal modulador. Se esse sinal for $f(t)$, a portadora modulada torna-se $f(t)\cos\omega_0 t$. O espectro de amplitude dessa portadora tem duas partes, correspondendo ao espectro de amplitude de $F(\omega)$ multiplicado por meio e deslocado para a direita e para a esquerda de ω_0, respectivamente:

$$\mathcal{F}\{f(t)\cos\omega_0 t\} = \frac{1}{2}F(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}F(\omega + \omega_0). \tag{17.54}$$

Convolução no domínio do tempo

A convolução no domínio do tempo corresponde à multiplicação no domínio da freqüência. Em outras palavras,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t - \lambda)\,d\lambda$$

torna-se

$$\mathcal{F}\{y(t)\} = Y(\omega) = X(\omega)H(\omega). \tag{17.55}$$

A Equação 17.55 é importante em aplicações da transformada de Fourier porque estabelece que a transformada da função resposta $Y(\omega)$ é o produto entre a transformada da função da entrada $X(\omega)$ e a função de transferência do sistema $H(\omega)$. Falaremos mais sobre essa relação na Seção 17.7.

Convolução no domínio da freqüência

A convolução no domínio da freqüência corresponde à multiplicação de duas funções no domínio do tempo. Assim, se

$$f(t) = f_1(t)f_2(t),$$

então

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(u)F_2(\omega - u)\,du. \tag{17.56}$$

A Tabela 17.2 resume essas dez transformadas operacionais, além de outra que apresentaremos no Problema 17.18, no final do capítulo.

17.7 Aplicações em análise de circuitos

Duas são as razões para a transformada de Laplace ser mais utilizada em análise de circuitos que a transformada de Fourier. A primeira delas é que a integral da transformada de Laplace converge para uma faixa mais ampla de formas de onda; a segunda é que ela já incorpora as condições iniciais do problema. Apesar das vantagens da transformada de Laplace, também podemos usar a transformada de Fourier em análise de circuitos. A relação fundamental subjacente à utilização da transformada de Fourier em análise do regime transitório de circuitos é a Equação 17.55, que relaciona a transformada da resposta $Y(\omega)$ com a transformada da entrada $X(\omega)$ e a função de transferência $H(\omega)$ do circuito. Observe que $H(\omega)$ é a conhecida $H(s)$ na qual s foi substituído por $j\omega$.

O Exemplo 17.1 mostra como usar a transformada de Fourier para determinar a resposta de um circuito.

TABELA 17.2 Transformadas operacionais

$f(t)$	$F(\omega)$
$Kf(t)$	$KF(\omega)$
$f_1(t) - f_2(t) + f_3(t)$	$F_1(\omega) - F_2(\omega) + F_3(\omega)$
$d^n f(t)/dt^n$	$(j\omega)^n F(\omega)$
$\int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx$	$F(\omega)/j\omega$
$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right),\ a > 0$
$f(t - a)$	$e^{-j\omega a}F(\omega)$
$e^{j\omega_0 t}f(t)$	$F(\omega - \omega_0)$
$f(t)\cos\omega_0 t$	$\frac{1}{2}F(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}F(\omega + \omega_0)$
$\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t - \lambda)\,d\lambda$	$X(\omega)H(\omega)$
$f_1(t)f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(u)F_2(\omega - u)\,du$
$t^n f(t)$	$(j)^n\frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$

✔ PROBLEMAS PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 1 — Saber calcular a transformada de Fourier de uma função

17.4 Suponha que $f(t)$ seja definida da seguinte forma:

$$f(t) = \frac{2A}{\tau}t + A, \qquad -\frac{\tau}{2} \le t \le 0,$$

$$f(t) = -\frac{2A}{\tau}t + A, \qquad 0 \le t \le \frac{\tau}{2},$$

$f(t) = 0$ para todos os outros valores de t.

a) Determine a derivada de segunda ordem de $f(t)$.

b) Determine a transformada de Fourier da derivada de segunda ordem de $f(t)$.

c) Use o resultado obtido em (b) para determinar a transformada de Fourier da função em (a). (*Sugestão*: use a transformada operacional correspondente à diferenciação.)

Resposta: (a) $\frac{d^2f}{dt^2} = \frac{2A}{\tau}\delta\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - \frac{4A}{\tau}\delta(t) + \frac{2A}{\tau}\delta\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$;

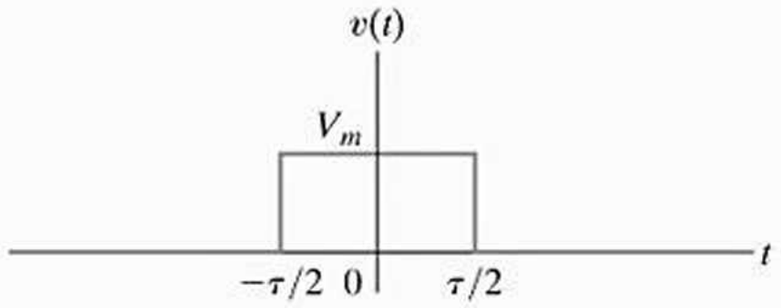
(b) $\frac{4A}{\tau}\left(\cos\frac{\omega\tau}{2} - 1\right)$;

(c) $\frac{4A}{\omega^2\tau}\left(1 - \cos\frac{\omega\tau}{2}\right)$.

17.5 O pulso retangular mostrado pode ser expresso como a diferença entre duas tensões degrau; isto é,

$$v(t) = V_m u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - V_m u\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\text{V}.$$

Use a transformada operacional correspondente ao deslocamento no domínio do tempo para determinar a transformada de Fourier de $v(t)$.



Resposta: $V(\omega) = V_m\tau\frac{\text{sen}\,(\omega\tau/2)}{(\omega\tau/2)}$.

NOTA: Tente resolver também o Problema 17.19, apresentado no final do capítulo.

Exemplo 17.1 Uso da transformada de Fourier para determinar a resposta transitória de um circuito

Use a transformada de Fourier para determinar $i_o(t)$ no circuito da Figura 17.9. A fonte de corrente $i_g(t)$ é igual a 20 sgn(t) A.

Solução

A transformada de Fourier da fonte de corrente é

$$\begin{aligned} I_g(\omega) &= \mathcal{F}\{20\,\text{sgn}(t)\} \\ &= 20\left(\frac{2}{j\omega}\right) \\ &= \frac{40}{j\omega}. \end{aligned}$$

A função de transferência do circuito é a razão entre I_o e I_g; assim,

$$H(\omega) = \frac{I_o}{I_g} = \frac{1}{4 + j\omega}.$$

A transformada de Fourier de $i_o(t)$ é

$$\begin{aligned} I_o(\omega) &= I_g(\omega)H(\omega) \\ &= \frac{40}{j\omega(4 + j\omega)}. \end{aligned}$$

Expandindo $I_o(\omega)$ em uma soma de frações parciais, obtemos

$$I_o(\omega) = \frac{K_1}{j\omega} + \frac{K_2}{4 + j\omega}.$$

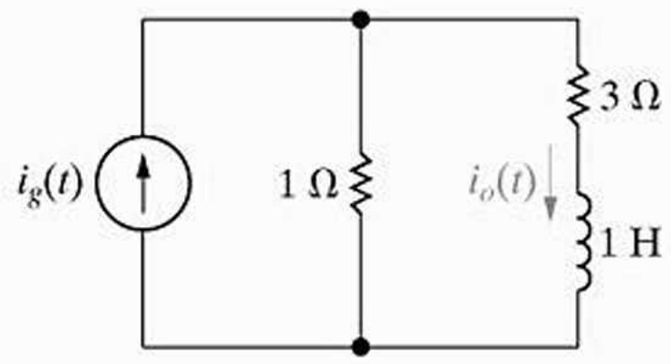


Figura 17.9 ▲ Circuito para o Exemplo 17.1.

Avaliando K_1 e K_2, temos

$$K_1 = \frac{40}{4} = 10,$$

$$K_2 = \frac{40}{-4} = -10.$$

Assim,

$$I_o(\omega) = \frac{10}{j\omega} - \frac{10}{4 + j\omega}.$$

A resposta é, então,

$$\begin{aligned} i_o(t) &= \mathcal{F}^{-1}[I_o(\omega)] \\ &= 5\,\text{sgn}(t) - 10e^{-4t}u(t). \end{aligned}$$

A Figura 17.10 mostra o gráfico da resposta. A solução faz sentido em relação ao comportamento conhecido do circuito? Sim, pelas seguintes razões. A fonte de corrente fornece −20 A ao circuito para t entre $-\infty$ e 0. A resistência em cada ramo determina a divisão de −20 A entre eles. Em particular, um quarto da corrente aparece no ramo de i_o; portanto, i_o é −5 A para $t < 0$. Quando a fonte de corrente salta de −20 A para +20 A em $t = 0$, i_o tende exponencialmente a seu valor final de +5 A, com uma constante de tempo de $\frac{1}{4}$ s.

Uma característica importante da transformada de Fourier é que ela fornece diretamente a resposta de regime permanente quando uma função de entrada é senoidal. Isso acontece porque o cálculo da transformada de Fourier de cos $\omega_0 t$ é feito para $-\infty < t < \infty$, e não para $0 \leq t < \infty$, como no caso da transformada de Laplace. O Exemplo 17.2 ilustra esse aspecto.

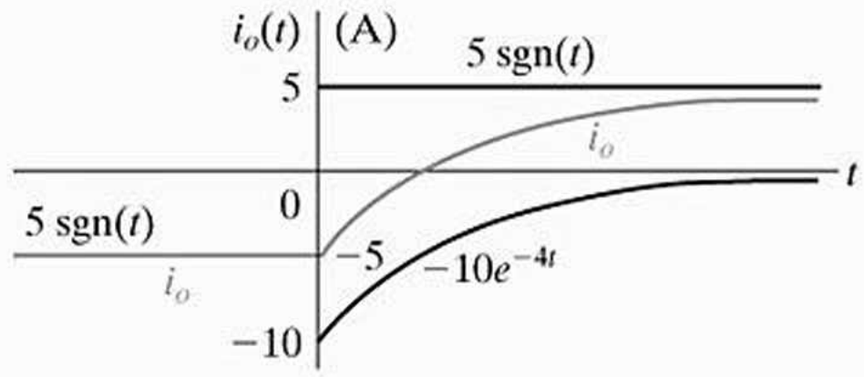


Figura 17.10 ▲ Gráfico de $i_o(t)$.

Exemplo 17.2 Uso da transformada de Fourier para determinar a resposta de regime permanente senoidal

A fonte de corrente do Exemplo 17.1 (Figura 17.9) é trocada por uma fonte senoidal. A expressão para a corrente é

$$i_g(t) = 50\cos 3t\ \text{A}.$$

Use o método da transformada de Fourier para determinar $i_o(t)$.

Solução

A transformada da fonte é

$$I_g(\omega) = 50\pi[\delta(\omega - 3) + \delta(\omega + 3)].$$

Como antes, a função de transferência do circuito é

$$H(\omega) = \frac{1}{4 + j\omega}.$$

Então, a transformada da resposta de corrente é

$$I_o(\omega) = 50\pi\frac{\delta(\omega - 3) + \delta(\omega + 3)}{4 + j\omega}.$$

Graças à propriedade de filtragem da função impulso, não é difícil determinar a transformada inversa de $I_o(\omega)$ pela Equação 17.9.

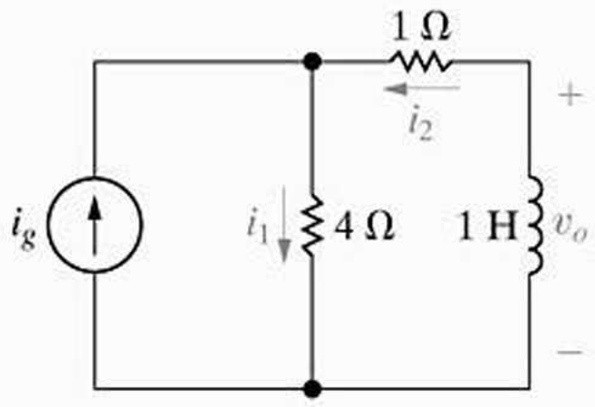
$$\begin{aligned} i_o(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{I_o(\omega)\} \\ &= \frac{50\pi}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\delta(\omega-3)+\delta(\omega+3)}{4+j\omega}\right]e^{j\omega t}\,d\omega \\ &= 25\left(\frac{e^{j3t}}{4+j3}+\frac{e^{-j3t}}{4-j3}\right) \\ &= 25\left(\frac{e^{j3t}e^{-j36{,}87^\circ}}{5}+\frac{e^{-j3t}e^{j36{,}87^\circ}}{5}\right) \\ &= 5[2\cos(3t-36{,}87^\circ)] \\ &= 10\cos(3t-36{,}87^\circ). \end{aligned}$$

Deixamos ao leitor a tarefa de verificar que a solução para $i_o(t)$ é idêntica à obtida pela análise fasorial.

✔ PROBLEMAS PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 2 — Saber como usar a transformada de Fourier para determinar a resposta de um circuito

17.6 A fonte de corrente do circuito mostrado fornece uma corrente de 10 sgn (t) A. A resposta é a tensão no indutor de 1 H. Calcule (a) $I_g(\omega)$; (b) $H(j\omega)$; (c) $V_o(\omega)$; (d) $v_o(t)$; (e) $i_1(0^-)$; (f) $i_1(0^+)$; (g) $i_2(0^-)$; (h) $i_2(0^+)$; (i) $v_o(0^-)$ e (j) $v_o(0^+)$.

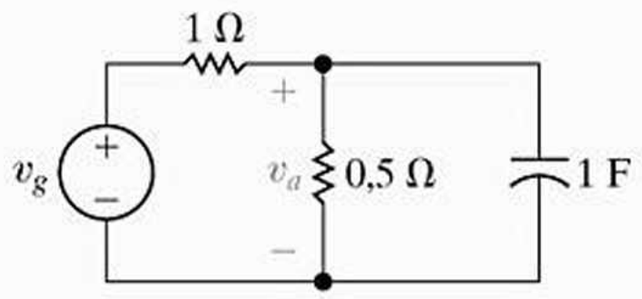


Resposta: (a) $20/j\omega$; (b) $4j\omega/(5+j\omega)$; (c) $80/(5+j\omega)$; (d) $80e^{-5t}u(t)$ V; (e) -2 A; (f) 18 A; (g) 8 A; (h) 8 A; (i) 0 V; (j) 80 V.

17.7 A fonte de tensão do circuito mostrado fornece a tensão

$$v_g = e^t u(-t) + u(t)\ \text{V}.$$

a) Use o método da transformada de Fourier para determinar v_a.
b) Calcule $v_a(0^-)$, $v_a(0^+)$ e $v_a(\infty)$.



Resposta: (a) $v_a = \frac{1}{4}e^t u(-t) - \frac{1}{12}e^{-3t}u(t) + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\,\text{sgn}(t)$ V;

(b) $\frac{1}{4}$ V, $\frac{1}{4}$ V, $\frac{1}{3}$ V.

NOTA: Tente resolver também os problemas 17.22, 17.28 e 17.32, apresentados no final do capítulo.

17.8 Teorema de Parseval

O teorema de Parseval relaciona a energia associada a uma função no domínio do tempo à transformada de Fourier da função. Imagine que a função $f(t)$ seja a tensão ou a corrente em um resistor de 1 Ω. Então, a energia associada a essa função é

$$W_{1\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,dt. \tag{17.57}$$

De acordo com o teorema de Parseval, essa mesma energia pode ser calculada por uma integração no domínio da freqüência ou, especificamente,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2\,d\omega. \tag{17.58}$$

Por conseguinte, a energia dissipada por $f(t)$ em um resistor de 1 Ω pode ser calculada pela integração do quadrado de $f(t)$ em todos os instantes de tempo ou integrando $1/2\pi$ vezes o quadrado do módulo da transformada de Fourier de $f(t)$ em todas as freqüências. O teorema de Parseval só é válido se ambas as integrais existirem.

A potência média associada aos sinais de energia finita no domínio do tempo é zero quando a média é calculada com o tempo variando de $-\infty$ a $+\infty$. Assim, quando comparamos sinais desse tipo, usamos a energia dos sinais, não a potência média. É conveniente usar um resistor de 1 Ω para comparar o conteúdo de energia dos sinais de tensão e corrente.

Começamos a dedução da Equação 17.58 reescrevendo o integrando da integral do lado esquerdo como $f(t)$ vezes ela mesma e, então, expressando uma das $f(t)$ em termos da transformada inversa:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,f(t)\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega\right]dt. \end{aligned} \tag{17.59}$$

Podemos deslocar $f(t)$ para a integral interna porque essa integração é em relação a ω, e então passamos a constante $1/2\pi$ para o lado de fora de ambas as integrais. Assim, a Equação 17.59 torna-se

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\,f(t)e^{j\omega t}\,d\omega\right]dt. \quad (17.60)$$

Invertemos a ordem de integração e, nessa operação, percebemos que $F(\omega)$ pode ser deslocada para fora da integração em relação a t. Assim,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega t}\,dt\right]d\omega. \quad (17.61)$$

Como a integral interna é $F(-\omega)$, a Equação 17.61 reduz-se a

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\,F(-\omega)\,d\omega. \quad (17.62)$$

Na Seção 17.6, observamos que $F(-\omega) = F^*(\omega)$. Desse modo, o produto $F(\omega)F(-\omega)$ é simplesmente o módulo de $F(\omega)$ ao quadrado, e a Equação 17.62 é equivalente à Equação 17.58. Além disso, notamos que $|F(\omega)|$ é uma função par de ω. Portanto, também podemos escrever a Equação 17.58 como

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} |F(\omega)|^2\,d\omega. \quad (17.63)$$

Exemplo de aplicação do teorema de Parseval

Podemos demonstrar melhor a validade da Equação 17.63 com um exemplo específico. Se

$$f(t) = e^{-a|t|},$$

o lado esquerdo da Equação 17.63 torna-se

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2a|t|}\,dt &= \int_{-\infty}^{0} e^{2at}\,dt + \int_{0}^{\infty} e^{-2at}\,dt\\ &= \frac{e^{2at}}{2a}\bigg|_{-\infty}^{0} + \frac{e^{-2at}}{-2a}\bigg|_{0}^{\infty}\\ &= \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a} = \frac{1}{a}.\end{aligned} \quad (17.64)$$

A transformada de Fourier de $f(t)$ é

$$F(\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2},$$

e, em conseqüência, o lado direito da Equação 17.63 torna-se

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{4a^2}{(a^2+\omega^2)^2}\,d\omega &= \frac{4a^2}{\pi}\frac{1}{2a^2}\left(\frac{\omega}{\omega^2+a^2} + \frac{1}{a}\ \text{tg}^{-1}\frac{\omega}{a}\right)\bigg|_{0}^{\infty}\\ &= \frac{2}{\pi}\left(0 + \frac{\pi}{2a} - 0 - 0\right)\\ &= \frac{1}{a}.\end{aligned} \quad (17.65)$$

Observe que o resultado dado pela Equação 17.65 é o mesmo dado pela Equação 17.64.

Interpretação do teorema de Parseval

Uma interpretação física do teorema de Parseval é que o quadrado do módulo da transformada de Fourier, $|F(\omega)|^2$, é uma densidade de energia (em joules por hertz). Para comprovar isso, escrevemos o lado direito da Equação 17.63 como

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} |F(2\pi f)|^2 2\pi\,df = 2\int_{0}^{\infty} |F(2\pi f)|^2\,df, \quad (17.66)$$

onde $|F(2\pi f)|^2\,df$ é a energia de uma faixa infinitesimal de freqüências (df) e a energia total dissipada por $f(t)$ em um resistor de 1 Ω é o somatório (integração) de $|F(2\pi f)|^2\,df$ em todas as freqüências. Podemos associar uma parte da energia total a uma faixa específica de freqüências. Em outras palavras, a energia na faixa de freqüências de ω_1 a ω_2 é

$$W_{1\Omega} = \frac{1}{\pi}\int_{\omega_1}^{\omega 2} |F(\omega)|^2\,d\omega. \quad (17.67)$$

Observe que expressar a integração no domínio da freqüência como

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\,d\omega$$

em vez de

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} |F(\omega)|^2\,d\omega$$

permite que a Equação 17.67 seja escrita na forma

$$W_{1\Omega} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_2}^{-\omega_1} |F(\omega)|^2\,d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_1}^{\omega_2} |F(\omega)|^2\,d\omega. \quad (17.68)$$

A Figura 17.11 ilustra a interpretação da Equação 17.68.

Os exemplos 17.3–17.5 ilustram o uso do teorema de Parseval.

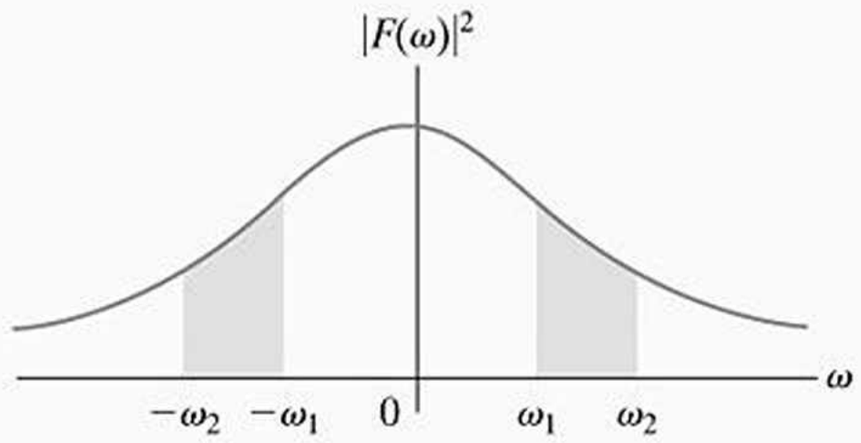


Figura 17.11 ▲ Interpretação gráfica da Equação 17.68.

Exemplo 17.3 Uso do teorema de Parseval

A corrente em um resistor de 40 Ω é

$$i = 20e^{-2t}u(t) \text{ A}.$$

Qual porcentagem da energia total dissipada no resistor pode ser associada à faixa de freqüências $0 \leq \omega \leq 2\sqrt{3}$ rad/s?

Solução

A energia total dissipada no resistor de 40 Ω é

$$W_{40\Omega} = 40\int_0^\infty 400e^{-4t}\,dt$$

$$= 16.000\,\frac{e^{-4t}}{-4}\bigg|_0^\infty = 4.000\,\text{J}.$$

Podemos verificar esse cálculo com o teorema de Parseval:

$$F(\omega) = \frac{20}{2 + j\omega}.$$

Assim,

$$|F(\omega)| = \frac{20}{\sqrt{4 + \omega^2}}$$

e

$$W_{40\Omega} = \frac{40}{\pi}\int_0^\infty \frac{400}{4 + \omega^2}\,d\omega$$

$$= \frac{16.000}{\pi}\left(\frac{1}{2}\,\text{tg}^{-1}\frac{\omega}{2}\bigg|_0^\infty\right)$$

$$= \frac{8.000}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4.000\text{ J}.$$

A energia associada à faixa de freqüências $0 \leq \omega \leq 2\sqrt{3}$ rad/s é

$$W_{40\Omega} = \frac{40}{\pi}\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{400}{4 + \omega^2}\,d\omega$$

$$= \frac{16.000}{\pi}\left(\frac{1}{2}\,\text{tg}^{-1}\frac{\omega}{2}\bigg|_0^{2\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{8.000}{\pi}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{8.000}{3}\text{ J}.$$

Dessa forma, a porcentagem da energia total associada a essa faixa de freqüências é

$$\eta = \frac{8.000/3}{4.000} \times 100 = 66{,}67\%.$$

Exemplo 17.4 Aplicação do teorema de Parseval a um filtro passa-faixa ideal

A tensão de entrada de um filtro passa-faixa ideal é

$$v(t) = 120e^{-24t}u(t) \text{ V}.$$

O filtro deixa passar todas as freqüências que estão entre 24 e 48 rad/s, sem atenuação, e rejeita completamente todas as freqüências fora dessa faixa de passagem.

a) Faça um gráfico de $|V(\omega)|^2$ para a tensão de entrada do filtro.

b) Faça um gráfico de $|V_o(\omega)|^2$ para a tensão de saída do filtro.

c) Qual porcentagem da energia total do sinal na entrada está disponível na saída?

Solução

a) A transformada de Fourier da tensão de entrada do filtro é

$$V(\omega) = \frac{120}{24 + j\omega}.$$

Assim,

$$|V(\omega)|^2 = \frac{14.400}{576 + \omega^2}.$$

A Figura 17.12 mostra o gráfico de $|V(\omega)|^2$ em função de ω.

b) Como o filtro passa-faixa ideal rejeita todas as freqüências fora da faixa de passagem, o gráfico de $|V_0(\omega)|^2$ em função de ω tem o aspecto apresentado na Figura 17.13.

c) A energia total disponível na entrada do filtro é

$$W_i = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{14.400}{576 + \omega^2}\,d\omega = \frac{14.400}{\pi}\left(\frac{1}{24}\,\text{tg}^{-1}\frac{\omega}{24}\bigg|_0^\infty\right)$$

$$= \frac{600}{\pi}\frac{\pi}{2} = 300\text{ J}.$$

A energia total disponível na saída do filtro é

$$W_o = \frac{1}{\pi}\int_{24}^{48} \frac{14.400}{576 + \omega^2}\,d\omega = \frac{600}{\pi}\,\text{tg}^{-1}\frac{\omega}{24}\bigg|_{24}^{48}$$

$$= \frac{600}{\pi}(\text{tg}^{-1}2 - \text{tg}^{-1}1) = \frac{600}{\pi}\left(\frac{\pi}{2{,}84} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 61{,}45\text{ J}.$$

A porcentagem da energia de entrada disponível na saída é

$$\eta = \frac{61{,}45}{300} \times 100 = 20{,}48\%.$$

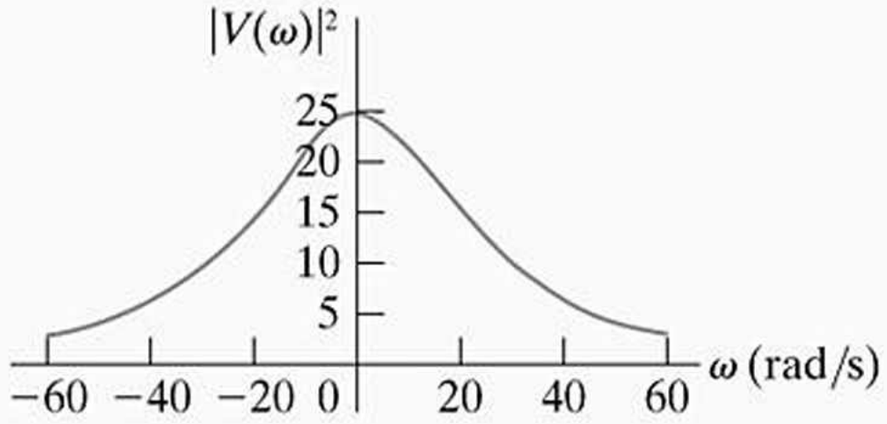


Figura 17.12 ▲ $|V(\omega)|^2$ em função de ω para o Exemplo 17.4.

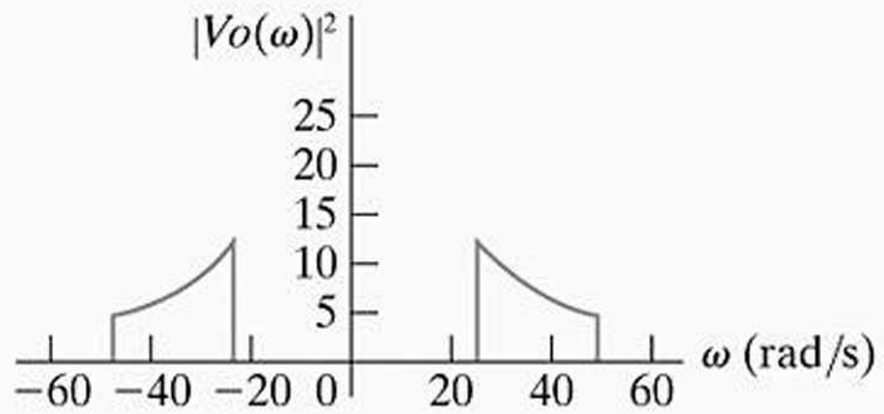


Figura 17.13 ▲ $|V_0(\omega)|^2$ em função de ω para o Exemplo 17.4.

Exemplo 17.5 Aplicação do teorema de Parseval a um filtro passa-baixas

O teorema de Parseval permite o cálculo da energia disponível na saída do filtro ainda que não conheçamos a expressão para $v_o(t)$. Suponha que a tensão de entrada para o circuito do filtro *RC* passa-baixas da Figura 17.14 seja

$$v_i(t) = 15e^{-5t}u(t) \text{ V}.$$

a) Qual porcentagem da energia do sinal de entrada está disponível no sinal de saída?

b) Qual porcentagem da energia de saída está associada à faixa de freqüências $0 \leq \omega \leq 10$ rad/s?

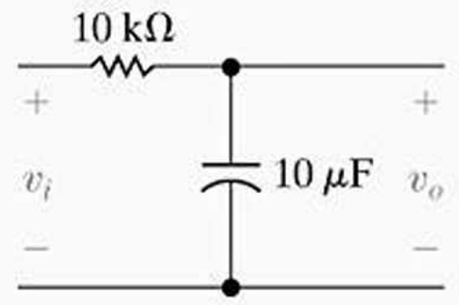


Figura 17.14 ▲ Filtro *RC* passa-baixas para o Exemplo 17.5.

Solução

a) A energia do sinal de entrada é

$$W_i = \int_0^\infty (15e^{-5t})^2\,dt = 225\,\frac{e^{-10t}}{-10}\bigg|_0^\infty = 22{,}5 \text{ J}.$$

A transformada de Fourier da tensão de saída é

$$V_o(\omega) = V_i(\omega)H(\omega),$$

onde

$$V_i(\omega) = \frac{15}{5 + j\omega}$$

$$H(\omega) = \frac{1/RC}{1/RC + j\omega} = \frac{10}{10 + j\omega}.$$

Daí,

$$V_o(\omega) = \frac{150}{(5 + j\omega)(10 + j\omega)}$$

$$|V_o(\omega)|^2 = \frac{22.500}{(25 + \omega^2)(100 + \omega^2)}.$$

A energia do sinal de saída é

$$W_o = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{22.500}{(25 + \omega^2)(100 + \omega^2)}\,d\omega.$$

Podemos calcular facilmente a integral expandindo o integrando em uma soma de frações parciais:

$$\frac{22.500}{(25 + \omega^2)(100 + \omega^2)} = \frac{300}{25 + \omega^2} - \frac{300}{100 + \omega^2}.$$

Então,

$$W_o = \frac{300}{\pi}\left\{\int_0^\infty \frac{d\omega}{25 + \omega^2} - \int_0^\infty \frac{d\omega}{100 + \omega^2}\right\}$$

$$= \frac{300}{\pi}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{10}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = 15 \text{ J}.$$

Em conseqüência, a energia disponível no sinal de saída é 66,67% da energia disponível no sinal de entrada; isto é,

$$\eta = \frac{15}{22{,}5}(100) = 66{,}67\%.$$

b) A energia de saída associada à faixa de freqüências $0 \leq \omega \leq 10$ rad/s é

$$W_o' = \frac{300}{\pi}\left\{\int_0^{10} \frac{d\omega}{25 + \omega^2} - \int_0^{10} \frac{d\omega}{100 + \omega^2}\right\}$$

$$= \frac{300}{\pi}\left(\frac{1}{5}\text{tg}^{-1}\frac{10}{5} - \frac{1}{10}\text{tg}^{-1}\frac{10}{10}\right) = \frac{30}{\pi}\left(\frac{2\pi}{2{,}84} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 13{,}64 \text{ J}.$$

Como a energia total do sinal de saída é 15 J, a porcentagem associada à faixa de freqüências 0 a 10 rad/s é 90,97%.

Energia contida em um pulso retangular de tensão

Concluímos nossa discussão do teorema de Parseval calculando a energia associada a um pulso retangular de tensão. Na Seção 17.1 determinamos que a transformada de Fourier do pulso de tensão é

$$V(\omega) = V_m\tau \frac{\text{sen } \omega\tau/2}{\omega\tau/2}. \tag{17.69}$$

Para auxiliar nossa discussão, redesenhamos o pulso de tensão e sua transformada de Fourier na Figura 17.15(a) e (b), respectivamente. Essas figuras mostram que, à medida que o pulso de tensão (τ) torna-se menor, maior se torna a faixa de freqüências do espectro de amplitude (isto é, o espectro de $-2\pi/\tau$ a $2\pi/\tau$). Esse resultado está de acordo com nossos comentários anteriores sobre a transformada operacional relacionada a mudanças de escala; em outras palavras, quando o tempo é comprimido, a freqüência é dilatada e vice-versa. Para transmitir um único pulso retangular com razoável fidelidade, a largura de faixa do sistema deve ser, no mínimo, suficiente para abranger a parte dominante do espectro de amplitude. Assim, a freqüência de corte deve ser, no mínimo, $2\pi/\tau$ rad/s ou $1/\tau$ Hz.

Podemos usar o teorema de Parseval para calcular a fração da energia total associada a $v(t)$ que se encontra na faixa de freqüências $0 \leq \omega \leq 2\pi/\tau$. Pela Equação 17.69,

$$W = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi/\tau} V_m^2\tau^2 \frac{\text{sen}^2\ \omega\tau/2}{(\omega\tau/2)^2}\omega. \tag{17.70}$$

Para calcular essa integral, fazemos

$$x = \frac{\omega\tau}{2}, \tag{17.71}$$

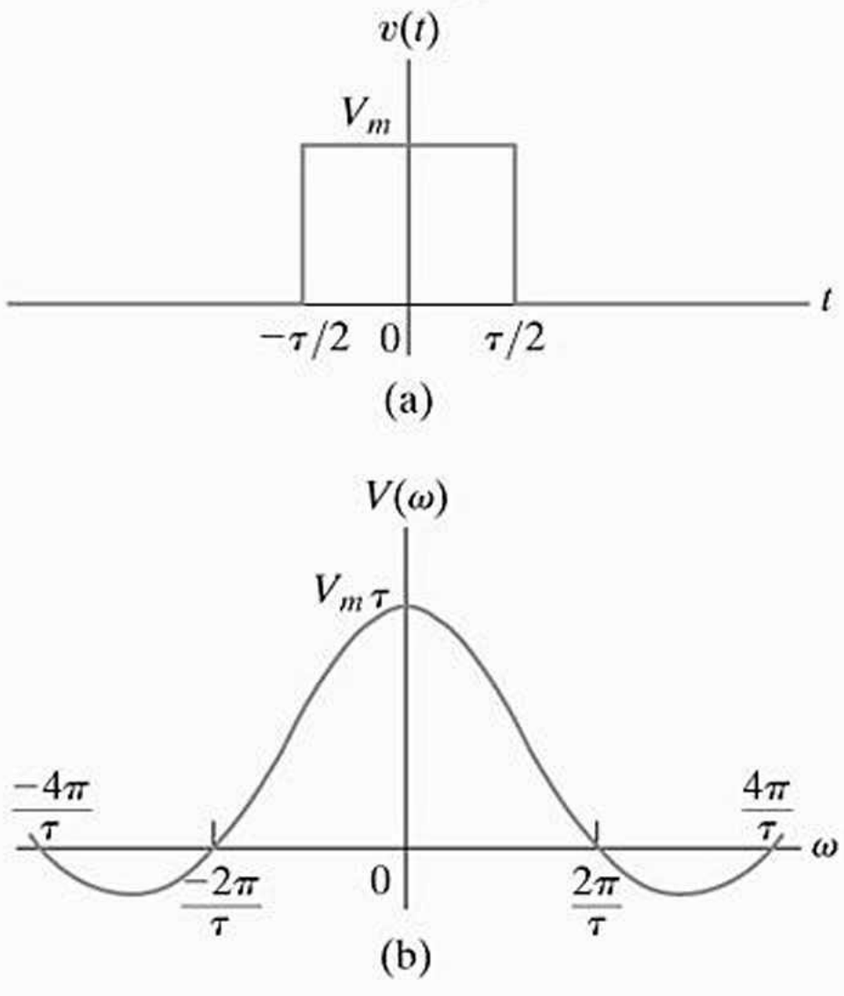


Figura 17.15 ▲ Pulso retangular de tensão e sua transformada de Fourier. (a) Pulso retangular de tensão. (b) Transformada de Fourier de $v(t)$.

observando que

$$dx = \frac{\tau}{2}\,d\omega \tag{17.72}$$

e que

$$x = \pi, \text{ quando } \omega = 2\pi/\tau. \tag{17.73}$$

Se fizermos as substituições dadas pelas equações 17.71-17.73, a Equação 17.70 torna-se

$$W = \frac{2V_m^2\tau}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\text{sen}^2 x}{x^2}\,dx. \tag{17.74}$$

Podemos calcular a integral na Equação 17.74 por partes. Se fizermos

$$u = \text{sen}^2 x \tag{17.75}$$

$$dv = \frac{dx}{x^2}, \tag{17.76}$$

então

$$du = 2\text{sen}x\text{cos}x\,dx = \text{sen}2x\,dx, \tag{17.77}$$

e

$$v = -\frac{1}{x}. \tag{17.78}$$

Daí,

$$\int_0^{\pi}\frac{\text{sen}^2 x}{x^2}\,dx = -\frac{\text{sen}^2 x}{x}\bigg|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\frac{1}{x}\text{sen } 2x\,dx$$

$$= 0 + \int_0^{\pi}\frac{\text{sen } 2x}{x}\,dx. \tag{17.79}$$

Substituindo a Equação 17.79 na Equação 17.74, obtemos

$$W = \frac{4V_m^2\tau}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\text{sen } 2x}{2x}\,dx. \tag{17.80}$$

Para calcular a integral na Equação 17.80, temos, em primeiro lugar, de colocá-la na forma de sen y/y, fazendo $y = 2x$ e observando que $dy = 2\,dx$ e $y = 2\pi$ quando $x = \pi$. Assim, a Equação 17.80 torna-se

$$W = \frac{2V_m^2\tau}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\text{sen } y}{y}\,dy. \tag{17.81}$$

O valor da integral na Equação 17.81 pode ser encontrado numa tabela de integrais funções trigonométricas.[1] Seu valor é 1,41815 e, portanto,

$$W = \frac{2V_m^2\tau}{\pi}(1{,}41815). \tag{17.82}$$

A energia total associada a $v(t)$ pode ser calculada por integração no domínio do tempo ou pela Equação 17.81, com o limite superior igual a infinito. Em qualquer dos casos, a energia total é

$$W_t = V_m^2\tau. \tag{17.83}$$

A fração da energia total associada à faixa de freqüências entre 0 e $2\pi/\tau$ é

[1] Abramowitz, M. e Stegun, I. *Handbook of Mathematical Functions*. Nova York: Dover, 1965, p. 244.

$$\eta = \frac{W}{W_t} = \frac{2V_m^2\tau(1{,}41815)}{\pi(V_m^2\tau)} = 0{,}9028 \qquad (17.84)$$

Assim, aproximadamente 90% da energia associada a $v(t)$ está contida na faixa dominante do espectro de amplitude.

✔ PROBLEMAS PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 3 — Entender e saber usar o teorema de Parseval

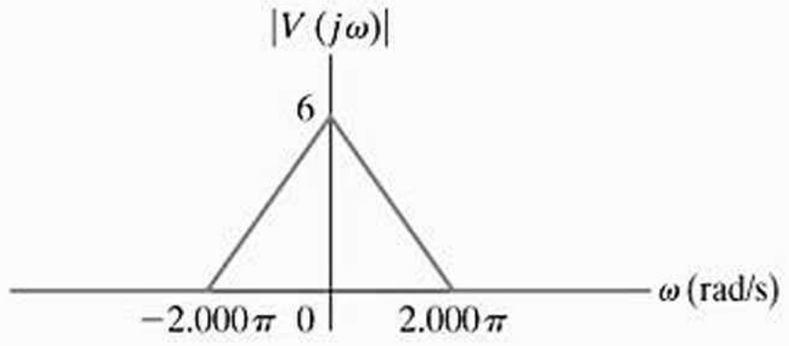
17.8 A tensão em um resistor de 50 Ω é

$$v = 4te^{-t}u(t) \text{ V}.$$

Qual porcentagem da energia total dissipada no resistor pode ser associada à faixa de freqüências $0 \leq \omega \leq \sqrt{3}$ rad/s?

Resposta: 94,23%.

17.9 Admita que o módulo da transformada de Fourier de $v(t)$ varie como mostrado. Essa tensão é aplicada a um resistor de 6 kΩ. Calcule a energia total fornecida ao resistor.



Resposta: 4 J.

NOTA: Tente resolver também o Problema 17.39, apresentado no final do capítulo.

Resumo

- A *transformada de Fourier* fornece uma descrição no domínio da freqüência de funções aperiódicas no domínio do tempo. Dependendo da natureza do sinal no domínio do tempo, uma de três abordagens é usada para determinar sua transformada de Fourier:
  - Se o sinal no domínio do tempo for um pulso bem-comportado de duração finita, a integral que define a transformada de Fourier é usada.
  - Se a transformada unilateral de Laplace de $f(t)$ existir e todos os pólos de $F(s)$ estiverem na metade esquerda do plano s, $F(s)$ pode ser usada para determinar $F(\omega)$.
  - Se $f(t)$ for uma constante, uma função sinal, uma função degrau ou uma função senoidal, a transformada de Fourier é determinada como um limite.
- Transformadas operacionais e funcionais de Fourier úteis para a análise de circuitos são apresentadas nas tabelas 17.1 e 17.2.
- A transformada de Fourier de um sinal de resposta $y(t)$ é dada por

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega).$$

  onde $X(\omega)$ é a transformada de Fourier do sinal de entrada $x(t)$, e $H(\omega)$ é a função de transferência $H(s)$ com $s = j\omega$.
- A transformada de Fourier existe tanto para funções de tempo negativo quanto para funções de tempo positivo e, assim, é adequada a problemas descritos em termos de eventos que começam em $t = -\infty$. Por outro lado, a transformada unilateral de Laplace é adequada a problemas descritos em termos de condições iniciais e eventos que ocorrem para $t > 0$.
- O quadrado do módulo da transformada de Fourier é uma medida da densidade de energia (joules por hertz) no domínio da freqüência (teorema de Parseval). Desse modo, a transformada de Fourier nos permite associar uma fração da energia total contida em $f(t)$ a uma faixa específica de freqüências.

Problemas

Seções 17.1–17.2

17.1 Use a integral de definição para calcular a transformada de Fourier das seguintes funções:

a) $f(t) = A \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}t, \qquad -2 \leq t < 2;$

$f(t) = 0$, em todos os outros instantes de tempo.

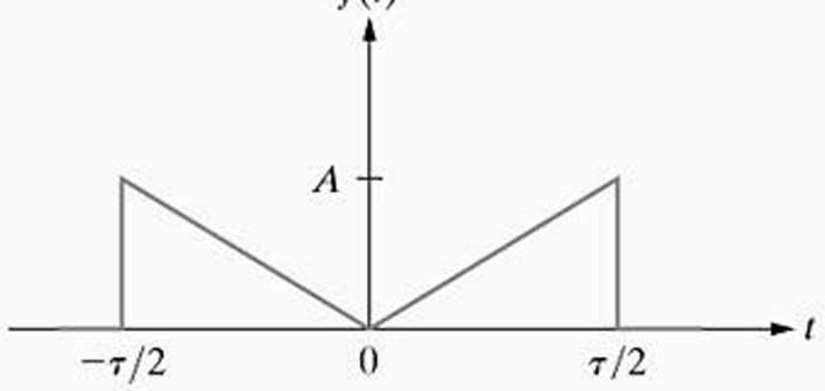
b) $f(t) = \frac{2A}{\tau}t + A, \qquad -\frac{\tau}{2} \leq t \leq 0;$

$f(t) = -\frac{2A}{\tau}t + A, \quad 0 \leq t \leq \frac{\tau}{2};$

$f(t) = 0$, em todos os outros instantes de tempo.

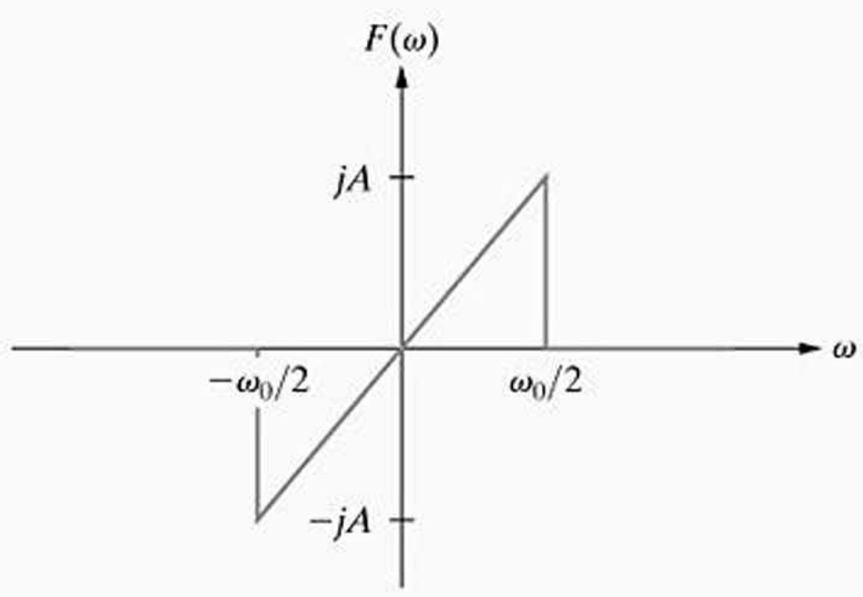
17.2* a) Determine a transformada de Fourier da função da Figura P17.2.
b) Determine $F(\omega)$ quando $\omega = 0$.
c) Faça um gráfico de $|F(\omega)|$ em função de ω, quando $A = 2$ e $\tau = 1$. *Sugestão:* Avalie $|F(\omega)|$ em $\omega = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm 15$. Então, use o fato de $|F(\omega)|$ ser uma função par de ω.

Figura P17.2



17.3* A transformada de Fourier de $f(t)$ é mostrada na Figura P17.3.
a) Determine $f(t)$.
b) Calcule $f(0)$.
c) Faça um gráfico de $f(t)$ para $-10 \leq t \leq 10$ s quando $A = 2\pi$ e $\omega_0 = 2$ rad/s. *Sugestão:* Calcule $f(t)$ em $t = 0, 1, 2, 3, \ldots, 10$ s e então use o fato de $f(t)$ ser par.

Figura P17.3



Seções 17.3 –17.5

17.4* Determine a transformada de Fourier de cada uma das seguintes funções. Em todas elas, a é uma constante real positiva e $-\infty \leq t \leq \infty$.
a) $f(t) = |t|e^{-a|t|}$;
b) $f(t) = t^3 e^{-a|t|}$;
c) $f(t) = e^{-a|t|} \cos \omega_0 t$;
d) $f(t) = e^{-a|t|} \operatorname{sen} \omega_0 t$;
e) $f(t) = \delta(t - t_0)$.

17.5 Deduza $\mathcal{F}\{\operatorname{sen} \omega_0 t\}$.

17.6 Se $f(t)$ for uma função real de t, mostre que a integral que define a transformada inversa se reduz a

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} [A(\omega)\cos \omega t - B(\omega)\operatorname{sen} \omega t]\, d\omega.$$

17.7 Se $f(t)$ for uma função real ímpar de t, mostre que a integral que define a transformada inversa se reduz a

$$f(t) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} B(\omega)\operatorname{sen} \omega t\, d\omega.$$

17.8 Use a Equação 17.9 para mostrar que $\mathcal{F}^{-1}\{2/j\omega\} = \operatorname{sgn}(t)$. *Sugestão:* Veja o Problema 17.7.

17.9 Determine $\mathcal{F}\{\cos \omega_0 t\}$ como limite da transformada de

$$f(t) = e^{-\epsilon|t|} \cos \omega_0 t,$$

onde ϵ é uma constante real positiva.

17.10 Mostre que, se $f(t)$ for uma função par,

$$B(\omega) = 2\int_0^{\infty} f(t)\cos \omega t\, dt,$$
$$B(\omega) = 0.$$

17.11 Mostre que, se $f(t)$ for uma função ímpar,

$$A(\omega) = 0,$$
$$B(\omega) = -2\int_0^{\infty} f(t)\operatorname{sen} \omega t\, dt.$$

Seção 17.6

17.12 a) Mostre que $\mathcal{F}\{df(t)/dt\} = j\omega F(\omega)$, onde $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$. *Sugestão:* Use a integral de definição e integre por partes.
b) Quais são os requisitos a que $f(t)$ deve atender para que o resultado do item (a) seja válido?
c) Mostre que $\mathcal{F}\{d^n f(t)/dt^n\} = (j\omega)^n F(\omega)$, onde $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$.

17.13 a) Mostre que

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} f(x)dx\right\} = \frac{F(\omega)}{j\omega},$$

onde $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(x)\}$. *Sugestão:* Use a integral de definição e integre por partes.
b) Quais são os requisitos a que $f(x)$ deve atender para que o resultado do item (a) seja válido?
c) Se $f(x) = e^{-ax}u(x)$, a transformada operacional do item (a) pode ser usada? Explique.

17.14 a) Mostre que

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad a > 0.$$

b) Dado que $f(at) = e^{-a|t|}$ para $a > 0$, faça um gráfico de $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(at)\}$ para $a = 0{,}5$, 1,0 e 2,0. Os seus gráficos refletem o fato de que uma *compressão* no domínio do tempo corresponde a uma *dilatação* no domínio da freqüência?

17.15 Deduza cada uma das seguintes transformadas operacionais:

$$\mathcal{F}\{f(t - a)\} = e^{-j\omega a}F(\omega);$$

$$\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t} f(t)\} = F(\omega - \omega_0);$$
$$\mathcal{F}\{f(t)\cos \omega_0 t\} = \tfrac{1}{2}F(\omega - \omega_0) + \tfrac{1}{2}F(\omega + \omega_0).$$

17.16 Dado

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t - \lambda)\, d\lambda,$$

mostre que $Y(\omega) = \mathcal{F}\{y(t)\} = X(\omega)H(\omega)$, onde $X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ e $H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\}$. *Sugestão*: Use a integral de definição para escrever

$$\mathcal{F}\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t - \lambda)\, d\lambda\right] e^{-j\omega t}\, dt.$$

Em seguida, inverta a ordem da integração e, então, faça uma mudança de variáveis de integração; isto é, faça $u = t - \lambda$.

17.17 Dada $f(t) = f_1(t)f_2(t)$, mostre que $F(\omega) = (1/2\pi)\int_{-\infty}^{\infty} F_1(u)F_2(\omega - u)\, du$. *Sugestão:* em primeiro lugar, use a integral de definição para expressar $F(\omega)$ como

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)\, f_2(t)e^{-j\omega t}\, dt.$$

Em segundo lugar, use a transformada inversa para escrever

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(u)e^{j\omega t}\, du.$$

Em terceiro lugar, substitua a expressão de $f_1(t)$ na integral de definição e, então, troque a ordem de integração.

17.18 a) Mostre que

$$(j)^n\left[\frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}\right] = \mathcal{F}\{t^n f(t)\}.$$

b) Use o resultado de (a) para calcular cada uma das seguintes transformadas de Fourier:

$$\mathcal{F}\{te^{-at}\, u(t)\},$$
$$\mathcal{F}\{|t|e^{-a|t|}\},$$
$$\mathcal{F}\{te^{-a|t|}\}.$$

17.19* Suponha $f(t) = f_1(t)f_2(t)$, onde

$f_1(t) = \cos \omega_0 t$,

$f_2(t) = 1, \quad -\tau/2 < t < \tau/2$;

$f_2(t) = 0$, em todos os outros instantes de tempo.

a) Use a convolução no domínio da freqüência para determinar $F(\omega)$.

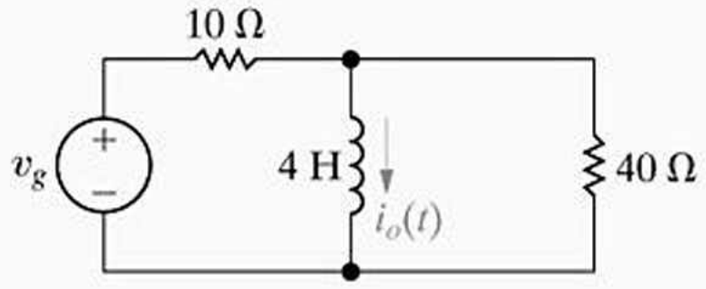
b) O que acontece a $F(\omega)$ à medida que a largura de $f_2(t)$ aumenta de modo que $f(t)$ inclua um número cada vez maior de ciclos de $f_1(t)$?

Seção 17.7

17.20 PSPICE a) Use a transformada de Fourier para calcular $i_o(t)$ no circuito da Figura P17.20. O valor inicial de $i_o(t)$ é zero e a tensão da fonte é $125u(t)$ V.

b) Faça o gráfico de $i_o(t)$.

Figura P17.20

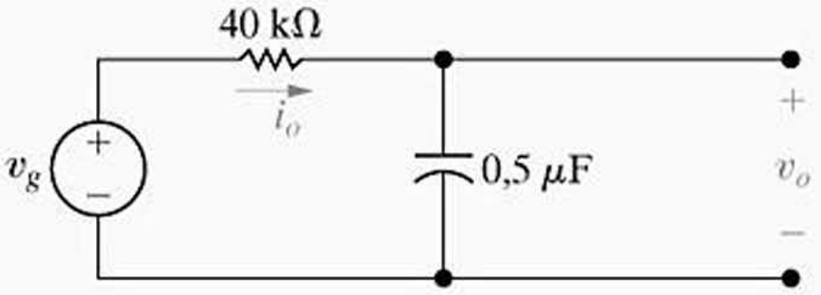


17.21 PSPICE Repita o Problema 17.20 se a tensão de entrada (v_g) for mudada para 125 sgn(t).

17.22* PSPICE a) Use a transformada de Fourier para calcular $v_o(t)$ no circuito da Figura P17.22 se $v_g = 20$ sgn(t) V.

b) Sua solução faz sentido em termos do comportamento conhecido do circuito? Explique.

Figura P17.22



17.23 PSPICE Repita o Problema 17.22, mas substitua $v_o(t)$ por $i_o(t)$.

17.24 PSPICE A fonte de tensão no circuito da Figura P17.24 é dada pela expressão

$$v_g = 15 \text{ sgn}(t) \text{ V}.$$

a) Determine $v_o(t)$.

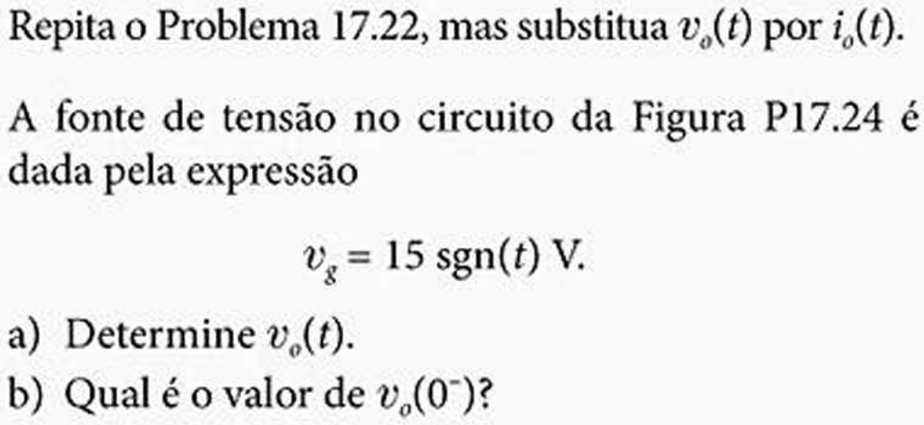
b) Qual é o valor de $v_o(0^-)$?

c) Qual é o valor de $v_o(0^+)$?

d) Use a transformada de Laplace para calcular $v_o(t)$ para $t > 0^+$.

e) A solução obtida no item (d) está de acordo com $v_o(t)$ para $t > 0^+$ no item (a)?

Figura P17.24

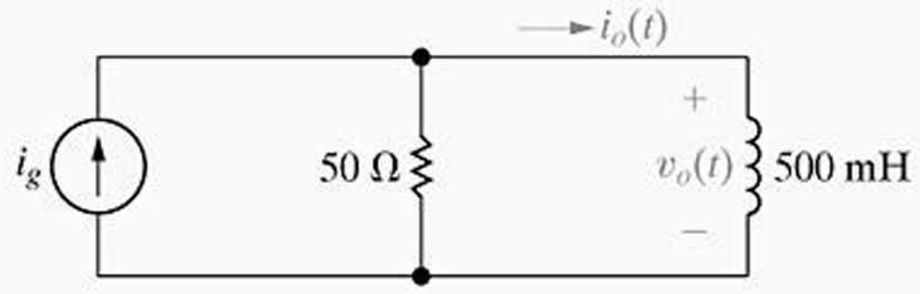


17.25 PSPICE Repita o Problema 17.24, mas substitua $v_o(t)$ por $i_o(t)$.

17.26 PSPICE a) Use a transformada de Fourier para calcular v_o no circuito da Figura P17.26 se $i_g = 2$ sgn(t) A.

b) Sua solução faz sentido em termos do comportamento conhecido do circuito? Explique.

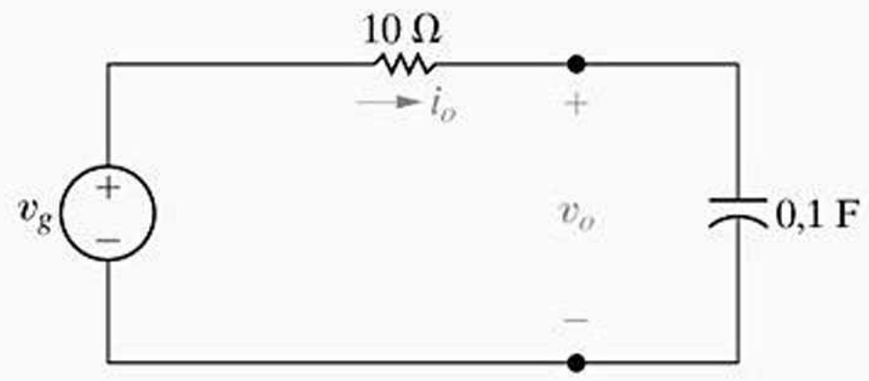
Figura P17.26



17.27 PSPICE Repita o Problema 17.26, mas substitua i_o por v_o.

17.28* PSPICE
a) Use a transformada de Fourier para calcular v_o no circuito da Figura P17.28 se v_g for igual a $30e^{-5|t|}$ A.
b) Determine $v_o(0^-)$.
c) Determine $v_o(0^+)$.
d) Use a transformada de Laplace para determinar v_o para $t \geq 0$.
e) A solução obtida no item (d) está de acordo com a do item (a)?

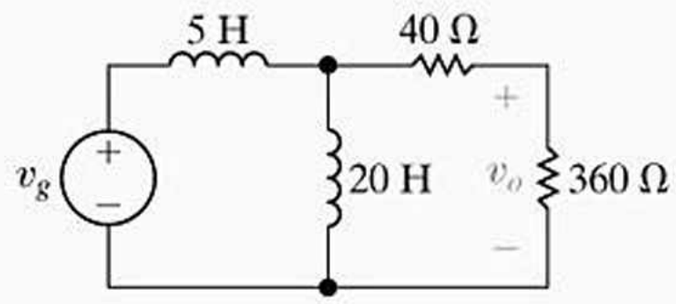
Figura P17.28



17.29 PSPICE
a) Use a transformada de Fourier para calcular i_o no circuito da Figura P17.28 se v_g for igual a $30e^{-5|t|}$ A.
b) Determine $i_o(0^-)$.
c) Determine $i_o(0^+)$.
d) Use a transformada de Laplace para calcular i_o para $t \geq 0$.
e) A solução obtida no item (d) está de acordo com a do item (a)?

17.30 PSPICE
a) Use a transformada de Fourier para calcular v_o no circuito da Figura P17.30 se $v_g = 125 \cos 75t$ V.
b) Verifique a resposta obtida em (a) determinando a expressão de regime permanente para v_o, usando a análise fasorial.

Figura P17.30

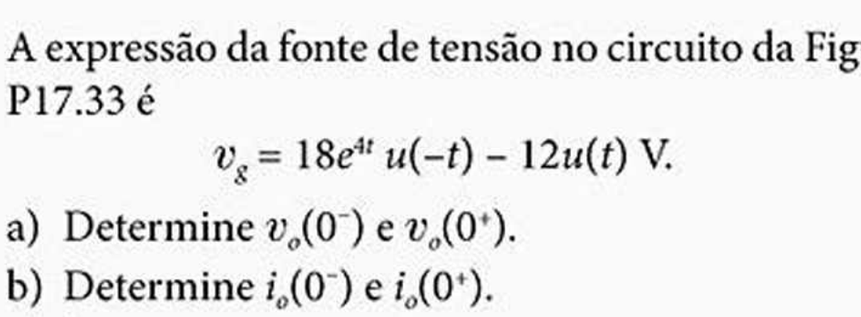


17.31 PSPICE
a) Use a transformada de Fourier para calcular v_o no circuito da Figura P17.31 quando

$$i_g = -45e^{400t}\,u(-t) + 45e^{-400t}\,u(t)\ \text{A}.$$

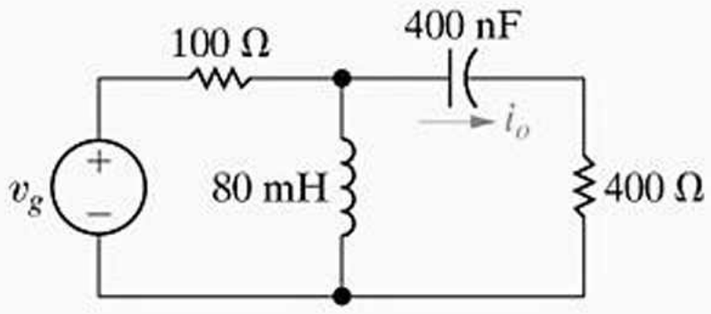
b) Determine $i_L(0^-)$.
c) Determine $i_L(0^+)$.
d) As respostas obtidas em (b) e (c) fazem sentido em termos do comportamento conhecido do circuito? Explique.

Figura P17.31



17.32* PSPICE Use a transformada de Fourier para calcular i_o no circuito da Figura P17.32 se $v_g = 200 \cos 2.500t$ V.

Figura P17.32

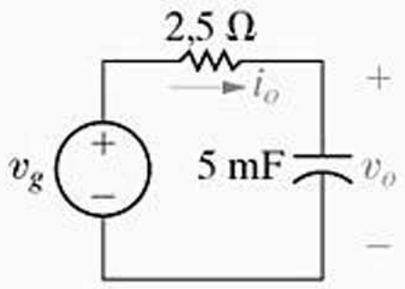


17.33 PSPICE A expressão da fonte de tensão no circuito da Figura P17.33 é

$$v_g = 18e^{4t}\,u(-t) - 12u(t)\ \text{V}.$$

a) Determine $v_o(0^-)$ e $v_o(0^+)$.
b) Determine $i_o(0^-)$ e $i_o(0^+)$.
c) Determine v_o.

Figure P17.33

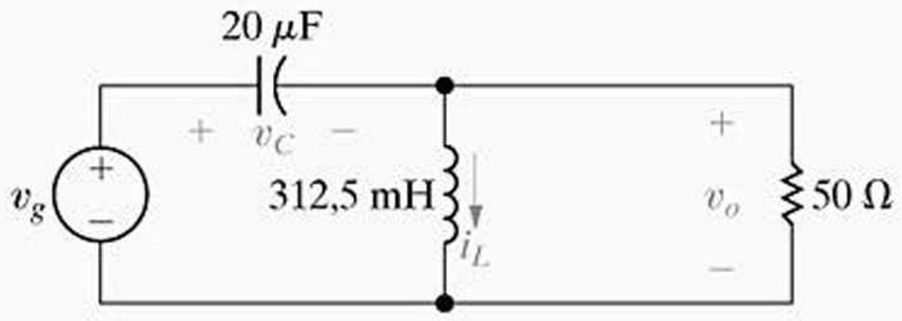


17.34 PSPICE
a) Use a transformada de Fourier para calcular v_o no circuito mostrado na Figura P17.34. A fonte de tensão gera a tensão

$$v_g = 90e^{-400|t|}\ \text{V}.$$

b) Calcule $v_o(0^-)$, $v_o(0^+)$ e $v_o(\infty)$.
c) Determine $i_L(0^-)$, $i_L(0^+)$, $v_C(0^-)$ e $v_C(0^+)$.
d) Os resultados do item (b) fazem sentido em termos do comportamento conhecido do circuito? Explique.

Figura P17.34



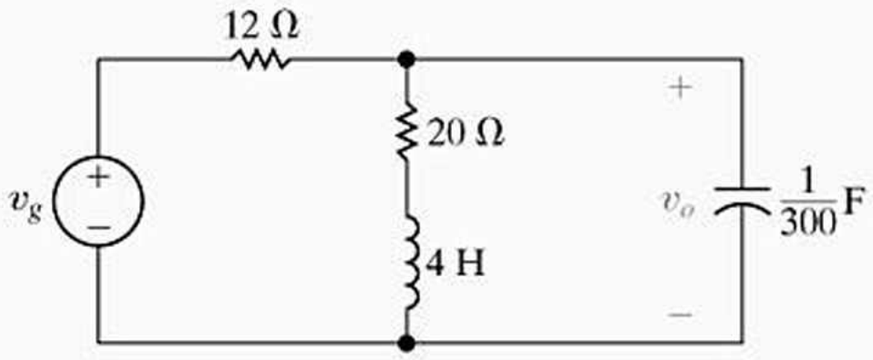
17.35 PSPICE a) Use a transformada de Fourier para calcular v_o no circuito da Figura P17.35 quando

$$v_g = 60e^{5t}\,u(-t) + 900te^{-5t}\,u(t)\ \text{V}.$$

b) Determine $v_o(0^-)$.

c) Determine $v_o(0^+)$.

Figura P17.35

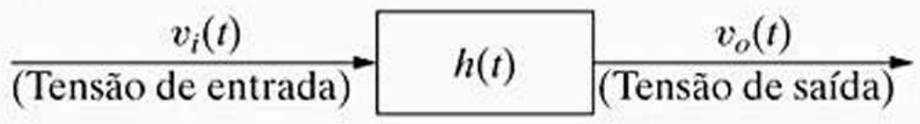


17.36 Quando a tensão de entrada para o sistema da Figura P17.36 é $8u(t)$ V, a tensão de saída é

$$v_o = [60 - 40e^{-5t} + 20e^{-20t}]u(t)\ \text{V}.$$

Qual é a tensão de saída se $v_i = 8\,\text{sgn}(t)$ V?

Figura P17.36



Seção 17.8

17.37 Tem-se que $F(\omega) = e^{\omega}u(-\omega) + e^{-\omega}u(\omega)$.

a) Determine $f(t)$.

b) Determine a energia associada a $f(t)$ por integração no domínio do tempo.

c) Repita o item (b) usando integração no domínio da freqüência.

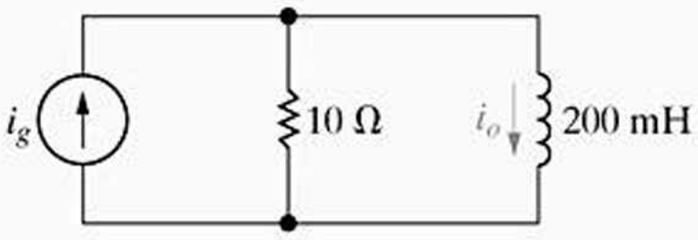
d) Determine o valor de ω_1 para que $f(t)$ tenha 90% da energia na faixa de freqüências $0 \leq \omega \leq \omega_1$.

17.38 O sinal da corrente de entrada no circuito da Figura P17.38 é

$$i_g = 3e^{-25t}\ \text{A}, \quad t \geq 0^+,$$

Qual porcentagem da energia total do sinal de saída encontra-se na faixa de freqüências 0 a 10 rad/s?

Figura P17.38



17.39* A tensão de entrada no circuito da Figura P17.39 é $v_g = 60e^{-|5t|}u(t)$ V.

a) Determine $v_o(t)$.

b) Faça um gráfico de $|V_g(\omega)|$ para $-10 \leq \omega \leq 10$ rad/s.

c) Desenhe um gráfico de $|V_o(\omega)|$ para $-10 \leq \omega \leq 10$ rad/s.

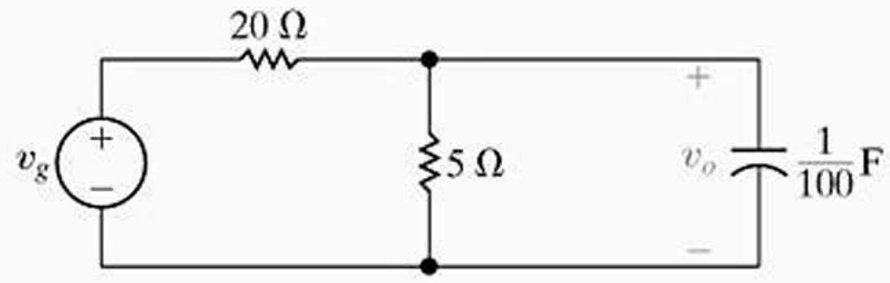
d) Calcule a energia total de v_g.

e) Calcule a energia total de v_o.

f) Qual porcentagem da energia de v_g encontra-se na faixa de freqüências $0 \leq \omega \leq 10$ rad/s?

g) Repita o item (f) para v_o.

Figura P17.39

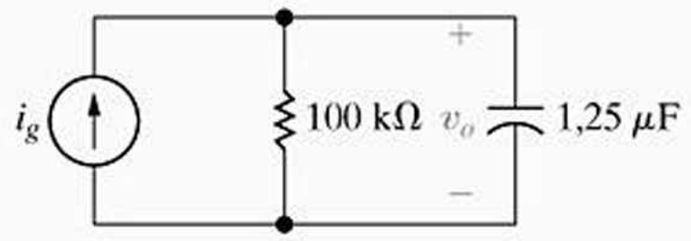


17.40 O circuito da Figura P17.40 é alimentado pela corrente

$$i_g = 30e^{-2t}u(t)\ \mu A,$$

Qual porcentagem da energia total da tensão de saída v_o encontra-se na faixa de freqüências $0 \leq \omega \leq 4$ rad/s?

Figura P17.40



17.41 O espectro de amplitude da tensão de entrada para o filtro *RC* passa-altas na Figura P17.41 é

$$V_i(\omega) = \frac{200}{|\omega|}, \qquad 100\ \text{rad/s} \leq |\omega| \leq 200\ \text{rad/s};$$

$V_i(\omega) = 0$, em todos os outros lugares.

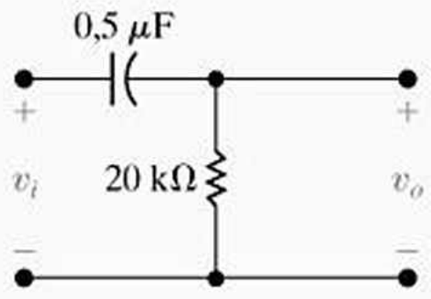
a) Faça um gráfico de $|V_i(\omega)|^2$ para $-300 \leq \omega \leq 300$ rad/s.

b) Faça um gráfico de $|V_o(\omega)|^2$ para $-300 \leq \omega \leq 300$ rad/s.

c) Calcule a energia do sinal de entrada do filtro.

d) Calcule a energia do sinal de saída do filtro.

Figura P17.41



17.42 A tensão de entrada para o circuito do filtro *RC* passa-altas na Figura P17.42 é

$$v_i(t) = Ae^{-at}u(t).$$

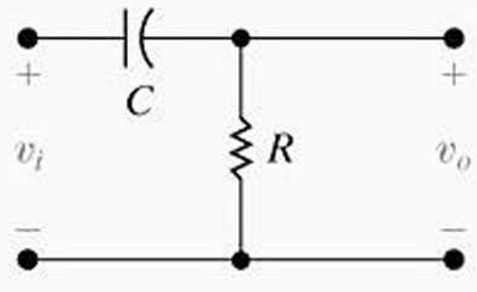
Seja α a freqüência de corte do filtro, tal que $\alpha = 1/RC$,

a) Qual porcentagem da energia do sinal na saída do filtro é associada à faixa de freqüências $0 \leq \omega \leq \alpha$ se $\alpha = a$?

b) Repita o item (a), dado que $\alpha = \sqrt{3}a$.

c) Repita o item (a), dado que $\alpha = a/\sqrt{3}$.

Figura P17.42



CAPÍTULO

18

Quadripolos

SUMÁRIO DO CAPÍTULO

18.1 **Equações terminais**

18.2 **Parâmetros do quadripolo**

18.3 **Quadripolos com carga em seus terminais**

18.4 **Interconexão de quadripolos**

✔ OBJETIVOS DO CAPÍTULO

1 Saber calcular qualquer conjunto de parâmetros do quadripolo por um dos seguintes métodos:

- Análise de circuitos;
- Medições feitas no quadripolo;
- Conversão a partir de outro conjunto de parâmetros do quadripolo utilizando a Tabela 18.1.

2 Saber analisar um quadripolo com carga em seus terminais, determinando as correntes, tensões, impedâncias e relações de interesse usando a Tabela 18.2.

3 Saber analisar uma interligação em cascata de quadripolos.

Até agora, quase sempre analisamos o comportamento de um circuito em um par específico de terminais. Lembre-se de que apresentamos os circuitos equivalentes de Thévenin e Norton exclusivamente para simplificar a análise de circuitos do ponto de vista de um par de terminais. Para analisar alguns sistemas elétricos também é conveniente focalizar dois pares de terminais. Isso é útil, em particular, quando um sinal é fornecido a um par de terminais e, então, após ser processado pelo sistema, é extraído em um segundo par de terminais. Esses pares de terminais são também denominados *portas* do sistema, pois representam os pontos em que sinais são fornecidos ou extraídos. Neste capítulo, limitaremos a discussão a circuitos que têm uma única porta de entrada e uma única porta de saída, ou seja, quatro terminais. A Figura 18.1 mostra a estrutura básica para o circuito de duas portas, ou quatro terminais. A utilização dessa estrutura está sujeita a várias restrições. Em primeiro lugar, não pode haver nenhuma energia armazenada no circuito. Em segundo lugar, não pode haver fontes independentes no circuito; entretanto, fontes dependentes são permitidas. Em terceiro lugar, a corrente que entra por um dos terminais de um par deve ser igual à corrente no outro terminal; isto é, $i_1 = i'_1$ e $i_2 = i'_2$. Em quarto lugar, todas as ligações externas devem ser feitas entre um e outro terminal de cada porta; não são permitidas ligações entre portas, isto é, entre os terminais a e c, a e d, b e c ou b e d. Essas restrições simplesmente limitam o número de problemas de circuito que podem ser analisados por meio de quadripolos.

O princípio fundamental subjacente à modelagem de quadripolos é que somente as variáveis terminais (i_1, v_1, i_2 e v_2) são de interesse. Não temos nenhum interesse em calcular as correntes e tensões dentro do circuito. Já tratamos do comportamento terminal na análise de circuitos amplificadores operacionais. Neste capítulo, formalizamos aquela abordagem, apresentando os parâmetros dos quadripolos.

18.1 Equações terminais

Quando enxergamos um circuito como um quadripolo, estamos interessados em relacionar a corrente e a tensão em um par de terminais com a corrente e a tensão no outro par. A Figura 18.1 mostra as polaridades de referência das tensões terminais e os sentidos de referência das correntes terminais. As referências em cada porta são mutuamente simétricas; isto é, a corrente entra no terminal superior, cuja tensão é mais alta. Essa simetria facilita a generalização da análise de quadripolos e é a razão de sua utilização universal na literatura.

A descrição mais geral do quadripolo é a realizada no domínio da freqüência. Para quadripolos puramente resistivos, a análise reduz-se à de circuitos resistivos. Problemas de regime permanente senoidal podem ser resolvidos substituindo-se s por $j\omega$. Aqui, escrevemos todas as equações no domínio da freqüência; as soluções de circuitos resistivos e o regime permanente senoidal tornam-se casos

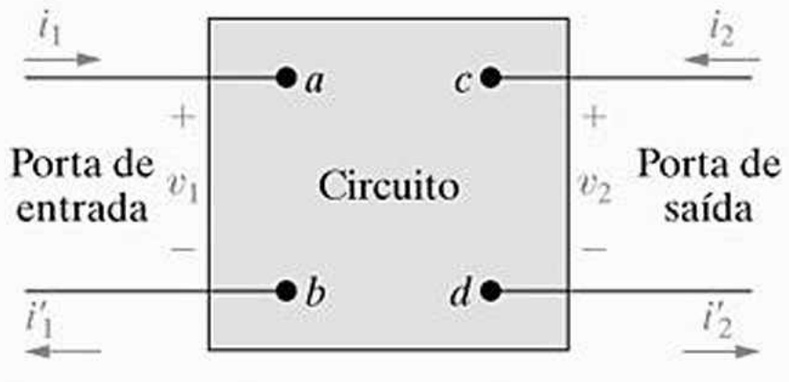


Figura 18.1 ▲ Estrutura básica de um quadripolo.

especiais. A Figura 18.2 mostra a estrutura básica de um quadripolo em termos das variáveis I_1, V_1, I_2 e V_2, no domínio da freqüência.

Dessas quatro variáveis terminais, somente duas são independentes. Assim, para qualquer circuito, uma vez especificadas duas das variáveis, podemos determinar as outras duas. Por exemplo, conhecendo V_1 e V_2 e o circuito dentro do retângulo, podemos determinar I_1 e I_2. Assim, podemos descrever um quadripolo por meio de apenas duas equações simultâneas. Todavia, há seis modos diferentes de combinar as quatro variáveis:

$$V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2,$$
$$V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2; \quad (18.1)$$

$$I_1 = y_{11}V_1 + y_{12}V_2,$$
$$I_2 = y_{21}V_1 + y_{22}V_2; \quad (18.2)$$

$$V_1 = a_{11}V_2 - a_{12}I_2,$$
$$I_1 = a_{21}V_2 - a_{22}I_2; \quad (18.3)$$

$$V_2 = b_{11}V_1 - b_{12}I_1,$$
$$I_2 = b_{21}V_1 - b_{22}I_1; \quad (18.4)$$

$$V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2,$$
$$I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2; \quad (18.5)$$

$$I_1 = g_{11}V_1 + g_{12}I_2,$$
$$V_2 = g_{21}V_1 + g_{22}I_2. \quad (18.6)$$

Esses seis conjuntos de equações também podem ser considerados três pares de relações mutuamente inversas. O primeiro conjunto, as Equações 18.1, expressa as tensões de entrada e saída em função das correntes de entrada e saída. O segundo conjunto, as Equações 18.2, expressa a relação inversa, isto é, as correntes de entrada e saída em função das tensões de entrada e saída. As equações 18.3 e 18.4 são relações inversas, assim como as equações 18.5 e 18.6.



Figura 18.2 ▲ Estrutura básica de um quadripolo no domínio da freqüência.

Os coeficientes das variáveis de corrente e/ou tensão do lado direito das equações 18.1–18.6 são denominados *parâmetros* do quadripolo. Assim, quando usamos as Equações 18.1, referimo-nos aos parâmetros *z* do quadripolo. De modo semelhante, referimo-nos aos parâmetros *y*, aos parâmetros *a*, aos parâmetros *b*, aos parâmetros *h* e aos parâmetros *g* do quadripolo.

18.2 Parâmetros do quadripolo

Podemos determinar os parâmetros por cálculo ou medição. Ambos são determinados diretamente das equações. Por exemplo, suponha que o problema seja determinar os parâmetros *z*. Pelas Equações 18.1,

$$z_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0} \Omega, \quad (18.7)$$

$$z_{12} = \left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{I_1=0} \Omega, \quad (18.8)$$

$$z_{21} = \left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0} \Omega, \quad (18.9)$$

$$z_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0} \Omega. \quad (18.10)$$

As equações 18.7–18.10 mostram que os quatro parâmetros *z* podem ser descritos da seguinte maneira:

- z_{11} é a impedância vista da entrada quando a saída está em aberto.
- z_{12} é uma impedância de transferência. É a razão entre a tensão na entrada e a corrente na saída quando a entrada está em aberto.
- z_{21} é uma impedância de transferência. É a razão entre a tensão na saída e a corrente na entrada quando a saída está em aberto.
- z_{22} é a impedância vista da saída quando a entrada está em aberto.

Portanto, os parâmetros *z* podem ser calculados ou medidos deixando a saída em aberto e determinando-se as razões V_1/I_1 e V_2/I_1 e, então, deixando a entrada em aberto e determinando-se as razões V_1/I_2 e V_2/I_2. O Exemplo 18.1 ilustra a determinação dos parâmetros *z* para um quadripolo resistivo.

Exemplo 18.1 Determinação dos parâmetros *z* de um quadripolo

Determine os parâmetros *z* para o quadripolo da Figura 18.3.

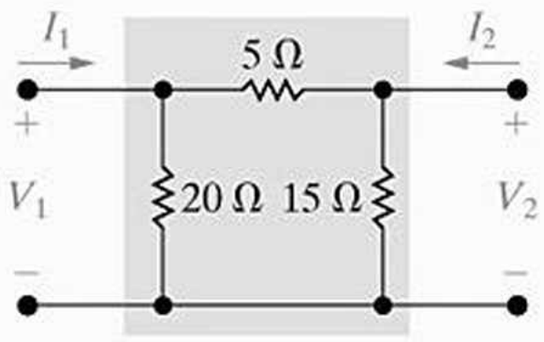


Figura 18.3 ◀ Quadripolo para o Exemplo 18.1.

Solução

Como o quadripolo é puramente resistivo, ele será puramente resistivo também no domínio da freqüência. Com a saída em aberto, isto é, $I_2 = 0$, a resistência vista da entrada é o resistor de 20 Ω em paralelo com a combinação em série dos resistores de 5 Ω e 15 Ω. Por conseguinte,

$$z_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0} = \frac{(20)(20)}{40} = 10\ \Omega.$$

Quando I_2 é zero, V_2 é

$$V_2 = \frac{V_1}{15 + 5}(15) = 0{,}75V_1,$$

e, assim,

$$z_{21} = \left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0} = \frac{0{,}75V_1}{V_1/10} = 7{,}5\ \Omega.$$

Quando I_1 é zero, a resistência vista da saída é o resistor de 15 Ω em paralelo com a combinação em série dos resistores de 5 Ω e 20 Ω. Por conseguinte,

$$z_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0} = \frac{(15)(25)}{40} = 9{,}375\ \Omega.$$

Quando a entrada está em aberto, I_1 é zero e a tensão V_1 é

$$V_1 = \frac{V_2}{5 + 20}(20) = 0{,}8V_2.$$

Assim, a corrente na saída é

$$I_2 = \frac{V_2}{9{,}375}.$$

Portanto,

$$z_{12} = \left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{I_1=0} = \frac{0{,}8V_2}{V_2/9{,}375} = 7{,}5\ \Omega.$$

As equações 18.7–18.10 e o Exemplo 18.1 mostram por que os parâmetros nas Equações 18.1 são denominados parâmetros *z*. Cada parâmetro é a razão entre uma tensão e uma corrente e é, em conseqüência, uma impedância.

Usamos o mesmo processo para determinar os outros parâmetros, que são calculados ou medidos. Os parâmetros são obtidos deixando em aberto ou curto-circuitando a entrada ou a saída do quadripolo. Além do mais, um parâmetro ou é uma impedância, uma admitância ou uma grandeza adimensional. A grandeza adimensional é a razão entre duas tensões ou duas correntes. As equações 18.11–18.15 resumem essas observações.

$$y_{11} = \left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{V_2=0} \text{S}, \qquad y_{12} = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{V_1=0} \text{S},$$

$$y_{21} = \left.\frac{I_2}{V_1}\right|_{V_2=0} \text{S}, \qquad y_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{V_1=0} \text{S}. \tag{18.11}$$

$$a_{11} = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{I_2=0}, \qquad a_{12} = -\left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{V_2=0} \Omega,$$

$$a_{21} = \left.\frac{1}{V_2}\right|_{I_2=0} \text{S}, \qquad a_{22} = -\left.\frac{I_1}{I_2}\right|_{V_2=0}. \tag{18.12}$$

$$b_{11} = \left.\frac{V_2}{V_1}\right|_{I_1=0}, \qquad b_{12} = -\left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{V_1=0} \Omega,$$

$$b_{21} = \left.\frac{I_2}{V_1}\right|_{I_1=0} \text{S}, \qquad b_{22} = -\left.\frac{I_2}{I_1}\right|_{V_1=0}. \tag{18.13}$$

$$h_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{V_2=0} \Omega, \qquad h_{12} = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{I_1=0},$$

$$h_{21} = \left.\frac{I_2}{I_1}\right|_{V_2=0}, \qquad h_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{I_1=0} \text{S}. \tag{18.14}$$

$$g_{11} = \left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{I_2=0} \text{S}, \qquad g_{12} = \left.\frac{I_1}{I_2}\right|_{V_1=0},$$

$$g_{21} = \left.\frac{V_2}{V_1}\right|_{I_2=0}, \qquad g_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{V_1=0} \Omega. \tag{18.15}$$

Os parâmetros dos quadripolos podem ser também classificados de acordo com as relações mutuamente inversas. Os parâmetros impedância e admitância são chamados parâmetros de imitância. O termo *imitância* indica uma grandeza que é ou uma impedância ou uma admitância. Os parâmetros *a* e *b* são denominados *parâmetros de transmissão* porque descrevem a tensão e a corrente de um lado do quadripolo em termos da tensão e da corrente do outro lado. Os parâmetros de imitância e transmissão são as escolhas naturais para relacionar as variáveis terminais. Em outras palavras, eles relacionam variáveis de tensão com variáveis de corrente ou variáveis de entrada com variáveis de saída. Os parâmetros *h* e *g* relacionam variáveis de entrada a variáveis de saída e vice-versa, isto é, uma tensão de entrada e uma corrente de saída com uma tensão de saída e uma corrente de entrada. Portanto, eles são chamados de parâmetros *híbridos*.

O Exemplo 18.2 mostra como um conjunto de medições realizadas nos terminais de um quadripolo pode ser usado para calcular seus parâmetros *a*.

Exemplo 18.2 Determinação dos parâmetros *a* de um quadripolo por meio de medições

As seguintes medições referem-se a um quadripolo que opera em regime permanente senoidal. Com a saída em aberto, uma tensão de 150 cos 4.000*t* V é aplicada à entrada. A corrente de entrada é 25 cos (4.000*t* – 45°) A e a tensão de saída é 100 cos (4.000*t* + 15°) V. Com a saída em curto-circuito, uma tensão de 30 cos 4.000*t* V é aplicada à entrada. A corrente de entrada é 1,5 cos (4.000*t* + 30°) A e a corrente de saída é 0,25 cos (4.000*t* + 150°) A. Determine os parâmetros *a* que descrevem o comportamento do quadripolo no regime permanente senoidal.

Solução

Do primeiro conjunto de medições, tem-se

$$\boldsymbol{V}_1 = 150\angle 0°\ \text{V}, \quad \boldsymbol{I}_1 = 25\angle -45°\ \text{A},$$

$$\boldsymbol{V}_2 = 100\angle 15°\ \text{V}, \quad \boldsymbol{I}_2 = 0\ \text{A}.$$

Pelas Equações 18.12,

$$a_{11} = \left.\frac{\boldsymbol{V}_1}{\boldsymbol{V}_2}\right|_{I_2=0} = \frac{150\angle 0°}{100\angle 15°} = 1{,}5\angle -15°,$$

$$a_{21} = \left.\frac{\boldsymbol{I}_1}{\boldsymbol{V}_2}\right|_{I_2=0} = \frac{25\angle -45°}{100\angle 15°} = 0{,}25\angle -60°\ \text{S}.$$

Do segundo conjunto de medições, tem-se

$$\boldsymbol{V}_1 = 30\angle 0°\ \text{V}, \quad \boldsymbol{I}_1 = 1{,}5\angle 30°\text{A},$$

$$\boldsymbol{V}_2 = 0\ \text{V}, \qquad \boldsymbol{I}_2 = 0{,}25\angle 150°\ \text{A}.$$

Assim,

$$a_{12} = -\left.\frac{\boldsymbol{V}_1}{\boldsymbol{I}_2}\right|_{V_2=0} = \frac{-30\angle 0°}{0{,}25\angle 150°} = 120\angle 30°\ \Omega,$$

$$a_{21} = -\left.\frac{\boldsymbol{I}_1}{\boldsymbol{I}_2}\right|_{V_2=0} = \frac{-1{,}5\angle 30°}{0{,}25\angle 150°} = 6\angle 60°.$$

✔ PROBLEMAS PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 1 — Saber calcular qualquer conjunto de parâmetros do quadripolo

18.1 Determine os parâmetros *y* para o quadripolo da Figura 18.3.

Resposta: $y_{11} = 0{,}25$ S,

$y_{12} = y_{21} = -0{,}2$ S,

$y_{22} = \dfrac{4}{15}$ S.

18.2 Determine os parâmetros *g* e *h* para o quadripolo da Figura 18.3.

Resposta: $g_{11} = 0{,}1$ S; $g_{12} = -0{,}75$; $g_{21} = 0{,}75$;

$g_{22} = 3{,}75\ \Omega$; $h_{11} = 4\ \Omega$; $h_{12} = 0{,}8$;

$h_{21} = -0{,}8$; $h_{22} = 0{,}1067$ S.

18.3 As seguintes medições foram realizadas em um quadripolo resistivo. Com 50 mV aplicados à entrada e com a saída em aberto, a corrente de entrada é 5 μA e a tensão de saída é 200 mV. Com a entrada em curto-circuito e 10 mV aplicados à saída, a corrente de entrada é 2 μA e a corrente de saída é 0,5 μA. Determine os parâmetros *g* do quadripolo.

Resposta: $g_{11} = 0{,}1$ mS;

$g_{12} = 4$;

$g_{21} = 4$;

$g_{22} = 20\ \text{k}\Omega$.

NOTA: Tente resolver também os problemas 18.2, 18.4 e 18.5, apresentados no final do capítulo.

Relações entre os parâmetros do quadripolo

Como os seis conjuntos de equações envolvem as mesmas variáveis, os parâmetros associados a qualquer par de equações devem estar relacionados com os parâmetros de todos os outros pares. Em outras palavras, se conhecermos um conjunto de parâmetros, poderemos determinar todos os outros conjuntos. Em razão da extensão das manipulações algébricas envolvidas nessas deduções, limitamo-nos a apresentar os resultados na Tabela 18.1.

TABELA 18.1 Tabela de conversão de parâmetros

$$z_{11} = \frac{y_{22}}{\Delta y} = \frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{b_{22}}{b_{21}} = \frac{\Delta h}{h_{22}} = \frac{1}{g_{11}}$$

$$z_{12} = -\frac{y_{12}}{\Delta y} = \frac{\Delta a}{a_{21}} = \frac{1}{b_{21}} = \frac{h_{12}}{h_{22}} = -\frac{g_{12}}{g_{11}}$$

$$z_{21} = \frac{-y_{21}}{\Delta y} = \frac{1}{a_{21}} = \frac{\Delta b}{b_{21}} = -\frac{h_{21}}{h_{22}} = \frac{g_{21}}{g_{11}}$$

$$z_{22} = \frac{y_{11}}{\Delta y} = \frac{a_{22}}{a_{21}} = \frac{b_{11}}{b_{21}} = \frac{1}{h_{22}} = \frac{\Delta g}{g_{11}}$$

$$y_{11} = \frac{z_{22}}{\Delta z} = \frac{a_{22}}{a_{12}} = \frac{b_{11}}{b_{12}} = \frac{1}{h_{11}} = \frac{\Delta g}{g_{22}}$$

$$y_{12} = -\frac{z_{12}}{\Delta z} = -\frac{\Delta a}{a_{12}} = -\frac{1}{b_{12}} = -\frac{h_{12}}{h_{11}} = \frac{g_{12}}{g_{22}}$$

$$y_{21} = -\frac{z_{21}}{\Delta z} = -\frac{1}{a_{12}} = -\frac{\Delta b}{b_{12}} = \frac{h_{21}}{h_{11}} = -\frac{g_{21}}{g_{22}}$$

$$y_{22} = \frac{z_{11}}{\Delta z} = \frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{b_{22}}{b_{12}} = \frac{\Delta h}{h_{11}} = \frac{1}{g_{22}}$$

$$a_{11} = \frac{z_{11}}{z_{21}} = -\frac{y_{22}}{y_{21}} = \frac{b_{22}}{\Delta b} = -\frac{\Delta h}{h_{21}} = \frac{1}{g_{21}}$$

$$a_{12} = \frac{\Delta z}{z_{21}} = -\frac{1}{y_{21}} = \frac{b_{12}}{\Delta b} = -\frac{h_{11}}{h_{21}} = \frac{g_{22}}{g_{21}}$$

$$a_{21} = \frac{1}{z_{21}} = -\frac{\Delta y}{y_{21}} = \frac{b_{21}}{\Delta b} = -\frac{h_{22}}{h_{21}} = \frac{g_{11}}{g_{21}}$$

$$a_{22} = \frac{z_{22}}{z_{21}} = -\frac{y_{11}}{y_{21}} = \frac{b_{11}}{\Delta b} = -\frac{1}{h_{21}} = \frac{\Delta g}{g_{21}}$$

$$b_{11} = \frac{z_{22}}{z_{12}} = -\frac{y_{11}}{y_{12}} = \frac{a_{22}}{\Delta a} = \frac{1}{h_{12}} = -\frac{\Delta g}{g_{12}}$$

$$b_{12} = \frac{\Delta z}{z_{12}} = -\frac{1}{y_{12}} = \frac{a_{12}}{\Delta a} = \frac{h_{11}}{h_{12}} = -\frac{g_{22}}{g_{12}}$$

$$b_{21} = \frac{1}{z_{12}} = -\frac{\Delta y}{y_{12}} = \frac{a_{21}}{\Delta a} = \frac{h_{22}}{h_{12}} = -\frac{g_{11}}{g_{12}}$$

$$b_{22} = \frac{z_{11}}{z_{12}} = \frac{y_{22}}{y_{12}} = \frac{a_{11}}{\Delta a} = \frac{\Delta h}{h_{12}} = -\frac{1}{g_{12}}$$

$$h_{11} = \frac{\Delta z}{z_{22}} = \frac{1}{y_{11}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{b_{12}}{b_{11}} = \frac{g_{22}}{\Delta g}$$

$$h_{12} = \frac{z_{12}}{z_{22}} = -\frac{y_{12}}{y_{11}} = \frac{\Delta a}{a_{22}} = \frac{1}{b_{11}} = -\frac{g_{12}}{\Delta g}$$

$$h_{21} = -\frac{z_{21}}{z_{22}} = \frac{y_{21}}{y_{11}} = -\frac{1}{a_{22}} = -\frac{\Delta b}{b_{11}} = -\frac{g_{21}}{\Delta g}$$

$$h_{22} = \frac{1}{z_{22}} = \frac{\Delta y}{y_{11}} = \frac{a_{21}}{a_{22}} = \frac{b_{21}}{b_{11}} = \frac{g_{11}}{\Delta g}$$

$$g_{11} = \frac{1}{z_{11}} = \frac{\Delta y}{y_{22}} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{b_{21}}{b_{22}} = \frac{h_{22}}{\Delta h}$$

$$g_{12} = -\frac{z_{12}}{z_{11}} = \frac{y_{12}}{y_{22}} = -\frac{\Delta a}{a_{11}} = -\frac{1}{b_{22}} = -\frac{h_{12}}{\Delta h}$$

$$g_{21} = \frac{z_{21}}{z_{11}} = -\frac{y_{21}}{y_{22}} = \frac{1}{a_{11}} = \frac{\Delta b}{b_{22}} = -\frac{h_{21}}{\Delta h}$$

$$g_{22} = \frac{\Delta z}{z_{11}} = \frac{1}{y_{22}} = \frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{b_{12}}{b_{22}} = \frac{h_{11}}{\Delta h}$$

$$\Delta z = z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}$$

$$\Delta y = y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}$$

$$\Delta a = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\Delta b = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}$$

$$\Delta h = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}$$

$$\Delta g = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}$$

Embora não tenhamos deduzido todas as relações apresentadas na Tabela 18.1, deduziremos as que relacionam os parâmetros z e y e os parâmetros z e a. Essas deduções ilustram o processo geral de determinação da relação entre um e outro conjunto de parâmetros. Para determinar os parâmetros z em função dos parâmetros y, em primeiro lugar determinamos V_1 e V_2 usando as Equações 18.2 e, então, comparamos os coeficientes de I_1 e I_2 nas expressões resultantes com os coeficientes de I_1 e I_2 nas Equações 18.1. Pelas Equações 18.2,

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} I_1 & y_{12} \\ I_2 & y_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix}} = \frac{y_{22}}{\Delta y} I_1 - \frac{y_{12}}{\Delta y} I_2, \qquad (18.16)$$

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_{11} & I_1 \\ y_{21} & I_2 \end{vmatrix}}{\Delta y} = -\frac{y_{21}}{\Delta y} I_1 + \frac{y_{11}}{\Delta y} I_2. \quad (18.17)$$

Comparando as equações 18.16 e 18.17 com as Equações 18.1, vemos que

$$z_{11} = \frac{y_{22}}{\Delta y}, \quad (18.18)$$

$$z_{12} = -\frac{y_{12}}{\Delta y}, \quad (18.19)$$

$$z_{21} = -\frac{y_{21}}{\Delta y}, \quad (18.20)$$

$$z_{22} = \frac{y_{11}}{\Delta y}. \quad (18.21)$$

Para determinar os parâmetros z em função dos parâmetros a, rearranjamos as Equações 18.3 na forma das Equações 18.1 e, então, comparamos os coeficientes. Pela segunda equação das Equações 18.3,

$$V_2 = \frac{1}{a_{21}} I_1 + \frac{a_{22}}{a_{21}} I_2. \quad (18.22)$$

Assim, substituindo a Equação 18.22 na primeira equação das Equações 18.3, obtemos

$$V_1 = \frac{a_{11}}{a_{21}} I_1 + \left(\frac{a_{11}a_{22}}{a_{21}} - a_{12} \right) I_2. \quad (18.23)$$

Pela Equação 18.23,

$$z_{11} = \frac{a_{11}}{a_{21}}, \quad (18.24)$$

$$z_{12} = \frac{\Delta a}{a_{21}}. \quad (18.25)$$

Pela Equação 18.22,

$$z_{21} = \frac{1}{a_{21}}, \quad (18.26)$$

$$z_{22} = \frac{a_{22}}{a_{21}}. \quad (18.27)$$

O Exemplo 18.3 ilustra a utilidade da tabela de conversão de parâmetros.

Exemplo 18.3 Determinação dos parâmetros *h* por medições e pela Tabela 18.1

Dois conjuntos de medições são realizados em um quadripolo resistivo. O primeiro conjunto é realizado com a saída em aberto e o segundo conjunto, com a saída em curto-circuito. Os resultados são os seguintes:

Saída em aberto	**Saída em curto-circuito**
$V_1 = 10$ mV	$V_1 = 24$ mV
$I_1 = 10\ \mu$A	$I_1 = 20\ \mu$A
$V_2 = -40$ V	$I_2 = 1$ mA

Determine os parâmetros h do quadripolo.

Solução

Podemos determinar h_{11} e h_{21} diretamente do teste de curto-circuito:

$$h_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{V_2=0} = \frac{24 \times 10^{-3}}{20 \times 10^{-6}} = 1{,}2\ \text{k}\Omega,$$

$$h_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{V_2=0} = \frac{10^{-3}}{20 \times 10^{-6}} = 50.$$

Os parâmetros h_{12} e h_{22} não podem ser obtidos diretamente do teste de circuito aberto. Contudo, uma verificação das equações 18.7–18.15 indica que os quatro parâmetros a podem ser deduzidos dos dados de medição. Em conseqüência, h_{12} e h_{22} podem ser obtidos pela tabela de conversão. Especificamente,

$$h_{12} = \frac{\Delta a}{a_{22}}$$

$$h_{22} = \frac{a_{21}}{a_{22}}.$$

Os parâmetros a são

$$a_{11} = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_2=0} = \frac{10 \times 10^{-3}}{-40} = -0{,}25 \times 10^{-3},$$

$$a_{21} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{I_2=0} = \frac{10 \times 10^{-6}}{-40} = -0{,}25 \times 10^{-6}\ \text{S},$$

$$a_{12} = -\left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{V_2=0} = -\frac{24 \times 10^{-3}}{10^{-3}} = -24\ \Omega,$$

$$a_{22} = -\left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{V_2=0} = -\frac{20 \times 10^{-6}}{10^{-3}} = -20 \times 10^{-3}.$$

O valor numérico de Δa é

$$\Delta a = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$
$$= 5 \times 10^{-6} - 6 \times 10^{-6} = -10^{-6}.$$

Assim,

$$h_{12} = \frac{\Delta a}{a_{22}}$$
$$= \frac{-10^{-6}}{-20 \times 10^{-3}} = 5 \times 10^{-5},$$

$$h_{22} = \frac{a_{21}}{a_{22}}$$
$$= \frac{-0{,}25 \times 10^{-6}}{-20 \times 10^{-3}} = 12{,}5\ \mu\text{S}.$$

✔ PROBLEMA PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 1 — Saber calcular qualquer conjunto de parâmetros do quadripolo

18.4 As seguintes medições foram realizadas em um quadripolo resistivo: com a entrada em aberto, $V_2 = 15$ V, $V_1 = 10$ V e $I_2 = 30$ A; com a entrada em curto-circuito, $V_2 = 10$ V, $I_2 = 4$ A e $I_1 = -5$ A. Calcule os parâmetros z.

Resposta: $z_{11} = (4/15)\ \Omega$; $z_{12} = (1/3)\ \Omega$; $z_{21} = -1{,}6\ \Omega$; $z_{22} = 0{,}5\ \Omega$.

NOTA: Tente resolver também o Problema 18.11, apresentado no final do capítulo.

Quadripolos recíprocos

Um quadripolo é *recíproco* quando existem as seguintes relações entre os seus parâmetros:

$$z_{12} = z_{21}, \tag{18.28}$$

$$y_{12} = y_{21}, \tag{18.29}$$

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \Delta a = 1, \tag{18.30}$$

$$b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} = \Delta b = 1, \tag{18.31}$$

$$h_{12} = -h_{21}, \tag{18.32}$$

$$g_{12} = -g_{21}. \tag{18.33}$$

Um quadripolo é recíproco se a permuta entre uma fonte ideal de tensão em um par de terminais e um amperímetro ideal num terminal do outro par produzir a mesma leitura no amperímetro. Considere, por exemplo, o quadripolo resistivo da Figura 18.4. Quando uma fonte de tensão de 15 V é aplicada aos terminais *ad*, ela produz uma corrente de 1,75 A no amperímetro dos terminais *cd*. A corrente no amperímetro é facilmente determinada, uma vez conhecida a tensão V_{bd}. Assim,

$$\frac{V_{bd}}{60} + \frac{V_{bd} - 15}{30} + \frac{V_{bd}}{20} = 0, \tag{18.34}$$

e $V_{bd} = 5$ V. Portanto,

$$I = \frac{5}{20} + \frac{15}{10} = 1{,}75\ \text{A}. \tag{18.35}$$

Se a fonte de tensão e o amperímetro forem permutados, o amperímetro ainda indicará 1,75 A, o que verificamos analisando o circuito da Figura 18.5:

$$\frac{V_{bd}}{60} + \frac{V_{bd}}{30} + \frac{V_{bd} - 15}{20} = 0. \tag{18.36}$$

Pela Equação 18.36, $V_{bd} = 7{,}5$ V. A corrente I_{ad} é igual a

$$I_{ad} = \frac{7{,}5}{30} + \frac{15}{10} = 1{,}75\ \text{A}. \tag{18.37}$$

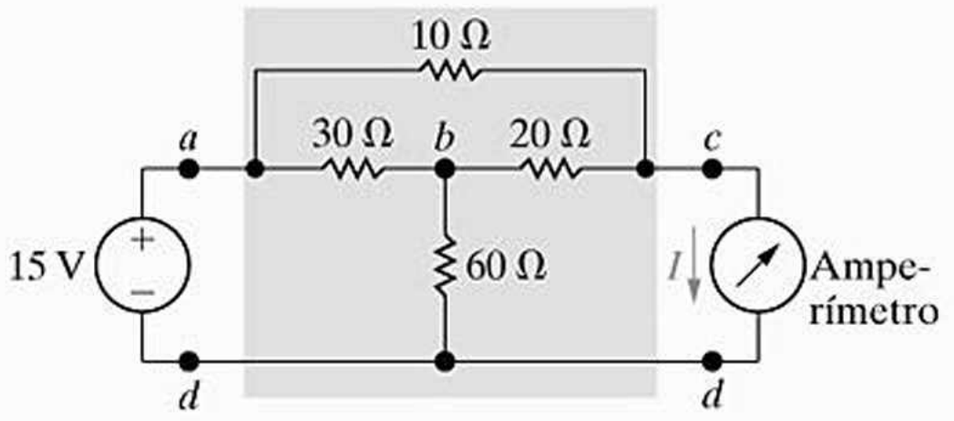


Figura 18.4 ▲ Quadripolo recíproco.

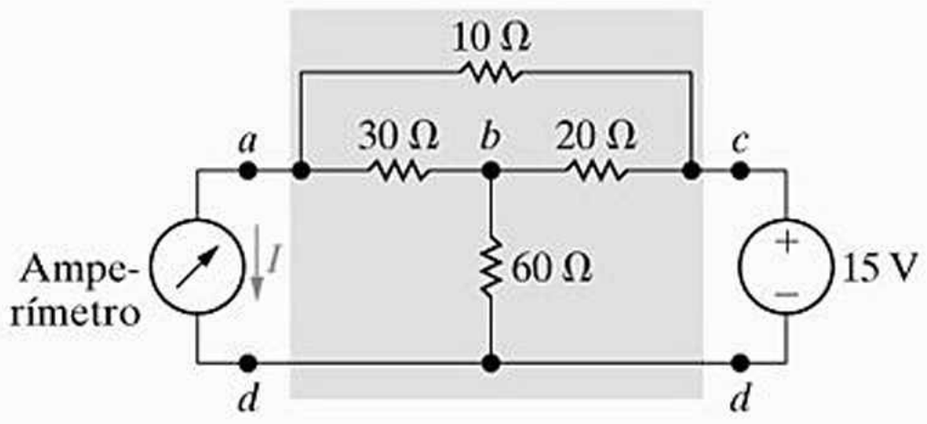


Figura 18.5 ▲ Quadripolo da Figura 18.4, com a permuta entre a fonte de tensão e o amperímetro.

Um quadripolo é também recíproco se a permuta de uma fonte ideal de corrente em um par de terminais por um voltímetro ideal no outro par produzir a mesma leitura no voltímetro. Para um quadripolo recíproco, são necessários apenas três cálculos ou medições para determinar seu conjunto de parâmetros.

Um quadripolo recíproco é *simétrico* se sua entrada puder ser trocada com sua saída sem que isso altere os valores das correntes e tensões terminais. A Figura 18.6 mostra quatro exemplos de quadripolos simétricos.

Em tais quadripolos, existem as seguintes relações adicionais entre seus parâmetros:

$$z_{11} = z_{22}, \tag{18.38}$$

$$y_{11} = y_{22}, \tag{18.39}$$

$$a_{11} = a_{22}, \tag{18.40}$$

$$b_{11} = b_{22}, \tag{18.41}$$

$$h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} = \Delta h = 1, \tag{18.42}$$

$$g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} = \Delta g = 1. \tag{18.43}$$

No caso de um quadripolo simétrico recíproco são necessários apenas dois cálculos ou duas medições para determinar todos os seus parâmetros.

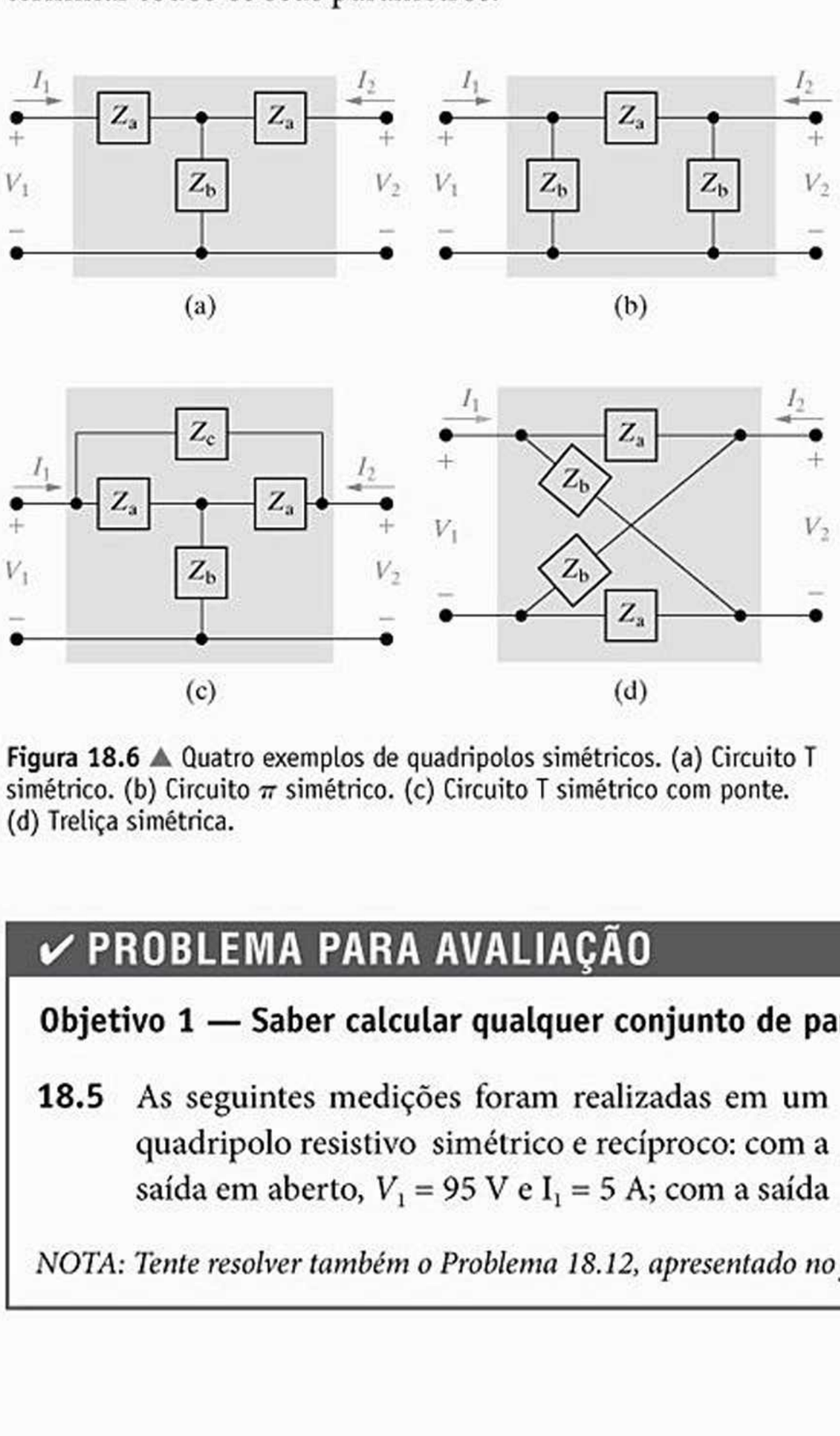


Figura 18.6 ▲ Quatro exemplos de quadripolos simétricos. (a) Circuito T simétrico. (b) Circuito π simétrico. (c) Circuito T simétrico com ponte. (d) Treliça simétrica.

18.3 Quadripolos com carga em seus terminais

Em aplicações típicas de quadripolos, suas entradas são ligadas a fontes de alimentação e cargas são ligadas às suas saídas. A Figura 18.7 mostra uma dessas situações. Aqui, Z_g representa a impedância interna da fonte, V_g a tensão interna da fonte e Z_L a impedância da carga. A análise desse circuito consiste em expressar as correntes e tensões terminais em função dos parâmetros das terminações, V_g, Z_g e Z_L.

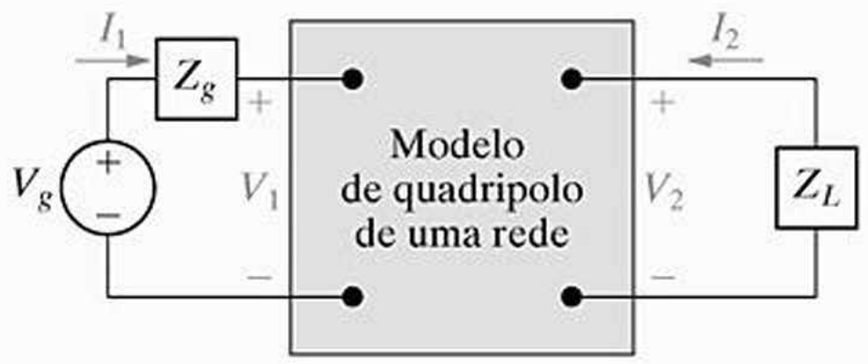


Figura 18.7 ▲ Quadripolo com cargas ligadas em seus terminais.

Seis características do quadripolo sob carga definem seu comportamento terminal:

- a impedância $Z_{ent} = V_1/I_1$, ou a admitância $Y_{ent} = I_1/V_1$.
- a corrente de saída I_2
- a tensão e a impedância de Thévenin (V_{Th}, Z_{Th}) vistas do ponto de vista da saída
- o ganho de corrente I_2/I_1
- o ganho de tensão V_2/V_1
- o ganho de tensão V_2/V_g

Relação entre as seis características e os parâmetros *z*

Para ilustrar como essas seis características são calculadas, deduzimos expressões usando os parâmetros z para modelar o quadripolo. A Tabela 18.2 mostra as expressões que envolvem os parâmetros y, a, b, h e g.

✔ PROBLEMA PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 1 — Saber calcular qualquer conjunto de parâmetros do quadripolo

18.5 As seguintes medições foram realizadas em um quadripolo resistivo simétrico e recíproco: com a saída em aberto, $V_1 = 95$ V e $I_1 = 5$ A; com a saída em curto-circuito, $V_1 = 11{,}52$ V e $I_2 = -2{,}72$ A. Calcule os parâmetros z do quadripolo.

Resposta: $z_{11} = z_{22} = 19\ \Omega$, $z_{12} = z_{21} = 17\ \Omega$.

NOTA: Tente resolver também o Problema 18.12, apresentado no final do capítulo.

TABELA 18.2 Equações de quadripolos com cargas em seus terminais

Parâmetros z	Parâmetros y
$Z_{ent} = z_{11} - \frac{z_{12}z_{21}}{z_{22} + Z_L}$	$Y_{ent} = y_{11} - \frac{y_{12}y_{21}Z_L}{1 + y_{22}Z_L}$
$I_2 = \frac{-z_{21}V_g}{(z_{11} + Z_g)(z_{22} + Z_L) - z_{12}z_{21}}$	$I_2 = \frac{y_{21}V_g}{1 + y_{22}Z_L + y_{11}Z_g + \Delta y Z_g Z_L}$
$V_{Th} = \frac{z_{21}}{z_{11} + Z_g}V_g$	$V_{Th} = \frac{-y_{21}V_g}{y_{22} + \Delta y Z_g}$
$Z_{Th} = z_{22} - \frac{z_{12}z_{21}}{z_{11} + Z_g}$	$Z_{Th} = \frac{1 + y_{11}Z_g}{y_{22} + \Delta y Z_g}$
$\frac{I_2}{I_1} = \frac{-z_{21}}{z_{22} + Z_L}$	$\frac{I_2}{I_1} = \frac{y_{21}}{y_{11} + \Delta y Z_L}$
$\frac{V_2}{V_1} = \frac{z_{21}Z_L}{z_{11}Z_L + \Delta z}$	$\frac{V_2}{V_1} = \frac{-y_{21}Z_L}{1 + y_{22}Z_L}$
$\frac{V_2}{V_g} = \frac{z_{21}Z_L}{(z_{11} + Z_g)(z_{22} + Z_L) - z_{12}z_{21}}$	$\frac{V_2}{V_g} = \frac{y_{21}Z_L}{y_{12}y_{21}Z_gZ_L - (1 + y_{11}Z_g)(1 + y_{22}Z_L)}$
Parâmetros a	**Parâmetros b**
$Z_{ent} = \frac{a_{11}Z_L + a_{12}}{a_{21}Z_L + a_{22}}$	$Z_{ent} = \frac{b_{22}Z_L + b_{12}}{b_{21}Z_L + b_{11}}$
$I_2 = \frac{-V_g}{a_{11}Z_L + a_{12} + a_{21}Z_gZ_L + a_{22}Z_g}$	$I_2 = \frac{-V_g\Delta b}{b_{11}Z_g + b_{21}Z_gZ_L + b_{22}Z_L + b_{12}}$
$V_{Th} = \frac{V_g}{a_{11} + a_{21}Z_g}$	$V_{Th} = \frac{V_g\Delta b}{b_{22} + b_{21}Z_g}$
$Z_{Th} = \frac{a_{12} + a_{22}Z_g}{a_{11} + a_{21}Z_g}$	$Z_{Th} = \frac{b_{11}Z_g + b_{12}}{b_{21}Z_g + b_{22}}$
$\frac{I_2}{I_1} = \frac{-1}{a_{21}Z_L + a_{22}}$	$\frac{I_2}{I_1} = \frac{-\Delta b}{b_{11} + b_{21}Z_L}$
$\frac{V_2}{V_1} = \frac{Z_L}{a_{11}Z_L + a_{12}}$	$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\Delta b Z_L}{b_{12} + b_{22}Z_L}$
$\frac{V_2}{V_g} = \frac{Z_L}{(a_{11} + a_{21}Z_g)Z_L + a_{12} + a_{22}Z_g}$	$\frac{V_2}{V_g} = \frac{\Delta b Z_L}{b_{12} + b_{11}Z_g + b_{22}Z_L + b_{21}Z_gZ_L}$
Parâmetros h	**Parâmetros g**
$Z_{ent} = h_{11} - \frac{h_{12}h_{21}Z_L}{1 + h_{22}Z_L}$	$Y_{ent} = g_{11} - \frac{g_{12}g_{21}}{g_{22} + Z_L}$
$I_2 = \frac{h_{21}V_g}{(1 + h_{22}Z_L)(h_{11} + Z_g) - h_{12}h_{21}Z_L}$	$I_2 = \frac{-g_{21}V_g}{(1 + g_{11}Z_g)(g_{22} + Z_L) - g_{12}g_{21}Z_g}$
$V_{Th} = \frac{-h_{21}V_g}{h_{22}Z_g + \Delta h}$	$V_{Th} = \frac{g_{21}V_g}{1 + g_{11}Z_g}$
$Z_{Th} = \frac{Z_g + h_{11}}{h_{22}Z_g + \Delta h}$	$Z_{Th} = g_{22} - \frac{g_{12}g_{21}Z_g}{1 + g_{11}Z_g}$
$\frac{I_2}{I_1} = \frac{h_{21}}{1 + h_{22}Z_L}$	$\frac{I_2}{I_1} = \frac{-g_{21}}{g_{11}Z_L + \Delta g}$
$\frac{V_2}{V_1} = \frac{-h_{21}Z_L}{\Delta h Z_L + h_{11}}$	$\frac{V_2}{V_1} = \frac{g_{21}Z_L}{g_{22} + Z_L}$
$\frac{V_2}{V_g} = \frac{-h_{21}Z_L}{(h_{11} + Z_g)(1 + h_{22}Z_L) - h_{12}h_{21}Z_L}$	$\frac{V_2}{V_g} = \frac{g_{21}Z_L}{(1 + g_{11}Z_g)(g_{22} + Z_L) - g_{12}g_{21}Z_g}$

A dedução de qualquer dessas expressões envolve a manipulação algébrica das equações do quadripolo juntamente com as duas equações de restrição impostas pelas terminações. Se usarmos as equações dos parâmetros z para o circuito da Figura 18.7, temos

$$V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2, \tag{18.44}$$

$$V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2, \tag{18.45}$$

$$V_1 = V_g - I_1Z_g \tag{18.46}$$

$$V_2 = -I_2Z_L. \tag{18.47}$$

As equações 18.46 e 18.47 descrevem as restrições impostas às terminações.

Para determinar a impedância de entrada, isto é, $Z_{ent} = V_1/I_1$, procedemos da seguinte forma: na Equação 18.45 substituímos V_2 por $-I_2Z_L$ e deduzimos a expressão resultante para I_2:

$$I_2 = \frac{-z_{21}I_1}{Z_L + z_{22}}. \tag{18.48}$$

Então, substituímos essa equação na Equação 18.44 e calculamos Z_{ent}:

$$Z_{ent} = z_{11} - \frac{z_{12}z_{21}}{z_{22} + Z_L}. \tag{18.49}$$

Para determinar a corrente terminal, I_2, em primeiro lugar calculamos I_1 pela Equação 18.44 depois de substituirmos V_1 pelo lado direito da Equação 18.46. O resultado é

$$I_1 = \frac{V_g - z_{12}I_2}{z_{11} + Z_g}. \tag{18.50}$$

Agora, substituímos este valor de I_1 na Equação 18.48 e calculamos I_2:

$$I_2 = \frac{-z_{21}V_g}{(z_{11} + Z_g)(z_{22} + Z_L) - z_{12}z_{21}}. \tag{18.51}$$

A tensão de Thévenin vista dos terminais de saída é igual a V_2 quando $I_2 = 0$. Com $I_2 = 0$ e pelas equações 18.44 e 18.45, temos

$$V_2|_{I_2=0} = z_{21}I_1 = z_{21}\frac{V_1}{z_{11}}. \tag{18.52}$$

Contudo, $V_1 = V_g - I_1Z_g$ e $I_1 = V_g/(Z_g + z_{11})$; assim, substituindo esses resultados na Equação 18.52 temos o valor de circuito aberto de V_2:

$$V_2|_{I_2=0} = V_{Th} = \frac{z_{21}}{Z_g + z_{11}}V_g. \tag{18.53}$$

A impedância de Thévenin, ou de saída, é a razão V_2/V_1 quando V_g é substituída por um curto-circuito. Neste caso, a Equação 18.46 reduz-se a

$$V_1 = -I_1Z_g. \tag{18.54}$$

Substituindo a Equação 18.54 na Equação 18.44, obtemos

$$I_1 = \frac{-z_{12}I_2}{z_{11} + Z_g}. \tag{18.55}$$

Agora, substituímos o valor de I_1 da Equação 18.55 na Equação 18.45, o que dá como resultado

$$\left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{V_g=0} = Z_{Th} = z_{22} - \frac{z_{12}z_{21}}{z_{11} + Z_g}. \tag{18.56}$$

O ganho de corrente I_2/I_1 pode ser calculado diretamente da Equação 18.48:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{-z_{21}}{Z_L + z_{22}}. \tag{18.57}$$

Para deduzir a expressão para o ganho de tensão V_2/V_1, começamos substituindo I_2 na Equação 18.45 por seu valor dado pela Equação 18.47; assim,

$$V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}\left(\frac{-V_2}{Z_L}\right). \tag{18.58}$$

Em seguida, calculamos I_1 pela Equação 18.44 em função de V_1 e V_2:

$$z_{11}I_1 = V_1 - z_{12}\left(\frac{-V_2}{Z_L}\right)$$

ou

$$I_1 = \frac{V_1}{z_{11}} + \frac{z_{12}V_2}{z_{11}Z_L}. \tag{18.59}$$

Agora, substituímos I_1 na Equação 18.58 pela Equação 18.59 e calculamos a expressão resultante para V_2/V_1:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{z_{21}Z_L}{z_{11}Z_L + z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}}$$

$$= \frac{z_{21}Z_L}{z_{11}Z_L + \Delta z}. \tag{18.60}$$

Para calcular o ganho de tensão V_2/V_g, em primeiro lugar, combinamos as equações 18.44, 18.46 e 18.47 para determinar I_1 em função de V_2 e V_g:

$$I_1 = \frac{z_{12}V_2}{Z_L(z_{11} + Z_g)} + \frac{V_g}{z_{11} + Z_g}. \tag{18.61}$$

Agora, usamos as equações 18.61 e 18.47 em conjunto com a Equação 18.45 para deduzir uma expressão que envolva apenas V_2 e V_g; isto é,

$$V_2 = \frac{z_{21}z_{12}V_2}{Z_L(z_{11} + Z_g)} + \frac{z_{21}V_g}{z_{11} + Z_g} - \frac{z_{22}}{Z_L}V_2, \tag{18.62}$$

que podemos manipular para obter o ganho de tensão desejado:

$$\frac{V_2}{V_g} = \frac{z_{21}Z_L}{(z_{11} + Z_g)(z_{22} + Z_L) - z_{12}z_{21}}. \tag{18.63}$$

As expressões dadas aparecem na Tabela 18.2. Além disso, a lista apresenta as expressões correspondentes para os parâmetros y, a, b, h e g.

O Exemplo 18.4 ilustra a utilidade das relações apresentadas na Tabela 18.2.

Exemplo 18.4 Análise de um quadripolo com carga em seus terminais

O quadripolo da Figura 18.8 é descrito em termos de seus parâmetros b, cujos valores são

$$b_{11} = -20, \qquad b_{12} = -3.000\ \Omega,$$
$$b_{21} = -2\ \text{mS}, \qquad b_{22} = -0{,}2.$$

a) Determine a tensão fasorial V_2.

b) Determine a potência média fornecida à carga de 5 kΩ.

c) Determine a potência média fornecida aos terminais de entrada.

d) Determine a impedância da carga para máxima transferência de potência média.

e) Determine a máxima potência média fornecida à carga do item (d).

Solução

a) Para determinar V_2, temos duas opções, ambas mostradas na Tabela 18.2. Podemos optar por determinar I_2 e, então, determinar V_2 pela relação $V_2 = -I_2Z_L$, ou podemos determinar o ganho de tensão V_2/V_g e, então, calcular V_2. Vamos usar a última abordagem. Pelos valores do dados, temos

$$\Delta b = (-20)(-0{,}2) - (-3.000)(-2 \times 10^{-3})$$
$$= 4 - 6 = -2.$$

Pela Tabela 18.2,

$$\frac{V_2}{V_g} = \frac{\Delta b Z_L}{b_{12} + b_{11}Z_g + b_{22}Z_L + b_{21}Z_gZ_L}$$
$$= \frac{(-2)(5.000)}{-3.000 + (-20)500 + (-0{,}2)5.000 + [-2 \times 10^{-3}(500)(5.000)]}$$
$$= \frac{10}{19}.$$

Então,

$$\boldsymbol{V}_2 = \left(\frac{10}{19}\right)500 = 263{,}16\angle 0°\ \text{V}.$$

b) A potência média fornecida à carga de 5.000 Ω é

$$P_2 = \frac{263{,}16^2}{2(5.000)} = 6{,}93\ \text{W}.$$

c) Para determinar a potência média fornecida à entrada, em primeiro lugar, determinamos a impedância de entrada Z_{ent}. Pela Tabela 18.2,

$$Z_{ent} = \frac{b_{22}Z_L + b_{12}}{b_{21}Z_L + b_{11}}$$
$$= \frac{(-0{,}2)(5.000) - 3.000}{-2 \times 10^{-3}(5.000) - 20}$$
$$= \frac{400}{3} = 133{,}33\ \Omega.$$

Agora, o valor de I_1 é calculado diretamente:

$$\boldsymbol{I}_1 = \frac{500}{500 + 133{,}33} = 789{,}47\ \text{mA}.$$

A potência média fornecida à entrada é

$$P_1 = \frac{0{,}78947^2}{2}(133{,}33) = 41{,}55\ \text{W}.$$

d) A impedância da carga para máxima transferência de potência média é o conjugado da impedância de Thévenin vista sob o ponto de vista dos terminais de saída. Pela Tabela 18.2,

$$Z_{\text{Th}} = \frac{b_{11}Z_g + b_{12}}{b_{21}Z_g + b_{22}}$$
$$= \frac{(-20)(500) - 3.000}{(-2 \times 10^{-3})(500) - 0{,}2}$$
$$= \frac{13.000}{1{,}2} = 10.833{,}33\ \Omega.$$

Assim, $Z_L = Z_{\text{Th}}^* = 10.833{,}33\ \Omega$.

e) Para determinar a máxima potência média fornecida à Z_L, em primeiro lugar, determinamos V_2 pela expressão do ganho de tensão V_2/V_g. Quando Z_L for 10.833,33 Ω, esse ganho será

$$\frac{\boldsymbol{V}_2}{\boldsymbol{V}_g} = 0{,}8333.$$

Assim,

$$\boldsymbol{V}_2 = (0{,}8333)(500) = 416{,}67\ \text{V}$$

e

$$P_L(\text{máximo}) = \frac{1}{2}\frac{416{,}67^2}{10.833{,}33}$$
$$= 8{,}01\ \text{W}.$$

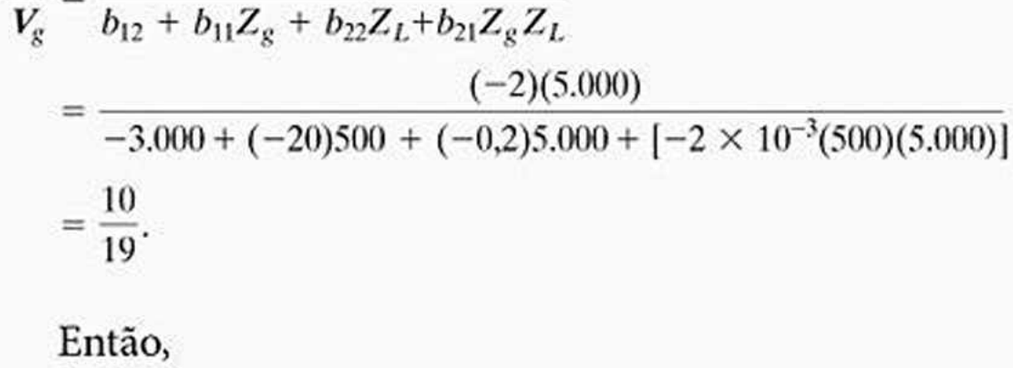
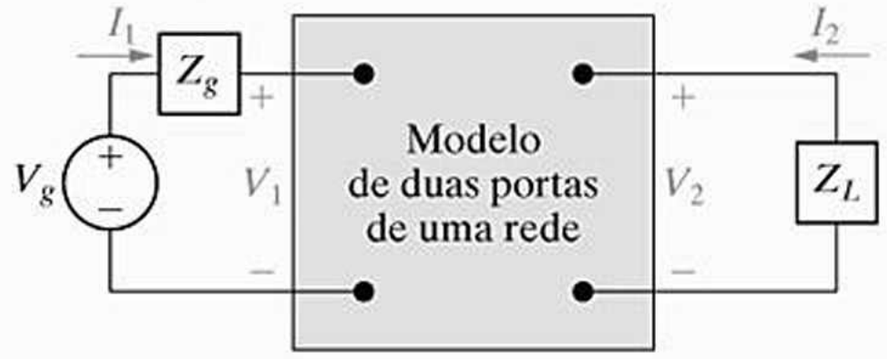


Figura 18.8 ▲ Circuito para o Exemplo 18.4.

✔ PROBLEMA PARA AVALIAÇÃO

Objetivo 2 — Saber analisar um quadripolo com carga em seus terminais, determinando as correntes, tensões, impedâncias e relações de interesse

18.6 Os parâmetros *a* do quadripolo mostrado são $a_{11} = 5 \times 10^{-4}$, $a_{12} = 10\ \Omega$, $a_{21} = 10^{-6}$ S e $a_{22} = -3 \times 10^{-2}$. O quadripolo é alimentado por uma fonte de tensão senoidal com uma amplitude máxima de 50 mV e uma impedância interna de $100 + j0\ \Omega$. Ele é ligado a uma carga resistiva de 5 kΩ.



a) Calcule a potência média fornecida ao resistor de carga.
b) Calcule a resistência da carga para máxima potência média.
c) Calcule a máxima potência média fornecida ao resistor do item (b).

Resposta: (a) 62,5 mW;
(b) 70/6 kΩ;
(c) 74,4 mW.

NOTA: Tente resolver também os problemas 18.30, 18.32 e 18.37, apresentados no final do capítulo.

18.4 Interconexão de quadripolos

Em geral, é mais fácil sintetizar um sistema grande e complexo se antes projetarmos as subseções do sistema. Integra-se, então, o sistema interligando essas unidades mais simples e fáceis de projetar. Se as subseções forem modeladas por quadripolos, a síntese do sistema completo se fará por meio da interligação desses quadripolos.

Quadripolos podem ser interligados de cinco modos: (1) em cascata, (2) em série, (3) em paralelo, (4) em série-paralelo e (5) em paralelo-série. A Figura 18.9 mostra essas cinco interligações básicas.

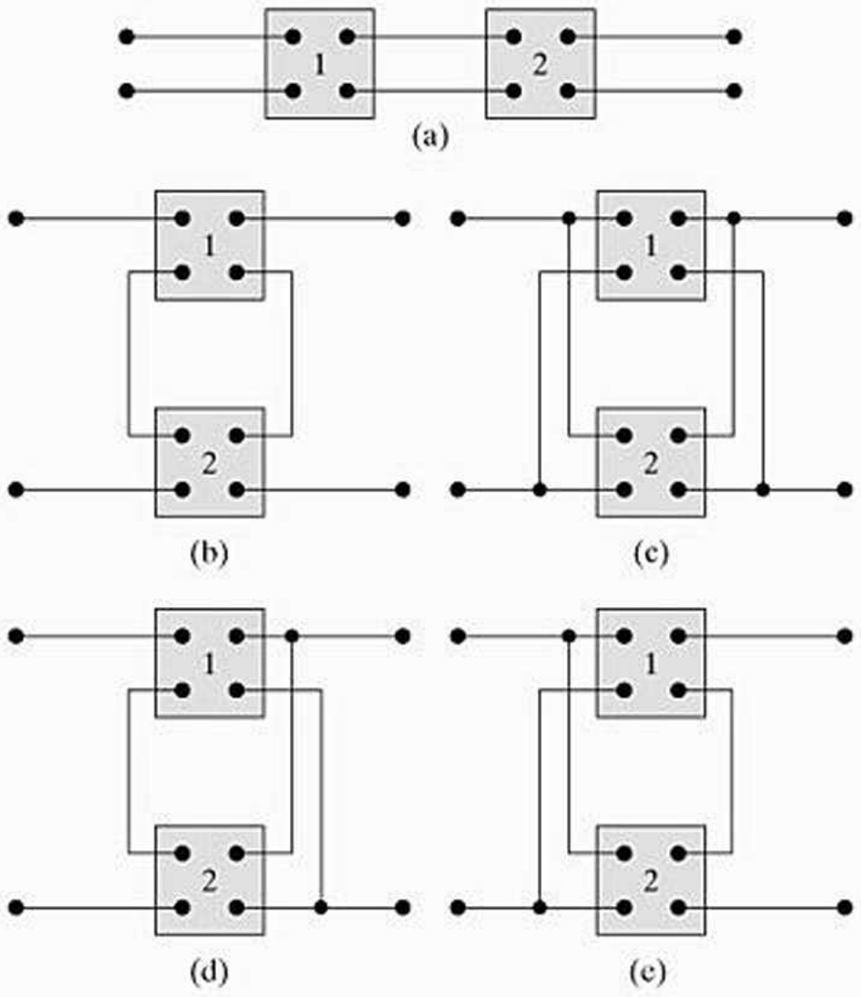


Figura 18.9 ▲ As cinco interligações básicas de quadripolos. (a) Em cascata. (b) Em série. (c) Em paralelo. (d) Em série-paralelo. (e) Em paralelo-série.

Nesta seção, analisaremos e ilustraremos somente a ligação em cascata. Contudo, se as outras quatro ligações obedecerem a certos requisitos, poderemos obter os parâmetros que descrevem os circuitos interligados pela simples adição dos parâmetros das redes individuais. Em particular, os parâmetros *z* descrevem a ligação em série; os parâmetros *y*, a ligação em paralelo; os parâmetros *h*, a ligação em série-paralelo; e os parâmetros *g*, a ligação em paralelo-série.[1]

A ligação em cascata é importante porque ocorre freqüentemente na modelagem de grandes sistemas. Diferentemente das outras quatro interligações básicas, não há nenhuma restrição à utilização dos parâmetros dos quadripolos individuais para se obterem os parâmetros dos circuitos interligados. Os parâmetros *a* são mais adequados para descrever a ligação em cascata.

Analisamos a ligação em cascata usando o circuito mostrado na Figura 18.10. A tensão e a corrente de saída do primeiro circuito são identificadas por V_2' e I_2' e a tensão e a corrente de entrada do segundo circuito são identificadas por V_1' e I_1'. Desejamos deduzir as equações que relacionam V_2 e I_2 com V_1 e I_1, por meio dos parâmetros *a*. Em outras palavras, procuramos o par de equações

$$V_1 = a_{11}V_2 - a_{12}I_2 \tag{18.64}$$

$$I_1 = a_{21}V_2 - a_{22}I_2, \tag{18.65}$$

onde os parâmetros *a* sejam dados explicitamente em termos dos parâmetros *a* dos circuitos individuais.

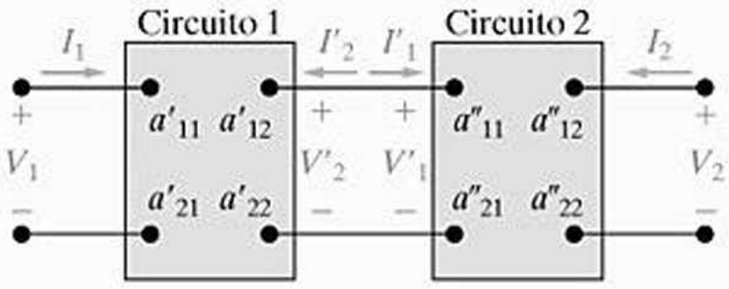


Figura 18.10 ▲ Ligação em cascata.

[1] Uma descrição detalhada dessas quatro interligações é apresentada por Henry Ruston e Joseph Bordogna em *Electric Networks: Functions, Filters, Analysis*, Nova York: McGraw-Hill, 1966, Capítulo. 4.

Começamos a dedução observando que, pela Figura 18.10,

$$V_1 = a'_{11}\, V'_2 - a'_{12}\, I'_2, \tag{18.66}$$

$$I_1 = a'_{21}\, V'_2 - a'_{22}\, I'_2. \tag{18.67}$$

Com a interligação em cascata, temos $V'_2 = V''_1$ e $I'_2 = -I''_1$. Com isso, as equações 18.66 e 18.67 se tornam

$$V_1 = a'_{11}\, V''_1 + a'_{12}\, I''_1 \tag{18.68}$$

$$I_1 = a'_{21}\, V''_1 + a'_{22}\, I''_1 \tag{18.69}$$

A tensão V''_1 e a corrente I''_1 estão relacionadas com V_2 e V_1 por meio dos parâmetros a do segundo circuito:

$$V''_1 = a''_{11} V_2 - a''_{12} I_2, \tag{18.70}$$

$$I''_1 = a''_{21} V_2 - a''_{22} I_2. \tag{18.71}$$

Substituindo as equações 18.70 e 18.71 nas equações 18.68 e 18.69, as relações entre V_1, I_1 e V_2, I_2:

$$V_1 = (a'_{11}\, a''_{21} + a'_{12}\, a''_{21})V_2 - (a'_{11}\, a'_{12} + a''_{12}\, a'_{12})I_2, \tag{18.72}$$

$$I_1 = (a'_{21}\, a''_{11} + a'_{22}\, a''_{21})V_2 - (a'_{21}\, a''_{12} + a'_{21}\, a''_{22})I_2. \tag{18.73}$$

Comparando as equações 18.72 e 18.73 com as equações 18.64 e 18.65, obtemos as expressões desejadas para os parâmetros a dos quadripolos interligados, ou seja,

$$a_{11} = a'_{11}\, a''_{11} + a'_{12}\, a''_{21}, \tag{18.74}$$

$$a_{12} = a'_{11}\, a''_{12} + a'_{12}\, a''_{22}, \tag{18.75}$$

$$a_{21} = a'_{21}\, a''_{11} + a'_{22}\, a''_{21}, \tag{18.76}$$

$$a_{22} = a'_{21} a''_{12} + a'_{22}\, a''_{22}. \tag{18.77}$$

Se mais de duas unidades forem ligadas em cascata, os parâmetros a do quadripolo equivalente podem ser determinados pela redução sucessiva do conjunto original, um par de quadripolos de cada vez.

O Exemplo 18.5 ilustra o uso das equações 18.74 –18.77 para analisar uma ligação em cascata de dois circuitos amplificadores.

Exemplo 18.5 Análise de quadripolos em cascata

Dois amplificadores idênticos estão ligados em cascata, como mostra a Figura 18.11. Cada amplificador é descrito em relação a seus parâmetros h. Os valores são $h_{11} = 1.000\ \Omega$, $h_{12} = 0{,}0015$, $h_{21} = 100$ e $h_{22} = 100\ \mu$S. Determine o ganho de tensão V_2/V_g.

Solução

Em primeiro lugar, é necessário converter os parâmetros h em parâmetros a. Como os amplificadores são idênticos, um único conjunto de parâmetros a os descreve:

$$a'_{11} = \frac{-\Delta h}{h_{21}} = \frac{+0{,}05}{100} = 5 \times 10^{-4},$$

$$a'_{12} = \frac{-h_{11}}{h_{21}} = \frac{-1.000}{100} = -10\ \Omega,$$

$$a'_{21} = \frac{-h_{22}}{h_{21}} = \frac{-100 \times 10^{-6}}{100} = -10^{-6}\,\text{S},$$

$$a'_{22} = \frac{-1}{h_{21}} = \frac{-1}{100} = -10^{-2}.$$

Em seguida, usamos as equações 18.74–18.77 para calcular os parâmetros a dos amplificadores em cascata:

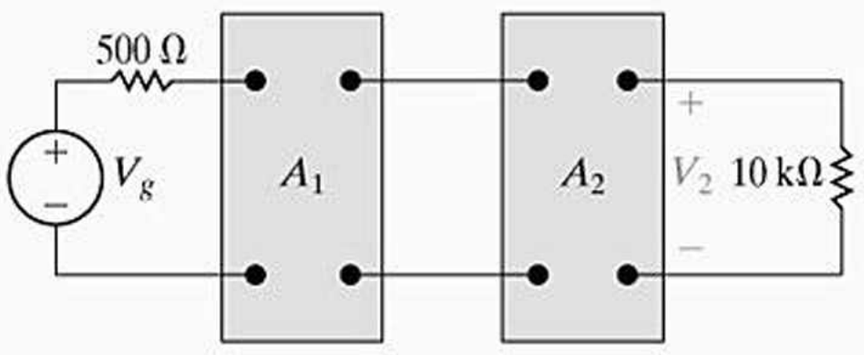


Figura 18.11 ▲ Circuito para o Exemplo 18.5.

$$\begin{aligned} a_{11} &= a'_{11}\, a''_{11} + a'_{12}\, a''_{21} \\ &= 25 \times 10^{-8} + (-10)(-10^{-6}) \\ &= 10{,}25 \times 10^{-6}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{12} &= a'_{11}\, a''_{12} + a'_{12}\, a''_{22} \\ &= (5 \times 10^{-4})(-10) + (-10)(-10^{-2}) \\ &= 0{,}095\ \Omega, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{21} &= a'_{21}\, a''_{11} + a'_{22}\, a''_{21} \\ &= (-10^{-6})(5 \times 10^{-4}) + (-0{,}01)(-10^{-6}) \\ &= 9{,}5 \times 10^{-9}\ \text{S}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{22} &= a'_{21}\, a''_{12} + a'_{22}\, a''_{22} \\ &= (-10^{-6})(-10) + (-10^{-2})^2 \\ &= 1{,}1 \times 10^{-4}. \end{aligned}$$

Pela Tabela 18.2,

$$\frac{V_2}{V_g} = \frac{Z_L}{(a_{11} + a_{21}Z_g)Z_L + a_{12} + a_{22}Z_g}$$

$$= \frac{10^4}{[10{,}25 \times 10^{-6} + 9{,}5 \times 10^{-9}(500)]10^4 + 0{,}095 + 1{,}1 \times 10^{-4}(500)}$$

$$= \frac{10^4}{0{,}15 + 0{,}095 + 0{,}055}$$

$$= \frac{10^5}{3}$$

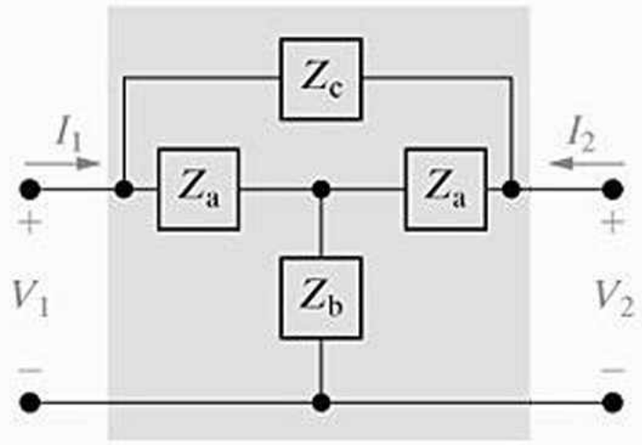
$$= 33.333{,}33.$$

Assim, um sinal de entrada de 150 μV produz, na saída, um sinal de 5 V. Uma abordagem alternativa para a determinação do ganho de tensão V_2/V_g é dada no Problema 18.41.

✔ PROBLEM APARA AVALIAÇÃO

Objetivo 3 — Saber analisar uma interligação em cascata de quadripolos

18.7 Cada elemento do circuito mostrado é um resistor de 15 Ω. Dois desses circuitos estão ligados em cascata, entre uma fonte de tensão contínua e uma carga resistiva. A fonte de tensão contínua tem uma tensão de saída em vazio de 100 V e uma resistência interna de 8 Ω. O resistor de carga é ajustado até que seja fornecida a ele máxima potência. Calcule (a) a resistência da carga, (b) a tensão da carga e (c) a potência da carga.



Resposta: (a) 14,44 Ω; (b) 16 V; (c) 17,73 W.

NOTA: Tente resolver também o Problema 18.38, apresentado no final do capítulo.

Resumo

- O *modelo de quadripolos* é usado para descrever um circuito em termos da tensão e corrente em seus terminais de entrada e saída.
- O modelo é limitado a circuitos nos quais:
  - não há fontes independentes no interior do circuito;
  - nenhuma energia está armazenada no circuito;
  - a corrente que entra num dos terminais de um par de terminais é igual à corrente que sai pelo outro terminal do mesmo par; e
  - não existe nenhuma ligação externa entre entrada e saída.
- Duas das quatro variáveis terminais (V_1, I_1, V_2, I_2) são independentes; dessa forma, são necessárias para descrever o circuito apenas duas equações simultâneas envolvendo as quatro variáveis.
- Os seis conjuntos possíveis de equações simultâneas que envolvem as quatro variáveis terminais são denominados equações de parâmetros z, y, a, b, h e g. Veja as equações 18.1–18.6.
- As equações de parâmetros são escritas no domínio da freqüência. Os valores dos parâmetros para tensões e correntes contínuas são obtidos fazendo $s = 0$, e os valores para o regime permanente senoidal são obtidos fazendo $s = j\omega$.
- Qualquer conjunto de parâmetros pode ser calculado ou medido utilizando-se condições adequadas de curto-circuito e circuito aberto nos terminais de entrada e de saída. Veja as equações 18.7–18.15.
- As relações entre os seis conjuntos de parâmetros são dadas na Tabela 18.1.
- Um quadripolo é *recíproco* se a permuta de uma fonte ideal de tensão em um par de terminais por um amperímetro ideal no outro par de terminais produzir a mesma leitura no amperímetro. O efeito da reciprocidade sobre os parâmetros do quadripolo é dado pelas equações 18.28–18.33.
- Um quadripolo recíproco é *simétrico* se seus pares de terminais puderem ser permutados sem alterar os valores das correntes e tensões terminais. O efeito adicional da simetria sobre os parâmetros do quadripolo é dado pelas equações 18.38–18.43.
- O desempenho de um quadripolo ligado a uma fonte equivalente de Thévenin e a uma carga é descrito pelas relações dadas na Tabela 18.2.
- Grandes redes podem ser divididas em sub-redes por meio da modelagem de quadripolos interligados. Neste capítulo, usamos a ligação em cascata para ilustrar a análise da interconexão de quadripolos.

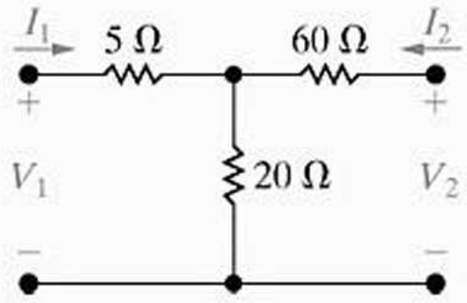
Problemas

Seções 18.1—18.2

18.1 Determine os parâmetros h e g para o circuito do Exemplo 18.1.

18.2* Determine os parâmetros z para o circuito da Figura P18.2.

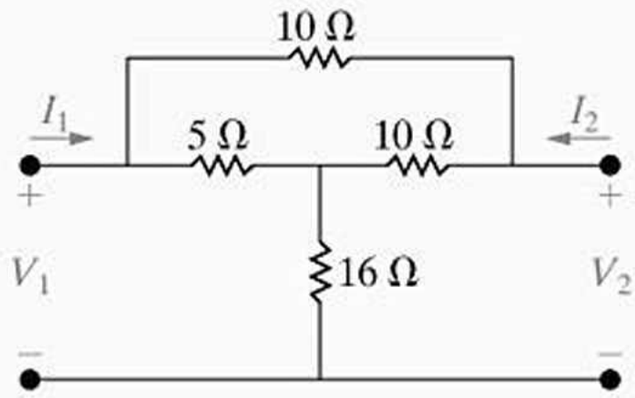
Figura P18.2



18.3 Use os resultados do Problema 18.2 para calcular os parâmetros *y* para o circuito da Figura P18.2.

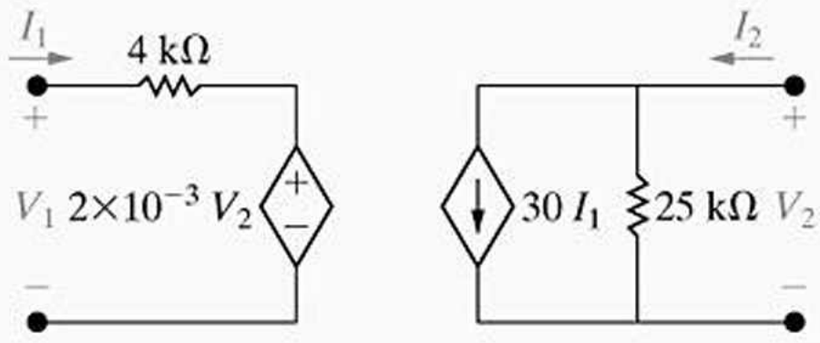
18.4* Determine os parâmetros *z* para o circuito da Figura P18.4.

Figura P18.4



18.5* Determine os parâmetros *b* do circuito da Figura P18.5.

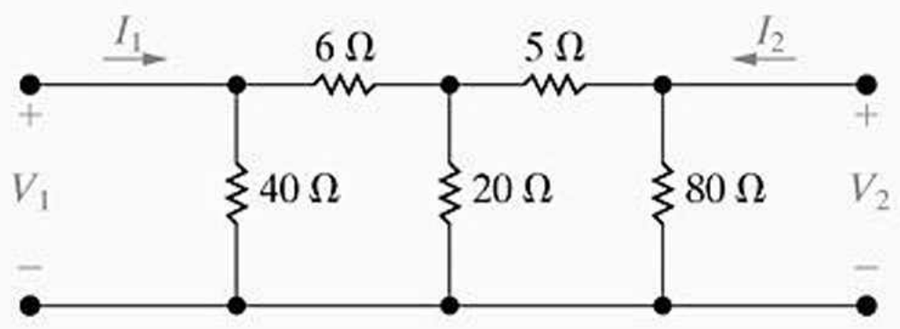
Figura P18.5



18.6 Use os resultados do Problema 18.5 para calcular os parâmetros *g* do circuito da Figura P18.5.

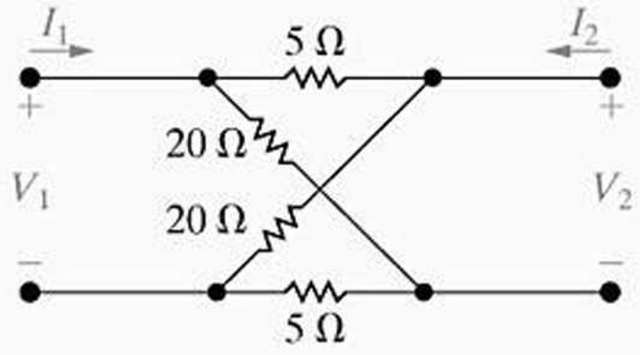
18.7 Determine os parâmetros *h* do circuito da Figura P18.7.

Figura P18.7



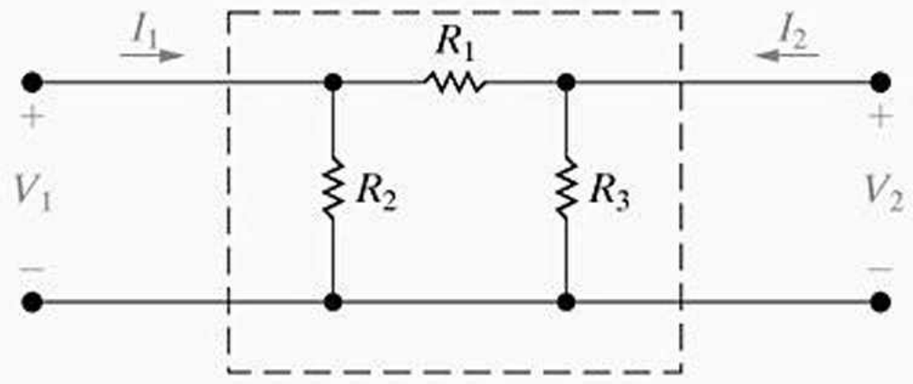
18.8 Determine os parâmetros *b* do circuito da Figura P18.8.

Figura P18.8



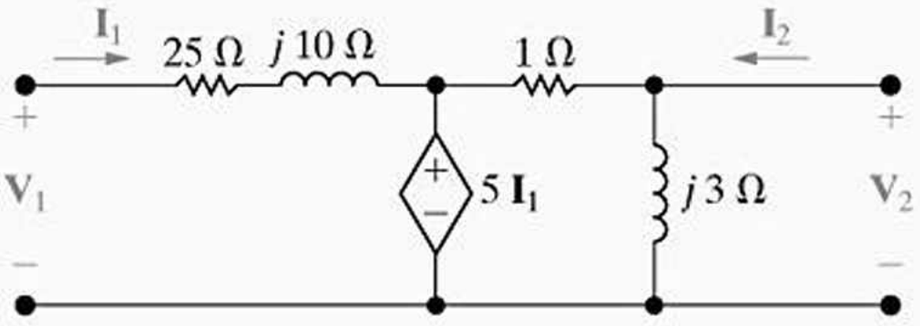
18.9 Selecione os valores de R_1, R_2 e R_3 no circuito da Figura P18.9 de modo que $a_{11} = 1{,}2$, $a_{12} = 34\ \Omega$, $a_{21} = 20$ mS e $a_{22} = 1{,}4$.

Figura P18.9



18.10 Determine os parâmetros *h* do quadripolo da Figura P18.10.

Figura P18.10

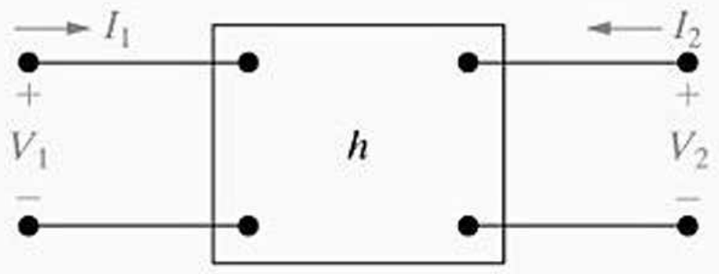


18.11* As seguintes medições, em corrente contínua, foram realizadas no quadripolo da Figura P18.11.

Entrada em aberto	**Entrada em curto-circuito**
$V_1 = 1$ mV	$I_1 = -0{,}5\ \mu$A
$V_2 = 10$ V	$I_2 = 80\ \mu$A
$I_2 = 200\ \mu$A	$V_2 = 5$ V

Calcule os parâmetros *h* do quadripolo.

Figura P18.11

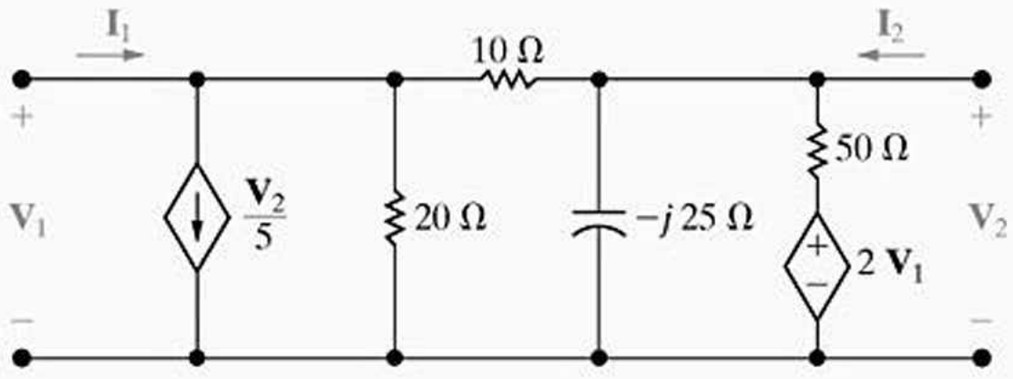


18.12* a) Use as medições do Problema 18.11 para determinar os parâmetros *a* do quadripolo.

b) Verifique seus cálculos determinando os parâmetros *a* diretamente dos parâmetros *h*, determinados no Problema 18.11.

18.13 Determine os valores dos parâmetros *y* no domínio da freqüência para o quadripolo da Figura P18.13.

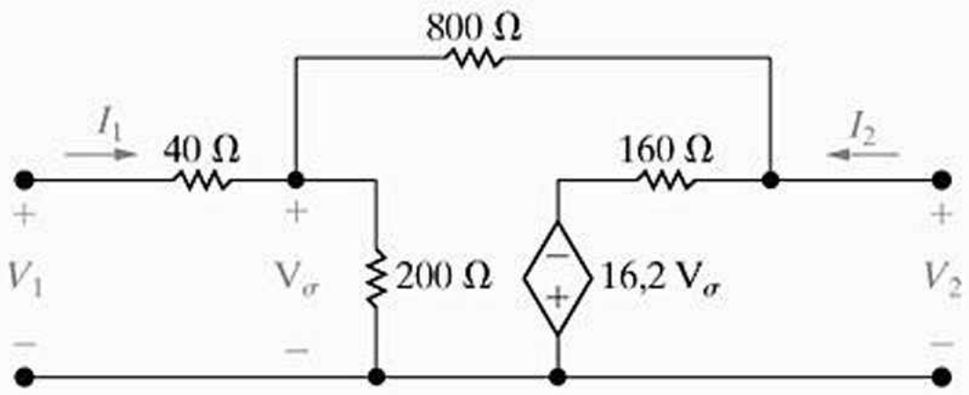
Figura P18.13



18.14 Determine os parâmetros *b* para o quadripolo da Figura P18.13.

18.15 Determine os parâmetros *h* para o circuito amplificador operacional da Figura P18.15.

Figura P18.15



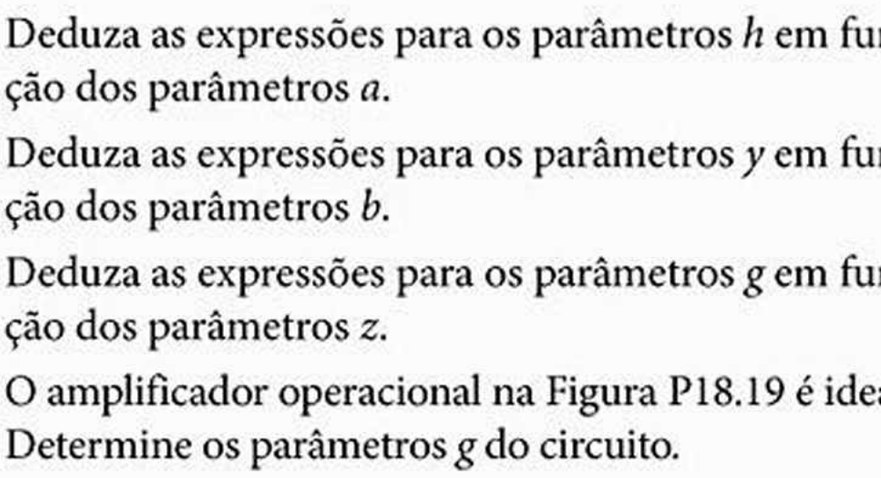
18.16 Deduza as expressões para os parâmetros *h* em função dos parâmetros *a*.

18.17 Deduza as expressões para os parâmetros *y* em função dos parâmetros *b*.

18.18 Deduza as expressões para os parâmetros *g* em função dos parâmetros *z*.

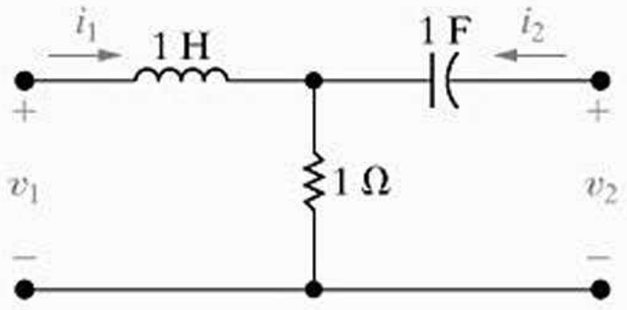
18.19 O amplificador operacional na Figura P18.19 é ideal. Determine os parâmetros *g* do circuito.

Figura P18.19



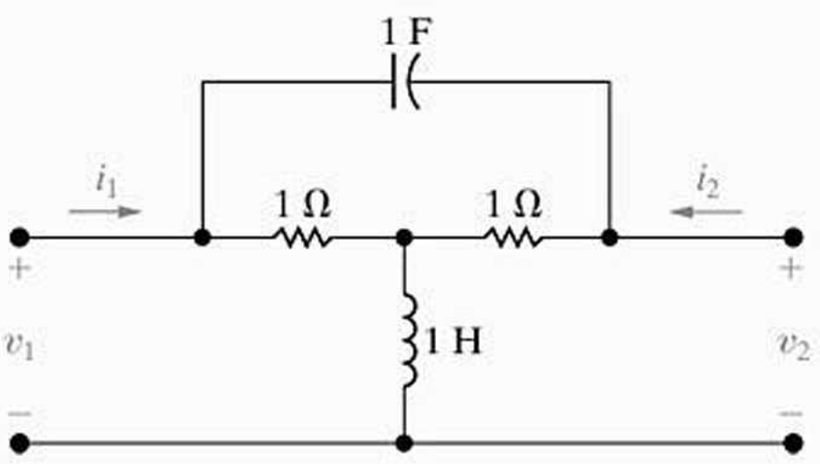
18.20 Determine as expressões dos parâmetros *y* no domínio da freqüência do quadripolo da Figura P18.20.

Figura P18.20



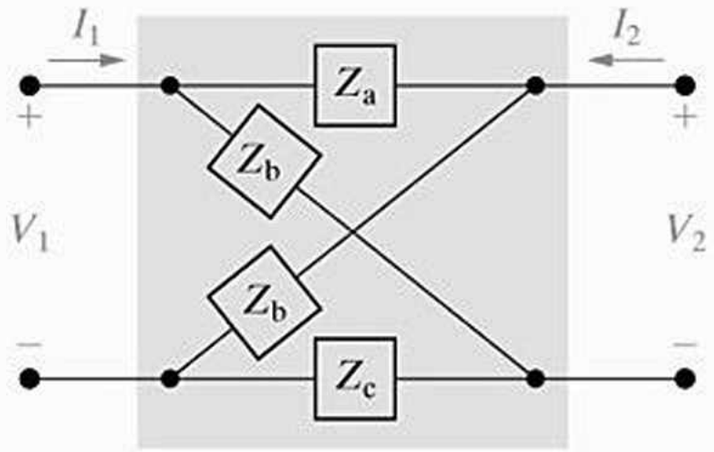
18.21 Determine as expressões dos parâmetros *a* no domínio da freqüência do quadripolo da Figura P18.21.

Figura P18.21



18.22 O quadripolo da Figura P18.22 é simétrico? Justifique sua resposta.

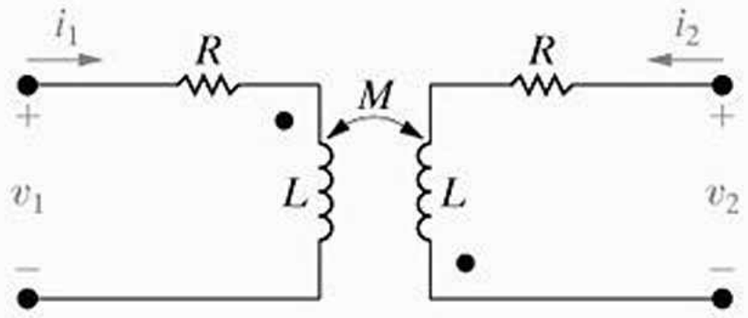
Figura P18.22



18.23 a) Use as equações de definição para determinar as expressões no domínio da freqüência dos parâmetros *h* para o circuito da Figura P18.23.

b) Mostre que os resultados obtidos em (a) satisfazem os requisitos para que um quadripolo seja considerado recíproco e simétrico.

Figura P18.23



Seção 18.3

18.24 Deduza a expressão para a impedância de entrada ($Z_{ent} = V_1/I_1$) do circuito da Figura 18.7 em função dos parâmetros *b*.

18.25 Deduza a expressão para o ganho de corrente I_2/I_1 do circuito da Figura 18.7 em função dos parâmetros *g*.

18.26 Deduza a expressão para o ganho de tensão V_2/V_1 do circuito da Figura 18.7 em função dos parâmetros *y*.

18.27 Deduza a expressão para o ganho de tensão V_2/V_g do circuito da Figura 18.7 em função dos parâmetros *h*.

18.28 Determine o circuito equivalente de Thévenin visto a partir dos terminais de saída do circuito da Figura 18.7 em função dos parâmetros *z*.

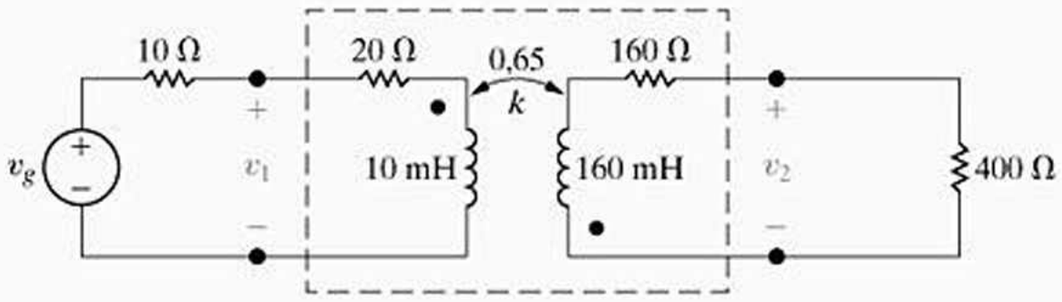
18.29 O transformador linear do circuito da Figura P18.29 tem um coeficiente de acoplamento de 0,65. O transformador é alimentado por uma fonte de tensão senoidal cuja tensão antes da impedância interna é $v_g = 100 \cos 2.000t$ V. A impedância interna da fonte é $10 + j0\ \Omega$.

a) Determine os parâmetros *a* no domínio da freqüência para o transformador linear.

b) Use os parâmetros *a* para determinar o circuito equivalente de Thévenin visto a partir dos terminais da carga.

c) Calcule a expressão de regime permanente de $v_2(t)$.

Figura P18.29



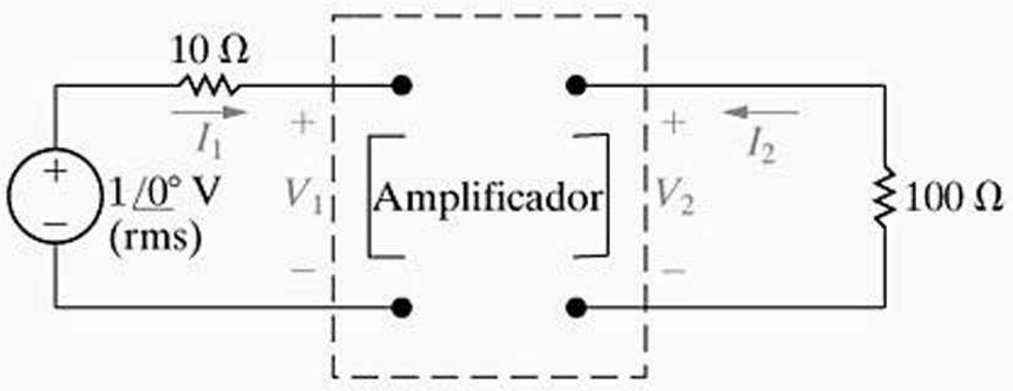
18.30* Os parâmetros *y* do amplificador da Figura P18.30 são

$y_{11} = 25$ mS; $y_{12} = -1$ mS;

$y_{21} = -250$ mS; $y_{22} = -40$ mS.

Determine a razão entre a potência de saída e a fornecida pela fonte ideal de tensão.

Figura P18.30



18.31 Os parâmetros *g* para o quadripolo da Figura P18.31 são

$g_{11} = \frac{1}{6} - j\frac{1}{6}$ S; $g_{12} = -0{,}5 + j0{,}5$;

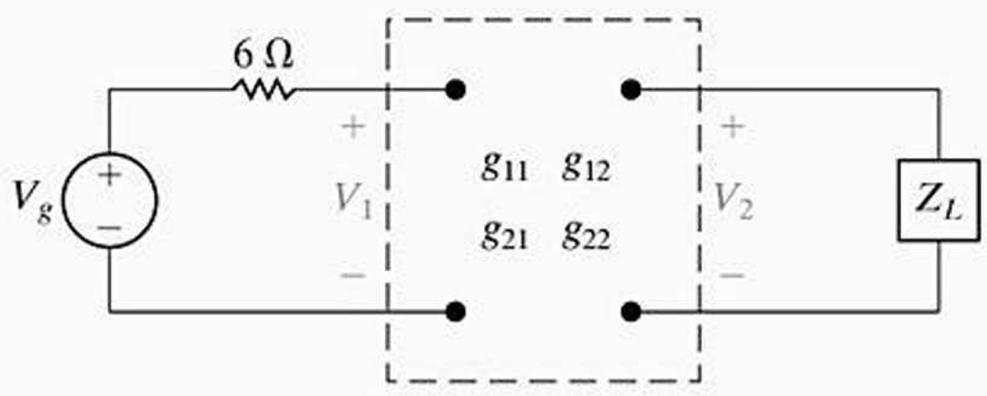
$g_{21} = 0{,}5 - j0{,}5$; $g_{22} = 1{,}5 + j2{,}5\ \Omega$.

A impedância da carga Z_L é ajustada para máxima transferência de potência média. A fonte ideal de tensão fornece uma tensão senoidal de

$$v_g = 42\sqrt{2}\cos 5000t \text{ V}.$$

a) Determine o valor eficaz de V_2.
b) Determine a potência média fornecida a Z_L.
c) Qual porcentagem da potência média fornecida pela fonte ideal de tensão é absorvida por Z_L?

Figura P18.31



18.32* Os parâmetros *y* para o circuito amplificador de potência da Figura P18.32 são

$y_{11} = 2$ mS; $y_{12} = -2\ \mu$S;

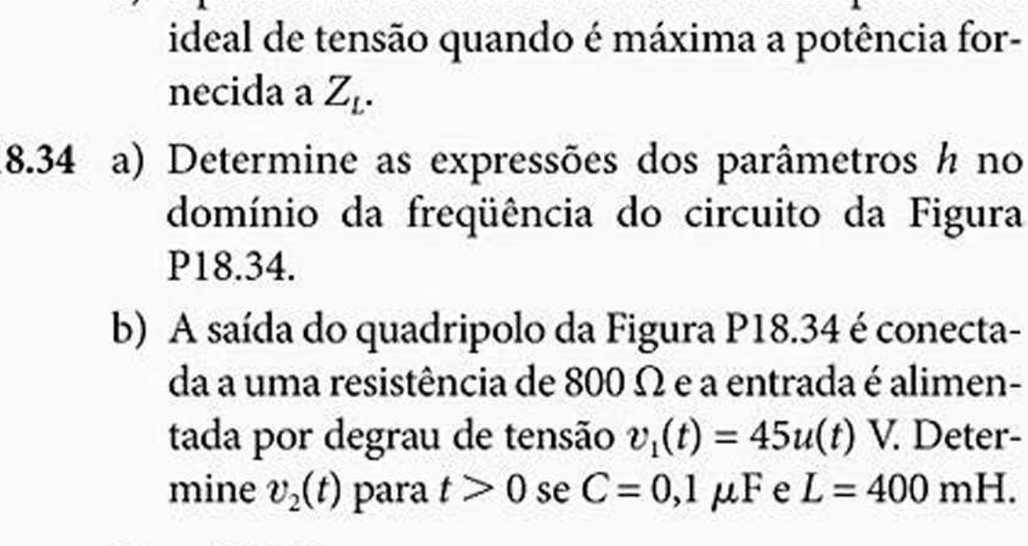
$y_{21} = 100$ mS; $y_{22} = -50\ 10\ \mu$S.

A impedância interna da fonte é $2.500 + j0\ \Omega$ e a impedância da carga é $70.000 + j0\ \Omega$. A fonte ideal de tensão fornece uma tensão

$$v_g = 80\sqrt{2}\cos 4.000t \text{ mV}.$$

a) Determine o valor eficaz de V_2.
b) Determine a potência média fornecida a Z_L.
c) Determine a potência média fornecida pela fonte ideal de tensão.

Figura P18.32



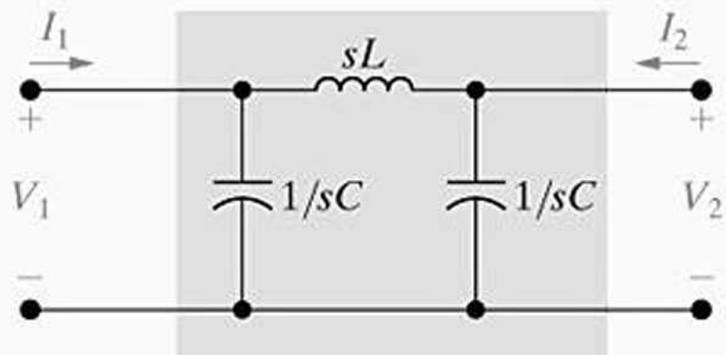
18.33 Para o quadripolo amplificador da Figura P18.32, determine

a) o valor de Z_L para a máxima transferência de potência média
b) a máxima potência média fornecida a Z_L
c) a potência média fornecida ao circuito pela fonte ideal de tensão quando é máxima a potência fornecida a Z_L.

18.34 a) Determine as expressões dos parâmetros *h* no domínio da freqüência do circuito da Figura P18.34.

b) A saída do quadripolo da Figura P18.34 é conectada a uma resistência de 800 Ω e a entrada é alimentada por degrau de tensão $v_1(t) = 45u(t)$ V. Determine $v_2(t)$ para $t > 0$ se $C = 0{,}1\ \mu$F e $L = 400$ mH.

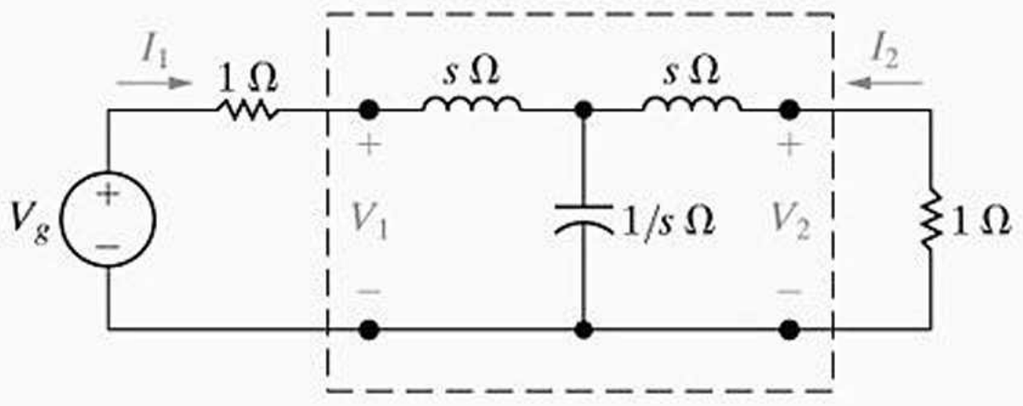
Figura P18.34



18.35 a) Determine os parâmetros *z* para o quadripolo da Figura P18.35.

b) Determine v_2 para $t > 0$, quando $v_g = 50u(t)$ V.

Figura P18.35



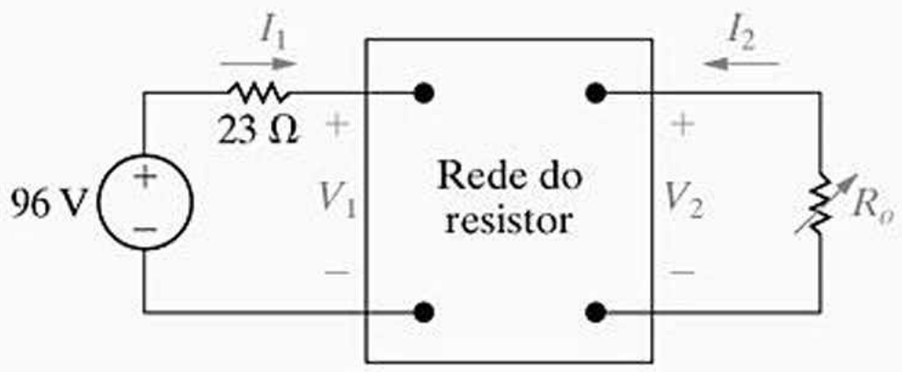
18.36 As seguintes medições foram realizadas em um quadripolo resistivo. Com a saída em aberto e 100 V aplicados à entrada, a corrente na entrada é 1,125 A e a tensão na saída é 104 V. Com a entrada em aberto e 24 V aplicados à saída, a tensão na entrada é 20 V e a corrente na saída é 250 mA. Determine a máxima potência (miliwatts) que esse quadripolo pode fornecer a uma carga resistiva conectada à saída, quando a entrada é alimentada por uma fonte ideal de tensão contínua de 160 V.

18.37* As seguintes medições foram realizadas na rede resistiva da Figura P18.37.

Medição 1	Medição 2
$V_1 = 25$ V	$V_1 = 41$ V
$I_1 = 1$ A	$I_1 = 1$ A
$V_2 = 0$ V	$V_2 = 20$ V
$I_2 = -500$ mA	$I_2 = 0$ A

Um resistor variável R_o é ligado à saída e ajustado para máxima transferência de potência. Determine a máxima potência.

Figura P18.37



Seção 18.4

18.38* Os parâmetros g e h para o quadripolo resistivo da Figura P18.38 são dados por

$g_{11} = 10$ mS; $h_{11} = 150\ \Omega$;

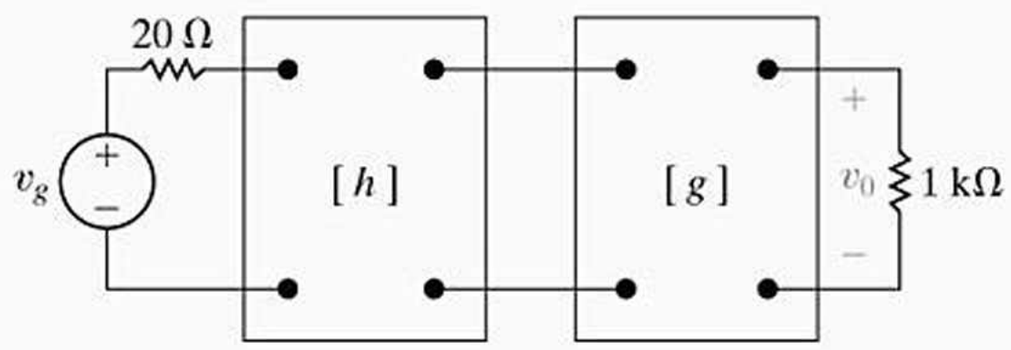
$g_{12} = -4$; $h_{12} = -0{,}05$;

$g_{21} = 20$; $h_{21} = -0{,}10$;

$g_{22} = 24\ \text{k}\Omega$; $h_{22} = 100\ \mu\text{S}$;

Calcule v_o se $v_g = 109{,}5$ V.

Figura P18.38



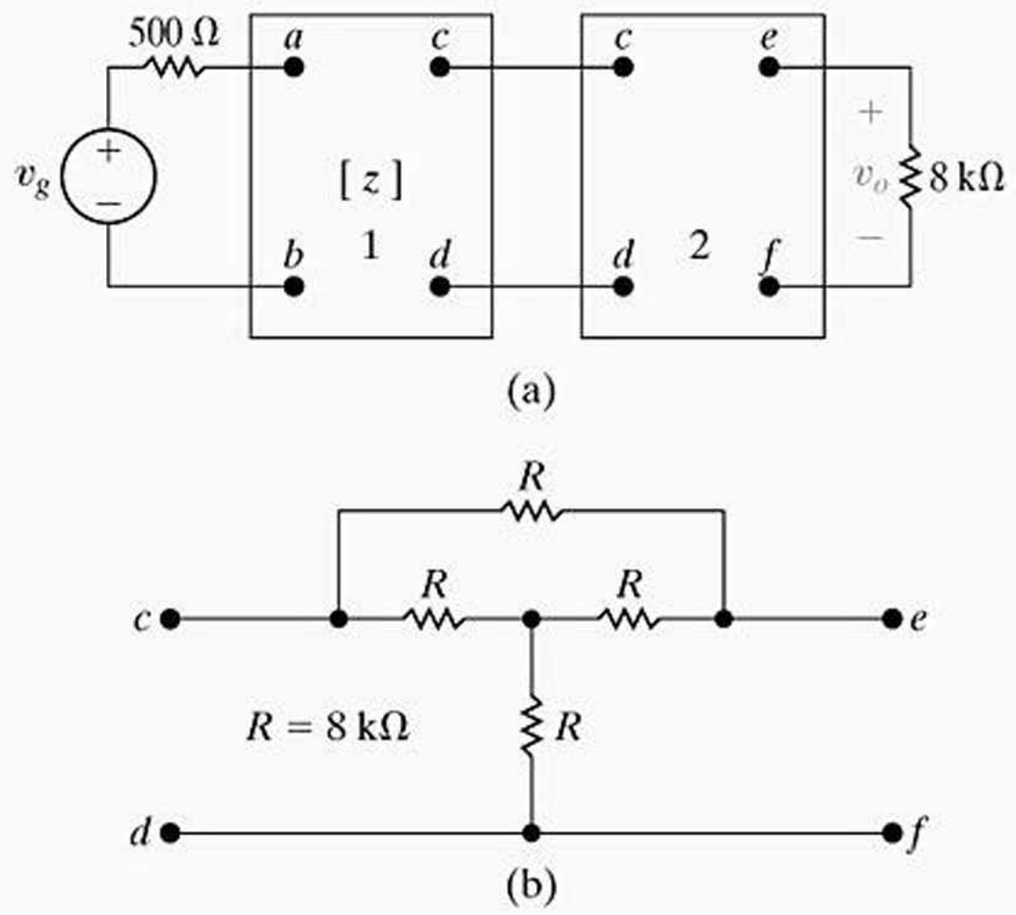
18.39 Os parâmetros z do primeiro quadripolo da Figura P18.39(a) são

$z_{11} = 200\ \Omega$; $z_{12} = 20\ \Omega$;

$z_{21} = -1{,}6\ \text{M}\Omega$; $z_{22} = 40\ \text{k}\Omega$.

O circuito do segundo quadripolo é mostrado na Figura P18.39(b), onde $R = 8\ \text{k}\Omega$. Determine v_o se $v_g = 15$ mV.

Figura P18.39

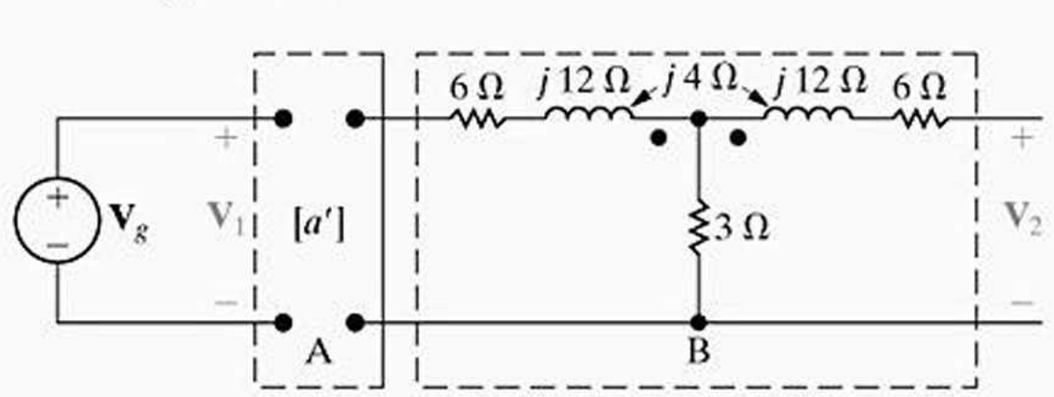


18.40 As redes A e B da Figura P18.40 são recíprocas e simétricas. Para a rede A, sabe-se que $a'_{11} = 4$ e $a'_{12} = 5\ \Omega$.

a) Determine os parâmetros a da rede B.

b) Determine $\mathbf{V}_2/\mathbf{V}_1$ quando $\mathbf{I}_2 = 0$.

Figura P18.40

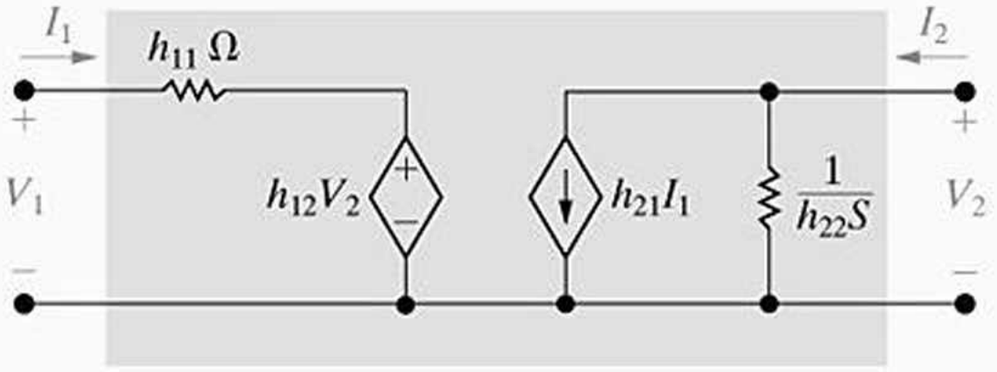


Seções 18.1—18.4

18.41 a) Mostre que o circuito da Figura P18.41 é um circuito equivalente cujas equações correspondem às equações de definição dos parâmetros h.

b) Use o circuito equivalente do item (a) para determinar o ganho de tensão V_2/V_g no circuito da Figura 18.11.

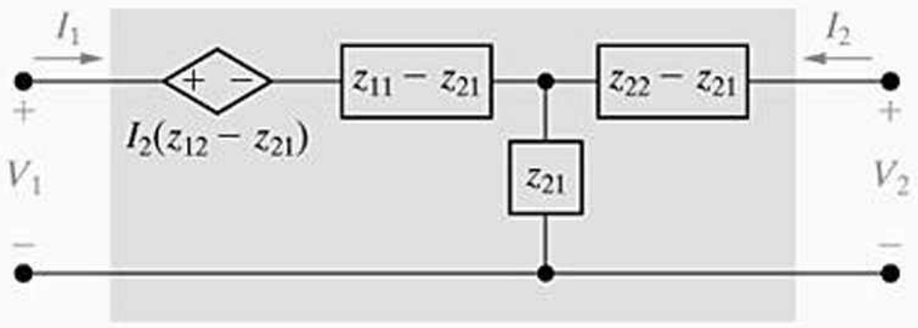
Figura P18.41



18.42 a) Mostre que o circuito da Figura P18.42 é um circuito equivalente cujas equações correspondem às equações de definição dos parâmetros *z*.

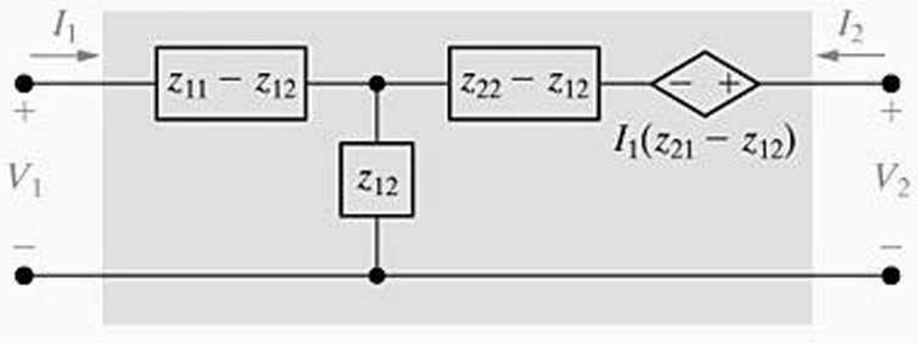
b) Suponha que esse circuito seja alimentado por uma fonte de tensão que tenha uma impedância interna de Z_g ohms. Calcule o circuito equivalente de Thévenin visto a partir dos terminais de saída do circuito. Confirme seus resultados comparando-os com os dados da Tabela 18.2.

Figura P18.42



18.43 a) Mostre que o circuito na Figura P18.43 também é um circuito equivalente cujas equações correspondem às equações de definição dos parâmetros *z*.

Figura P18.43



b) Suponha que esse circuito seja determinado por uma impedância de Z_L ohms. Determine a impedância de entrada V_1/I_1. Verifique seus resultados comparando-os aos dados da Tabela 18.2.

18.44 a) Determine dois circuitos equivalentes cujas equações correspondam às equações de definição dos parâmetros *y*. *Sugestão:* comece com as Equações 18.2. Some e subtraia $y_{21}V_2$ à primeira equação do conjunto. Construa um circuito que satisfaça o conjunto de equações resultante, pensando em termos de tensões de nó. Construa um circuito equivalente alternativo alterando, em primeiro lugar, a segunda das Equações 18.2.

b) Suponha que a entrada seja alimentada por uma fonte de tensão com impedância interna Z_g e que a saída seja ligada a uma impedância Z_L. Determine o ganho de corrente I_2/I_1. Verifique seus resultados comparando-os com os dados da Tabela 18.2.

18.45 a) Determine o circuito equivalente cujas equações correspondam às equações de definição dos parâmetros *g*.

b) Use o circuito do item (a) para calcular a tensão de saída do Problema 18.39. *Sugestão:* Use o Problema 3.64 para simplificar o segundo quadripolo do Problema 18.39.

APÊNDICE

A

Solução de equações lineares simultâneas

A análise de circuitos freqüentemente envolve a solução de equações lineares simultâneas. Aqui, nosso objetivo é fazer uma revisão da utilização de determinantes para resolver tais sistemas de equações. A teoria dos determinantes (com aplicações) pode ser encontrada na maioria dos livros de álgebra de nível intermediário. (Uma referência particularmente boa para estudantes de engenharia é o Capítulo 1 de E. A. Guillemin, *The Mathematics of Circuit Analysis* [Nova York: Wiley, 1949].) Nesta revisão, limitaremos nossa discussão à mecânica da resolução de equações simultâneas por meio de determinantes.

A.1 Etapas preliminares

A primeira etapa na resolução de um conjunto de equações simultâneas por meio de determinantes é escrever as equações em um formato retangular (quadrado). Em outras palavras, organizamos as equações em linhas sucessivas de forma que cada variável ocupe a mesma posição horizontal em todas as equações. Por exemplo, nas Equações A.1, as variáveis i_1, i_2 e i_3 ocupam a primeira, a segunda e a terceira posições, respectivamente, do lado esquerdo de cada equação:

$$\begin{aligned} 21i_1 - 9i_2 - 12i_3 &= -33, \\ -3i_1 + 6i_2 - 2i_3 &= 3, \\ -8i_1 - 4i_2 + 22i_3 &= 50. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Podemos, também, descrever esse conjunto de equações dizendo que i_1 ocupa a primeira coluna do sistema de equações, i_2, a segunda coluna, e i_3, a terceira coluna.

Se uma dada equação não contiver uma ou mais variáveis, elas podem ser inseridas simplesmente atribuindo a cada uma um coeficiente zero. Assim, podemos manter as posições relativas das variáveis e as Equações A.2 podem ser completadas como nas Equações A.3:

$$\begin{aligned} 2v_1 - v_2 &= 4, \\ 4v_2 + 3v_3 &= 16, \\ 7v_1 + 2v_3 &= 5; \end{aligned} \tag{A.2}$$

$$\begin{aligned} 2v_1 - v_2 + 0v_3 &= 4, \\ 0v_1 + 4v_2 + 3v_3 &= 16, \\ 7v_1 + 0v_2 + 2v_3 &= 5. \end{aligned} \tag{A.3}$$

A.2 Método de Cramer

O valor de cada variável desconhecida do sistema de equações é expresso como a razão entre dois determinantes. Se representarmos o determinante do numerador por N, com um índice adequado, e representarmos o determinante do denominador por Δ, então a k-ésima variável desconhecida, x_k, é

$$x_k = \frac{N_k}{\Delta}. \tag{A.4}$$

O determinante do denominador, Δ, é o mesmo para todas as variáveis desconhecidas e é denominado *determinante característico* do sistema de equações. O determinante do numerador N_k varia com cada incógnita. A Equação A.4 é denominada *método de Cramer* para resolução de sistemas de equações simultâneas.

A.3 O determinante característico

Uma vez organizado o sistema de equações simultâneas em um arranjo ordenado, como ilustrado pelas equações A.1 e A.3, formar o determinante característico é uma tarefa simples. Esse determinante é o arranjo quadrado composto pelos coeficientes das variáveis incógnitas. Por exemplo, os determinantes característicos das equações A.1 e A.3 são

$$\Delta = \begin{vmatrix} 21 & -9 & -12 \\ -3 & 6 & -2 \\ -8 & -4 & 22 \end{vmatrix} \tag{A.5}$$

e

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 7 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \tag{A.6}$$

respectivamente.

A.4 O determinante N_k

O determinante N_k é formado pelo determinante característico, substituindo sua k-ésima coluna pela coluna de valores que aparece no lado direito das equações. Por exemplo, os determinantes N_k para avaliar i_1, i_2 e i_3 nas Equações A.1 são

$$N_1 = \begin{vmatrix} -33 & -9 & -12 \\ 3 & 6 & -2 \\ 50 & -4 & 22 \end{vmatrix}, \tag{A.7}$$

$$N_2 = \begin{vmatrix} 21 & -33 & -12 \\ -3 & 3 & -2 \\ -8 & 50 & 22 \end{vmatrix}, \quad \text{(A.8)}$$

e

$$N_3 = \begin{vmatrix} 21 & -9 & -33 \\ -3 & 6 & 3 \\ -8 & -4 & 50 \end{vmatrix}. \quad \text{(A.9)}$$

Os determinantes N_K para a avaliação de v_1, v_2 e v_3 nas Equações A.3 são

$$N_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 16 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad \text{(A.10)}$$

$$N_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 16 & 3 \\ 7 & 5 & 2 \end{vmatrix}, \quad \text{(A.11)}$$

e

$$N_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & 16 \\ 7 & 0 & 5 \end{vmatrix}. \quad \text{(A.12)}$$

A.5 O valor de um determinante

O valor de um determinante é encontrado expandindo-o em termos de seus determinantes menores. O determinante *menor* de qualquer elemento de um determinante é aquele que resta após a eliminação da linha e da coluna ocupadas pelo elemento. Por exemplo, o determinante menor do elemento 6 na Equação A.7 é

$$\begin{vmatrix} -33 & -12 \\ 50 & 22 \end{vmatrix},$$

ao passo que o determinante menor do elemento 22 na Equação A.7 é

$$\begin{vmatrix} -33 & -9 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}.$$

O *co-fator* de um elemento é o seu determinante menor multiplicado pelo fator de controle de sinal

$$-1^{(i+j)},$$

onde i e j denotam a linha e a coluna ocupadas pelo elemento, respectivamente. Assim, o co-fator do elemento 6 na Equação A.7 é

$$-1^{(2+2)} \begin{vmatrix} -33 & -12 \\ 50 & 22 \end{vmatrix},$$

e o co-fator do elemento 22 é

$$-1^{(3+3)} \begin{vmatrix} -33 & -9 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}.$$

O co-fator de um elemento também é denominado seu determinante *menor dotado de sinal.*

O fator de controle de sinal $-1^{(i+j)}$ será igual a +1 ou −1 dependendo de $i + j$ ser um inteiro par ou ímpar. Assim, o sinal algébrico de um co-fator alterna-se entre +1 e −1 à medida que percorremos uma linha ou coluna. Para um determinante 3 × 3, os sinais de mais e menos formam o padrão de tabuleiro de xadrez ilustrado a seguir:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Um determinante pode ser expandido ao longo de qualquer linha ou coluna. Desse modo, a primeira etapa para fazer uma expansão é selecionar uma linha i ou uma coluna j. Uma vez selecionada uma linha ou coluna, cada elemento nessa linha ou coluna é multiplicado por seu determinante menor dotado de sinal, ou co-fator. O valor do determinante é a soma desses produtos. Como exemplo, vamos avaliar o determinante da Equação A.5, expandindo-o ao longo de sua primeira coluna. Seguindo as regras que acabamos de explicar, escrevemos a expansão como

$$\Delta = 21(1)\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -4 & 22 \end{vmatrix} - 3(-1)\begin{vmatrix} -9 & -12 \\ -4 & 22 \end{vmatrix} - 8(1)\begin{vmatrix} -9 & -12 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} \quad \text{(A.13)}$$

Os determinantes 2 × 2 na Equação A.13 também podem ser expandidos por meio de determinantes menores. O determinante menor de um elemento em um determinante 2 × 2 é um único elemento. Assim, a expansão reduz-se a multiplicar o elemento superior esquerdo pelo elemento inferior direito e, então, subtrair desse produto o produto entre o elemento inferior esquerdo e o elemento superior direito. Usando essa observação, a Equação A.13 será escrita como:

$$\Delta = 21(132 - 8) + 3(-198 - 48) - 8(18 + 72)$$

$$= 2.604 - 738 - 720 = 1.146. \quad \text{(A.14)}$$

Se tivéssemos optado por expandir o determinante ao longo da segunda linha de elementos, teríamos escrito

$$\Delta = -3(-1)\begin{vmatrix} -9 & -12 \\ -4 & 22 \end{vmatrix} + 6(+1)\begin{vmatrix} 21 & -12 \\ -8 & 22 \end{vmatrix} - 2(-1)\begin{vmatrix} 21 & -9 \\ -8 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-198 - 48) + 6(462 - 96) + 2(-84 - 72)$$

$$= -738 + 2.196 - 312 = 1.146. \quad \text{(A.15)}$$

Os valores numéricos dos determinantes N_1, N_2 e N_3 dados pelas equações A.7, A.8 e A.9 são

$$N_1 = 1.146, \quad \text{(A.16)}$$

$$N_2 = 2.292 \quad \text{(A.17)}$$

e

$$N_3 = 3.438. \quad \text{(A.18)}$$

Decorre das equações A.15 a A.18 que as soluções para i_1, i_2 e i_3 na Equação A.1 são

$$i_1 = \frac{N_1}{\Delta} = 1\,\text{A},$$

$$i_2 = \frac{N_2}{\Delta} = 2\,\text{A}, \qquad \text{(A.19)}$$

e

$$i_3 = \frac{N_3}{\Delta} = 3\,\text{A}.$$

Fica a cargo do leitor verificar que as soluções para v_1, v_2 e v_3 são

$$v_1 = \frac{49}{-5} = -9{,}8\,\text{V},$$

$$v_2 = \frac{118}{-5} = -23{,}6\,\text{V} \qquad \text{(A.20)}$$

e

$$v_3 = \frac{-184}{-5} = 36{,}8\,\text{V}.$$

A.6 Matrizes

Um sistema de equações lineares simultâneas também pode ser resolvido por meio de matrizes. A seguir, faremos uma breve revisão da notação, álgebra e terminologia de matrizes.[1]

Por definição, uma *matriz* é um arranjo retangular de elementos; assim,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \text{(A.21)}$$

é uma matriz com m linhas e n colunas. Descrevemos A como uma matriz de ordem m por n, ou $m \times n$, onde m é igual ao número de linhas e n é o número de colunas. Sempre especificamos as linhas em primeiro lugar e depois as colunas. Os elementos da matriz — a_{11}, a_{12}, a_{13}, ... — podem ser números reais, números complexos ou funções. Representamos uma matriz por uma letra maiúscula em negrito.

O arranjo na Equação A.21 costuma ser abreviado por

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{mn}, \qquad \text{(A.22)}$$

onde a_{ij} é o elemento na i-ésima linha e j-ésima coluna.

Se $m = 1$, **A** é denominada uma *matriz linha*, isto é,

$$\mathbf{A} = [a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \cdots a_{1n}]. \qquad \text{(A.23)}$$

Se $n = 1$, **A** é denominada uma *matriz coluna*, isto é,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}. \qquad \text{(A.24)}$$

Se $m = n$, **A** é denominada uma *matriz quadrada*. Por exemplo, se $m = n = 3$, a matriz quadrada 3×3 é

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}. \qquad \text{(A.25)}$$

Observe também que usamos colchetes [] para denotar uma matriz, ao passo que usamos linhas verticais para denotar um determinante. É importante saber a diferença. Uma matriz é um arranjo retangular de elementos. Um *determinante* é uma função de um arranjo quadrado de elementos. Assim, se a matriz **A** for quadrada, podemos definir o determinante de **A**. Por exemplo, se

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 15 \end{bmatrix},$$

então

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 15 \end{vmatrix} = 30 - 6 = 24.$$

A.7 Álgebra matricial

A igualdade, adição e subtração de matrizes aplicam-se somente a matrizes da mesma ordem. Duas matrizes são iguais se, e somente se, seus elementos correspondentes forem iguais. Em outras palavras, $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ se, e somente se, $a_{ij} = b_{ij}$ para todo i e j. Por exemplo, as duas matrizes nas equações A.26 e A.27 são iguais porque $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, $a_{21} = b_{21}$ e $a_{22} = b_{22}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 36 & -20 \\ 4 & 16 \end{bmatrix}, \qquad \text{(A.26)}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 36 & -20 \\ 4 & 16 \end{bmatrix}. \qquad \text{(A.27)}$$

Se **A** e **B** forem da mesma ordem, então

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \qquad \text{(A.28)}$$

implica

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}. \qquad \text{(A.29)}$$

Por exemplo, se

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 10 \\ 8 & 12 & -4 \end{bmatrix}, \qquad \text{(A.30)}$$

[1] Um excelente livro didático de nível introdutório a respeito de aplicações de matrizes à análise de circuitos é o de Lawrence P. Huelsman, *Circuits, Matrices, and Linear Vector Spaces* (Nova York: McGraw–Hill, 1963).

e

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 16 & 10 & -30 \\ -20 & 8 & 15 \end{bmatrix}, \tag{A.31}$$

então

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 20 & 4 & -20 \\ -12 & 20 & 11 \end{bmatrix}. \tag{A.32}$$

A equação

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B} \tag{A.33}$$

implica

$$d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}. \tag{A.34}$$

Para as matrizes nas equações A.30 e A.31, teríamos

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -12 & -16 & 40 \\ 28 & 4 & -19 \end{bmatrix}. \tag{A.35}$$

Diz-se que matrizes da mesma ordem são *conformáveis* em relação às operações de adição e de subtração.

Multiplicar uma matriz por um escalar k equivale a multiplicar cada elemento da matriz pelo escalar. Assim, $\mathbf{A} = k\mathbf{B}$ se, e somente se, $a_{ij} = kb_{ij}$. Devemos observar que k pode ser real ou complexo. Como exemplo, multiplicaremos a matriz **D** na Equação A.35 por 5. O resultado é

$$5\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -60 & -80 & 200 \\ 140 & 20 & -95 \end{bmatrix}. \tag{A.36}$$

A multiplicação de matrizes só pode ser realizada se o número de colunas na primeira matriz for igual ao número de linhas na segunda matriz. Em outras palavras, o produto **AB** requer que o número de colunas em **A** seja igual ao número de linhas em **B**. A ordem da matriz resultante será o número de linhas em **A** pelo número de colunas em **B**. Assim, se $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, onde **A** é de ordem $m \times p$, e **B** é de ordem $p \times n$, então **C** será uma matriz de ordem $m \times n$. Quando o número de colunas em **A** é igual ao número de linhas em **B**, dizemos que **A** é conformável a **B** em relação à operação de multiplicação.

Um elemento em **C** é dado pela fórmula

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}. \tag{A.37}$$

A fórmula dada pela Equação A.37 é fácil de usar se nos lembrarmos de que a multiplicação de matrizes é uma operação de linha por coluna. Daí, para obter o i-ésimo, j-ésimo termo em **C**, cada elemento na i-ésima linha de **A** é multiplicado pelo elemento correspondente na j-ésima coluna de **B**, e os produtos resultantes são somados. O exemplo a seguir ilustra o procedimento. Devemos determinar a matriz $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ para

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix} \tag{A.38}$$

e

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}. \tag{A.39}$$

Em primeiro lugar, observamos que **C** será uma matriz 2×2 e que cada elemento em **C** será composto pela soma de três produtos.

Para determinar c_{11} multiplicamos os elementos correspondentes na linha 1 da matriz **A** pelos elementos na coluna 1 da matriz **B** e, então, somamos os produtos. Podemos visualizar essa multiplicação e o processo de soma, separando a linha e a coluna correspondentes de cada matriz e, então, alinhando-as elemento por elemento. Portanto, para determinar c_{11}, temos

Linha 1	**A**	6	3	2
Coluna 1	**B**	4	0	1

assim,

$$c_{11} = 6 \times 4 + 3 \times 0 + 2 \times 1 = 26.$$

Para determinar c_{12} visualizamos

Linha 1	**A**	6	3	2
Coluna 2	**B**	2	3	−2

assim,

$$c_{12} = 6 \times 2 + 3 \times 3 + 2 \times (-2) = 17.$$

Para c_{21}, temos

Linha 2	**A**	1	4	6
Coluna 1	**B**	4	0	1

e

$$c_{21} = 1 \times 4 + 4 \times 0 + 6 \times 1 = 10.$$

Por fim, para c_{22} temos

Linha 2	**A**	1	4	6
Coluna 2	**B**	2	3	−2

pela qual

$$c_{22} = 1 \times 2 + 4 \times 3 + 6 \times (-2) = 2.$$

Assim,

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 26 & 17 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}. \tag{A.40}$$

De modo geral, a multiplicação de matrizes não é comutativa, isto é, $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$. Como exemplo, considere o produto **BA** para as matrizes nas equações A.38 e A.39. A matriz gerada por essa multiplicação é de ordem 3×3 e cada termo na matriz resultante contém dois produtos. Portanto, se $\mathbf{D} = \mathbf{BA}$, temos

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 26 & 20 & 20 \\ 3 & 12 & 18 \\ 4 & -5 & -10 \end{bmatrix}. \tag{A.41}$$

Obviamente, $\mathbf{C} \neq \mathbf{D}$. Deixamos que o leitor verifique os elementos na Equação A.41.

A multiplicação de matrizes é associativa e distributiva. Assim,

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}), \tag{A.42}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC} \tag{A.43}$$

e

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}. \tag{A.44}$$

Nas equações A.42, A.43 e A.44, admitimos que as matrizes são conformáveis em relação às operações de adição e multiplicação.

Já observamos que a multiplicação de matrizes não é comutativa. Há duas outras propriedades da multiplicação da álgebra das grandezas escalares que não são válidas na álgebra matricial.

A primeira é que o produto de matrizes $\mathbf{AB} = 0$ não implica nem $\mathbf{A} = 0$ nem $\mathbf{B} = 0$. (*Observação:* a matriz é igual a zero quando todos os seus elementos são nulos.) Por exemplo, se

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 8 \end{bmatrix},$$

então

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Dessa forma, o produto é zero, mas nem **A** nem **B** é zero.

Em segundo lugar, a equação matricial $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ não implica $\mathbf{B} = \mathbf{C}$. Por exemplo, se

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix},$$

então

$$\mathbf{AB} = \mathbf{AC} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}, \quad \text{mas } \mathbf{B} \neq \mathbf{C}.$$

A *transposta* de uma matriz é formada pela permuta entre suas linhas e colunas. Por exemplo, se

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \text{ então } \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

A transposta da soma de duas matrizes é igual à soma das transpostas, isto é,

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T. \tag{A.45}$$

A transposta do produto de duas matrizes é igual ao produto das transpostas tomadas em ordem inversa. Em outras palavras,

$$[\mathbf{AB}]^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T. \tag{A.46}$$

A Equação A.46 pode ser estendida para um produto de qualquer número de matrizes. Por exemplo,

$$[\mathbf{ABCD}]^T = \mathbf{D}^T\mathbf{C}^T\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T. \tag{A.47}$$

Se $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, diz-se que a matriz é *simétrica*. Somente matrizes quadradas podem ser simétricas.

A.8 Matriz identidade, matriz adjunta e matriz inversa

Uma *matriz identidade* é uma matriz quadrada onde $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$, e $a_{ij} = 1$ para $i = j$. Em outras palavras, todos os elementos em uma matriz identidade são zero, exceto os que estão ao longo da diagonal principal, onde são iguais a 1. Assim,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

são todas matrizes identidade. Observe que as matrizes identidade são sempre quadradas. Usaremos o símbolo **U** para uma matriz identidade.

A *matriz adjunta* de uma matriz **A** de ordem $n \times n$ é definida como

$$\text{adj } \mathbf{A} = [\Delta_{ji}]_{n \times n}, \tag{A.48}$$

onde Δ_{ij} é o co-fator de a_{ij}. (Veja a Seção A.5 para a definição de co-fator.) Segundo a Equação A.48, podemos pensar na determinação da adjunta de uma matriz quadrada como um processo de duas etapas. Em primeiro lugar, construímos uma matriz composta pelos co-fatores de **A** e, então, transpomos a matriz de co-fatores. Como exemplo, determinaremos a adjunta da matriz 3×3

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Os co-fatores dos elementos em **A** são

$$\Delta_{11} = 1(10 - 1) = 9,$$

$$\Delta_{12} = -1(15 + 1) = -16,$$

$$\Delta_{13} = 1(3 + 2) = 5,$$

$$\Delta_{21} = -1(10 - 3) = -7,$$

$$\Delta_{22} = 1(5 + 3) = 8,$$

$$\Delta_{23} = -1(1 + 2) = -3,$$

$$\Delta_{31} = 1(2 - 6) = -4,$$

$$\Delta_{32} = -1(1 - 9) = 8,$$

$$\Delta_{33} = 1(2 - 6) = -4.$$

A matriz de co-fatores é

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 9 & -16 & 5 \\ -7 & 8 & -3 \\ -4 & 8 & -4 \end{bmatrix}.$$

Decorre que a adjunta de **A** é

$$\text{adj } \mathbf{A} = \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 9 & -7 & -4 \\ -16 & 8 & 8 \\ 5 & -3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Podemos verificar a aritmética da determinação da adjunta de uma matriz usando o teorema

$$\text{adj } \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \det \mathbf{A} \cdot \mathbf{U}. \tag{A.49}$$

A Equação A.49 mostra que a adjunta de **A** vezes **A** é igual ao determinante de **A** vezes a matriz identidade ou, para nosso exemplo,

$$\det \mathbf{A} = 1(9) + 3(-7) - 1(-4) = -8.$$

Se fizermos $\mathbf{C} = \text{adj } \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$ e usarmos a técnica ilustrada na Seção A.7, constatamos que os elementos de **C** são

$$\begin{aligned}
c_{11} &= 9 - 21 + 4 = -8,\\
c_{12} &= 18 - 14 - 4 = 0,\\
c_{13} &= 27 - 7 - 20 = 0,\\
c_{21} &= -16 + 24 - 8 = 0,\\
c_{22} &= -32 + 16 + 8 = -8,\\
c_{23} &= -48 + 8 + 40 = 0,\\
c_{31} &= 5 - 9 + 4 = 0,\\
c_{32} &= 10 - 6 - 4 = 0,\\
c_{33} &= 15 - 3 - 20 = -8.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} = -8\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \det \mathbf{A} \cdot \mathbf{U}.$$

A matriz quadrada **A** tem uma *inversa*, denotada por $\mathbf{A}^{-1}$, se

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{U}. \tag{A.50}$$

A Equação A.50 nos mostra que uma matriz pré-multiplicada ou pós-multiplicada por sua inversa gera a matriz identidade **U**. Para a matriz inversa existir é necessário que o determinante de **A** não seja nulo. Somente matrizes quadradas têm inversas, e a inversa também é quadrada.

Uma fórmula para determinar a inversa de uma matriz é

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\text{adj } \mathbf{A}}{\det \mathbf{A}}. \tag{A.51}$$

A Equação A.51 torna-se muito incômoda se a ordem de **A** for maior do que 3×3.[2] Hoje, os computadores digitais facilitam a determinação da inversa de uma matriz em aplicações numéricas da álgebra matricial.

Decorre da Equação A.51 que a inversa da matriz **A** no exemplo anterior é

$$\mathbf{A}^{-1} = -1/8\begin{bmatrix} 9 & -7 & -4 \\ -16 & 8 & 8 \\ 5 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -1{,}125 & 0{,}875 & 0{,}5 \\ 2 & -1 & -1 \\ -0{,}625 & 0{,}375 & 0{,}5 \end{bmatrix}.$$

Você deve verificar que $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = A\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{U}$.

A.9 Partição matricial

Quando manipulamos matrizes, muitas vezes é conveniente dividir (fazer uma partição) uma dada matriz em submatrizes. Então, as operações algébricas originais podem ser executadas em termos das submatrizes. Quando dividimos uma matriz, a localização das partições é completamente arbitrária e a única restrição é que uma partição deve cortar a matriz inteira. Quando selecionamos as partições, também é necessário ter certeza de que as submatrizes são conformáveis em relação às operações matemáticas nas quais estão envolvidas. Por exemplo, vamos utilizar submatrizes para determinar o produto $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Suponha que decidimos partir **B** em duas submatrizes, $\mathbf{B}_{11}$ e $\mathbf{B}_{21}$; assim,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} \\ \mathbf{B}_{21} \end{bmatrix}.$$

Visto que **B** foi dividida em uma matriz coluna de duas linhas, **A** deve ser dividida em, no mínimo, uma matriz de duas colunas; caso contrário, a multiplicação não pode ser executada. A localização das partições verticais da matriz **A** dependerá das definições de $\mathbf{B}_{11}$ e $\mathbf{B}_{21}$. Por exemplo, se

$$\mathbf{B}_{11} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B}_{21} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

então $\mathbf{A}_{11}$ deverá conter três colunas e $\mathbf{A}_{12}$ deverá conter duas colunas. Desse modo, a partição mostrada na Equação A.52 seria aceitável para executar o produto **AB**:

$$\mathbf{C} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ -1 \\ \cdots \\ 3 \\ 0 \end{array}\right]. \tag{A.52}$$

[2] Você pode aprender métodos alternativos para determinar a inversa de uma matriz em qualquer livro introdutório à teoria matricial. Veja, por exemplo, Franz E. Hohn, *Elementary Matrix Algebra* (Nova York: Macmillan, 1973).

Se, por outro lado, dividirmos a matriz **B** de modo que

$$\mathbf{B}_{11} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B}_{21} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

então $\mathbf{A}_{11}$ deverá conter duas colunas e $\mathbf{A}_{12}$ deverá conter três colunas. Nesse caso, a partição mostrada na Equação A.53 seria aceitável para a execução do produto $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$:

$$\mathbf{C} = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ \cdots \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{array}\right]. \quad \text{(A.53)}$$

A título de ilustração, usaremos a Equação A.52 e deixaremos a cargo do leitor a verificação de que a partição da Equação A.53 leva ao mesmo resultado.

Pela Equação A.52, podemos escrever

$$\mathbf{C} = [\mathbf{A}_{11} \ \mathbf{A}_{12}] \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} \\ \mathbf{B}_{21} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21}. \quad \text{(A.54)}$$

Decorre das equações A.52 e A.54 que

$$\mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ -4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \\ -3 & 1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ -9 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 11 \\ 13 \\ -13 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

A matriz **A** também poderia ser dividida na horizontal, visto que a partição vertical foi realizada conforme a operação de multiplicação. Nesse problema simples, as partições horizontais podem ser realizadas conforme a necessidade do analista. Assim, **C** também poderia ser avaliada, utilizando-se a partição mostrada na Equação A.55:

$$\mathbf{C} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ -1 \\ \cdots \\ 3 \\ 0 \end{array}\right]. \quad \text{(A.55)}$$

Pela Equação A.55, decorre que

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} \\ \mathbf{B}_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} \\ \mathbf{C}_{21} \end{bmatrix}, \quad \text{(A.56)}$$

onde

$$\mathbf{C}_{11} = \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21},$$

$$\mathbf{C}_{21} = \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{21}.$$

Você deve verificar que

$$\mathbf{C}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 13 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_{21} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 11 \\ 13 \\ -13 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

Observe, de passagem, que a partição das equações A.52 e A.55 é conformável em relação à operação de adição.

A.10 Aplicações

Os seguintes exemplos demonstram algumas aplicações da álgebra matricial na análise de circuitos.

Exemplo A.1

Use o método matricial para determinar as tensões nodais v_1 e v_2 nas equações 4.5 e 4.6.

Solução

A primeira etapa é reescrever as equações 4.5 e 4.6 em notação matricial. Colocando v_1 e v_2 em evidência e, ao mesmo tempo, passando os termos constantes para o lado direito das equações, obtemos

$$\begin{aligned} 1{,}7v_1 - 0{,}5v_2 &= 10, \\ -0{,}5v_1 + 0{,}6v_2 &= 2. \end{aligned} \tag{A.57}$$

Em notação matricial, a Equação A.57 torna–se

$$\begin{bmatrix} 1{,}7 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 0{,}6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{A.58}$$

ou

$$\mathbf{AV} = \mathbf{I}, \tag{A.59}$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1{,}7 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 0{,}6 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Para determinar os elementos da matriz **V**, multiplicamos ambos os lados da Equação A.59 pela inversa de **A**; assim,

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AV} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{I}. \tag{A.60}$$

A Equação A.60 reduz–se a

$$\mathbf{UV} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{I} \tag{A.61}$$

ou

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{I}. \tag{A.62}$$

Decorre da Equação A.62 que as soluções para v_1 e v_2 são obtidas calculando o produto matricial $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{I}$.

Para determinar a inversa de **A**, em primeiro lugar, determinamos os co-fatores de **A**. Assim,

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= (-1)^2(0{,}6) = 0{,}6 \\ \Delta_{12} &= (-1)^3(-0{,}5) = 0{,}5 \\ \Delta_{21} &= (-1)^3(-0{,}5) = 0{,}5 \\ \Delta_{22} &= (-1)^4(1{,}7) = 1{,}7 \end{aligned} \tag{A.63}$$

A matriz de co-fatores é

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1{,}7 \end{bmatrix}, \tag{A.64}$$

e a adjunta de **A** é

$$\text{adj } \mathbf{A} = \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1{,}7 \end{bmatrix}. \tag{A.65}$$

O determinante de **A** é

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1{,}7 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 0{,}6 \end{vmatrix} = (1{,}7)(0{,}6) - (0{,}25) = 0{,}77. \tag{A.66}$$

Pelas equações A.65 e A.66 podemos escrever a inversa da matriz de coeficientes, isto é,

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{0{,}77} \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1{,}7 \end{bmatrix}. \tag{A.67}$$

Agora, o produto $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{I}$ é determinado:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1}\mathbf{I} &= \frac{100}{77} \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1{,}7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{100}{77} \begin{bmatrix} 7 \\ 8{,}4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9{,}09 \\ 10{,}91 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{A.68}$$

Assim,

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9{,}09 \\ 10{,}91 \end{bmatrix} \tag{A.69}$$

ou

$$v_1 = 9{,}09 \text{ V e } v_2 = 10{,}91 \text{ V}.$$

Exemplo A.2

Use o método matricial para determinar as três correntes de malha no circuito da Figura 4.24.

Solução

As equações de corrente de malha que descrevem o circuito da Figura 4.24 são dadas pela Equação 4.34. A equação de restrição imposta pela fonte de tensão controlada por corrente é dada pela Equação 4.35. Quando a Equação 4.35 é substituída na Equação 4.34, o resultado é o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} 25i_1 - 5i_2 - 20i_3 &= 50, \\ -5i_1 + 10i_2 - 4i_3 &= 0, \\ -5i_1 - 4i_2 + 9i_3 &= 0. \end{aligned} \tag{A.70}$$

Em notação matricial, as Equações A.70 reduzem-se a

$$\mathbf{AI} = \mathbf{V}, \tag{A.71}$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 25 & -5 & -20 \\ -5 & 10 & -4 \\ -5 & -4 & 9 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 50 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Decorre da Equação A.71 que a solução para **I** é

$$\mathbf{I} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{V}. \tag{A.72}$$

Determinamos a inversa de **A** usando a relação

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\text{adj } \mathbf{A}}{\det \mathbf{A}}. \tag{A.73}$$

Para determinar a adjunta de **A**, em primeiro lugar, calculamos os co-fatores de **A**. Assim,

$$\Delta_{11} = (-1)^2(90 - 16) = 74,$$
$$\Delta_{12} = (-1)^3(-45 - 20) = 65,$$
$$\Delta_{13} = (-1)^4(20 + 50) = 70,$$
$$\Delta_{21} = (-1)^3(-45 - 80) = 125,$$
$$\Delta_{22} = (-1)^4(225 - 100) = 125,$$
$$\Delta_{23} = (-1)^5(-100 - 25) = 125,$$
$$\Delta_{31} = (-1)^4(20 + 200) = 220,$$
$$\Delta_{32} = (-1)^5(-100 - 100) = 200,$$
$$\Delta_{33} = (-1)^6(250 - 25) = 225.$$

A matriz de co-fatores é

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 74 & 65 & 70 \\ 125 & 125 & 125 \\ 220 & 200 & 225 \end{bmatrix}, \tag{A.74}$$

pela qual podemos escrever a adjunta de **A**:

$$\text{adj } \mathbf{A} = \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 74 & 125 & 220 \\ 65 & 125 & 200 \\ 70 & 125 & 225 \end{bmatrix}. \tag{A.75}$$

O determinante de **A** é

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 25 & -5 & -20 \\ -5 & 10 & -4 \\ -5 & -4 & 9 \end{vmatrix}$$
$$= 25(90 - 16) + 5(-45 - 80) - 5(20 + 200) = 125.$$

Decorre da Equação A.73 que

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{125}\begin{bmatrix} 74 & 125 & 220 \\ 65 & 125 & 200 \\ 70 & 125 & 225 \end{bmatrix}. \tag{A.76}$$

A solução para **I** é

$$\mathbf{I} = \frac{1}{125}\begin{bmatrix} 74 & 125 & 220 \\ 65 & 125 & 200 \\ 70 & 125 & 225 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 50 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29{,}60 \\ 26{,}00 \\ 28{,}00 \end{bmatrix}. \tag{A.77}$$

As correntes de malha decorrem diretamente da Equação A.77. Assim,

$$\begin{bmatrix} i_i \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29{,}6 \\ 26{,}0 \\ 28{,}0 \end{bmatrix} \tag{A.78}$$

ou

$$i_1 = 29{,}6 \text{ A}, i_2 = 26 \text{ A e } i_3 = 28 \text{ A}.$$

O Exemplo A.3 ilustra a aplicação do método matricial quando os elementos da matriz são números complexos.

Exemplo A.3

Use o método matricial para determinar as correntes de malha fasoriais $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ do circuito da Figura 9.37.

Solução

Somando as tensões ao longo da malha 1, obtemos a equação

$$(1 + j2)\mathbf{I}_1 + (12 - j16)(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2) = 150\angle 0°. \tag{A.79}$$

Somando as tensões ao longo da malha 2, obtemos a equação

$$(12 - j16)(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1) + (1 + j3)\mathbf{I}_2 + 39\mathbf{I}_x = 0. \tag{A.80}$$

A corrente que controla a fonte de tensão dependente é

$$\mathbf{I}_x = (\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2). \tag{A.81}$$

Após a substituição da Equação A.81 na Equação A.80, as equações são colocadas em formato matricial, colocando $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ em evidência em cada equação; portanto

$$(13 - j14)\mathbf{I}_1 - (12 - j16)\mathbf{I}_2 = 150\angle 0°,$$

$$(27 + j16)\mathbf{I}_1 - (26 + j13)\mathbf{I}_2 = 0. \tag{A.82}$$

Usando, agora, a notação matricial, a Equação A.82 é escrita como

$$\mathbf{AI} = \mathbf{V}, \tag{A.83}$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 13 - j14 & -(12 - j16) \\ 27 + j16 & -(26 + j13) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 150\angle 0^\circ \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Decorre da Equação A.83 que

$$\mathbf{I} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{V}. \tag{A.84}$$

A inversa da matriz de coeficientes **A** é determinada usando a Equação A.73. Nesse caso, os co-fatores de **A** são

$$\Delta_{11} = (-1)^2(-26 - j13) = -26 - j13,$$
$$\Delta_{12} = (-1)^3(27 + j16) = -27 - j16,$$
$$\Delta_{21} = (-1)^3(-12 + j16) = 12 - j16,$$
$$\Delta_{22} = (-1)^4(13 - j14) = 13 - j14.$$

A matriz de co-fatores **B** é

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} (-26 - j13) & (-27 - j16) \\ (12 - j16) & (13 - j14) \end{bmatrix}. \tag{A.85}$$

A adjunta de **A** é

$$\text{adj}\,\mathbf{A} = \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} (-26 - j13) & (12 - j16) \\ (-27 - j16) & (13 - j14) \end{bmatrix}. \tag{A.86}$$

O determinante de **A** é

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} (13 - j14) & -(12 - j16) \\ (27 + j16) & -(26 + j13) \end{vmatrix}$$
$$= -(13 - j14)(26 + j13) + (12 - j16)(27 + j16)$$
$$= 60 - j45. \tag{A.87}$$

A inversa da matriz de coeficientes é

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} (-26 - j13) & (12 - j16) \\ (-27 - j16) & (13 - j14) \end{bmatrix}}{(60 - j45)} \tag{A.88}$$

A Equação A.88 pode ser simplificada para

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{60 + j45}{5625}\begin{bmatrix} (-26 - j13) & (12 - j16) \\ (-27 - j16) & (13 - j14) \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{375}\begin{bmatrix} -65 - j130 & 96 - j28 \\ -60 - j145 & 94 - j17 \end{bmatrix}. \tag{A.89}$$

A substituição da Equação A.89 em A.84 nos dá

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{375}\begin{bmatrix} (-65 - j130) & (96 - j28) \\ (-60 - j145) & (94 - j17) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 150\angle 0^\circ \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} (-26 - j52) \\ (-24 - j58) \end{bmatrix}. \tag{A.90}$$

Decorre da Equação A.90 que

$$\mathbf{I}_1 = (-26 - j52) = 58{,}14\angle -116{,}57^\circ \text{ A},$$
$$\mathbf{I}_2 = (-24 - j58) = 62{,}77\angle -122{,}48^\circ \text{ A}. \tag{A.91}$$

Nos três exemplos apresentados, os elementos da matriz eram números — números reais nos exemplos A.1 e A.2 e números complexos no Exemplo A.3. Também é possível que os elementos sejam funções. O Exemplo A.4 ilustra a utilização da álgebra matricial em um problema de circuito em que os elementos da matriz de coeficientes são funções.

Exemplo A.4

Use o método matricial para deduzir expressões para as tensões nodais V_1 e V_2 do circuito da Figura A.1.

Solução

Com a soma das correntes que saem dos nós 1 e 2, obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\frac{V_1 - V_g}{R} + V_1 sC + (V_1 - V_2)sC = 0,$$
$$\frac{V_2}{R} + (V_2 - V_1)sC + (V_2 - V_g)sC = 0. \tag{A.92}$$

Fazendo $G = 1/R$ e colocando em evidência V_1 e V_2, obtemos

$$(G + 2sC)V_1 - sCV_2 = GV_g$$
$$-sCV_1 + (G + 2sC)V_2 = sCV_g \tag{A.93}$$

Escrevendo a Equação A.93 em notação matricial, temos

$$\mathbf{AV} = \mathbf{I}, \tag{A.94}$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} G + 2sC & -sC \\ -sC & G + 2sC \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} GV_g \\ sCV_g \end{bmatrix}.$$

Decorre da Equação A.94 que

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{I}. \tag{A.95}$$

Como antes, determinamos a inversa da matriz de coeficientes resolvendo, em primeiro lugar, a adjunta de **A** e o determinante de **A**. Os co-fatores de **A** são

$$\Delta_{11} = (-1)^2[G + 2sC] = G + 2sC,$$
$$\Delta_{12} = (-1)^3(-sC) = sC,$$
$$\Delta_{21} = (-1)^3(-sC) = sC,$$
$$\Delta_{22} = (-1)^4[G + 2sC] = G + 2sC.$$

A matriz de co-fatores é

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} G + 2sC & sC \\ sC & G + 2sC \end{bmatrix}, \tag{A.96}$$

e, por conseguinte, a adjunta da matriz de coeficientes é

$$\text{adj } \mathbf{A} = \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} G + 2sC & sC \\ sC & G + 2sC \end{bmatrix}. \tag{A.97}$$

O determinante de **A** é

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} G + 2sC & sC \\ sC & G + 2sC \end{vmatrix} = G^2 + 4sCG + 3s^2C^2. \tag{A.98}$$

A inversa da matriz de coeficientes é

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} G + 2sC & sC \\ sC & G + 2sC \end{bmatrix}}{(G^2 + 4sCG + 3s^2C^2)}. \tag{A.99}$$

Decorre da Equação A.95 que

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} G + 2sC & sC \\ sC & G + 2sC \end{bmatrix}\begin{bmatrix} GV_g \\ sCV_g \end{bmatrix}}{(G^2 + 4sCG + 3s^2C^2)}. \tag{A.100}$$

Executando a multiplicação de matrizes da Equação A.100, temos

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{(G^2 + 4sCG + 3s^2C^2)}\begin{bmatrix} (G^2 + 2sCG + s^2C^2)V_g \\ (2sCG + 2s^2C^2)V_g \end{bmatrix}. \tag{A.101}$$

Agora, as expressões para V_1 e V_2 podem ser escritas diretamente pela Equação A.101; assim,

$$V_1 = \frac{(G^2 + 2sCG + s^2C^2)V_g}{(G^2 + 4sCG + 3s^2C^2)} \tag{A.102}$$

e

$$V_2 = \frac{2(sCG + s^2C^2)V_g}{(G^2 + 4sCG + 3s^2C^2)}. \tag{A.103}$$

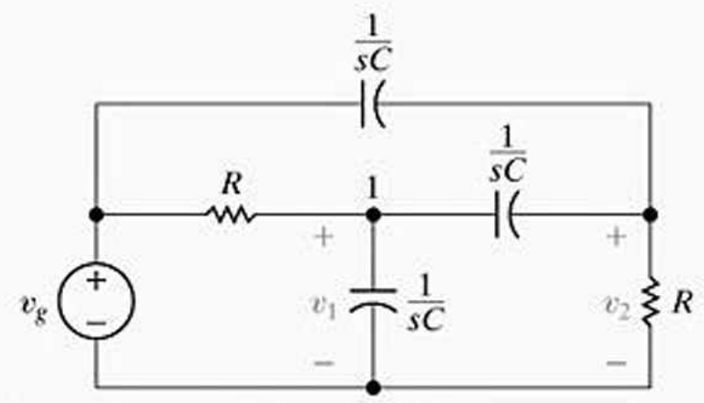


Figura A.1 ▲ Circuito para o Exemplo A.4.

Em nosso exemplo final, ilustramos como a álgebra matricial pode ser usada para analisar ligações em cascata de quadripolos.

Exemplo A.5

Mostre, por meio de álgebra matricial, como as variáveis de entrada V_1 e I_1 podem ser descritas em função das variáveis de saída V_2 e I_2 na ligação em cascata da Figura 18.10.

Solução

Começamos expressando em notação matricial a relação entre as variáveis de entrada e saída para cada quadripolo. Assim,

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_{11} & -a'_{12} \\ a'_{21} & -a'_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V'_2 \\ I'_2 \end{bmatrix} \tag{A.104}$$

e

$$\begin{bmatrix} V'_1 \\ I'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a''_{11} & -a''_{12} \\ a''_{21} & -a''_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}. \tag{A.105}$$

Agora, a ligação em cascata impõe as restrições

$$V'_2 = V'_1 \text{ e } I'_2 = -I'_1. \tag{A.106}$$

Essas relações de restrição são substituídas na Equação A.104. Assim,

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_{11} & -a'_{12} \\ a'_{21} & -a'_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V'_1 \\ -I'_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V'_1 \\ I'_1 \end{bmatrix}. \tag{A.107}$$

A relação entre as variáveis de entrada (V_1, I_1) e as variáveis de saída (V_2, I_2) é obtida pela substituição da Equação A.105 na Equação A.107. O resultado é

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a''_{11} & -a''_{12} \\ a''_{21} & -a''_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}. \tag{A.108}$$

Após a multiplicação das matrizes de coeficientes, temos

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a'_{11}a''_{11} + a'_{12}a''_{21}) & -(a'_{11}a''_{12} + a'_{12}a''_{22}) \\ (a'_{21}a''_{11} + a'_{22}a''_{21}) & -(a'_{21}a''_{12} + a'_{22}a''_{22}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}. \tag{A.109}$$

Observe que a Equação A.109 é o sistema constituído pelas equações 18.72 e 18.73 escrito em forma matricial.

APÊNDICE

B

Números complexos

Os números complexos foram inventados para permitir a extração das raízes quadradas de números negativos. Eles simplificam a solução de problemas que, caso contrário, seriam bem difíceis. A equação $x^2 + 8x + 41 = 0$, por exemplo, não tem nenhuma solução em um sistema numérico que exclua números complexos. Esses números, e a capacidade de manipulá-los algebricamente, são muito úteis na análise de circuitos.

B.1 Notação

Há dois modos de representar um número complexo: a forma cartesiana, ou retangular, e a forma polar, ou trigonométrica. Na *forma retangular*, um número complexo é escrito em termos de seus componentes reais e imaginários; daí,

$$n = a + jb, \tag{B.1}$$

onde a é o componente real, b é o componente imaginário e j é, por definição, $\sqrt{-1}$.[1]

Na *forma polar*, um número complexo é escrito em termos de seu módulo e ângulo de fase; daí,

$$n = ce^{j\theta} \tag{B.2}$$

onde c é o módulo, θ é o ângulo de fase, e é a base dos logaritmos naturais e, como antes, $j = \sqrt{-1}$. Na literatura, o símbolo $\angle\theta^\circ$ é freqüentemente usado no lugar de $e^{j\theta}$; isto é, a forma polar é escrita

$$n = c\angle\theta^\circ. \tag{B.3}$$

Embora a Equação B.3 seja mais conveniente em textos impressos, a Equação B.2 é de importância primordial em operações matemáticas porque as regras para manipular uma quantidade exponencial são bem conhecidas. Por exemplo, como $(y^x)^n = y^{xn}$, então $(e^{j\theta})^n = e^{jn\theta}$; como $y^{-x} = 1/y^x$, então $e^{-j\theta} = 1/e^{j\theta}$ e assim por diante.

Como há duas maneiras de expressar o mesmo número complexo, precisamos relacionar uma com a outra. A transformação da forma polar para a retangular se faz por meio da identidade de Euler:

$$e^{\pm j\theta} = \cos\theta \pm j \operatorname{sen}\theta. \tag{B.4}$$

Um número complexo expresso na forma polar pode ser transformado para a forma retangular escrevendo-se

$$\begin{aligned} ce^{j\theta} &= c(\cos\theta + j \operatorname{sen}\theta) \\ &= c\cos\theta + jc \operatorname{sen}\theta \\ &= a + jb. \end{aligned} \tag{B.5}$$

A transformação da forma retangular para a polar faz uso das propriedades do triângulo retângulo, ou seja,

$$\begin{aligned} a + jb &= \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)e^{j\theta} \\ &= ce^{j\theta}, \end{aligned} \tag{B.6}$$

onde

$$\operatorname{tg}\theta = b/a. \tag{B.7}$$

Pela Equação B.7 não fica óbvio em qual quadrante o ângulo se encontra. A ambigüidade pode ser eliminada por uma representação gráfica do número complexo.

B.2 Representação gráfica dos números complexos

Um número complexo é representado graficamente no plano complexo, um plano definido por um eixo horizontal que representa o componente real e um eixo vertical que representa o componente imaginário do número complexo. O ângulo de fase do número complexo é medido em sentido anti-horário em relação ao eixo real positivo. A representação gráfica do número complexo $n = a + jb = c\angle\theta^\circ$, se admitirmos que a e b sejam ambos positivos, é mostrada na Figura B.1.

Essa representação deixa bem clara a relação entre as formas retangular e polar. Qualquer ponto no plano dos números complexos é exclusivamente definido determinando-se ou sua distância em relação a cada eixo (isto é, a e b) ou sua distância radial em relação à origem (c) e o ângulo θ entre o eixo real e a reta que liga o ponto à origem.

Da Figura B.1 vemos que θ está no primeiro quadrante quando a e b são ambos positivos, no segundo quadrante, quando a é negativo e b é positivo, no terceiro quadrante, quando a e b são ambos negativos, e no quarto quadrante, quando a é positivo e b é negativo. Essas observações são ilustradas na Figura B.2, que mostra as representações gráficas de $4 + j3$, $-4 + j3$, $-4 - j3$ e $4 - j3$.

[1] Talvez você esteja mais familiarizado com a notação $i = \sqrt{-1}$. Como em engenharia elétrica, i é usado como símbolo para corrente, j é usado pelos engenheiros eletricistas para representar $\sqrt{-1}$.

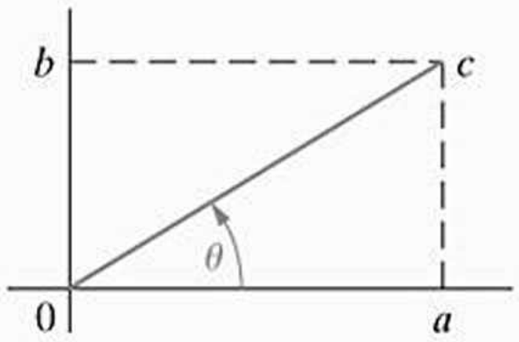


Figura B.1 ▲ Representação gráfica de $a + jb$ quando a e b são ambos positivos.

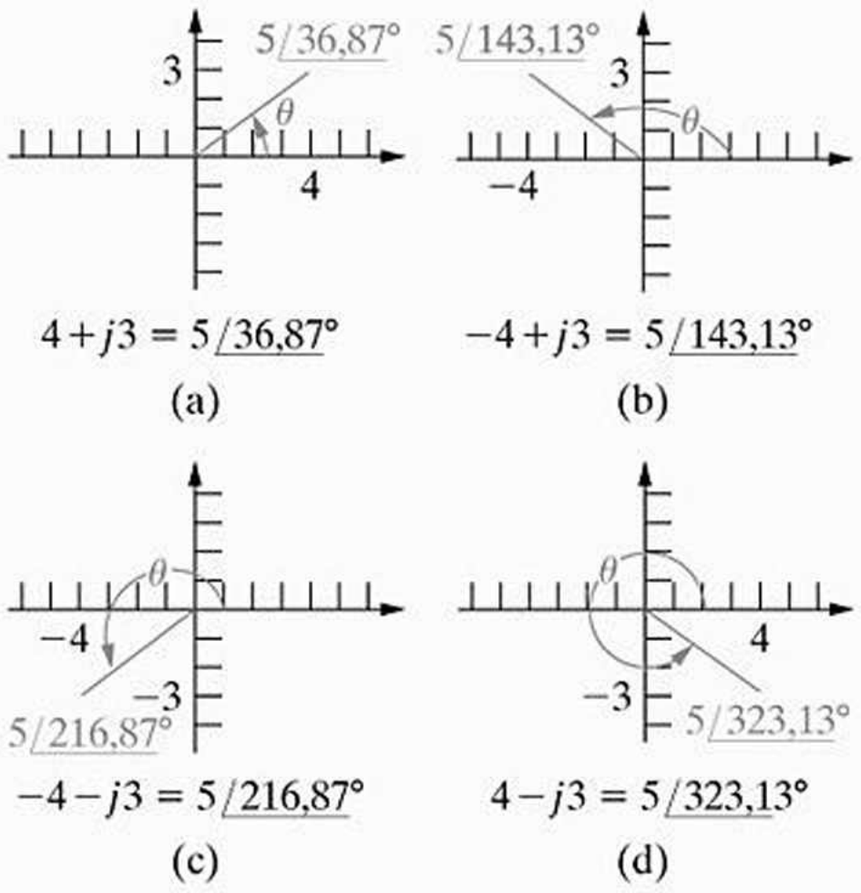


Figura B.2 ▲ Representação gráfica de quatro números complexos.

Observe que também podemos especificar θ como um ângulo (negativo) no sentido horário. Desse modo, na Figura B.2(c) também poderíamos designar $-4 - j3$ como $5\angle -143{,}13°$. Na Figura B.2(d) observamos que $5\angle 323{,}13° = 5\angle -36{,}87°$. É usual expressar θ em termos de valores negativos quando ele se encontra no terceiro ou no quarto quadrante.

A representação gráfica de um número complexo também deixa clara a relação entre um número complexo e seu conjugado. O *conjugado de um número complexo* é formado invertendo-se o sinal de seu componente imaginário. Assim, o conjugado de $a + jb$ é $a - jb$, e o conjugado de $-a + jb$ é $-a - jb$. Quando escrevemos um número complexo na forma polar, determinamos seu conjugado pela simples inversão do sinal do ângulo θ. Por conseguinte, o conjugado de $c\angle\theta°$ é $c\angle -\theta°$. O conjugado de um número complexo é indicado por um asterisco. Em outras palavras, entende-se que n^* é o conjugado de n. A Figura B.3 mostra a representação gráfica de dois números complexos e seus conjugados.

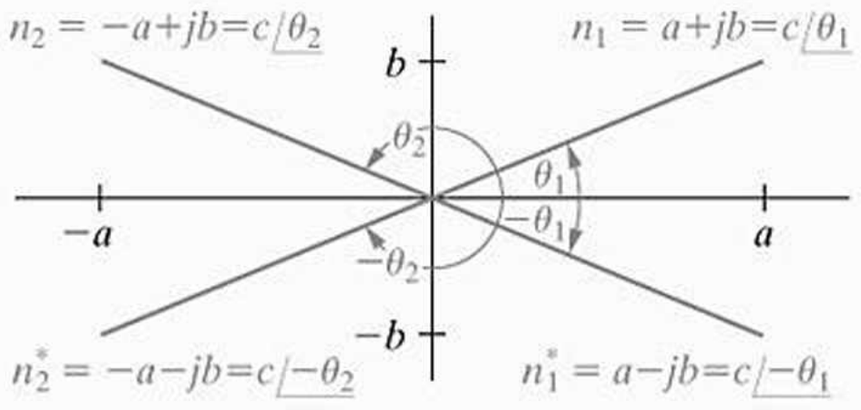


Figure B.3 ▲ Números complexos n_1 e n_2 e seus conjugados n_1^* e n_2^*.

Observe que a operação de formar o conjugado simplesmente reflete os números complexos em relação ao eixo real.

B.3 Operações com números complexos

Adição (Subtração)

Para somar ou subtrair números complexos, devemos expressá-los na forma retangular. A parte real da soma (diferença) de dois números complexos é a soma (diferença) das partes reais dos dois números complexos, e a parte imaginária da soma (diferença) é a soma das partes imaginárias dos dois números complexos. Assim, se tivermos

$$n_1 = 8 + j16$$

e

$$n_2 = 12 - j3,$$

então

$$n_1 + n_2 = (8 + 12) + j(16 - 3) = 20 + j13.$$

Assim também

$$n_2 - n_1 = (12 - 8) + j(-3 - 16) = 4 - j19.$$

Se os números a somar ou subtrair forem dados em forma polar, eles são, em primeiro lugar, convertidos para forma retangular. Por exemplo, se

$$n_1 = 10\angle 53{,}13°$$

e

$$n_2 = 5\angle -135°,$$

então

$$\begin{aligned} n_1 + n_2 &= 6 + j8 - 3{,}535 - j3{,}535 \\ &= (6 - 3{,}535) + j(8 - 3{,}535) \\ &= 2{,}465 + j4{,}465 = 5{,}10\angle 61{,}10° \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} n_1 - n_2 &= 6 + j8 - (-3{,}535 - j3{,}535) \\ &= 9{,}535 + j11{,}535 \\ &= 14{,}966\angle 50{,}42°. \end{aligned}$$

Multiplicação (Divisão)

A multiplicação ou divisão de números complexos pode ser realizada com os números escritos em forma retangular ou polar. Contudo, na maioria dos casos, a forma polar é mais conveniente. Como exemplo, vamos determinar o produto n_1n_2 quando $n_1 = 8 + j10$ e $n_2 = 5 - j4$. Usando a forma retangular, temos

$$\begin{aligned} n_1n_2 &= (8 + j10)(5 - j4) = 40 - j32 + j50 + 40 \\ &= 80 + j18 \\ &= 82\angle 12{,}68°. \end{aligned}$$

Se usarmos a forma polar,

$$n_1 n_2 = (12{,}81 \angle 51{,}34^\circ)(6{,}40 \angle -38{,}66^\circ)$$
$$= 82 \angle 12{,}68^\circ$$
$$= 80 + j18.$$

A primeira etapa na divisão de dois números complexos em forma retangular é multiplicar o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador, o que reduz o denominador a um número real, pelo qual dividimos o novo numerador. Como exemplo, vamos determinar o valor de n_1/n_2, onde $n_1 = 6 + j3$ e $n_2 = 3 - j1$. Temos

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{6 + j3}{3 - j1} = \frac{(6 + j3)(3 + j1)}{(3 - j1)(3 + j1)}$$
$$= \frac{18 + j6 + j9 - 3}{9 + 1}$$
$$= \frac{15 + j15}{10} = 1{,}5 + j1{,}5$$
$$= 2{,}12 \angle 45^\circ.$$

Em forma polar,

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{6{,}71 \angle 26{,}57^\circ}{3{,}16 \angle -18{,}43^\circ} = 2{,}12 \angle 45^\circ$$
$$= 1{,}5 + \text{j}1{,}5.$$

B.4 Identidades úteis

Quando trabalhamos com números e grandezas complexas, as seguintes identidades são muito úteis:

$$\pm j^2 = \pm 1, \tag{B.8}$$
$$(-j)(j) = 1, \tag{B.9}$$
$$j = \frac{1}{-j}, \tag{B.10}$$
$$e^{\pm j\pi} = -1, \tag{B.11}$$
$$e^{\pm j\pi/2} = \pm j. \tag{B.12}$$

Dado que $n = a + jb = c \angle \theta^\circ$, decorre que

$$nn^* = a^2 + b^2 = c^2, \tag{B.13}$$
$$n + n^* = 2a, \tag{B.14}$$
$$n - n^* = j2b, \tag{B.15}$$
$$n/n^* = 1 \angle 2\theta^\circ. \tag{B.16}$$

B.5 Potências inteiras de um número complexo

Para elevar um número complexo a uma potência inteira k, é mais fácil expressar o número complexo em forma polar. Assim,

$$n^k = (a + jb)^k$$
$$= (ce^{j\theta})^k = c^k e^{jk\theta}$$
$$= c^k(\cos k\theta + j \operatorname{sen} k\theta).$$

Por exemplo,

$$(2e^{j12^\circ})^5 = 2^5 e^{j60^\circ} = 32e^{j60^\circ}$$
$$= 16 + j27{,}71$$

e

$$(3 + j4)^4 = (5e^{j53{,}13^\circ})^4 = 5^4 e^{j212{,}52^\circ}$$
$$= 625e^{j212{,}52^\circ}$$
$$= -527 - j336.$$

B.6 Raízes de um número complexo

A determinação da k-ésima raiz de um número complexo é equivalente à solução da equação

$$x^k - ce^{j\theta} = 0, \tag{B.17}$$

que é uma equação de k-ésimo grau e, portanto, tem k raízes.

Para determinar as k raízes, em primeiro lugar, observe que

$$ce^{j\theta} = ce^{j(\theta+2\pi)} = ce^{j(\theta+4\pi)} = \ldots \tag{B.18}$$

Decorre das equações B.17 e B.18 que

$$x_1 = (ce^{j\theta})^{1/k} = c^{1/k} e^{j\theta/k}, \tag{B.19}$$
$$x_2 = [ce^{j(\theta+2\pi)}]^{1/k} = c^{1/k} e^{j(\theta+2\pi)/k}, \tag{B.20}$$
$$x_3 = [ce^{j(\theta+4\pi)}]^{1/k} = c^{1/k} e^{j(\theta+4\pi)/k}, \tag{B.21}$$
$$\vdots$$

Continuamos o processo até que as raízes comecem a se repetir. Isso acontecerá quando o múltiplo de π for igual a $2k$. Por exemplo, vamos determinar as quatro raízes de $81e^{j60^\circ}$. Temos

$$x_1 = 81^{1/4} e^{j60/4} = 3e^{j15^\circ},$$
$$x_2 = 81^{1/4} e^{j(60+360)/4} = 3e^{j105^\circ},$$
$$x_3 = 81^{1/4} e^{j(60+720)/4} = 3e^{j195^\circ},$$
$$x_4 = 81^{1/4} e^{j(60+1.080)/4} = 3e^{j285^\circ},$$
$$x_5 = 81^{1/4} e^{j(60+1.440)/4} = 3e^{j375^\circ} = 3e^{j15^\circ}.$$

Aqui, x_5 é o mesmo que x_1 e, portanto, as raízes começaram a se repetir. Assim, sabemos que as quatro raízes de $81e^{j60^\circ}$ são os valores dados por x_1, x_2, x_3 e x_4.

Vale a pena observar que as raízes de um número complexo encontram-se em um círculo no plano dos números complexos. O raio do círculo é $c^{1/k}$. As raízes são uniformemente distribuídas ao longo do círculo, sendo que o ângulo entre raízes adjacentes é igual a $2\pi/k$ radianos, ou $360/k$ graus. As quatro raízes de $81e^{j60^\circ}$ são mostradas na Figura B.4.

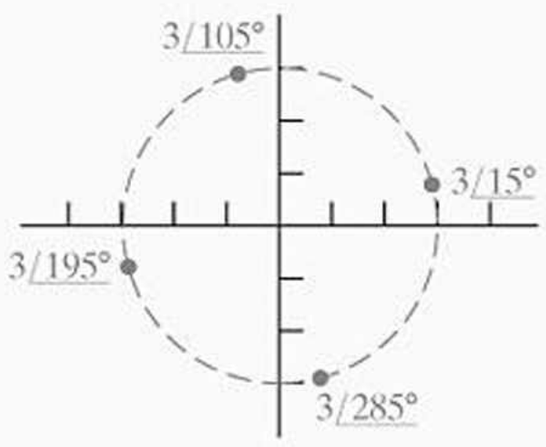


Figura B.4 ▲ As quatro raízes de $81e^{j60^\circ}$.

APÊNDICE

C

Tópicos adicionais sobre enrolamentos magneticamente acoplados

C.1 Circuitos equivalentes para enrolamentos magneticamente acoplados

Às vezes, é conveniente modelar enrolamentos magneticamente acoplados por meio de um circuito equivalente que não envolva acoplamento magnético. Considere os dois enrolamentos magneticamente acoplados mostrados na Figura C.1. As resistências R_1 e R_2 representam a resistência de cada enrolamento. A meta é substituir os enrolamentos magneticamente acoplados dentro da área sombreada por um conjunto de indutores que não sejam magneticamente acoplados. Antes de determinarmos os circuitos equivalentes, é preciso destacar uma importante restrição: a tensão entre os terminais b e d deve ser nula. Em outras palavras, se for possível colocar os terminais b e d em curto-circuito sem perturbar as tensões e correntes no circuito original, os circuitos equivalentes apresentados a seguir poderão ser usados para modelar os enrolamentos. Essa restrição é imposta porque, embora os circuitos equivalentes que desenvolveremos tenham ambos quatro terminais, dois desses quatro terminais estão em curto-circuito. Assim, o mesmo requisito deve valer para os circuitos originais.

Começamos a desenvolver os modelos escrevendo as duas equações que relacionam as tensões terminais v_1 e v_2 com as correntes terminais i_1 e i_2. Para as referências e pontos de polaridade dados,

$$v_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} \tag{C.1}$$

e

$$v_2 = M\frac{di_1}{dt} + L_2\frac{di_2}{dt}. \tag{C.2}$$

Circuito equivalente tipo T

Um circuito equivalente para esses dois enrolamentos magneticamente acoplados deve possuir um conjunto de indutores que possa ser descrito por um sistema de equações equivalente às equações C.1 e C.2. Para isso, consideramos as equações C.1 e C.2 equações de corrente de malha, com i_1 e i_2 como incógnitas. Então, precisamos de uma malha com uma indutância total de L_1 H e uma segunda malha com uma indutância total de L_2 H. Além do mais, as duas malhas devem ter uma indutância comum de M H. O arranjo de enrolamentos em T da Figura C.2 satisfaz esses requisitos.

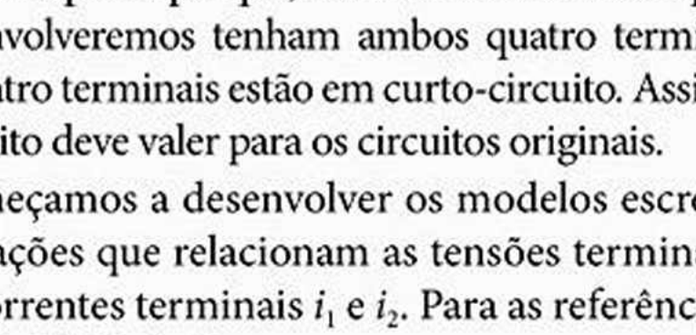


Figura C.1 ▲ Circuito usado para se obter um circuito equivalente para dois enrolamentos magneticamente acoplados.

O leitor deve verificar que as equações que relacionam v_1 e v_2 com i_1 e i_2 têm a forma das equações C.1 e C.2. Observe a ausência de acoplamento magnético entre os indutores e a tensão nula entre b e d.

Circuito equivalente tipo π

Podemos obter um circuito equivalente tipo π para os enrolamentos magneticamente acoplados da Figura C.1. Nesse caso, as derivadas di_1/dt e di_2/dt são explicitadas nas equações C.1 e C.2 e as expressões resultantes são consideradas um par de equações de tensões de nó. Usando o método de Cramer para resolução de equações simultâneas, obtemos as expressões para di_1/dt e di_2/dt:

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{\begin{vmatrix} v_1 & M \\ v_2 & L_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{vmatrix}} = \frac{L_2}{L_1L_2 - M^2}v_1 - \frac{M}{L_1L_2 - M^2}v_2; \tag{C.3}$$

$$\frac{di_2}{dt} = \frac{\begin{vmatrix} L_1 & v_1 \\ M & v_2 \end{vmatrix}}{L_1L_2 - M^2} = \frac{-M}{L_1L_2 - M^2}v_1 + \frac{L_1}{L_1L_2 - M^2}v_2. \tag{C.4}$$

Para obtermos i_1 e i_2, basta multiplicar ambos os lados das equações C.3 e C.4 por dt e integrar em seguida:

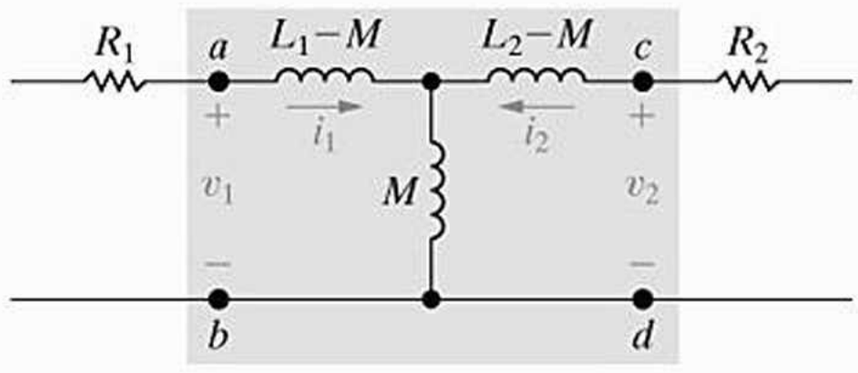


Figura C.2 ▲ Circuito equivalente em T para os enrolamentos magneticamente acoplados da Figura C.1.

$$i_1 = i_1(0) + \frac{L_2}{L_1L_2 - M^2}\int_0^t v_1\,d\tau - \frac{M}{L_1L_2 - M^2}\int_0^t v_2\,d\tau \tag{C.5}$$

e

$$i_2 = i_2(0) - \frac{M}{L_1L_2 - M^2}\int_0^t v_1\,d\tau + \frac{L_1}{L_1L_2 - M^2}\int_0^t v_2\,d\tau. \tag{C.6}$$

Se considerarmos v_1 e v_2 tensões de nó, as equações C.5 e C.6 descrevem um circuito da forma mostrada na Figura C.3.

Resta agora, para derivar o circuito equivalente tipo π, determinar L_A, L_B e L_C em função de L_1, L_2 e M, o que é fácil se escrevermos as equações para i_1 e i_2 da Figura C.3 e, então, as compararmos com as equações C.5 e C.6. Desse modo,

$$i_1 = i_1(0) + \frac{1}{L_A}\int_0^t v_1\,d\tau + \frac{1}{L_B}\int_0^t (v_1 - v_2)\,d\tau$$

$$= i_1(0) + \left(\frac{1}{L_A} + \frac{1}{L_B}\right)\int_0^t v_1\,d\tau - \frac{1}{L_B}\int_0^t v_2\,d\tau \tag{C.7}$$

e

$$i_2 = i_2(0) + \frac{1}{L_C}\int_0^t v_2\,d\tau + \frac{1}{L_B}\int_0^t (v_2 - v_1)\,d\tau$$

$$= i_2(0) + \frac{1}{L_B}\int_0^t v_1\,d\tau + \left(\frac{1}{L_B} + \frac{1}{L_C}\right)\int_0^t v_2\,d\tau. \tag{C.8}$$

Então

$$\frac{1}{L_B} = \frac{M}{L_1L_2 - M^2}, \tag{C.9}$$

$$\frac{1}{L_A} = \frac{L_2 - M}{L_1L_2 - M^2}, \tag{C.10}$$

$$\frac{1}{L_C} = \frac{L_1 - M}{L_1L_2 - M^2}. \tag{C.11}$$

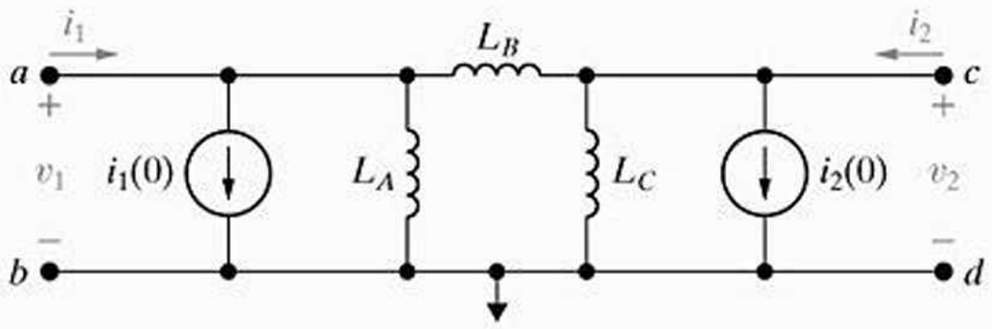


Figura C.3 ▲ Circuito usado para se obter o circuito equivalente tipo π para dois enrolamentos magneticamente acoplados.

Quando incorporamos as equações C.9–C.11 ao circuito da Figura C.3, o circuito equivalente tipo π para os dois enrolamentos magneticamente acoplados da Figura C.1 passa a ser o da Figura C.4.

Observe que os valores iniciais de i_1 e i_2 estão explícitos no circuito equivalente tipo π, mas implícitos no circuito equivalente tipo T. Como estamos preocupados aqui apenas com o comportamento em regime permanente senoidal de circuitos que contêm indutância mútua, podemos admitir que os valores iniciais de i_1 e i_2 são ambos nulos. Desse modo, podemos eliminar as fontes de corrente no circuito equivalente tipo π, e o circuito da Figura C.4 é simplificado para o mostrado na Figura C.5.

A indutância mútua aparece, nos circuitos equivalentes tipo T e π, com o próprio sinal algébrico. Em outras palavras, se invertermos a polaridade magnética dos enrolamentos acoplados dada na Figura C.1, o sinal algébrico de M será invertido. Uma inversão de polaridade magnética significa deslocar o ponto de polaridade sem alterar os sentidos e as polaridades de referência das correntes e tensões terminais, respectivamente.

O Exemplo C.1 ilustra o uso do circuito equivalente tipo T.

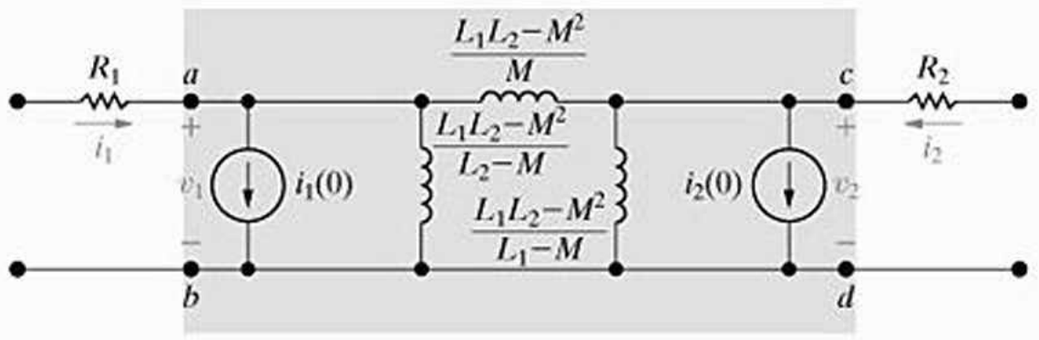


Figura C.4 ▲ Circuito equivalente tipo π para os dois enrolamentos magneticamente acoplados da Figura C.1.

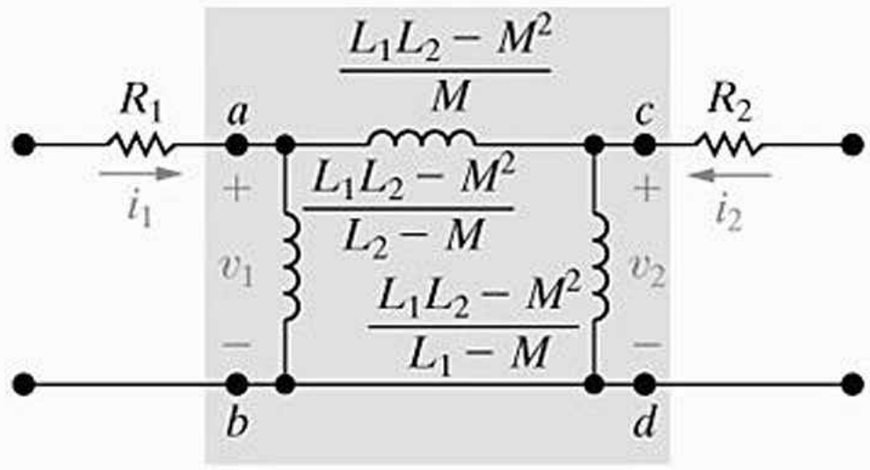


Figura C.5 ▲ Circuito equivalente tipo π usado para análise de regime permanente senoidal.

Exemplo C.1

a) Use o circuito equivalente tipo T para os enrolamentos magneticamente acoplados da Figura C.6 para determinar as correntes fasoriais $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$. A freqüência da fonte é 400 rad/s.

b) Repita o item (a), porém deslocando o ponto de polaridade do enrolamento secundário para o terminal inferior.

Solução

a) Para os pontos de polaridade mostrados na Figura C.6, M tem um valor de +3 H no circuito equivalente tipo T. Portanto, as três indutâncias no circuito equivalente são

A Figura C.7 mostra o circuito equivalente tipo T e a Figura C.8 mostra o circuito equivalente no domínio da freqüência a uma freqüência angular de 400 rad/s.

A Figura C.9 mostra o circuito no domínio da freqüência para o sistema original, com o acoplamento magnético substituído pelo circuito da Figura C.8.

Para determinar as correntes fasoriais $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ determinamos, em primeiro lugar, a tensão de nó na reatância indutiva de 1.200 Ω. Se usarmos o nó inferior como referência, a única equação de tensão de nó é

$$\frac{\mathbf{V} - 300}{700 + j2.500} + \frac{\mathbf{V}}{j1.200} + \frac{\mathbf{V}}{900 - j2.100} = 0.$$

Explicitando $\mathbf{V}$, temos

$$\mathbf{V} = 136 - j8 = 136{,}24 \angle -3{,}37° \text{ V (ef)}.$$

Então

$$\mathbf{I}_1 = \frac{300 - (136 - j8)}{700 + j2.500} = 63{,}25 \angle -71{,}57° \text{ mA (ef)}$$

e

$$\mathbf{I}_2 = \frac{136 - j8}{900 - j2.100} = 59{,}63 \angle 63{,}43° \text{ mA (ef)}.$$

$$L_1 - M = 9 - 3 = 6 \text{ H};$$

$$L_2 - M = 4 - 3 = 1 \text{ H};$$

$$M = 3 \text{ H}.$$

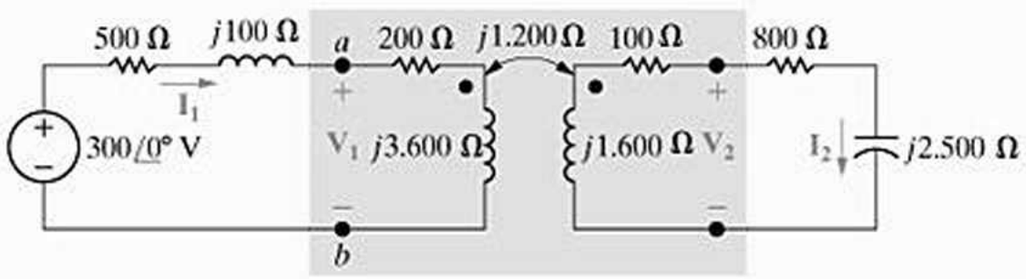


Figura C.6 ▲ Circuito equivalente no domínio da freqüência para o Exemplo C.1.

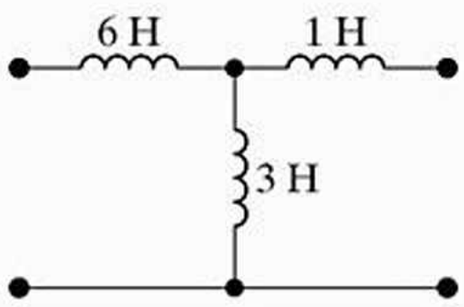


Figura C.7 ▲ Circuito equivalente tipo T para os enrolamentos magneticamente acoplados do Exemplo C.1.

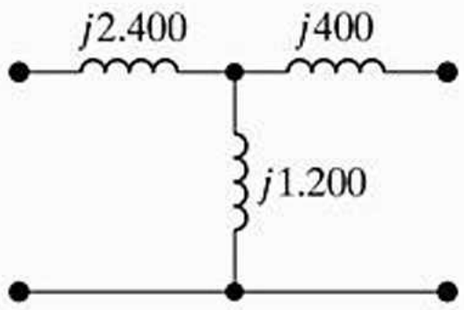


Figura C.8 ▲ Modelo no domínio da freqüência do circuito equivalente, para uma freqüência angular de 400 rad/s.

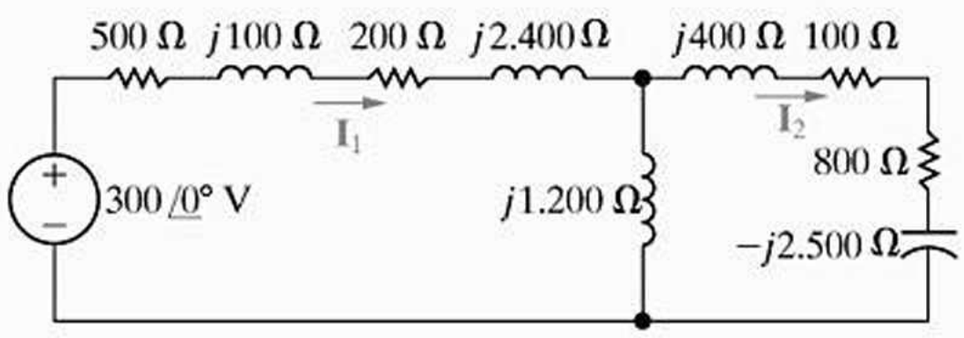


Figura C.9 ▲ Circuito da Figura C.6 com os enrolamentos magneticamente acoplados substituídos por seu circuito equivalente tipo T.

b) Quando o ponto de polaridade é deslocado para o terminal inferior do enrolamento secundário, M passa a ter um valor de –3 H no circuito equivalente tipo T. Antes de continuarmos a solução, observamos que inverter o sinal algébrico de M não tem nenhum efeito sobre $\mathbf{I}_1$ e desloca $\mathbf{I}_2$ de 180°. Portanto, podemos antecipar que

$$\mathbf{I}_1 = 63{,}25 \angle -71{,}57° \text{ mA (ef)}$$

e

$$\mathbf{I}_2 = 59{,}63 \angle -116{,}57° \text{ mA (ef)}.$$

Agora, passamos para a determinação das correntes usando o novo circuito equivalente tipo T. Com M = –3 H, as três indutâncias no circuito equivalente são

$$L_1 - M = 9 - (-3) = 12 \text{ H};$$

$$L_2 - M = 4 - (-3) = 7 \text{ H};$$

$$M = -3 \text{ H}.$$

A uma freqüência angular de operação de 400 rad/s, o circuito equivalente no domínio da freqüência necessita de dois indutores e um capacitor, como mostra a Figura C.10.

O circuito resultante no domínio da freqüência para o sistema original aparece na Figura C.11.

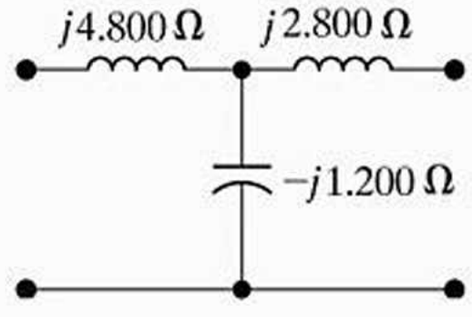


Figura C.10 ▲ Circuito equivalente no domínio da freqüência para M = –3 H e ω = 400 rad/s.

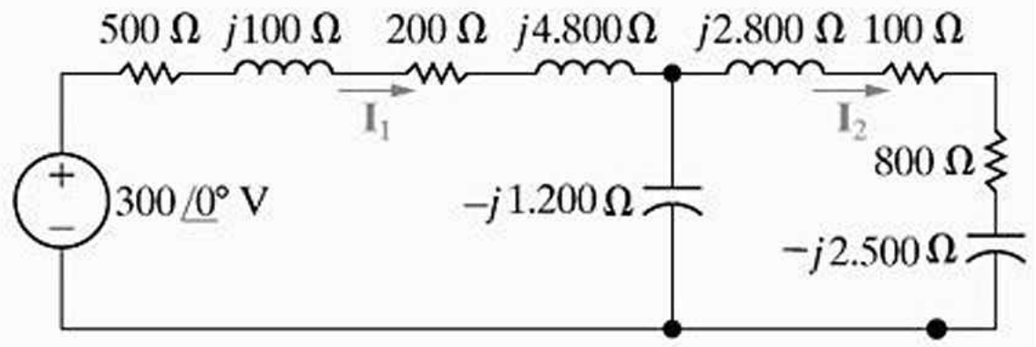


Figura C.11 ▲ Circuito equivalente no domínio da freqüência para o Exemplo C.1(b).

Como antes, em primeiro lugar, determinamos a tensão de nó no ramo central que, nesse caso, é uma reatância capacitiva de $-j1.200\ \Omega$. Se usarmos o nó inferior como referência, a equação das tensões de nó é

$$\frac{\mathbf{V} - 300}{700 + j4.900} + \frac{\mathbf{V}}{-j1.200} + \frac{\mathbf{V}}{900 + j300} = 0.$$

Explicitando **V**, obtemos

$$\mathbf{V} = -8 - j56$$
$$= 56{,}57 \angle -98{,}13^\circ \text{ V (ef)}.$$

Então

$$\mathbf{I}_1 = \frac{300 - (-8 - j56)}{700 + j4.900}$$
$$= 63{,}25 \angle -71{,}57^\circ \text{ mA (ef)}$$

e

$$\mathbf{I}_2 = \frac{-8 - j56}{900 + j300}$$
$$= 59{,}63 \angle -116{,}57^\circ \text{ mA (ef)}.$$

C.2 A necessidade do uso de transformadores ideais em circuitos equivalentes

Os indutores nos circuitos equivalentes, tipo T ou tipo π, de enrolamentos magneticamente acoplados, podem ter valores negativos. Por exemplo, se $L_1 = 3$ mH, $L_2 = 12$ mH e $M = 5$ mH, o circuito equivalente tipo T conterá um indutor de –2 mH e o circuito equivalente tipo π conterá um indutor de –5,5 mH. Esses valores negativos de indutância não serão problemáticos quando você estiver usando os circuitos equivalentes em cálculos. Contudo, se você tiver de montar os circuitos equivalentes a partir de componentes reais de circuito, os indutores negativos podem ser incômodos. A razão é que sempre que a freqüência da fonte senoidal se alterar você terá de mudar o valor do capacitor usado para simular a reatância negativa. Por exemplo, a uma freqüência de 50 krad/s, um indutor de –2 mH tem uma impedância de $-j100\ \Omega$. Essa impedância pode ser modelada com um capacitor de 0,2 μF. Se a freqüência mudar para 25 krad/s, a impedância do indutor –2 mH mudará para $-j50\ \Omega$. Agora o valor do capacitor será 0,8 μF. É óbvio que, em uma situação em que a freqüência é variada continuamente, a utilização de um capacitor para simular a indutância negativa é praticamente impossível.

Você pode contornar o problema de lidar com indutâncias negativas, introduzindo um transformador ideal no circuito equivalente. Contudo, isso não resolve completamente o problema da modelagem, pois transformadores ideais só podem ser aproximados. Entretanto, em algumas situações, a aproximação é boa o suficiente para justificar uma discussão sobre a utilização de um transformador ideal nos circuitos equivalentes tipo T e tipo π de enrolamentos magneticamente acoplados.

Um transformador ideal pode ser usado de dois modos diferentes no circuito equivalente tipo T ou tipo π. A Figura C.12 mostra os dois arranjos para cada tipo de circuito equivalente.

Para verificar a adequação de qualquer dos circuitos equivalentes da Figura C.12 basta verificar se as equações que relacionam v_1 e v_2 a di_1/dt e di_2/dt para qualquer dos circuitos são idênticas às equações C.1 e C.2. Aqui, validaremos os circuitos da Figura C.12(a); deixamos ao leitor a verificação dos circuitos das figuras C.12(b), (c) e (d). Para auxiliar a discussão, desenhamos novamente o cir-

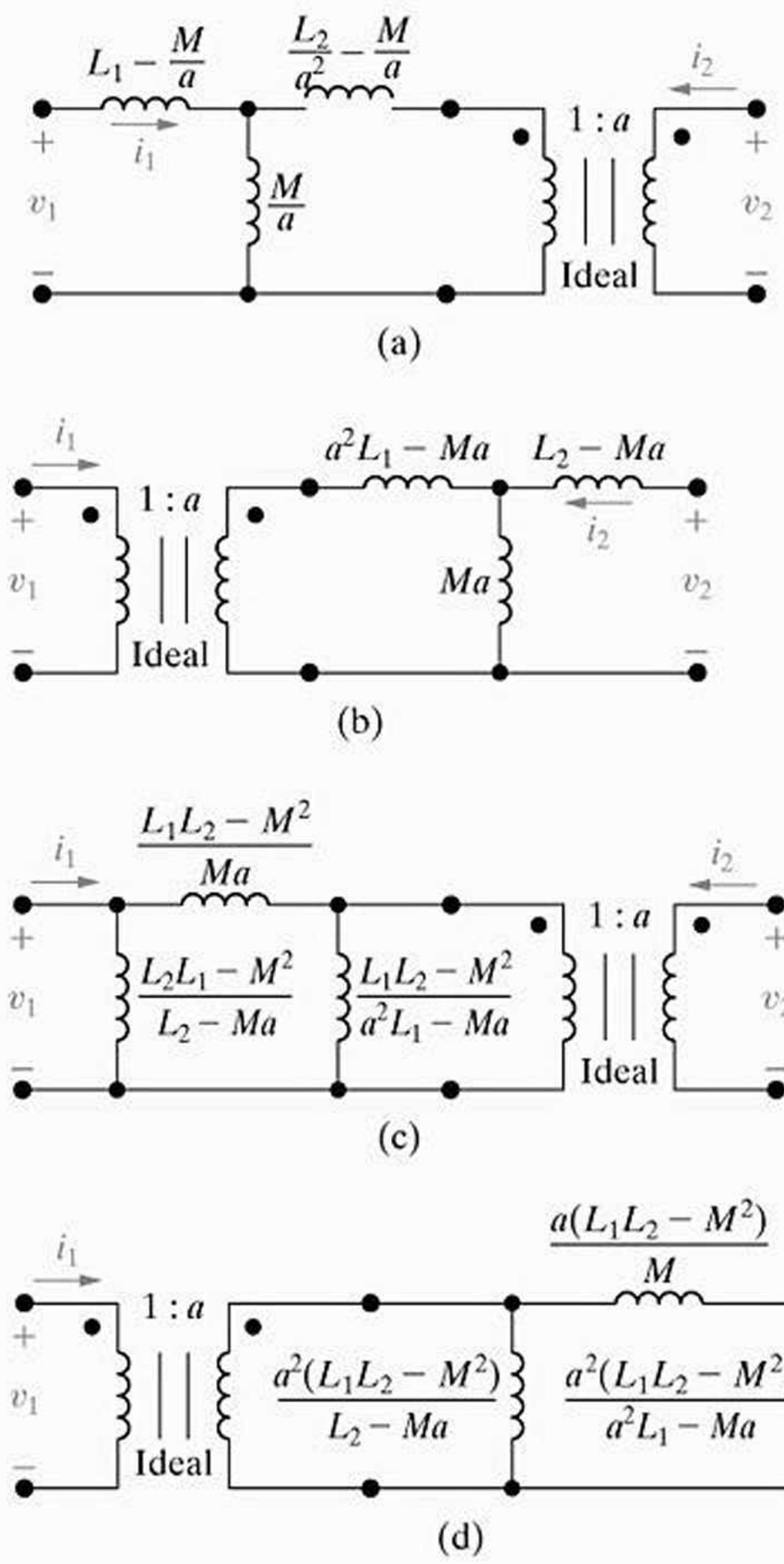


Figura C.12 ▲ Quatro modos de usar um transformador ideal no circuito equivalente tipo T e tipo π de enrolamentos magneticamente acoplados.

cuito da Figura C.12(a) na Figura C.13, adicionando as variáveis i_0 e v_0.

Desse circuito, temos

$$v_1 = \left(L_1 - \frac{M}{a}\right)\frac{di_1}{dt} + \frac{M}{a}\frac{d}{dt}(i_1 + i_0) \quad \text{(C.12)}$$

e

$$v_0 = \left(\frac{L_2}{a_2} - \frac{M}{a}\right)\frac{di_0}{dt} + \frac{M}{a}\frac{d}{dt}(i_0 + i_1). \quad \text{(C.13)}$$

O transformador ideal impõe as seguintes restrições a v_0 e i_0:

$$v_0 = \frac{v_2}{a}; \quad \text{(C.14)}$$

$$i_0 = ai_2. \quad \text{(C.15)}$$

Substituindo as equações C.14 e C.15 nas equações C.12 e C.13 obtemos

$$v_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + \frac{M}{a}\frac{d}{dt}(ai_2) \quad \text{(C.16)}$$

e

$$\frac{v_2}{a} = \frac{L_2}{a^2}\frac{d}{dt}(ai_2) + \frac{M}{a}\frac{di_1}{dt}. \quad \text{(C.17)}$$

Pelas equações C.16 e C.17,

$$v_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} \quad \text{(C.18)}$$

e

$$v_2 = M\frac{di_1}{dt} + L_2\frac{di_2}{dt}. \quad \text{(C.19)}$$

As equações C.18 e C.19 são idênticas às equações C.1 e C.2; assim, no que se refere ao comportamento terminal, o circuito mostrado na Figura C.13 é equivalente aos enrolamentos magneticamente acoplados mostrados dentro do retângulo da Figura C.1.

Ao mostrarmos que o circuito da Figura C.13 é equivalente aos enrolamentos magneticamente acoplados na Figura C.1, não impusemos nenhuma restrição à relação de espiras, a. Assim, um número infinito de circuitos equivalentes é possível. Além do mais, sempre poderemos determinar uma relação de espiras que torne todas as indutâncias positivas. Três valores de a são de particular interesse:

$$a = \frac{M}{L_1}, \quad \text{(C.20)}$$

$$a = \frac{L_2}{M} \quad \text{(C.21)}$$

e

$$a = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}. \quad \text{(C.22)}$$

O valor de a dado pela Equação C.20 elimina as indutâncias $L_1 - M/a$ e $a^2L_1 - aM$ dos circuitos equivalentes tipo T e as indutâncias $(L_1L_2 - M^2)/(a^2L_1 - aM)$ e $a^2(L_1L_2 - M^2)/(a^2L_1 - aM)$ dos circuitos equivalentes tipo π. O valor de a dado pela Equação C.21 elimina as indutâncias $(L_2/a^2) - (M/a)$ e $L_2 - aM$ dos circuitos equivalentes tipo T e as indutâncias $(L_1L_2 - M^2)/(L_2 - aM)$ e $a^2(L_1L_2 - M^2)/(L_2 - aM)$ dos circuitos equivalentes tipo π.

Observe também que, quando $a = M/L_1$, os circuitos nas figuras C.12(a) e (c) tornam-se idênticos e, quando $a = L_2/M$, os circuitos nas figuras C.12(b) e (d) tornam-se idênticos. As figuras C.14 e C.15 resumem essas observações.

Ao calcularmos as expressões para indutâncias dessas figuras, usamos a relação $M = k\sqrt{L_1L_2}$. Expressando as indutâncias em função das auto-indutâncias L_1 e L_2 e do coeficiente de acoplamento k e usando os valores de a dados pelas equações C.20 e C.21 não só reduzimos o número de indutâncias do circuito equivalente, como também garantimos que todas as indutâncias serão positivas. Cabe ao leitor investigar as conseqüências de escolher o valor de a dado pela Equação C.22.

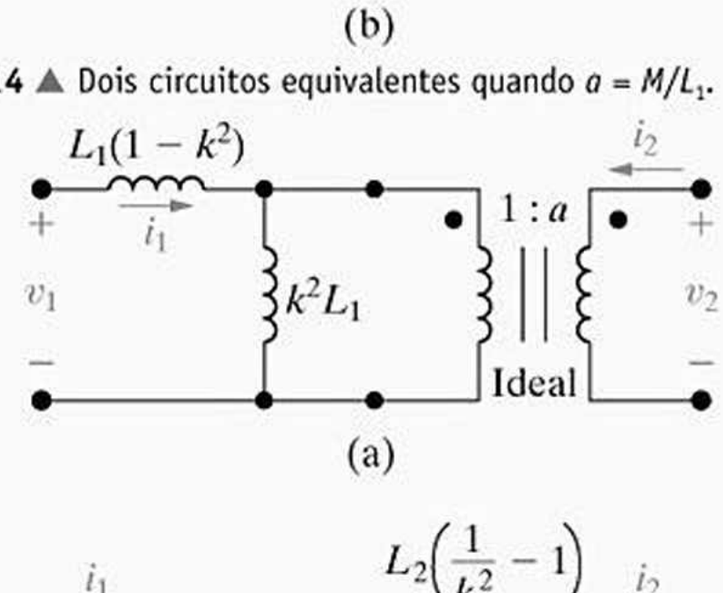


Figura C.14 ▲ Dois circuitos equivalentes quando $a = M/L_1$.

Figura C.15 ▲ Dois circuitos equivalentes quando $a = L_2/M$.

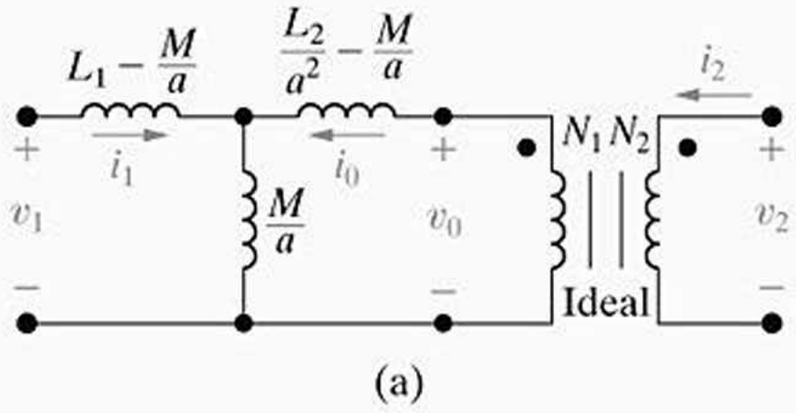


Figura C.13 ▲ Circuito da Figura C.12(a) mostrando as variáveis i_0 e v_0.

Os valores de a dados pelas equações C.20–C.22 podem ser determinados experimentalmente. A razão M/L_1 é obtida alimentando o enrolamento de N_1 espiras por meio de uma fonte de tensão senoidal. Ajustamos uma freqüência de fonte suficientemente alta, de modo que $\omega L_1 >> R_1$, e deixamos o enrolamento N_2 aberto. A Figura C.16 mostra esse arranjo. Com o enrolamento aberto,

$$\mathbf{V}_2 = j\omega M\mathbf{I}_1. \tag{C.23}$$

Agora, como $j\omega L_1 >> R_1$, a corrente I_1 é

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}_1}{j\omega L_1}. \tag{C.24}$$

Substituindo a Equação C.24 na Equação C.23, temos

$$\left(\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1}\right)_{I_2=0} = \frac{M}{L_1}, \tag{C.25}$$

na qual a razão M/L_1 é a razão entre a tensão de saída e de entrada quando o enrolamento 2 está aberto; isto é, $\mathbf{I}_2 = 0$.

Obtemos a razão L_2/M invertendo o procedimento; isto é, energizamos o enrolamento 2 e deixamos o enrolamento 1 aberto. Então

$$\frac{L_2}{M} = \left(\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1}\right)_{I_1=0}. \tag{C.26}$$

Por fim, observamos que o valor de a dado pela Equação C.22 é a média geométrica das razões de tensão das equações C.25 e C.26. Assim,

$$\sqrt{\left(\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1}\right)_{I_2=0}\left(\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1}\right)_{I_1=0}} = \sqrt{\frac{M}{L_1}\frac{L_2}{M}} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}. \tag{C.27}$$

A razão entre tensão de entrada e tensão de saída só é aproximadamente igual à relação de espiras se o núcleo comum aos enrolamentos acoplados for ferromagnético. Para núcleos não ferromagnéticos, as auto-indutâncias variam com o quadrado do número de espiras e a Equação C.27 mostra que a relação de espiras é aproximadamente igual à média geométrica entre as duas razões de tensão, ou

$$\sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \frac{N_2}{N_1} = \sqrt{\left(\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1}\right)_{I_2=0}\left(\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1}\right)_{I_1=0}}. \tag{C.28}$$

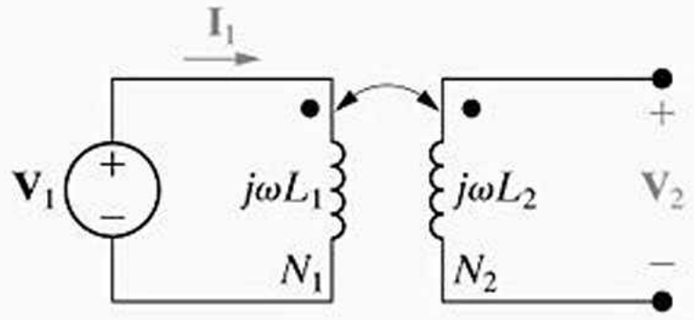


Figura C.16 ▲ Determinação experimental da razão M/L_1.

APÊNDICE

D

O decibel

Engenheiros eletricistas interessados na perda de potência em circuitos em cascata usados para transmitir sinais telefônicos inventaram o decibel. A Figura D.1 ilustra o problema.

Nessa figura, p_i é a potência de entrada do sistema, p_1 é a saída de potência do circuito A, p_2 é a saída de potência do circuito B e p_o é a potência de saída do sistema. O ganho de potência de cada circuito é a razão entre a potência que sai e a potência que entra. Assim,

$$\sigma_A = \frac{p_1}{p_i}, \quad \sigma_B = \frac{p_2}{p_1} \quad \text{e} \quad \sigma_C = \frac{p_o}{p_2}.$$

O ganho global de potência do sistema é simplesmente o produto dos ganhos individuais, ou

$$\frac{p_o}{p_i} = \frac{p_1}{p_i}\frac{p_2}{p_1}\frac{p_o}{p_2} = \sigma_A\sigma_B\sigma_C.$$

A multiplicação das razões entre potências é convertida em adição por meio do logaritmo; isto é,

$$\log_{10}\frac{p_o}{p_i} = \log_{10}\sigma_A + \log_{10}\sigma_B + \log_{10}\sigma_C.$$

O logaritmo da razão entre duas potências foi denominado *bel*, em honra de Alexander Graham Bell. Assim, calculamos o ganho de potência global de um sistema em bels, mediante a simples soma dos ganhos de potência, também em bels, de cada subsistema componente do sistema de transmissão. Na prática, o bel é uma quantidade inconvenientemente grande. Um décimo de um bel é uma medida mais útil para ganho de potência; daí o *decibel*. Como o número de decibéis é igual a 10 vezes o número de bels,

$$\text{Número de decibéis} = 10\log_{10}\frac{p_o}{p_i}.$$

Quando usamos o decibel como medida das razões entre potências, em algumas situações a resistência de entrada do circuito é igual à sua resistência de carga, como ilustrado na Figura D.2.

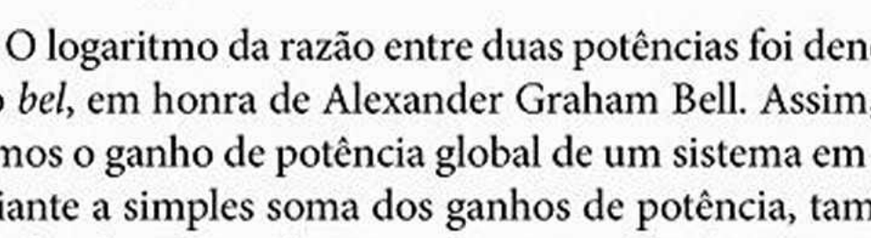


Figura D.1 ▲ Três circuitos em cascata.

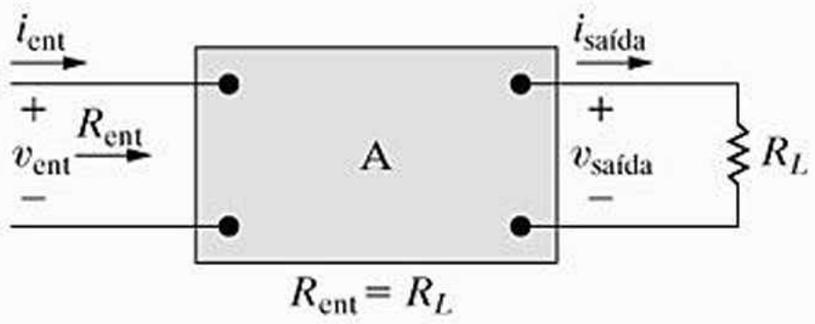


Figura D.2 ▲ Circuito em que a resistência de entrada é igual à resistência de carga.

Quando a resistência de entrada é igual à resistência de carga, podemos converter a razão entre potências para uma razão entre tensões ou uma razão entre correntes:

$$\frac{p_o}{p_i} = \frac{v_{saída}^2/R_L}{v_{ent}^2/R_{ent}} = \left(\frac{v_{saída}}{v_{ent}}\right)^2$$

ou

$$\frac{p_o}{p_i} = \frac{i_{saída}^2 R_L}{i_{ent}^2 R_{ent}} = \left(\frac{i_{saída}}{i_{ent}}\right)^2.$$

Essas equações mostram que o número de decibéis torna-se

$$\begin{aligned}\text{Número de decibéis} &= 20\log_{10}\frac{v_{saída}}{v_{ent}} \\ &= 20\log_{10}\frac{i_{saída}}{i_{ent}}. \qquad \text{(D.1)}\end{aligned}$$

A definição do decibel usado nos diagramas de Bode (veja o Apêndice E) deve-se aos resultados expressos pela Equação D.1, visto que esses resultados aplicam-se a qualquer função de transferência que envolva uma razão entre tensões, uma razão entre correntes, uma razão entre tensão e corrente ou uma razão entre corrente e tensão. Lembre-se sempre da definição original do decibel porque ela é de fundamental importância em muitas aplicações de engenharia.

Quando você estiver trabalhando com amplitudes de funções de transferência expressas em decibéis, é útil ter uma tabela de equivalência entre o valor do decibel, e o valor real da razão saída/entrada. A Tabela D.1 mostra essas equivalências para alguns valores de decibéis. A razão correspondente a um valor de decibel negativo é a recíproca da razão de valor positivo. Por exemplo, –3 dB corresponde a uma razão saída/entrada de 1/1,41 ou 0,707. O interessante é que –3 dB corresponde às freqüências de meia potência dos circuitos de filtros discutidos nos capítulos 14 e 15.

O decibel também é usado como uma unidade de potência quando expressa a razão entre uma potência conhecida e uma potência de referência. Normalmente, a potência de referência é 1 mW e a unidade de potência é dBm, que quer dizer 'decibéis relativos a um miliwatt'. Por exemplo, uma potência de 20 mW corresponde a aproximadamente 13 dBm.

Voltímetros de CA normalmente possuem escala em dBm que subentendem não só uma potência de referência de 1 mW, mas também uma resistência de referência de 600 Ω (um valor comumente usado em sistemas de telefonia). Visto que uma potência de 1 mW em 600 Ω corresponde a

0,7746 V (ef), aquela tensão é lida como 0 dBm no medidor. No caso de medidores analógicos, normalmente há uma diferença de exatamente 10 dB entre faixas adjacentes. Embora as escalas possam estar marcadas como 0,1, 0,3, 1, 3, 10 e assim por diante, na verdade, 3,16 V na escala de 3 V corresponde a 1 V na escala de 1 V.

Alguns voltímetros têm uma chave seletora que possibilita a escolha da resistência de referência (50, 135, 600 ou 900 Ω) ou a escolha de dBm ou dBV (decibéis relativos a 1 volt).

TABELA D.1 Alguns pares de razões dB

dB	Razão	dB	Razão
0	1,00	30	31,62
3	1,41	40	100,00
6	2,00	60	10^3
10	3,16	80	10^4
15	5,62	100	10^5
20	10,00	120	10^6

APÊNDICE

E Diagramas de Bode

Como vimos, o gráfico de resposta de freqüência é uma ferramenta importante para analisar o comportamento de um circuito. Entretanto, até este ponto mostramos gráficos qualitativos da resposta de freqüência sem discutir como criar tais diagramas. O método mais eficiente para gerar e representar graficamente os dados de amplitude e fase é usar um computador digital; podemos confiar que ele nos dará gráficos numéricos precisos de $|H(j\omega)|$ e $\theta(j\omega)$ em relação a ω. Todavia, em algumas situações, usar diagramas de Bode para obter esboços preliminares pode ajudar a garantir a utilização inteligente do computador.

Um diagrama de Bode é uma técnica gráfica que dá uma idéia da resposta de freqüência de um circuito. Esses diagramas devem seu nome ao trabalho pioneiro desenvolvido por H. W. Bode[1] e são muito úteis para a análise de circuitos em que os pólos e zeros de $H(s)$ estão razoavelmente bem separados.

Como os gráficos qualitativos de resposta de freqüência que vimos até aqui, um diagrama de Bode consiste em dois gráficos separados: um mostra como o módulo de $H(j\omega)$ varia com a freqüência, e o outro mostra como o ângulo de fase de $H(j\omega)$ varia com a freqüência. Em diagramas de Bode, os gráficos são feitos em papel semi-log para maior precisão na representação de uma ampla faixa de valores de freqüência. Em ambos os gráficos — de amplitude e de fase —, a freqüência é representada na escala logarítmica horizontal e a amplitude e o ângulo de fase são representados na escala vertical linear.

E.1 Pólos e zeros reais de primeira ordem

Para simplificar o desenvolvimento de diagramas de Bode, começamos considerando apenas casos em que todos os pólos e zeros de $H(s)$ são reais e de primeira ordem. Mais adiante apresentaremos casos com pólos e zeros complexos e repetidos. Ter uma expressão determinada para $H(s)$ será útil para nossos propósitos. Assim, baseamos a discussão na expressão

$$H(s) = \frac{K(s + z_1)}{s(s + p_1)}, \tag{E.1}$$

em que

$$H(j\omega) = \frac{K(j\omega + z_1)}{j\omega(j\omega + p_1)}. \tag{E.2}$$

A primeira etapa na construção de diagramas de Bode é escrever a expressão para $H(j\omega)$ em uma *forma padrão*, que obtemos simplesmente fatorando os pólos e zeros:

$$H(j\omega) = \frac{Kz_1(1 + j\omega/z_1)}{p_1(j\omega)(1 + j\omega/p_1)}. \tag{E.3}$$

Em seguida, representamos a quantidade constante Kz_1/p_1 por K_o e, ao mesmo tempo, expressamos $H(j\omega)$ na forma polar:

$$H(j\omega) = \frac{K_o|1 + j\omega/z_1|\,\underline{/\psi_1}}{|\omega|\,\underline{/90^\circ}\,|1 + j\omega/p_1|\,\underline{/\beta_1}}$$

$$= \frac{K_o|1 + j\omega/z_1|}{|\omega||1 + j\omega/p_1|}\,\underline{/(\psi_1 - 90^\circ - \beta_1)}. \tag{E.4}$$

Pela Equação E.4,

$$|H(j\omega)| = \frac{K_o|1 + j\omega/z_1|}{\omega|1 + j\omega/p_1|} \tag{E.5}$$

$$\theta(\omega) = \psi_1 - 90^\circ - \beta_1. \tag{E.6}$$

Por definição, os ângulos de fase ψ_1 e β_1 são

$$\psi_1 = \text{tg}^{-1}\omega/z_1; \tag{E.7}$$

$$\beta_1 = \text{tg}^{-1}\omega/p_1. \tag{E.8}$$

Os diagramas de Bode consistem na representação gráfica da Equação E.5 (amplitude) e da Equação E.6 (fase) como função de ω.

E.2 Gráficos de amplitude

Para traçar gráficos de amplitude são necessárias multiplicações e divisões de fatores associados a pólos e zeros de $H(s)$. Transformamos essas operações de multiplicação e divisão em operações de adição e subtração expressando a amplitude de $H(j\omega)$ em termos de um valor logarítmico: o decibel (dB).[2] A amplitude de $H(j\omega)$ em decibéis é

$$A_{\text{dB}} = 20 \log_{10}|H(j\omega)|. \tag{E.9}$$

Para dar uma idéia da unidade decibel, a Tabela E.1 mostra conversões de valores reais de várias amplitudes em seus valores em decibéis. Expressando a Equação E.5 em termos de decibéis, temos

$$A_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \frac{K_o|1 + j\omega/z_1|}{\omega|1 + j\omega/p_1|}$$

$$= 20 \log_{10} K_o + 20 \log_{10}|1 + j\omega/z_1|$$

$$- 20 \log_{10}\omega - 20 \log_{10}|1 + j\omega/p_1|. \tag{E.10}$$

[1] Veja H. W. Bode, *Network Analysis and Feedback Design* (Nova York: Van Nostrand, 1945).

TABELA E.1 Amplitudes reais e seus valores em decibéis

A_{dB}	A	A_{dB}	A
0	1,00	30	31,62
3	1,41	40	100,00
6	2,00	60	10^3
10	3,16	80	10^4
15	5,62	100	10^5
20	10,00	120	10^6

O gráfico da Equação E.10 pode ser mais facilmente traçado se representarmos cada termo da equação em separado e, então, combinarmos graficamente os gráficos desses termos individuais. Esses termos individuais são fáceis de representar graficamente porque podem ser aproximados em todos os casos por linhas retas.

O gráfico de $20 \log_{10} K_o$ é uma linha reta horizontal porque K_o não é função da freqüência. O valor desse termo é positivo para $K_o > 1$, zero para $K_o = 1$ e negativo para $K_o < 1$.

Duas linhas retas aproximam o gráfico de $20 \log_{10}|1 + j\omega/z_1|$. Para valores pequenos de ω, o módulo $|1 + j\omega/z_1|$ é aproximadamente 1 e, por conseguinte,

$$20 \log_{10}|1 + j\omega/z_1| \to 0 \text{ quando } \omega \to 0. \quad \text{(E.11)}$$

Para valores grandes de ω, o módulo $|1 + j\omega/z_1|$ é aproximadamente ω/z_1 e, por conseguinte,

$$20 \log_{10}|1 + j\omega/z_1| \to 20 \log_{10}(\omega/z_1) \text{ quando } \omega \to \infty. \quad \text{(E.12)}$$

Em uma escala logarítmica de freqüência, $20 \log_{10}(\omega/z_1)$ é uma linha reta com uma inclinação de 20 dB/década (uma década é uma mudança de freqüência de 10 para 1). Essa linha reta intercepta o eixo 0 dB em $\omega = z_1$. Esse valor de ω é denominado *freqüência de corte*. Assim, com base nas equações E.11 e E.12, duas linhas retas podem aproximar o gráfico de amplitude de um zero de primeira ordem, como mostra a Figura E.1.

O gráfico de $-20 \log_{10}\omega$ é uma linha reta com inclinação de –20 dB/década que intercepta o eixo 0 dB em $\omega = 1$. Duas linhas retas aproximam o gráfico de $-20 \log_{10}|1 + j\omega/p_1|$. Nesse caso, as duas linhas retas interceptam o eixo 0 dB em $\omega = p_1$. Para valores grandes de ω, a linha reta $20 \log_{10}(\omega/p_1)$ tem uma inclinação de –20 dB/década. A Figura E.2 mostra a aproximação por linha reta dos gráficos de amplitude de um pólo de primeira ordem.

A Figura E.3 mostra o gráfico da Equação E.10 para $K_o = \sqrt{10}$, $z_1 = 0{,}1$ rad/s e $p_1 = 5$ rad/s. Como cada termo da Equação E.10 está identificado na Figura E.3, você pode verificar que a soma dos termos individuais resulta no gráfico indicado por $20 \log_{10}|H(j\omega)|$.

O Exemplo E.1 ilustra a construção de um gráfico da amplitude de uma função de transferência caracterizada por pólos e zeros de primeira ordem.

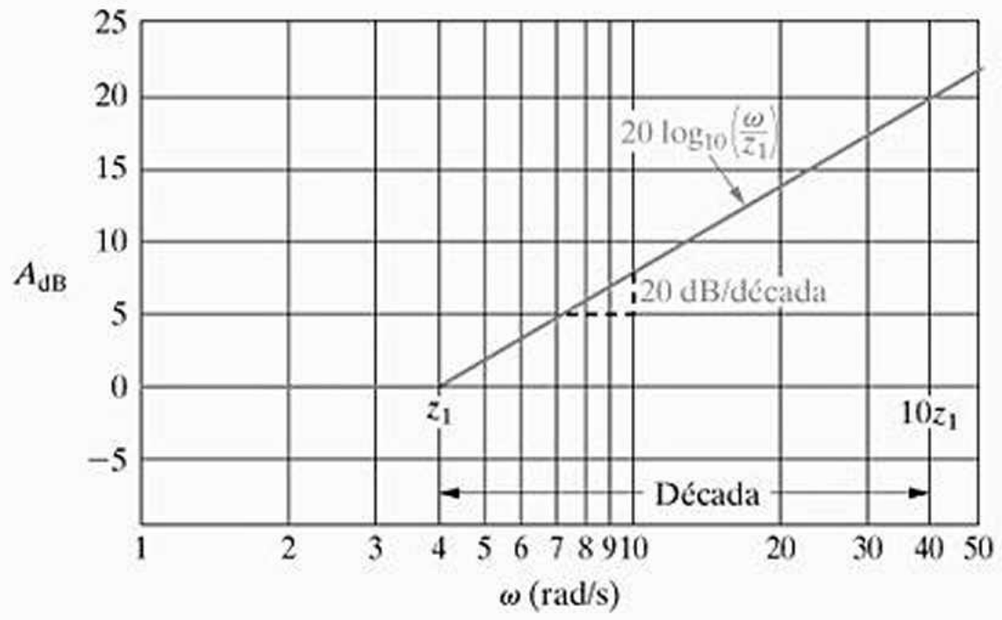


Figura E.1 ▲ Aproximação assintótica do gráfico de amplitude de um zero de primeira ordem.

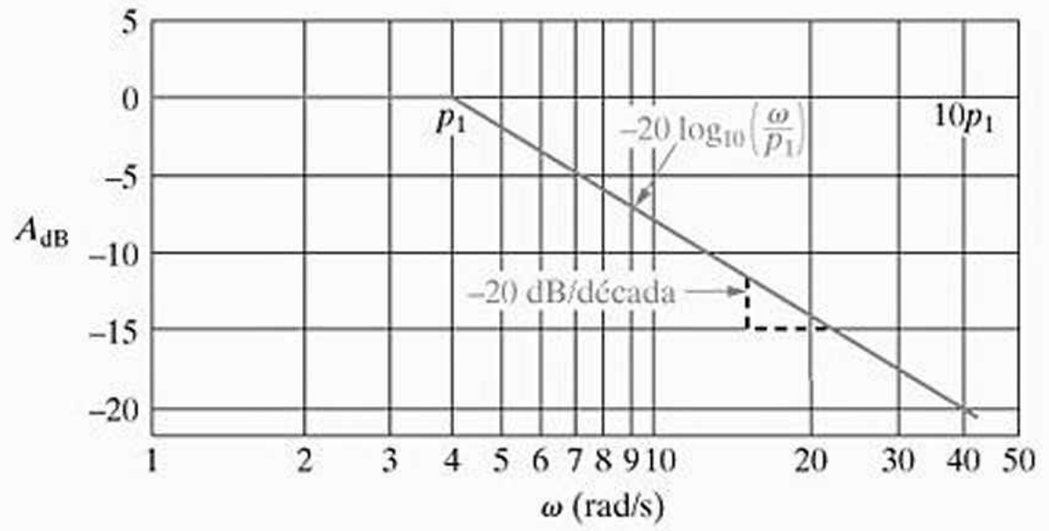


Figura E.2 ▲ Aproximação assintótica do gráfico de amplitude de um pólo de primeira ordem.

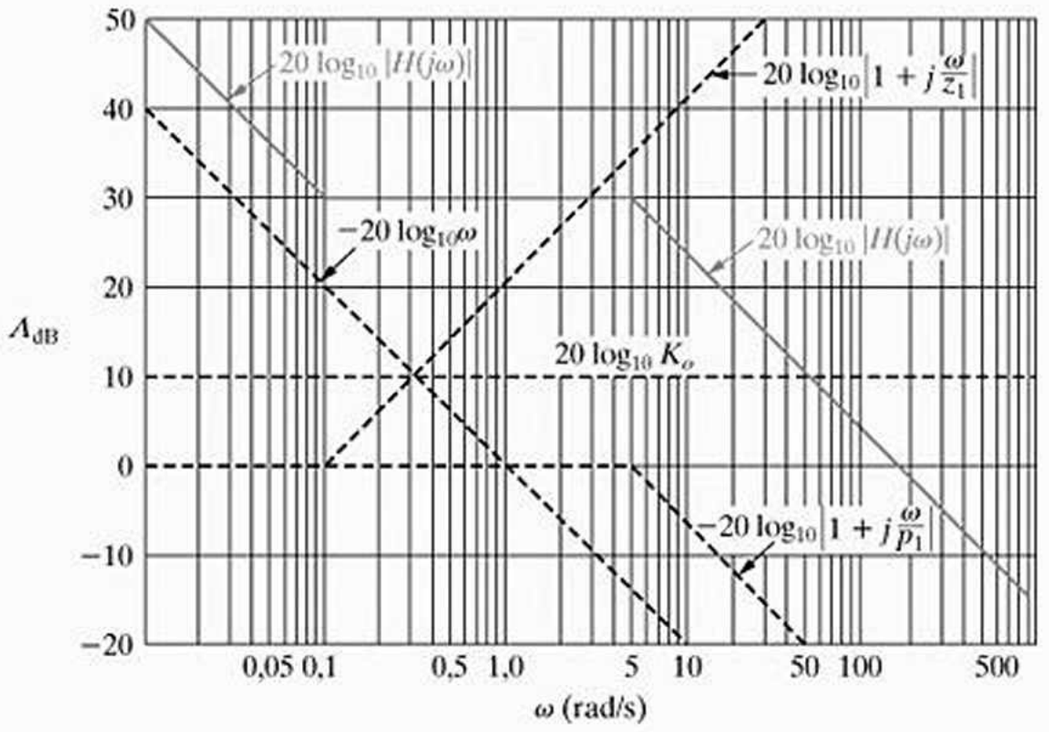


Figura E.3 ▲ Aproximação assintótica do gráfico de amplitude para a Equação E.10.

[2] Consulte o Apêndice D para mais informações sobre o decibel.

Exemplo E.1

Para o circuito na Figura E.4:

a) Determine a função de transferência, $H(s)$.

b) Plote a aproximação assintótica do gráfico de amplitude de Bode.

c) Calcule $20 \log_{10}|H(j\omega)|$ em $\omega = 50$ rad/s e $\omega = 1.000$ rad/s.

d) Represente os valores calculados no item (c) no gráfico aproximado; e

e) Suponha que $v_i(t) = 5 \cos (500t + 15°)$ V e, então, use o diagrama de Bode plotado para prever a amplitude de $v_o(t)$ no regime permanente.

Solução

a) Transformando o circuito da Figura E.4 para o domínio da freqüência e, então, usando a regra de divisão de tensão nesse domínio, temos

$$H(s) = \frac{(R/L)s}{s^2 + (R/L)s + \frac{1}{LC}}.$$

Substituindo os valores numéricos de R, L e C, obtemos

$$H(s) = \frac{110s}{s^2 + 110s + 1.000} = \frac{110s}{(s + 10)(s + 100)}.$$

b) Em primeiro lugar, escrevemos $H(j\omega)$ na forma padrão:

$$H(j\omega) = \frac{0{,}11\ j\omega}{[1 + j(\omega/10)][1 + j(\omega/100)]}.$$

A expressão para a amplitude de $H(j\omega)$, em decibéis, é

$$A_{dB} = 20 \log_{10}|H(j\omega)|$$

$$= 20 \log_{10} 0{,}11 + 20 \log_{10}|j\omega|$$

$$- 20 \log_{10}\left|1 + j\frac{\omega}{10}\right| - 20 \log_{10}\left|1 + j\frac{\omega}{100}\right|.$$

A Figura E.5 mostra o gráfico correspondente. Cada termo que contribui para a amplitude global é identificado.

c) Temos

$$H(j50) = \frac{0{,}11(j50)}{(1 + j5)(1 + j0{,}5)}$$

$$= 0{,}9648\angle -15{,}25°,$$

$$20 \log_{10}|H(j50)| = 20 \log_{10} 0{,}9648$$

$$= -0{,}311 \text{ dB};$$

$$H(j\,1.000) = \frac{0{,}11(j1.000)}{(1 + j100)(1 + j10)}$$

$$= 0{,}1094\angle -83{,}72°;$$

$$20 \log_{10} 0{,}1094 = -19{,}22 \text{ dB}.$$

d) Veja a Figura E.5.

e) Como podemos ver pelo diagrama de Bode na Figura E.5, o valor de A_{dB} em $\omega = 500$ rad/s é aproximadamente −12,5 dB. Portanto,

$$|A| = 10^{(-12{,}5/20)} = 0{,}24$$

e

$$V_{mo} = |A|V_{mi} = (0{,}24)(5) = 1{,}19 \text{ V}.$$

Podemos calcular o valor exato de $|H(j\omega)|$ substituindo $\omega = 500$ na equação para $|H(j\omega)|$:

$$H(j500) = \frac{0{,}11(j500)}{(1 + j50)(1 + j5)} = 0{,}22\angle -77{,}54°.$$

Assim, a amplitude exata da tensão de saída para uma freqüência de 500 rad/s é

$$V_{mo} = |A|V_{mi} = (0{,}22)(5) = 1{,}1 \text{ V}.$$

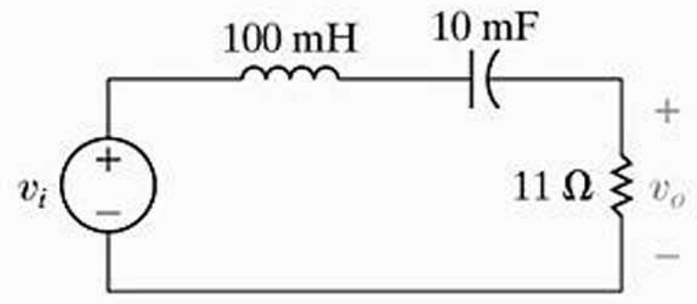


Figura E.4 ▲ Circuito para o Exemplo E.1.

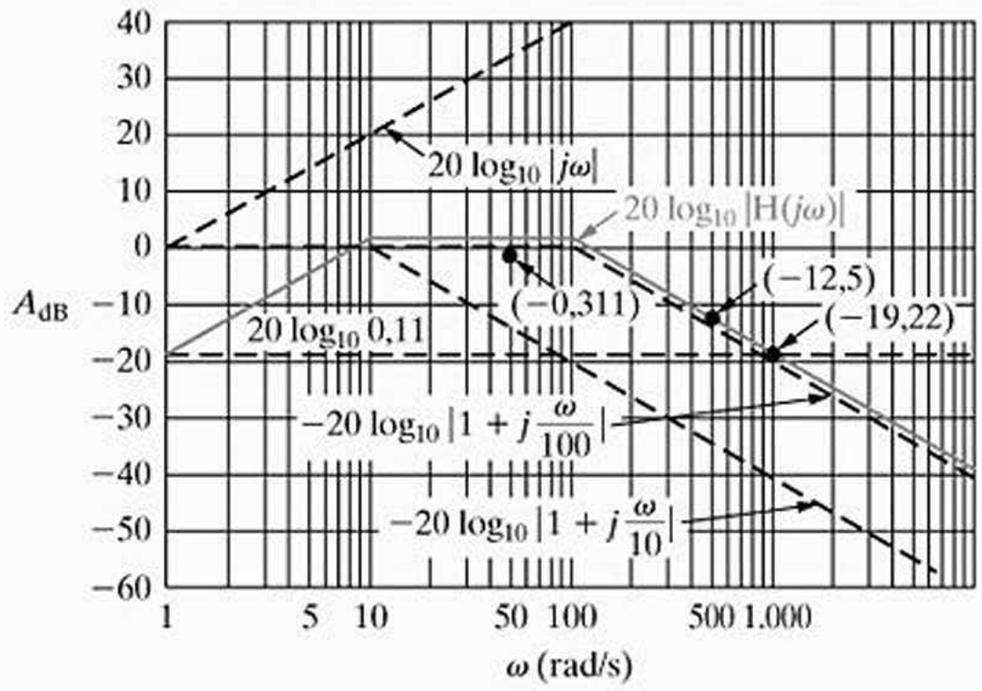


Figura E.5 ▲ Gráficos de amplitude para a função de transferência do circuito da Figura E.4.

E.3 Gráficos de amplitude mais precisos

Podemos melhorar a precisão dos gráficos para pólos e zeros de primeira ordem corrigindo os valores da amplitude na freqüência de corte, em metade e no dobro da freqüência de corte. Na freqüência de corte, o valor exato, em decibéis, é

$$\begin{aligned} A_{\mathrm{dB}_c} &= \pm 20 \log_{10} |1 + j1| \\ &= \pm 20 \log_{10} \sqrt{2} \\ &\approx \pm 3 \text{ dB}. \end{aligned} \tag{E.13}$$

O valor exato na metade da freqüência de corte é

$$\begin{aligned} A_{\mathrm{dB}_{c/2}} &= \pm 20 \log_{10} \left| 1 + j\frac{1}{2} \right| \\ &= \pm 20 \log_{10} \sqrt{5/4} \\ &\approx \pm 1 \text{ dB}. \end{aligned} \tag{E.14}$$

No dobro da freqüência de corte, o valor exato, em decibéis, é

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_{\mathrm{dB}_{2c}} &= \pm 20 \log_{10} |1 + j2| \\ &= \pm 20 \log_{10} \sqrt{5} \\ &\approx \pm 7 \text{ dB}. \end{aligned} \tag{E.15}$$

Nas equações E.13–E.15, o sinal positivo aplica-se a um zero de primeira ordem e o sinal negativo, a um pólo de primeira ordem. A aproximação assintótica do gráfico de amplitude fornece 0 dB na freqüência de corte e na metade da freqüência de corte e ±6 dB no dobro da freqüência de corte. Daí, as correções são ±3 dB na freqüência de corte e ±1 dB na metade da freqüência de corte e também no dobro da freqüência de corte. A Figura E.6 ilustra essas correções.

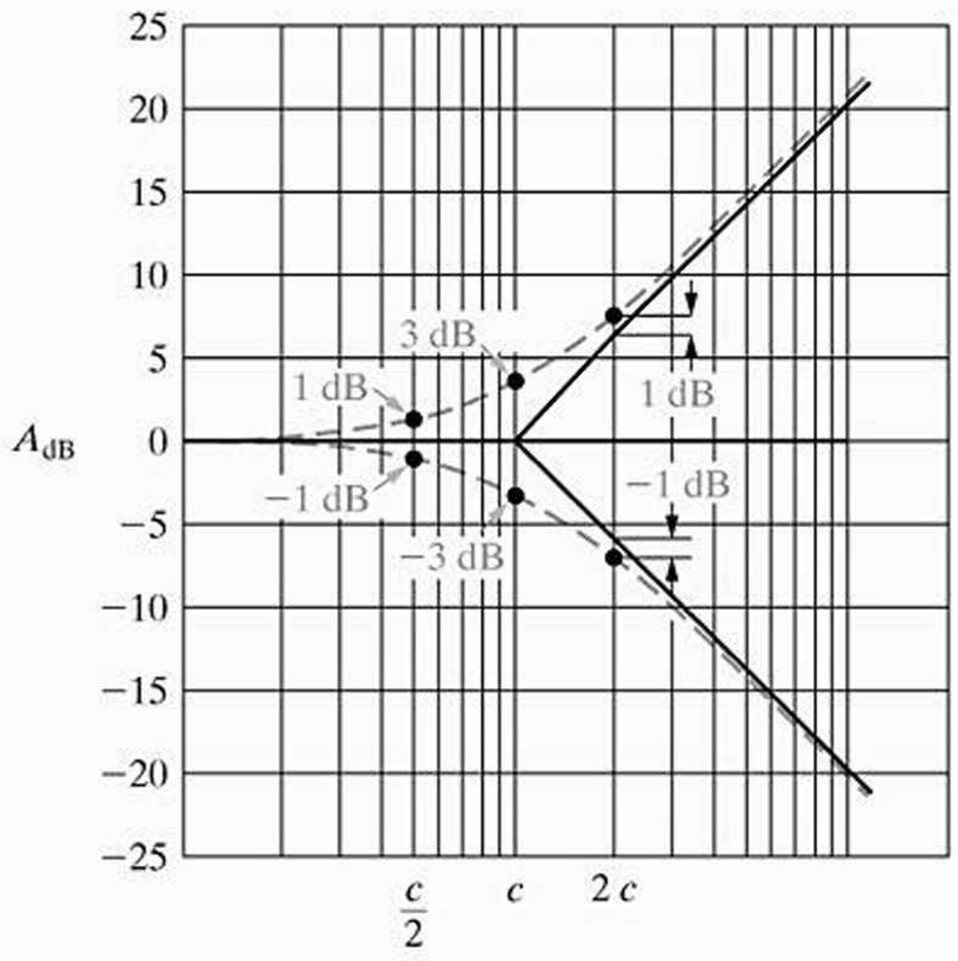


Figura E.6 ▲ Gráficos de amplitude corrigidos para um zero e um pólo de primeira ordem.

Uma mudança de 2 para 1 na freqüência é denominada uma *oitava*. Uma inclinação de 20 dB/década é equivalente a 6,02 dB/oitava que, para a finalidade de representação gráfica, é equivalente a 6 dB/oitava. Desse modo, as correções enumeradas correspondem a uma oitava abaixo e a uma oitava acima da freqüência de corte.

Se os pólos e zeros de $H(s)$ forem bem separados, a inserção dessas correções no gráfico global de amplitude e a obtenção de uma curva de precisão razoável são relativamente simples. Contudo, se os pólos e zeros estiverem muito próximos, as correções sobrepostas serão difíceis de avaliar e será melhor usar a aproximação assintótica apenas como uma primeira estimativa da característica da amplitude. Use, então, um computador para refinar os cálculos na faixa de freqüência de interesse.

E.4 Gráficos de fase

Podemos também construir gráficos para ângulo de fase usando aproximações assintóticas. O ângulo de fase associado à constante K_o é zero, e o ângulo de fase associado a um zero ou pólo de primeira ordem na origem é ±90°. Para um zero ou pólo de primeira ordem que não esteja na origem, as aproximações assintóticas são as seguintes:

- Para freqüências menores do que um décimo da freqüência de corte, admite-se que o ângulo de fase seja zero.
- Para freqüências maiores do que 10 vezes a freqüência de corte, admite-se que o ângulo de fase seja ±90°.
- Entre um décimo da freqüência angular e 10 vezes a freqüência de corte, o gráfico do ângulo de fase é uma linha reta que passa por 0° em um décimo da freqüência de corte, ±45° na freqüência de corte e ±90° em 10 vezes a freqüência de corte.

Em todos esses casos, o sinal positivo aplica-se ao zero de primeira ordem e o sinal negativo, ao pólo de primeira ordem. A Figura E.7 mostra uma aproximação assintótica para um zero e um pólo de primeira ordem. As curvas tracejadas indicam a variação exata do ângulo de fase à medida que a freqüência varia. Observe quão próxima da variação exata se encontra a aproximação assintótica. O desvio máximo entre a aproximação e o valor exato é de aproximadamente 6°.

A Figura E.8 mostra a aproximação assintótica do ângulo de fase da função de transferência dada pela Equação B.1. Os valores exatos do ângulo de fase são dados pela Equação B.6; o gráfico foi traçado para $z_1 = 0{,}1$ rad/s e $p_1 = 5$ rad/s.

O Exemplo E.2 ilustra a construção de um gráfico de fase usando uma aproximação assintótica.

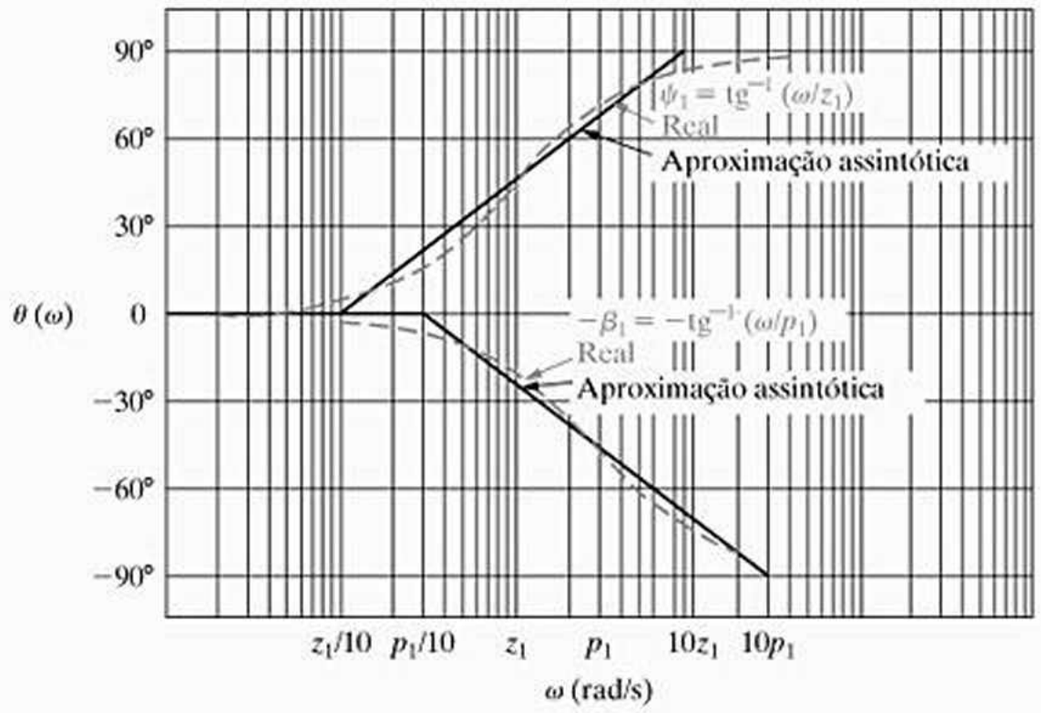


Figura E.7 ▲ Gráficos de fase para um zero e um pólo de primeira ordem.

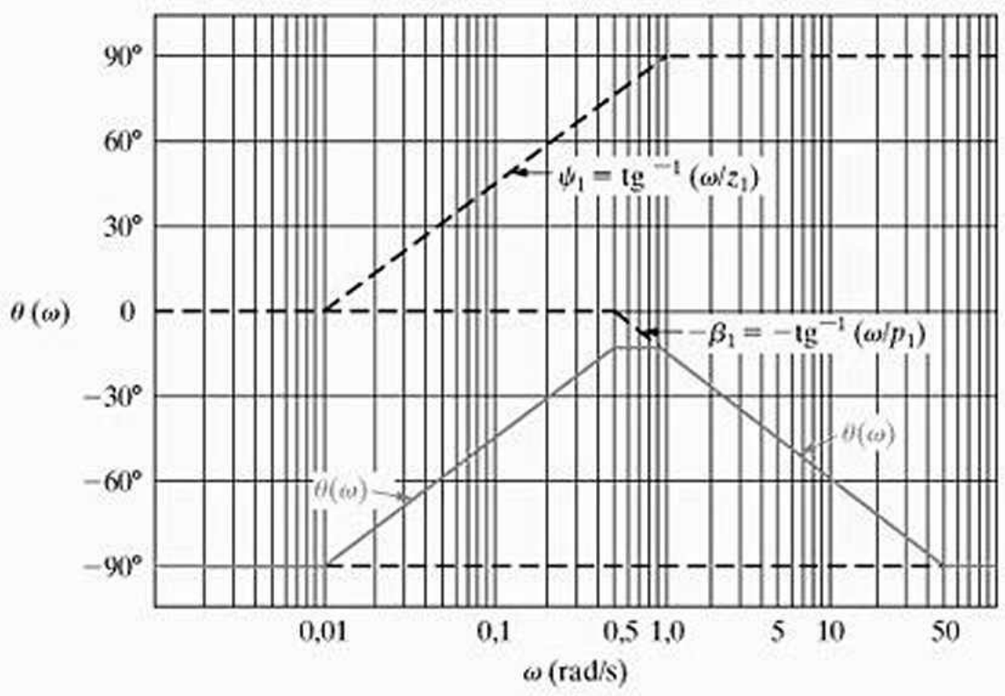


Figura E.8 ▲ Aproximação assintótica do gráfico de fase para a Equação B.1.

Exemplo E.2

a) Desenhe um gráfico de fase aproximado para a função de transferência do Exemplo E.1.

b) Calcule o ângulo de fase $\theta(\omega)$ em $\omega = 50$, 500 e 1.000 rad/s.

c) Represente os valores do item (b) no diagrama do item (a).

d) Usando os resultados do Exemplo E.1(e) e do item (b) deste exemplo, calcule o valor de regime permanente da tensão de saída se a fonte de tensão for dada por $v_i(t) = 10 \cos(500t - 25°)$ V.

Solução

a) Do Exemplo E.1,

$$H(j\omega) = \frac{0{,}11(j\omega)}{[1 + j(\omega/10)][1 + j(\omega/100)]}$$

$$= \frac{0{,}11|j\omega|}{|1 + j(\omega/10)||1 + j(\omega/100)|} \underline{/(\psi_1 - \beta_1 - \beta_2)}.$$

Assim,

$$\theta(\omega) = \psi_1 - \beta_1 - \beta_2,$$

onde

$$\psi_1 = 90°, \beta_1 = \text{tg}^{-1}(\omega/10) \text{ e } \beta_2 = \text{tg}^{-1}(\omega/100).$$

A Figura E.9 representa a aproximação assintótica de $\theta(\omega)$.

b) Temos

$$H(j50) = 0{,}96\underline{/-15{,}25°},$$

$$H(j500) = 0{,}22\underline{/-77{,}54°},$$

$$H(j1.000) = 0{,}11\underline{/-83{,}72°}.$$

Assim,

$$\theta(j50) = -15{,}25°,$$

$$\theta(j500) = -77{,}54°$$

e

$$\theta(j1.000) = -83{,}72°.$$

c) Veja a Figura E.9.

d) Temos

$$V_{mo} = |H(j500)|V_{mi}$$

$$= (0{,}22)(10)$$

$$= 2{,}2 \text{ V}$$

e

$$\theta_o = \theta(\omega) + \theta_i$$

$$= -77{,}54° - 25°$$

$$= -102{,}54°.$$

Assim,

$$v_o(t) = 2{,}2 \cos(500t - 102{,}54°) \text{ V}.$$

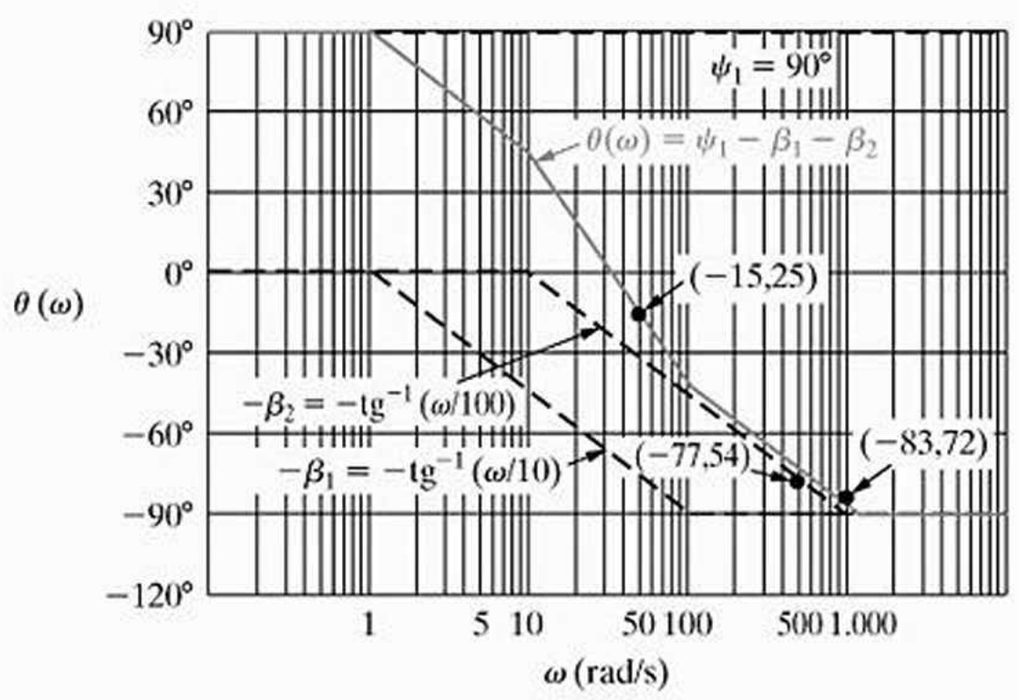


Figura E.9 ▲ Aproximação assintótica de $\theta(\omega)$ para o Exemplo E.2.

E.5 Diagramas de Bode: pólos e zeros complexos

Os pólos e zeros complexos exigem especial atenção na construção de gráficos de amplitude e de fase. Vamos analisar a contribuição de um par de pólos complexos nos gráficos de amplitude e de fase. Entendidas as regras para a manipulação de pólos complexos, sua aplicação a um par de zeros complexos torna-se evidente.

Os pólos e zeros complexos de $H(s)$ sempre aparecem em pares conjugados. A primeira etapa na construção de um gráfico de amplitude ou de fase de uma função de transferência que contém pólos complexos é combinar o par conjugado em um único termo quadrático. Assim, para

$$H(s) = \frac{K}{(s + \alpha - j\beta)(s + \alpha + j\beta)}, \tag{E.16}$$

em primeiro lugar, reescrevemos o produto $(s + \alpha - j\beta)(s + \alpha + j\beta)$ como

$$(s + \alpha)^2 + \beta^2 = s^2 + 2\alpha s + \alpha^2 + \beta^2. \tag{E.17}$$

A seguir, escrevemos o termo quadrático em uma forma mais conveniente:

$$s^2 + 2\alpha s + \alpha^2 + \beta^2 = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2. \tag{E.18}$$

Comparando as duas formas, vemos que

$$\omega_n^2 = \alpha^2 + \beta^2 \tag{E.19}$$

e

$$\zeta\omega_n = \alpha. \tag{E.20}$$

O termo ω_n é a freqüência de corte do termo quadrático, e ζ é o coeficiente de amortecimento do termo quadrático. O valor crítico de ζ é 1. Se $\zeta < 1$, as raízes do termo quadrático são complexas e usamos a Equação E.18 para representar os pólos complexos. Se $\zeta \geq 1$, fatoramos o termo quadrático para $(s + p_1)(s + p_2)$ e, então, os gráficos de amplitude e de fase de acordo com a discussão anterior. Admitindo que $\zeta < 1$, reescrevemos a Equação E.16 na forma

$$H(s) = \frac{K}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}. \tag{E.21}$$

A seguir, reduzimos a Equação E.21 à forma padrão, colocando em evidência, para o termo quadrático, $1/\omega_n^2$. Assim,

$$H(s) = \frac{K}{\omega_n^2} \frac{1}{1 + (s/\omega_n)^2 + 2\zeta(s/\omega_n)}, \tag{E.22}$$

da qual

$$H(j\omega) = \frac{K_o}{1 - (\omega^2/\omega_n^2) + j(2\zeta\omega/\omega_n)}, \tag{E.23}$$

em que

$$K_o = \frac{K}{\omega_n^2}.$$

Antes de discutir os diagramas de amplitude e de fase associados à Equação E.23, substituímos, por conveniência, a razão ω/ω_n por uma nova variável, u. Então,

$$H(j\omega) = \frac{K_o}{1 - u^2 + j2\zeta u}. \tag{E.24}$$

Agora, escrevemos $H(j\omega)$ na forma polar:

$$H(j\omega) = \frac{K_o}{|(1 - u^2) + j2\zeta u| \angle \beta_1}, \tag{E.25}$$

donde

$$A_{dB} = 20 \log_{10}|H(j\omega)|$$
$$= 20 \log_{10} K_o - 20 \log_{10}|(1 - u^2) + j2\zeta u| \tag{E.26}$$

e

$$\theta(\omega) = -\beta_1 = -\operatorname{tg}^{-1}\frac{2\zeta u}{1 - u^2}. \tag{E.27}$$

E.6 Gráficos de amplitude

O fator quadrático contribui para a amplitude de $H(j\omega)$ por meio do termo $-20 \log_{10}|1 - u^2 + j2\zeta u|$. Como $u = \omega/\omega_n$, $u \to 0$ quando $\omega \to 0$ e $u \to \infty$ quando $\omega \to \infty$. Para verificar como o termo se comporta quando a faixa de ω é de 0 a ∞, observamos que

$$-20 \log_{10}|(1 - u^2) + j2\zeta u| = -20 \log_{10}\sqrt{(1 - u^2)^2 + 4\zeta^2 u^2}$$
$$= -10 \log_{10}[u^4 + 2u^2(2\zeta^2 - 1) + 1], \tag{E.28}$$

quando $u \to 0$,

$$-10 \log_{10}[u^4 + 2u^2(2\zeta^2 - 1) + 1] \to 0, \tag{E.29}$$

e quando $u \to \infty$,

$$-10 \log_{10}[u^4 + 2u^2(2\zeta^2 - 1) + 1] \to -,40 \log_{10} u \tag{E.30}$$

Das equações E.29 e E.30, concluímos que o gráfico aproximado da amplitude consiste de duas retas. Para $\omega < \omega_n$, a reta coincide com o eixo de 0 dB e para $\omega > \omega_n$, a outra reta tem uma inclinação de –40 dB/década. Essas duas retas se encontram em $u = 1$, que corresponde a $\omega = \omega_n$. A Figura E.10 mostra a aproximação por linha reta para um fator quadrático com $\zeta < 1$.

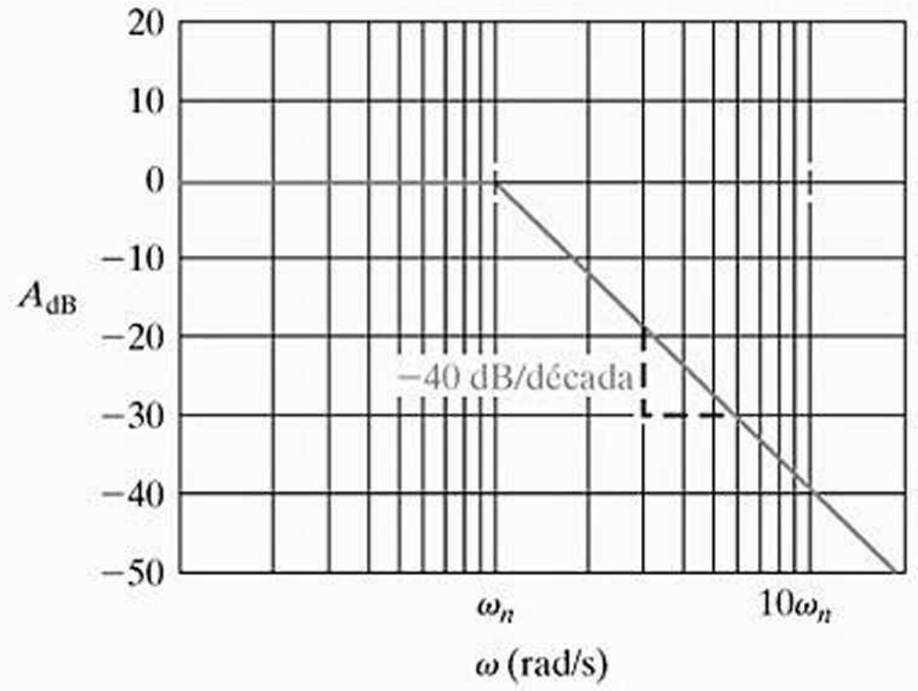


Figura E.10 ▲ Gráfico de amplitude para um par de pólos complexos.

E.7 Gráficos de amplitude mais precisos

Obter gráficos de amplitude mais precisos para corrigir o gráfico de linha reta para a amplitude de um par de pólos complexos não é tão simples quanto no caso de pólos reais de primeira ordem, pois as correções dependem do coeficiente de amortecimento ζ. A Figura E.11 mostra o efeito de ζ sobre o gráfico de amplitude. Observe que, à medida que ζ se torna bem pequeno, ocorre um grande pico de amplitude na vizinhança da freqüência de corte $\omega_n(u = 1)$. Quando $\zeta \geq 1/\sqrt{2}$, a curva exata encontra-se inteiramente abaixo da linha reta. Para aumentar a precisão da aproximação, costuma-se localizar quatro pontos na curva exata. Esses quatro pontos correspondem (1) à metade da freqüência de corte, (2) à freqüência na qual a amplitude é máxima, (3) à freqüência de corte e (4) à freqüência na qual a amplitude é nula. A Figura E.12 mostra esses quatro pontos.

Na metade da freqüência de corte (ponto 1), a amplitude exata é

$$A_{dB}(\omega_n/2) = -10 \log_{10}(\zeta^2 + 0{,}5625). \quad \text{(E.31)}$$

A amplitude atinge o máximo (ponto 2) na freqüência de

$$\omega_p = \omega_n\sqrt{1 - 2\zeta^2}, \quad \text{(E.32)}$$

cujo valor é

$$A_{dB}(\omega_p) = -10 \log_{10}[4\zeta^2(1 - \zeta^2)]. \quad \text{(E.33)}$$

Na freqüência de corte (ponto 3), a amplitude exata é

$$A_{dB}(\omega_n) = -20 \log_{10}2\zeta. \quad \text{(E.34)}$$

O gráfico de amplitude corrigido cruza o eixo 0 dB (ponto 4) em

$$\omega_o = \omega_n\sqrt{2(1 - 2\zeta^2)} = \sqrt{2}\omega_p. \quad \text{(E.35)}$$

As equações E.31, E.34 e E.35 decorrem da Equação E.28. Calculando a Equação E.28 para $u = 0{,}5$ e $u = 1{,}0$, obtemos as equações E.31 e E.34, respectivamente. Para se obter a Equação E.35, basta determinar o valor de u para que $u^4 + 2u^2(2\zeta^2 - 1) + 1 = 1$. Para obter a Equação E.32, basta derivar a Equação E.28 em relação a u e, então, determinar o valor de u para o qual a derivada é nula. Para obter a Equação E.33, determina-se o valor da Equação E.28 quando u assume o valor determinado na Equação E.32.

O Exemplo E.3 ilustra a construção dos gráficos de amplitude para uma função de transferência com um par de pólos complexos.

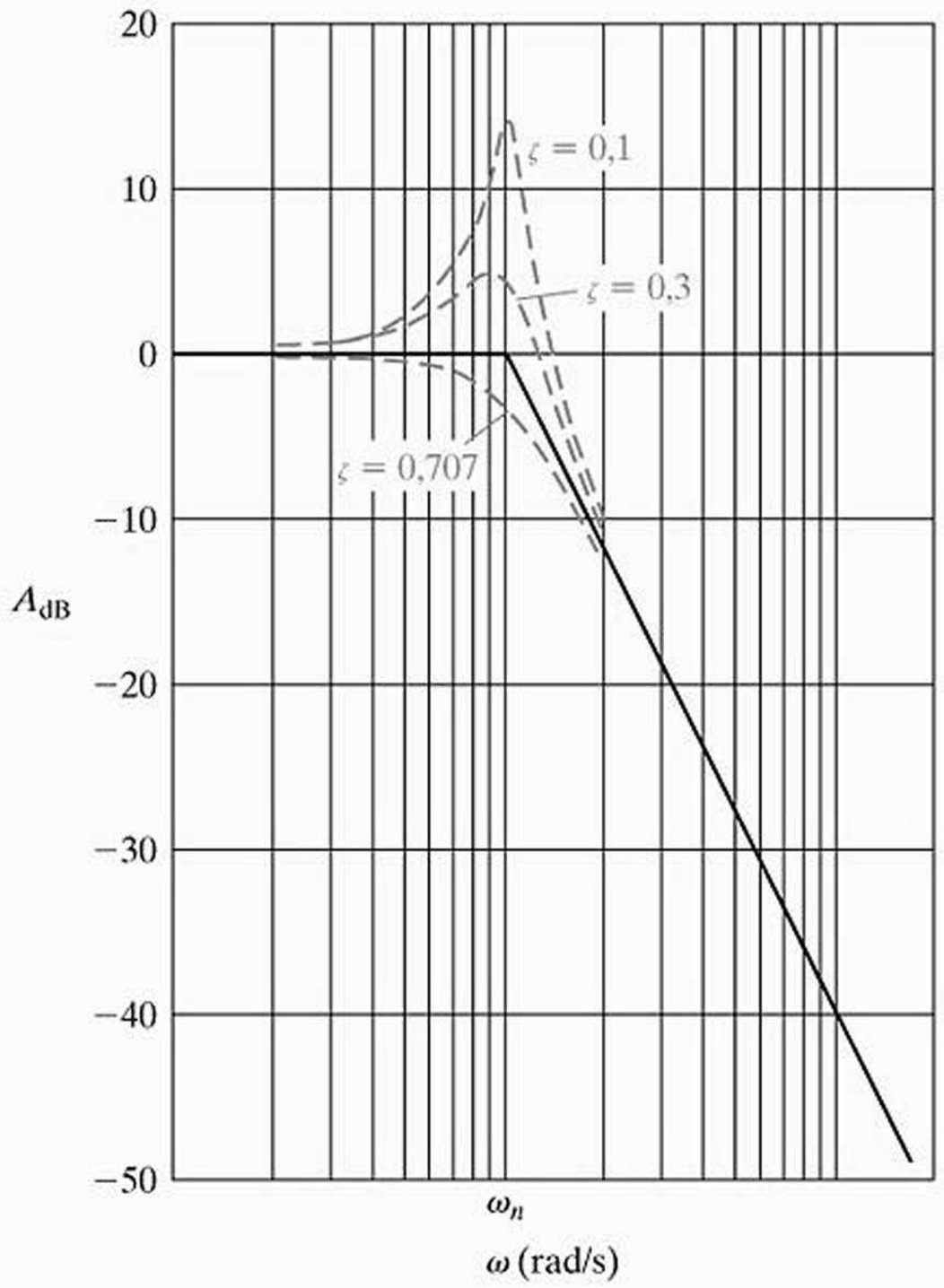


Figura E.11 ▲ O efeito de ζ sobre o gráfico de amplitude.

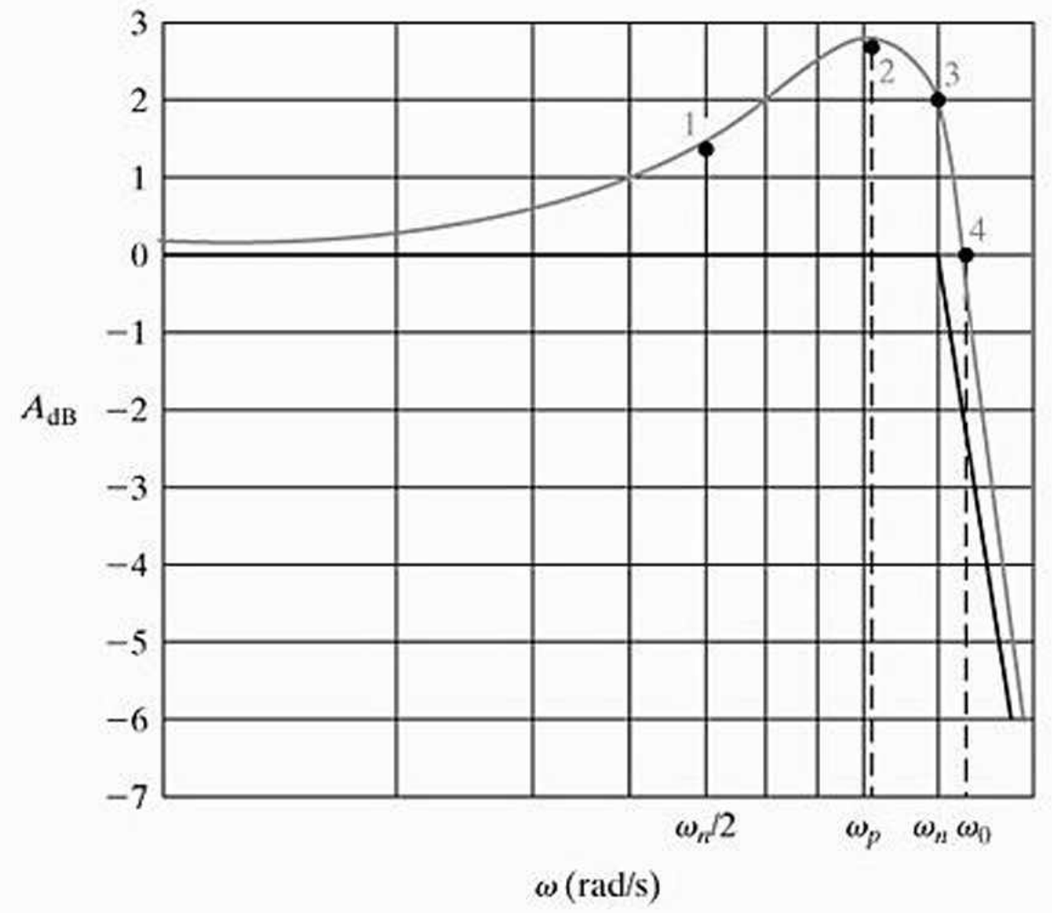


Figura E.12 ▲ Quatro pontos no gráfico de amplitude corrigido para um par de pólos complexos.

Exemplo E.3

Calcule a função de transferência para o circuito da Figura E.13.

a) Qual é o valor da freqüência de corte em radianos por segundo?

b) Qual é o valor de K_o?

c) Qual é o valor do coeficiente de amortecimento?

d) Faça o diagrama de Bode aproximado para a amplitude para a faixa de 10 a 500 rad/s.

e) Calcule e plote os valores exatos da amplitude, em decibéis, para $\omega = \omega_n/2$, $\omega = \omega_p$, $\omega = \omega_n$ e $\omega = \omega_o$. Use esses pontos e trace um gráfico mais preciso.

f) Pelo gráfico aproximado da amplitude, descreva o tipo de filtro representado pelo circuito na Figura E.13 e estime sua freqüência de corte, ω_c.

Solução

Transforme o circuito da Figura E.13 para o domínio da freqüência e, então, use a regra da divisão de tensão nesse domínio para obter

$$H(s) = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \left(\frac{R}{L}\right)s + \frac{1}{LC}}.$$

Substituindo os valores dos componentes,

$$H(s) = \frac{2.500}{s^2 + 20s + 2.500}.$$

a) Pela expressão para $H(s)$, $\omega_n^2 = 2.500$; assim, $\omega_n = 50$ rad/s.

b) Por definição, K_o é $2.500/\omega_n^2$, ou 1.

c) O coeficiente de s é $2\zeta\omega_n$; portanto,

$$\zeta = \frac{20}{2\omega_n} = 0{,}20.$$

d) Veja a Figura E.14.

e) As amplitudes exatas são

$$A_{dB}(\omega_n/2) = -10 \log_{10}(0{,}6025) = 2{,}2 \text{ dB},$$

$$\omega_p = 50\sqrt{0{,}92} = 47{,}96 \text{ rad/s},$$

$$A_{dB}(\omega_p) = -10 \log_{10}(0{,}16)(0{,}96) = 8{,}14 \text{ dB},$$

$$A_{dB}(\omega_n) = -20 \log_{10}(0{,}4) = 7{,}96 \text{ dB},$$

$$\omega_o = \sqrt{2}\omega_p = 67{,}82 \text{ rad/s},$$

$$A_{dB}(\omega_o) = 0 \text{ dB}.$$

A Figura E.14 mostra o gráfico corrigido.

f) Pelo gráfico de amplitude da Figura E.14 fica claro que esse circuito age como um filtro passa-baixas. Na freqüência de corte, o módulo da função de transferência, $|H(j\omega_c)|$, está 3 dB abaixo do valor máximo. Do gráfico corrigido, tem-se que a freqüência de corte é aproximadamente 55 rad/s, quase a mesma prevista pelo diagrama de Bode aproximado.

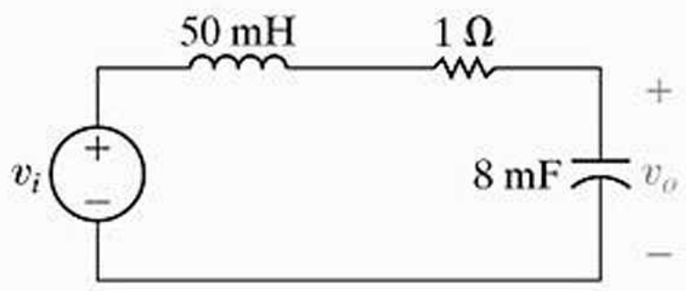


Figura E.13 ▲ Circuito para o Exemplo E.3.

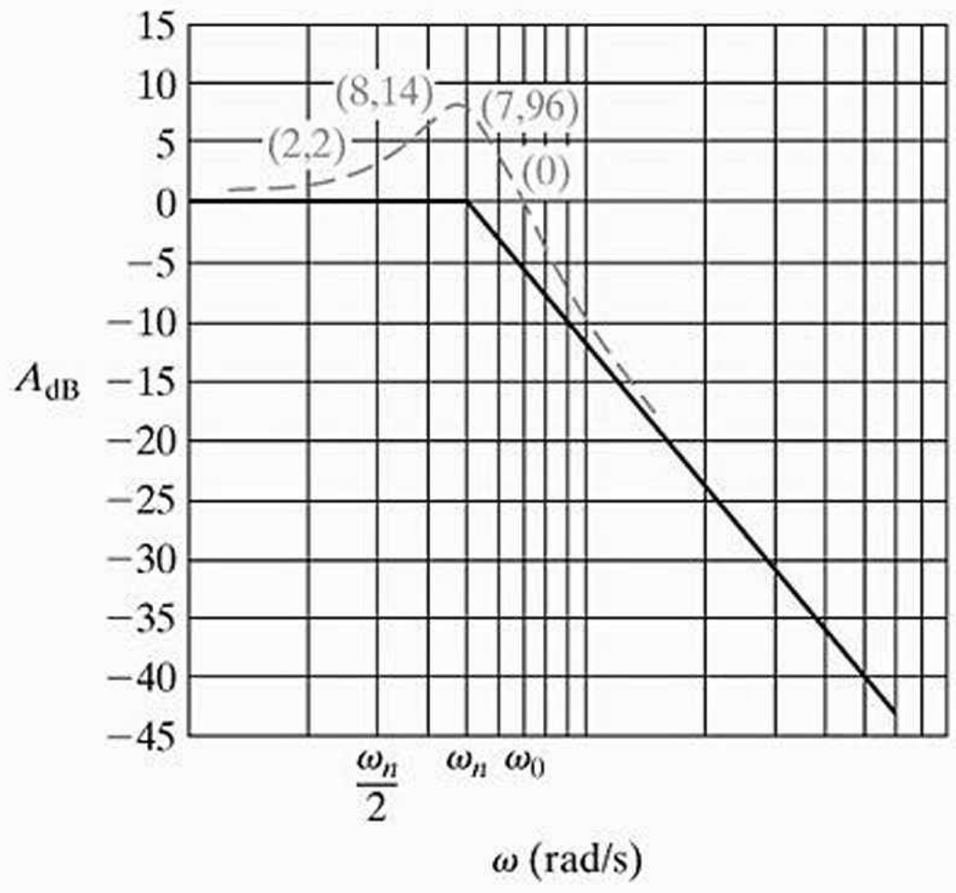


Figura E.14 ▲ O gráfico de amplitude para o Exemplo E.3.

E.8 Gráficos de fase

O gráfico de fase para um par de pólos complexos é a representação gráfica da Equação E.27. O ângulo de fase é zero na freqüência zero e é −90° na freqüência de corte. Aproxima-se de −180° quando ω cresce. Como no caso do gráfico de amplitude, ζ é um fator determinante para a forma exata do gráfico de fase. Para valores pequenos de ζ, o ângulo de fase muda rapidamente na vizinhança da freqüência de corte. A Figura E.15 mostra o efeito de ζ sobre o gráfico de fase.

Também podemos fazer uma aproximação assintótica do gráfico de fase para um par de pólos complexos. Para tal, traçamos uma reta tangente à curva do ângulo de fase na freqüência de corte e estendemos essa reta até que ela intercepte as retas 0° e −180°. A reta tangente à curva do ângulo de fase em −90° tem uma inclinação de $-2{,}3/\zeta$ rad/década ($-132/\zeta$ graus/década) e intercepta as retas de 0° e −180° em $u_1 = 4{,}81^{-\zeta}$ e $u_2 = 4{,}81^{\zeta}$, respectivamente. A Figura E.16 mostra a aproximação assintótica para $\zeta = 0{,}3$ e o gráfico de fase exato. Comparando a aproximação assintótica com a curva exata, percebemos que a aproximação é razoável na vizinhança da freqüência de corte. Contudo, na vizinhança de u_1 e u_2 o erro é bastante grande. O Exemplo E.4 ilustra a construção de diagramas de Bode no caso de um par de pólos complexos.

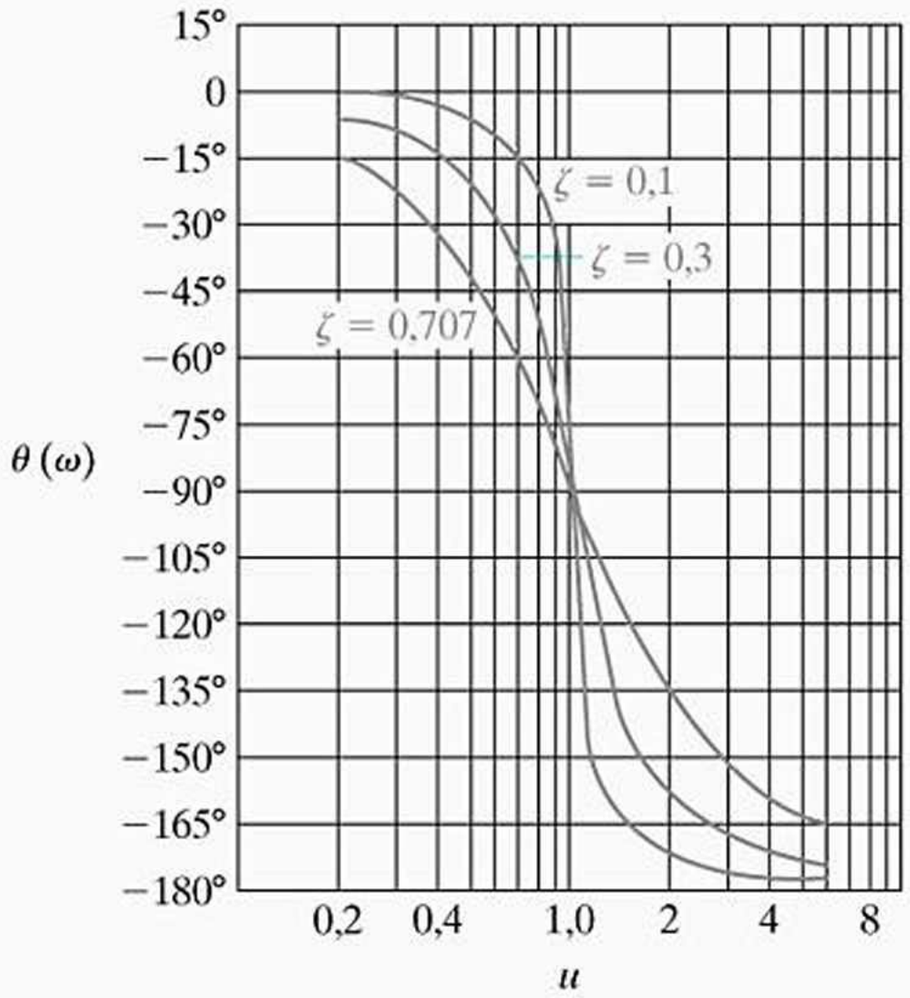


Figura E.15 ▲ Efeito de ζ sobre o gráfico de fase.

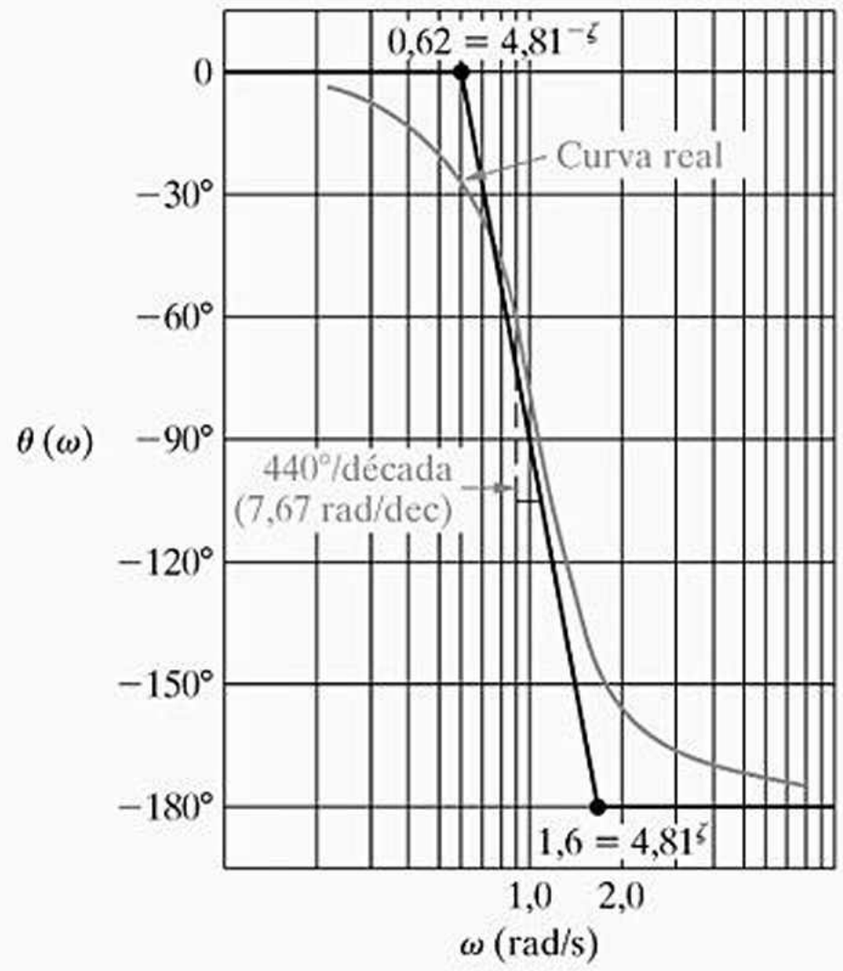


Figura E.16 ▲ Aproximação assintótica do ângulo de fase para um par de pólos complexos.

Exemplo E.4

a) Calcule a função de transferência para o circuito da Figura E.17.

b) Faça um gráfico assintótico para a amplitude de $20 \log_{10}|H(j\omega)|$.

c) Use o gráfico de amplitude assintótica para determinar o tipo de filtro representado por esse circuito e, então, estime sua freqüência de corte.

d) Qual é a freqüência de corte exata?

e) Faça um gráfico de fase assintótico de $H(j\omega)$.

f) Qual é o valor de $\theta(\omega)$ na freqüência de corte obtida no item (c)?

g) Qual é o valor exato de $\theta(\omega)$ na freqüência de corte?

Solução

a) Transforme o circuito da Figura E.17 para o domínio da freqüência e, então, aplique a regra da divisão de tensão nesse domínio para obter

$$H(s) = \frac{\frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}.$$

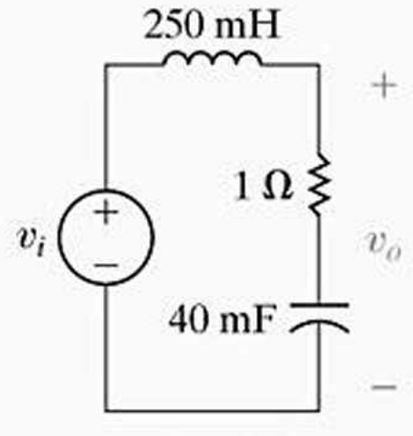


Figura E.17 ▲ Circuito para o Exemplo E.4.

Substituindo os valores dos componentes apresentados no circuito, temos

$$H(s) = \frac{4(s + 25)}{s^2 + 4s + 100}.$$

b) A primeira etapa da construção de diagramas de Bode é escrever $H(j\omega)$ na forma padrão. Como $H(s)$ contém um fator quadrático, verificamos, em primeiro lugar, o valor de ζ. Vemos que $\zeta = 0{,}2$ e $\omega_n = 10$, logo

$$H(s) = \frac{s/25 + 1}{1 + (s/10)^2 + 0{,}4(s/10)},$$

e, portanto,

$$H(j\omega) = \frac{|1 + j\omega/25|\angle\psi_1}{|1 - (\omega/10)^2 + j0{,}4(\omega/10)|\angle\beta_1}.$$

Observe que, para o fator quadrático, $u = \omega/10$, a amplitude de $H(j\omega)$, em decibéis, é

$$A_{dB} = 20 \log_{10}|1 + j\omega/25|$$

$$- 20 \log_{10}\left[\left|1 - \left(\frac{\omega}{10}\right)^2 + j0{,}4\left(\frac{\omega}{10}\right)\right|\right],$$

e o ângulo de fase é

$$\theta(\omega) = \psi_1 - \beta_1,$$

onde

$$\psi_1 = \text{tg}^{-1}(\omega/25),$$

$$\beta_1 = \text{tg}^{-1}\frac{0{,}4(\omega/10)}{1 - (\omega/10)^2}.$$

A Figura E.18 mostra o gráfico de amplitude.

c) Pelo gráfico de amplitude assintótico da Figura E.18, o circuito age como um filtro passa-baixas. Na freqüência de corte, a amplitude de $H(j\omega)$ é 3 dB menor do que a amplitude máxima. Pelo gráfico, prevemos que a freqüência de corte seja, aproximadamente, 13 rad/s.

d) Para calcular a freqüência de corte exata, substitua s por $j\omega$ em $H(s)$, calcule a expressão $|H(j\omega)|$, faça $|H(j\omega_c)| = (1/\sqrt{2})\, H_{max} = 1/\sqrt{2}$ e determine o valor de ω_c. Temos

$$H(j\omega) = \frac{4(j\omega) + 100}{(j\omega)^2 + 4(j\omega) + 100}.$$

Assim,

$$|H(j\omega_c)| = \frac{\sqrt{(4\omega_c)^2 + 100^2}}{\sqrt{(100 - \omega_c^2)^2 + (4\omega_c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Calculando ω_c da expressão acima,

$$\omega_c = 16 \text{ rad/s}.$$

e) A Figura E.19 mostra o gráfico de fase. Observe que o segmento de reta entre 1,0 e 2,5 rad/s não tem a mesma inclinação que o segmento de reta entre 2,5 e 100 rad/s.

f) Pelo gráfico de fase da Figura E.19, estimamos que o ângulo de fase na freqüência de corte (16 rad/s) seja –65°.

g) Podemos calcular o ângulo de fase exato na freqüência de corte fazendo $s = j16$ na função de transferência $H(s)$:

$$H(j16) = \frac{4(j16 + 25)}{(j16)^2 + 4(j16) + 100}.$$

Calculando o ângulo de fase, vemos que

$$\theta(\omega_c) = \theta(j16) = -125{,}0°.$$

Observe o grande erro no ângulo previsto. Em geral, gráficos de fase assintóticos não fornecem resultados satisfatórios na faixa de freqüência em que o ângulo de fase varia. O gráfico de fase assintótico é útil somente para prever o comportamento geral do ângulo de fase e não para estimar os valores exatos do ângulo de fase em freqüências determinadas.

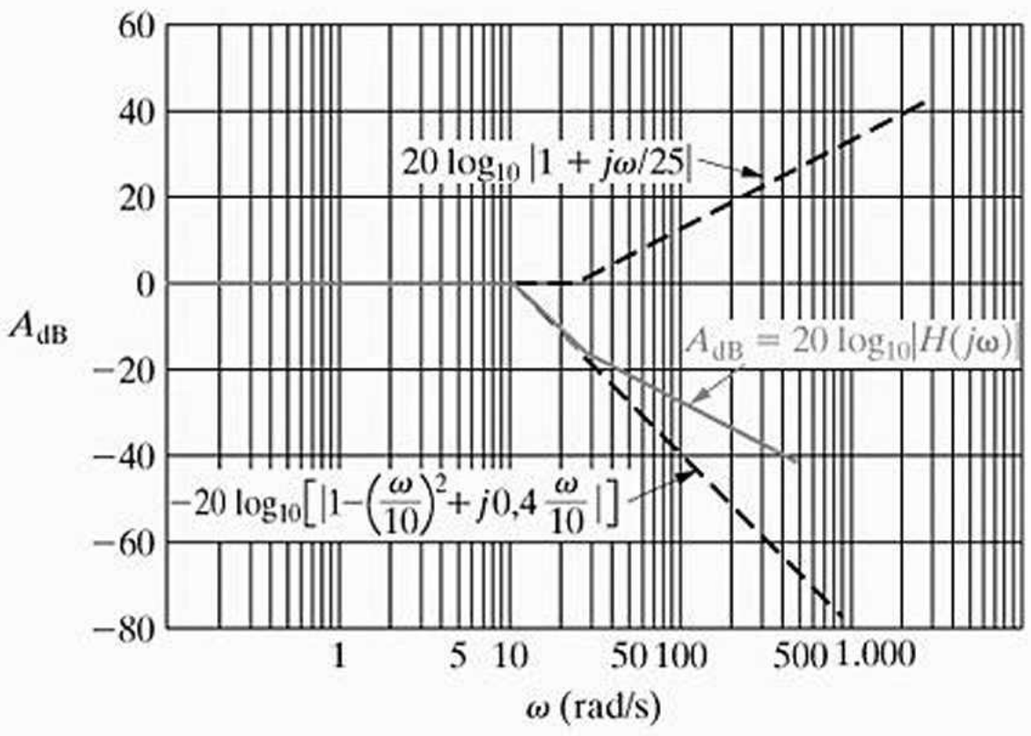


Figura E.18 ▲ Gráfico de amplitude para o Exemplo E.4.

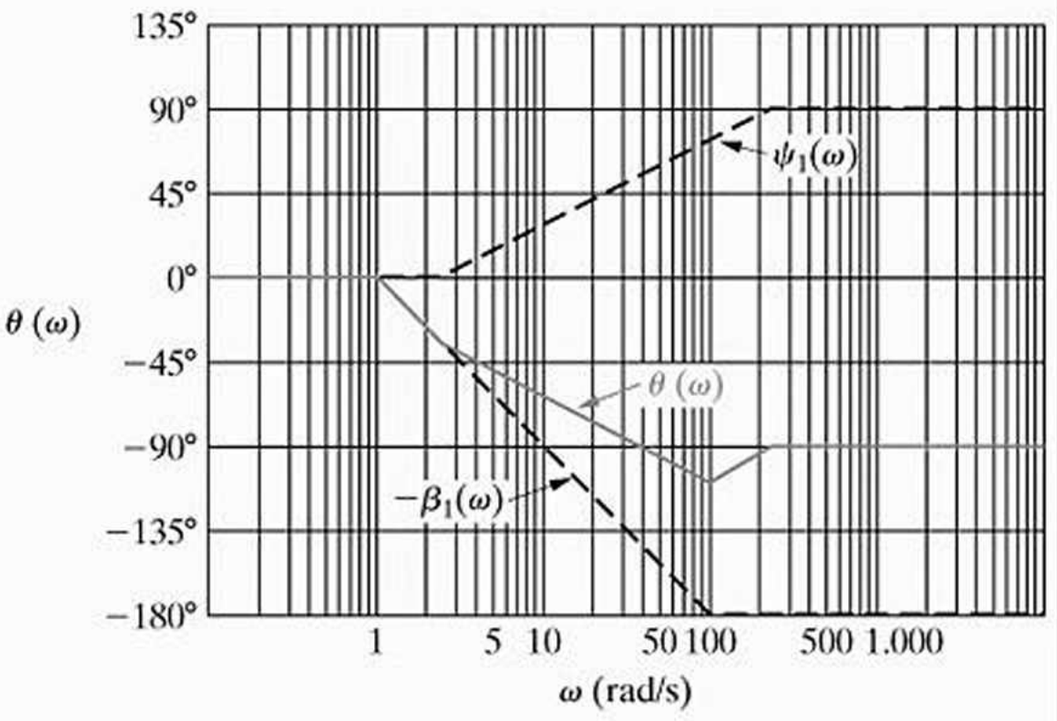


Figura E.19 ▲ Gráfico de fase para o Exemplo E.4.

APÊNDICE

F

Tabela resumida de identidades trigonométricas

1. $\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$

2. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \pm \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

3. $\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

4. $\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$

5. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$

6. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\operatorname{sen}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$

7. $2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$

8. $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)$

9. $2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = \operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta)$

10. $\operatorname{sen}2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$

11. $\cos2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha$

12. $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos2\alpha$

13. $\operatorname{sen}^2\alpha = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos2\alpha$

14. $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \pm \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$

15. $\operatorname{tg}2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$

APÊNDICE

G

Tabela resumida de integrais

1. $\int xe^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax - 1)$

2. $\int x^2e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a^3}(a^2x^2 - 2ax + 2)$

3. $\int x \operatorname{sen} ax\,dx = \frac{1}{a^2}\operatorname{sen} ax - \frac{x}{a}\cos ax$

4. $\int x \cos ax\,dx = \frac{1}{a^2}\cos ax + \frac{x}{a}\operatorname{sen} ax$

5. $\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \operatorname{sen} bx - b \cos bx)$

6. $\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \cos bx + b \operatorname{sen} bx)$

7. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{tg}^{-1}\frac{x}{a}$

8. $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2a^2}\left(\frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{a}\operatorname{tg}^{-1}\frac{x}{a}\right)$

9. $\int \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx\,dx = \frac{\operatorname{sen}(a - b)x}{2(a - b)} - \frac{\operatorname{sen}(a + b)x}{2(a + b)}, \quad a^2 \neq b^2$

10. $\int \cos ax \cos bx\,dx = \frac{\operatorname{sen}(a - b)x}{2(a - b)} + \frac{\operatorname{sen}(a + b)x}{2(a + b)}, \quad a^2 \neq b$

11. $\int \operatorname{sen} ax \cos bx\,dx = -\frac{\cos(a - b)x}{2(a - b)} - \frac{\cos(a + b)x}{2(a + b)}, \quad a^2 \neq b^2$

12. $\int \operatorname{sen}^2 ax\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a}$

13. $\int \cos^2 ax\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a}$

14. $\int_0^\infty \frac{a\,dx}{a^2 + x^2} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, a > 0; \\ 0, a = 0; \\ \frac{-\pi}{2}, a < 0 \end{cases}$

15. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} ax}{x}\,dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, a > 0; \\ \frac{-\pi}{2}, a < 0 \end{cases}$

16. $\int x^2 \operatorname{sen} ax\,dx = \frac{2x}{a^2}\operatorname{sen} ax - \frac{a^2x^2 - 2}{a^3}\cos ax$

17. $\int x^2 \cos ax\,dx = \frac{2x}{a^2}\cos ax + \frac{a^2x^2 - 2}{a^3}\operatorname{sen} ax$

18. $\int e^{ax}\operatorname{sen}^2 bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + 4b^2}\left[(a \operatorname{sen} bx - 2b \cos bx)\operatorname{sen} bx + \frac{2b^2}{a}\right]$

19. $\int e^{ax}\cos^2 bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + 4b^2}\left[(a \cos bx + 2b \operatorname{sen} bx)\cos bx + \frac{2b^2}{a}\right]$

APÊNDICE

H

Respostas dos problemas selecionados

Capítulo 1

1.1 110 gigawatts-horas

1.3 **a)** 111,6 segundos
b) 2.480 bytes

1.6 0,10 mm

1.9 6 sen 4.000t mC

1.12 **a)** 600 W de A a B
b) 2.000 W de B a A
c) 2.400 W de B a A
d) 4.800 W de A a B

1.17 **a)** 3,1 mW
b) 1,24 μJ
c) 21,67 μJ

1.24 **a)** $t = 0{,}634$ s
b) 5,196 mW (fornecida)
c) $t = 2{,}366$ s
d) 5,196 mW (extraída)
e) 0 mJ, 4 mJ, 4 mJ, 0 mJ

1.26 770 mW

Capítulo 2

2.2 1.700 W

2.3 Não é válida por causa das fontes de corrente de 4 A e 5 A no ramo da extrema direita.

2.6 Não é válida, visto que a queda de tensão entre os nós superior e inferior é diferente em razão das tensões diferentes nos ramos da esquerda e da direita.

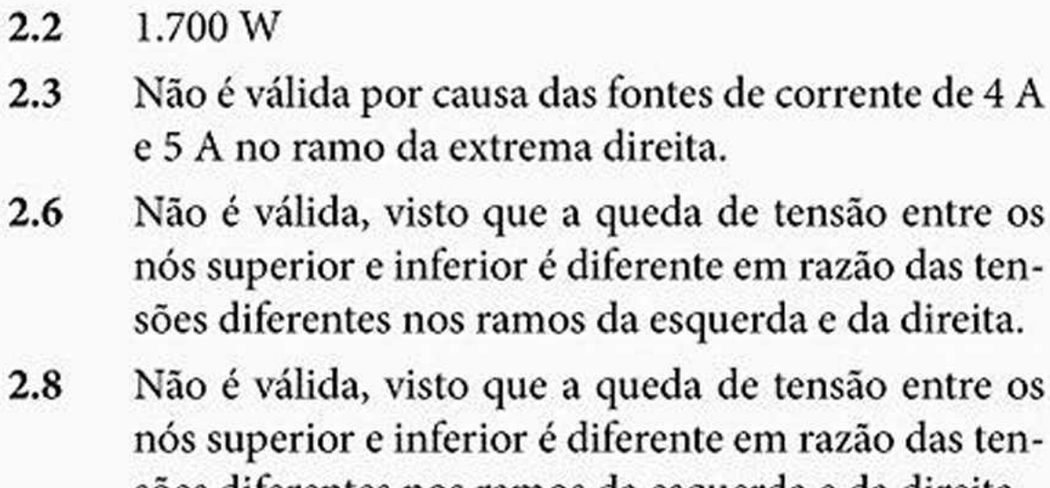
2.8 Não é válida, visto que a queda de tensão entre os nós superior e inferior é diferente em razão das tensões diferentes nos ramos da esquerda e da direita.

2.10 Resistor de 8 kΩ

2.11 Resistor de 4 kΩ

2.14 **a)** Uma fonte de corrente de 5 A em paralelo com um resistor de 20 Ω.
b) 80 W

2.17 **a)**



b) Uma fonte de 75 V em série com um resistor de 200 Ω
c) 125 mA
d) 375 mA
e) 500 mA
f) Um modelo linear não pode prever comportamento não-linear

2.18 **a)** 2 A
b) 0,5 A
c) 40 V
d) 25 W, 80 W, 20 W
e) 125 W

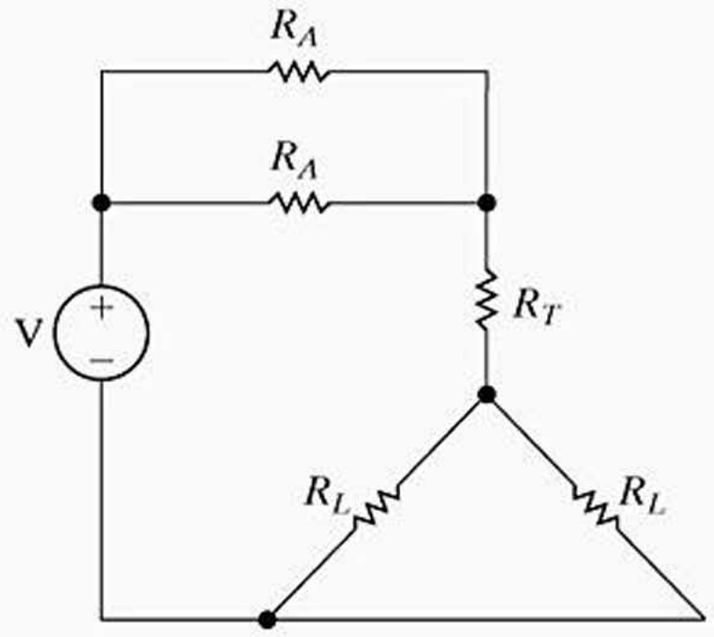
2.19 **a)** 2,4 A, 1,6 A
b) 192 V
c) Potência desenvolvida e dissipada é 768 W

2.24 **a)** 22,22 W, 33,33 W, 11,11 W, 16,67 W, 0 W
b) 83,33 W
c) Potência desenvolvida e dissipada é 83,33 W

2.28 **a)** 4,5 V
b) Potência desenvolvida e dissipada é 741 mW

2.34 $i = 385$ mA, portanto deve ser emitido um sinal de alerta e tomadas precauções

2.35



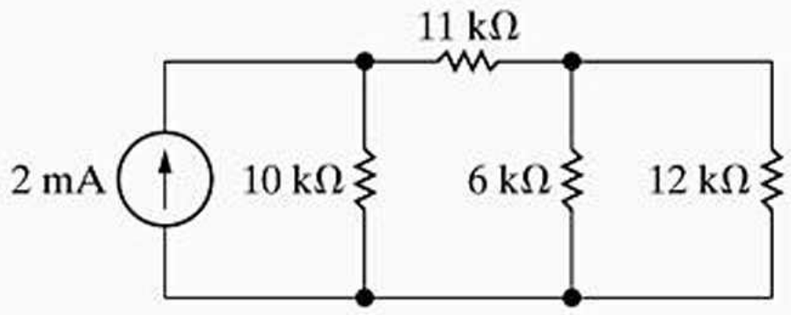
2.36 **a)** $P_{\text{braço}} = 59{,}17$ W; $P_{\text{perna}} = 29{,}59$ W; $P_{\text{tronco}} = 7{,}40$ W
b) $t_{\text{braço}} = 1.414{,}23$ s; $t_{\text{perna}} = 7.071{,}13$ s; $t_{\text{tronco}} = 70.422{,}54$ s
c) Todos os valores são muito maiores do que alguns minutos

2.37 **a)** 40 V
b) Não, 12 V/800 Ω = 15 mA causará um choque

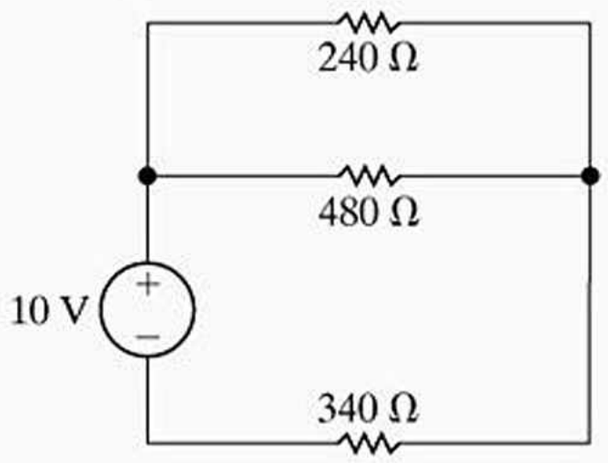
2.38 3.000 V

Capítulo 3

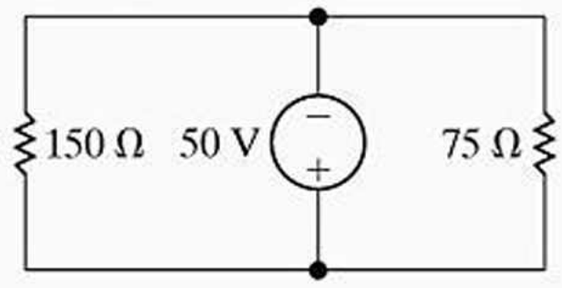
3.1 **a)** 3 kΩ e 8 kΩ, 5 kΩ e 7 kΩ; o circuito simplificado é



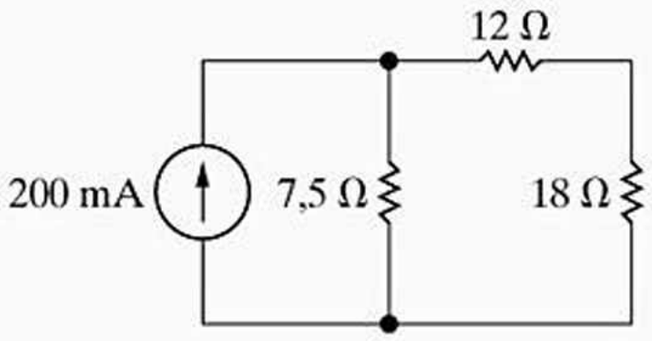
b) 180 Ω e 300 Ω, 140 Ω e 200 Ω; o circuito simplificado é



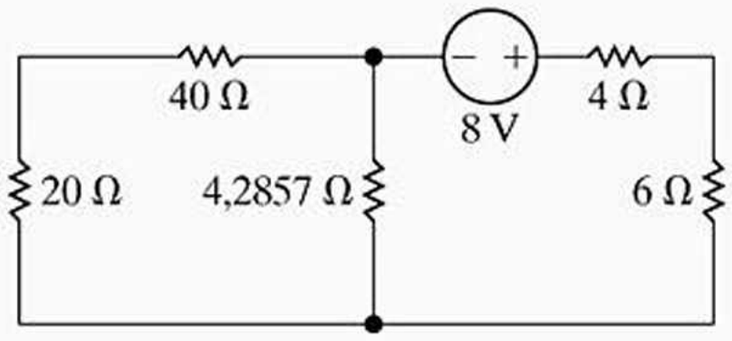
c) 40 Ω, 50 Ω e 60 Ω, 45 Ω e 30 Ω; o circuito simplificado é



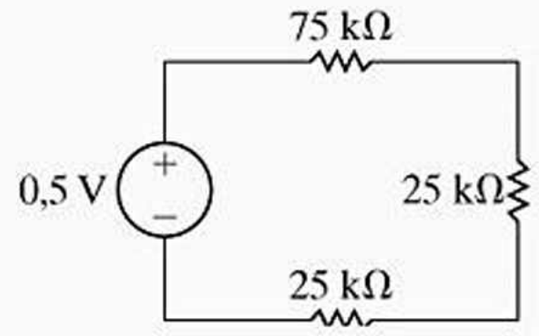
3.2 **a)** 12 Ω e 20 Ω, 28 Ω e 21 Ω; o circuito simplificado é



b) 30 Ω e 5 Ω; 9 Ω e 18 Ω; o circuito simplificado é



c) 100 kΩ e 300 kΩ; 75 kΩ, 50 kΩ e 150 kΩ; o circuito simplificado é



3.5 **a)** 6 kΩ
b) 500 Ω
c) 50 Ω

3.6 **a)** 6 Ω
b) 14 Ω
c) 125 kΩ

3.13 **a)** 66 V
b) 1,88 W, 1,32 W
c) 17.672 Ω, 12.408 Ω

3.15 **a)** 60 kΩ, 15 kΩ
b) 1/8 W

3.21 257,5 Ω, 1.030 Ω, 8.240 Ω, 41,2 kΩ

3.22 **a)** 1,2 mA
b) 12 V
c) 3,2 V
d) 1,33 V

3.23 **a)** 3,2 V
b) 13,33 mA
c) 20 mA

3.30 **a)** $i_m = \dfrac{(25/12)}{50 + (25/12)}(i_{\text{med}}) = \dfrac{1}{25} i_{\text{med}}$
b) 1/2.500
c) Sim

3.33 **a)** 99.950 Ω
b) 4.950 Ω
c) 50 Ω

3.48 **a)** 900 Ω
b) 25 mA
c) 800 Ω, 180 mW
d) 900 Ω, 90 mW

3.52 48 V, 24 V

3.53 **a)** $R_2 — R_3 — R_1$ ligados em Δ tornam-se 3 Ω–18 Ω–6 Ω ligados em Y; resistência equivalente é 50 Ω
b) $R_2 — R_4 — R_5$ ligados em Y tornam-se 90 Ω–270 Ω –45 Ω ligados em Δ; resistência equivalente é 50 Ω
c) Converta a ligação em Δ $R_4 — R_5 — R_6$ para sua equivalente em Y. Converta a ligação em Y $R_3 — R_4 — R_6$ para sua equivalente em Δ.

3.54 99 Ω

3.71 $R_1 = 1{,}0372\ \Omega$, $R_2 = 1{,}1435\ \Omega$, $R_3 = 1{,}2\ \Omega$
$R_4 = 1{,}1435\ \Omega$, $R_5 = 1{,}0372\ \Omega$, $R_a = 0{,}0259\ \Omega$
$R_b = 0{,}0068\ \Omega$ $R_c = 0{,}0068\ \Omega$, $R_d = 0{,}0259\ \Omega$

3.72 $P_{\text{diss}} = 624\ \text{W} = P_{\text{forn}}$

3.73 **a)** $R_1 = 0{,}6106\ \Omega$, $R_2 = 0{,}7122\ \Omega$, $R_3 = 0{,}768\ \Omega$
$R_4 = 0{,}7122\ \Omega$, $R_5 = 0{,}6106\ \Omega$, $R_a = 0{,}0244\ \Omega$
$R_b = 0{,}0066\ \Omega$, $R_c = 0{,}0066\ \Omega$, $R_d = 0{,}0244\ \Omega$
b) $i_1 = 17{,}52$ A, $i_1^2 R_1 = 187{,}5$ W ou 150 W/m;
$i_2 = 16{,}23$ A, $i_2^2 R_2 = 187{,}5$ W ou 150 W/m;
$i_b = 33{,}75$ A, $i_b^2 R_b = 7{,}5$ W ou 150 W/m;
$P_{\text{forn}} = 997{,}5\ \text{W} = P_{\text{diss}}$

Capítulo 4

4.1 **a)** 5
b) 3
c) $-i_g + i_1 + i_2 = 0$, $-i_1 + i_4 + i_3 = 0$, $i_5 - i_2 - i_3 = 0$
d) 2
e) $R_1 i_1 + R_3 i_3 - R_2 i_2 = 0$, $R_3 i_3 + R_5 i_5 - R_4 i_4 = 0$

4.2 **a)** 11
b) 10
c) 11
d) 10
e) 5
f) 5
g) 7

4.3 **a)** 2
b) 5
c) 7
d) 1, 4, 7

4.4 **a)** 10
b) 4
c) 4
d) Evite as três malhas com fontes de corrente

4.6 10 V

4.9 25 V, 90 V

4.10 **a)** 4 A, 2 A, 2 A, 3 A, –1 A
b) 582 W

4.19 375 W

4.20 **a)** 165 W
b) 165 W

4.21 3,2 V

4.26 200 V, 1,2 W

4.27 26 V

4.31 **a)** 9,8 A, –0,2 A, –10 A
b) –1,72 A, 1,08 A, 2,8 A

4.32 **a)** 1.140 W, desenvolvida
b) 1.140 W, absorvida

4.37 98 W

4.38 2.700 W

4.41 **a)** 2.643,36 W
b) 6.847,36 W
c) verificado

4.42 **a)** –5,2 mA
b) 200 mW
c) 2,912 mW

4.47 99 W

4.50 **a)** 5,7 A, 4,6 A, 0,97 A, –1,1 A, 3,63 A
b) 1.319,685 W

4.54 **a)** O método das correntes de malha porque requer um número menor de equações
b) 4 mW
c) Não — você pode resolver para a tensão das correntes de malha
d) 200 mW

4.56 **a)** É mais fácil formular as equações de restrição se usarmos o método das tensões de nó
b) 180 W

4.59 **a)** 3 mA
b) 3 mA

4.62 **a)** 1 A
b) 1 A

4.63 48 V, 16 Ω

4.66 8 mA (para baixo), 10 kΩ

4.67 **a)** 45,28 V
b) –5,67%

4.71 –86,40 V, 43,2 kΩ

4.77 0 V, 8 Ω

4.79 16,67 Ω, 150 Ω

4.80 **a)** 12 Ω
b) 48 W

4.91 **a)** 38 V
b) 72,2 W

4.92 30 V

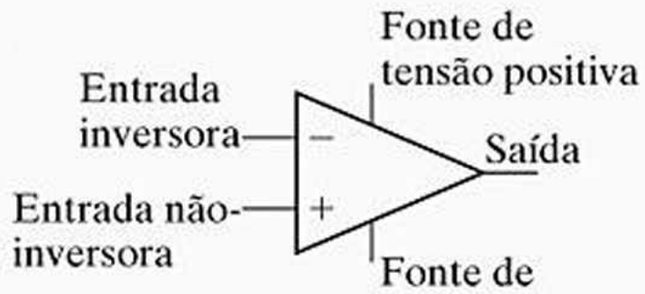
4.105 $v_1 = 39{,}583$ V, $v_2 = 102{,}5$ V

4.106 $v_1 = 37{,}5$ V, $v_2 = 105$ V

4.107 $v_1 = 52{,}083$ V, $v_2 = 117{,}5$ V

Capítulo 5

5.1 **a)**



b) A resistência de entrada; $i_n = 0$
c) O ganho de tensão de laço aberto; $(v_p - v_n) = 0$
d) $v_o = -4$ V

5.2 **a)** –12 V
b) –18 V (satura)
c) 10 V
d) –14 V
e) 18 V (satura)
f) 2,8125 V $\leq v_a \leq$ 7,3125 V

5.3 –3,1 mA

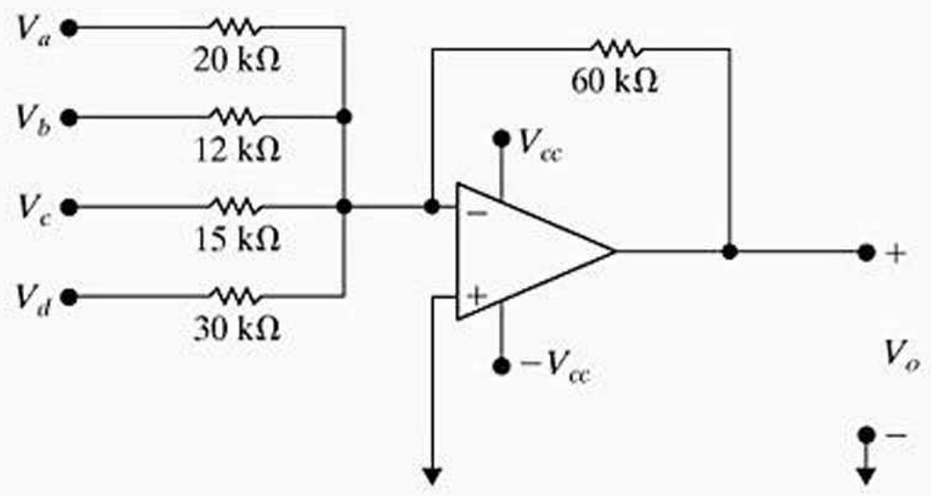
5.8 **a)** Amplificador não-inversor
b) 4,5 V

5.9 **a)** Muitos projetos possíveis; um usa um único resistor de entrada de 10 kΩ e quatro resistores de 10 kΩ ligados em série no caminho da realimentação
b) ±10 V

5.12 **a)** Amplicador somador inversor
b) –6 V
c) $-7{,}5\ \text{V} \leq v_c \leq 1{,}5\ \text{V}$

5.13 **a)** –6 V
b) $8{,}4\ \text{V} \leq v_b \leq 13{,}2\ \text{V}$

5.15



5.17 **a)** Amplificador não-inversor
b) $3{,}75v_s$
c) $-2{,}4\ \text{V} \leq v_s \leq 4\ \text{V}$

5.18 **a)** 7,56 V
b) $-3{,}97\ \text{V} \leq v_g \leq 3{,}97\ \text{V}$
c) 35 kΩ

5.24 20 kΩ

5.25 **a)** –15,95 V
b) $-638\ \text{mV} \leq v_b \leq 962\ \text{mV}$

5.26 **a)** 56,25 mV
b) 114,3 kΩ
c) 80 kΩ

5.32 **a)** 19,975
b) –0,05
c) 399,5

5.33 $32{,}89\ \text{k}\Omega \leq R_x \leq 33{,}11\ \text{k}\Omega$

5.42 **a)** –19,9844
b) 736,1 μV
c) 5.003,68 Ω
d) –20, 0 V, 5.000 Ω

5.43 **a)** 30,98
b) 999,5 mV, 999,87 mV
c) 367,94 μV
d) 836,22 pA
e) 31, 1 V, 0 V, 0 A

5.48 **a)** 2 kΩ
b) 12 mΩ

Capítulo 6

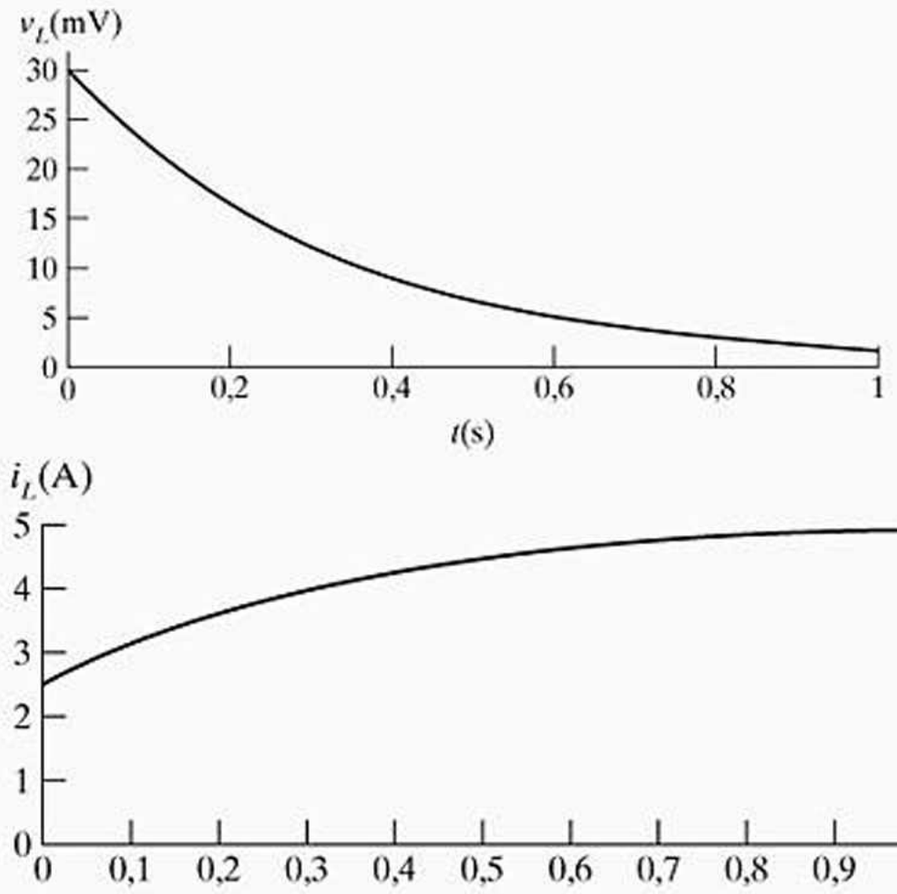
6.1 **a)**

$i = 0$	$t < 0$
$i = 16t$ A	$0 \leq t \leq 25$ ms
$i = 0{,}8 - 16t$ A	$25 \leq t \leq 50$ ms
$i = 0$	50 ms $< t$

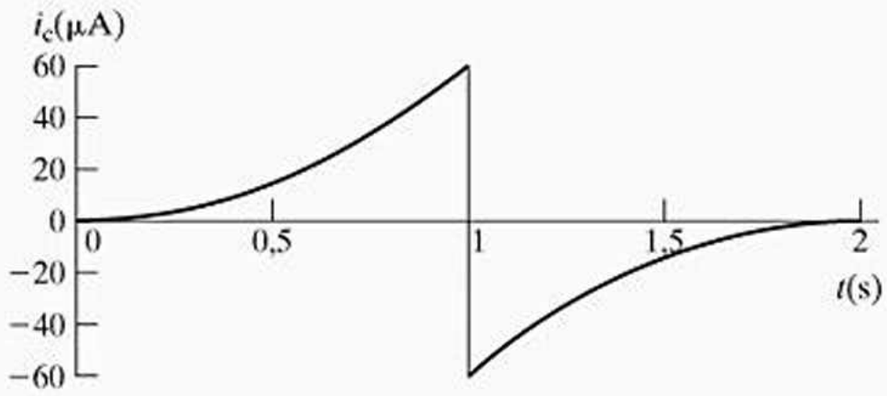
b)

$v = 0$	$t < 0$
$v = 6$ V	$0 < t < 25$ ms
$v = -6$ V	$25 < t < 50$ ms
$v = 0$	50 ms $< t$
$p = 0$	$t < 0$
$p = 96t$ W	$0 < t < 25$ ms
$p = 96t - 4{,}8$ W	$25 < t < 50$ ms
$p = 0$	50 ms $< t$
$w = 0$	$t < 0$
$w = 48t^2$ J	$0 < t < 25$ ms
$w = 48t^2 - 4{,}8t + 0{,}12$ J	$25 < t < 50$ ms
$w = 0$	50 ms $< t$

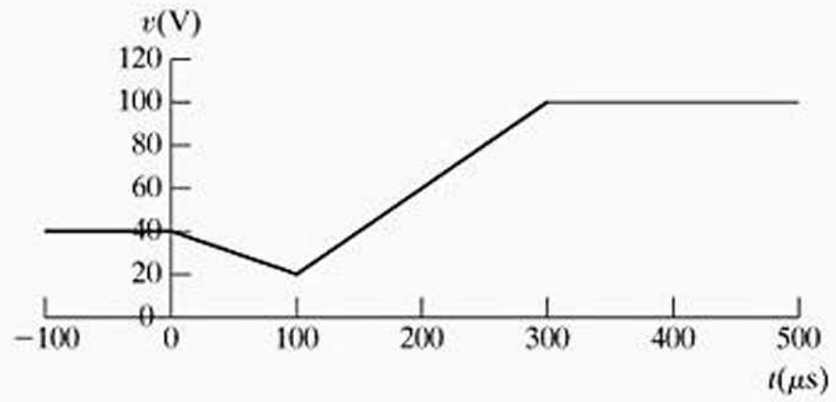
6.3



6.14



6.15 **a)** $-200 \times 10^3 t + 40$ V
b) $4 \times 10^5 t - 20$ V
c) 100 V
d)



6.21 20 H

6.22 **a)** $-12e^{-20t}$ A
b) $-9e^{-20t} + 13$ A
c) $-3e^{-20t} - 13$ A
d) 540 J
e) 3.920 J
f) 3.380 J
g) $\frac{1}{2}(10)(13)^2 + \frac{1}{2}(30)(13)^2 = 3380$ J (verificado)

6.26 5 nF, tensão inicial é –10 V

6.27 **a)** $30e^{-2.500t}$ V
b) $18e^{-2.500t} + 27$ V
c) $12e^{-2.500t} - 27$ V
d) 5,4 μJ
e) 23,625 μJ
f) 18,225 μJ
g) $\frac{1}{2}(20 \times 10^{-9})(27)^2 + \frac{1}{2}(30 \times 10^{-9})(27)^2 =$ 18,225 μJ

6.34 **a)** $40\frac{di_2}{dt} + 90i_2 = -5\frac{di_g}{dt}$
b) $40[-e^{-t} + 11{,}25e^{-2{,}25t}] + 90[e^{-t} - 5e^{-2{,}25t}] = 50e^{-t}$
c) $-105e^{-t} + 56{,}26e^{-2{,}25t}$ V
d) –48,75 V, que é consistente com o comportamento do circuito

6.42 **a)** 160 mH, 1,25
b) $0{,}25 \times 10^{-6}$ Wb/A, $0{,}25 \times 10^{-6}$ Wb/A

6.43 2,8 nWb/A, 3,6 nWb/A

6.47 **a)** 18,5 J
b) 18,5 J
c) 6,5 J
d) 6,5 J

6.48 **a)** –5 A
b) Não

6.49 $v = \frac{1}{3}v_s(t) + v(0)$

6.51 **a)** $2C\frac{dv}{dt} = 0$
b) $3C\frac{dv}{dt} = 0$

Capítulo 7

7.1 **a)** 5 A
b) 40 ms
c) $5e^{-25t}$ A, $-400e^{-25t}$ V, $-500e^{-25t}$ V
d) 9,02%

7.2 **a)** 0,2 mA, 0,2 mA
b) 0,2 mA,–0,2 mA
c) $0{,}2e^{-10^5t}$ mA
d) $-0{,}2e^{-10^5t}$ mA
e) A corrente em um resistor pode mudar instantaneamente

7.3 **a)** 0 A
b) 62,5 mA
c) 87,5 mA
d) 62,5 mA
e) 150 mA
f) 0 A
g) $62{,}5e^{-4.000t}$ mA
h) 0 V
i) –12,5 V
j) 0 V
k) $-12{,}5e^{-4.000t}$ V
l) $150 - 62{,}5e^{-4.000t}$ mA

7.21 **a)** $15e^{-125t}$mA, $60e^{-125t} + 15$ V, $-15e^{-125t} + 15$ V
b) 5.625 μJ
c) 1.125 μJ, 4.500 μJ

7.24 **a)** $39{,}6e^{-2.000t}$ mA
b) 14,05%

7.33 $9 + 3e^{-80.000t}$ mA,$-60e^{-80.000t}$ V

7.34 **a)** $4 + 2e^{-4.000t}$ A, $16 - 16e^{-4.000t}$ V
b) –40 V, 0 V

7.35 **a)** $3 - 19e^{-2.000t}$ A
b) $15 + 285e^{-2.000t}$ V

7.50 **a)** $40 - 40e^{-5.000t}$ V
b) $2 - e^{-5.000t}$ mA
c) $2 + 4e^{-5.000t}$ mA
d) $8 - 4e^{-5.000t}$ mA
e) 6 mA

7.51 $15 - 105e^{-4.000t}$ V

7.53 **a)** 120 V
b) –150 V
c) 2 ms
d) –5,4 mA
e) $-150 + 270e^{-500t}$ V
f) $5{,}4e^{-500t}$ mA

7.54 **a)** –30 V
b) 25 V
c) 2,5 ms
d) 1,97 ms

7.65 **a)** $0{,}2 - 0{,}2e^{-10.000t}$ A
b) $15e^{-10.000t}$ V
c) $0{,}25 - 0{,}25e^{-10.000t}$ A
d) $-50 + 50e^{-10.000t}$ mA
e) Sim

7.67 **a)** $40 - 40e^{-5.000t}$ mA
b) $10e^{-5.000t}$ V
c) $16 - 16e^{-5.000t}$ mA

d) $24 - 24e^{-5.000t}$ mA

e) Sim

7.72 −559,12 mV

7.76 $v_o = 100$ V, $0 \leq t \leq 250$ ms;
$v_o = 100e^{-1.000(t-0,25)}$ V, 250 ms $\leq t < \infty$

7.86 **a)** 2

b) 529,83 μs

7.87 173,23 μs

7.92 25 ms

7.93 $30.000t - 30$ mV, $10 + 5e^{-2.000t}$ mV,
$30.000t - 40 - 5e^{-2.000t}$ mV

7.103 **a)** 1,091 MΩ

b) 0,29 s

7.104 **a)** 8,55 flashes/min

b) 559,3 kΩ

7.105 **a)** 24,3 flashes/min

b) 99,06 mA

c) $ 43,39 por ano

Capítulo 8

8.1 **a)** −5.000 rad/s, −20.000 rad/s

b) superamortecida

c) 7.812,5 Ω

d) $-8.000 + j6.000$ rad/s, $-8.000 - j6.000$ rad/s

e) 6.250 Ω

8.2 **a)** 800 Ω, 200 mH, 12.500 rad/s,10.000 rad/s

b) $-6,25e^{-5.000t} + 25e^{-20.000t}$ mA
$5e^{-5.000t} - 5e^{-20.000t}$ mA
$1,25e^{-5.000t} - 20e^{-20.000t}$ mA

8.3 **a)** 800 mH

b) 2.500 Ω

c) 125 V

d) 12,5 mA

e) $e^{-4.000t}(12,5 \cos 3.000t + 68,75 \text{ sen } 3.000t)$ mA

8.4 **a)** 10 kΩ, 12,5 nF, -5×10^5 V/s, 25 V

b) $(25.000t - 7,5)e^{-4.000t}$ mA

8.5 **a)** 100 rad/s, 80 rad/s, 6,25 H, 25 μF, 20 mA, −5mA

b) $-5e^{-160t} + 5e^{-40t}$ V

c) $-25e^{-160t} + 25e^{-40t}$ mA

d) $5e^{-160t} - 20e^{-40t}$ mA

8.19 $-140e^{-2.000t} + 200e^{-8.000t}$ V

8.20 $60e^{-4.000t} \cos 3.000t - 320e^{4.000t} \text{ sen } 3.000t$ V

8.21 $(60 - 132 \times 10^4 t)e^{-10.000t}$ V

8.25 $15 - 40e^{-50t} - 5e^{-200t}$ mA

8.26 $15 - 45e^{-80t} \cos 60t - 10e^{-80t} \text{ sen } 60t$ mA

8.27 $15 - 1.500te^{-100t} - 45e^{-100t}$ mA

8.45 $40 - 40e^{-5.000t} \cos 5.000t - 40e^{-5.000t} \text{ sen } 5.000t$ V

8.46 $40 - 200.000te^{-5.000t} - 40e^{-5.000t}$ V

8.47 $40 - 53,33e^{-2.000t} + 13,33e^{-8.000t}$ V

8.58 **a)** $0 \leq t \leq 0,2$ s: $25t^2$ V, $-4t$ V; $0,2 \text{ s} \leq t \leq t_{sat}$: $-6,25t^2 + 12,5t - 1,25$ V, $t - 1$ V

b) 2,844 s

8.59 $0 \leq t \leq 0,2$ s: $25 - 50e^{-t} + 25e^{-2t}$ V, $-2 + 2e^{-2t}$ V;
$t \geq 0,2$ s: $-6,25 + 22,38e^{-(t-0,2)} - 15,31e^{-2(t-0,2)}$ V,
$0,5 - 1,66e^{-2(t-0,2)}$ V

8.64 **a)** 55,23 μs

b) 262,42 V

c) $t_{max} = 53,63$ μs, $v(t_{max}) = 262,15$ V

8.65 **a)** 40 mJ

b) −27.808,04 V

c) 568,15 V

Capítulo 9

9.1 **a)** 120 Hz

b) 8,33 ms

c) 100 V

d) 70,71 V

e) 45°, 0,7854 rad

f) 1,042 ms

g) 3,125 ms

9.5 **a)** 170 V

b) 60 Hz

c) 377 rad/s

d) −1,05 rad

e) −60°

f) 16,67 ms

g) 2,78 ms

h) $-170 \text{ sen } 120\pi t$ V

i) 25/18 ms

j) 25/9 ms

9.8 $\frac{V_m}{2}$

9.9 **a)** $-1,84e^{-533,33t} + 2 \cos(400t + 23,13°)$ A

b) $-1,84e^{-533,33t}$ A, $2 \cos(400t + 23,13°)$ A

c) 133,61 mA

d) 2 A, 400 rad/s, 23,13°

e) 36,87°

9.12 **a)** 50 Hz

b) −90°

c) 40 Ω

d) 127,32 mH

e) $j40$ Ω

9.13 **a)** 251.327,41 rad/s

b) 90°

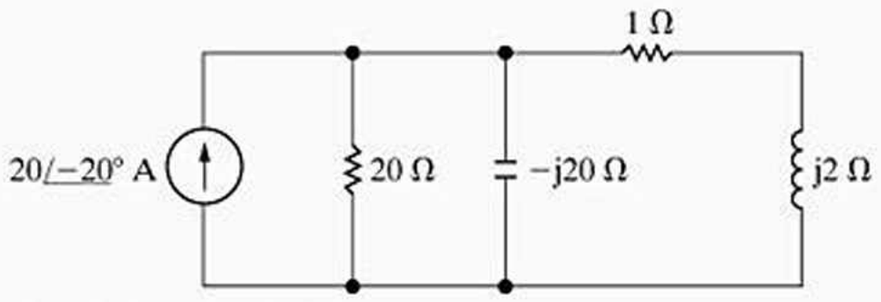
c) −19,89 Ω

d) 0,2 μF

e) $-j19,89$ Ω

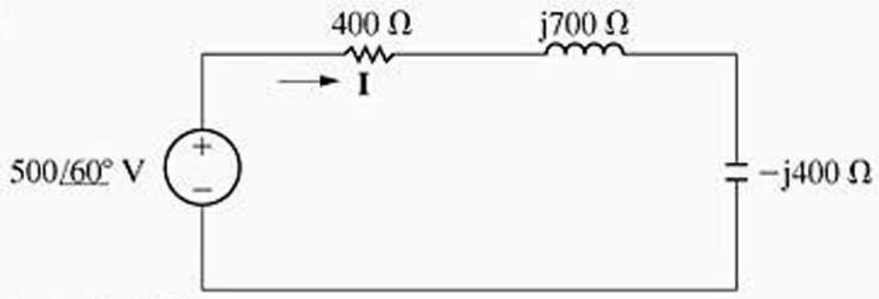
9.14 **a)** $5\angle 72°\ \Omega$
b) $50\ \mu s$

9.15 **a)**



b) $46{,}4\angle 34{,}46°$ V
c) $46{,}4\cos(5 \times 10^4 t + 34{,}46°)$ V

9.16 **a)**



b) $1\angle 23{,}13°$ A
c) $1\cos(8.000t + 23{,}13°)$ A

9.21 **a)** $223{,}6\angle 26{,}57°$ mS
b) 200 mS
c) 100 mS
d) 2,24 A

9.26 5.000 rad/s

9.27 $33{,}94\cos(5.000t + 45°)$ V

9.28 $32\cos(8.000t + 90°)$ V

9.34 $2/3\ \Omega$

9.40 $60\angle -36{,}87°$ V, $8{,}64 + j11{,}52\ \Omega$

9.41 $8\angle -36{,}87°$ A, $50 - j25\ \Omega$

9.47 20 A, $0{,}4 - j1{,}2\ \Omega$

9.51 $15{,}81\angle 18{,}43°$ V

9.56 $72 + j96 = 120\angle 53{,}13°$ V

9.58 $12\cos 5.000t$ V

9.61 $11{,}31\cos(5.000t - 45°)$ V

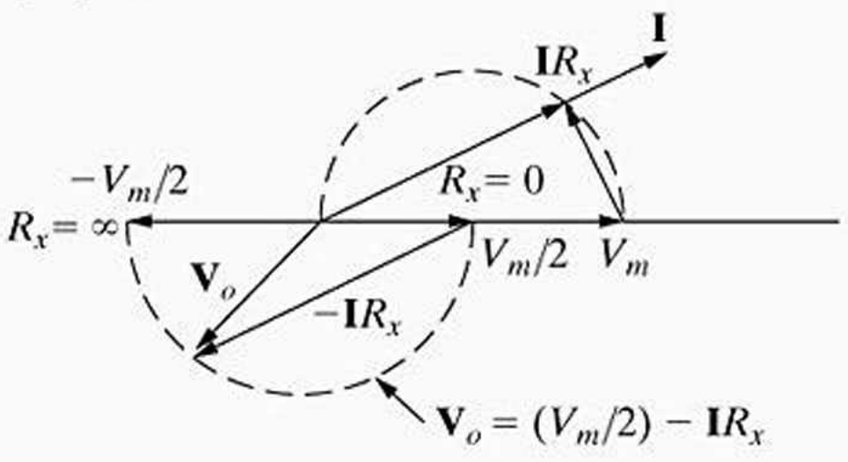
9.72 **a)** $18{,}03\cos(10.000t - 56{,}31°)$ A, $5\cos(10.000t - 180°)$ A
b) 0,5
c) 112,5 mJ, 37,5 mJ

9.73 **a)** 0,5657
b) 1,5 A

9.77 $800 + j600\ \Omega$

9.81 **a)** $247 + j7{,}25 = 247{,}11\angle 1{,}68°$ V
b) $-j32\ \Omega$, $241 + j8 = 241{,}13\angle 1{,}90°$ V
c) $-j26{,}90\ \Omega$

9.82



9.85 **a)** $\mathbf{I}_1 = 24\angle 0°$ A, $\mathbf{I}_2 = 2{,}04\angle 0°$ A, $\mathbf{I}_3 = 21{,}96\angle 0°$ A, $\mathbf{I}_4 = 19{,}40\angle 0°$ A, $\mathbf{I}_5 = 4{,}6\angle 0°$ A, $\mathbf{I}_6 = 2{,}55\angle 0°$ A
b) $0{,}42\angle 0°$ A

9.86 **a)** 0 A
b) 0,436 A
c) Quando as duas cargas são iguais, mais corrente é extraída do primário.

Capítulo 10

10.2 **a)** 2.404,16 W (abs), 2.404,16 VAR (abs)
b) 155,29 W (abs), −579,56 VAR (forn)
c) −427,53 (forn),−1.174,62 VAR (forn)
d) −307,82 W (forn), 845,72 VAR (abs)

10.3 **a)** Sim
b) Sim

10.13 **a)** 60 V(ef)
b) 300 W

10.17 **a)** −80 W(forn), 60 VAR, 100 VAR
b) Equilibra (80 W)
c) Equilibra (80 VAR)

10.21 **a)** 0,9 atrasada, 0,43; 0,43 adiantada; −0,9; 0,57 adiantada, −0,82
b) 0,94 atrasada, 0,343

10.22 **a)** $72 - j24 = 75{,}89\angle -18{,}43°\ \Omega$
b) 0,9487 adiantada

10.41 **a)** $30 + j10\ \text{k}\Omega$
b) 16,875 mW

10.44 **a)** $140\angle 0°$ V(ef)
b) 280 W
c) 9,72%

10.45 **a)** 3.240 W
b) 6.480 W

10.49 **a)** 9 W
b) 20 Ω, 8 mH
c) 17,31 W, sim
d) 18,75 W
e) 30 Ω, 9 mH
f) Sim

10.50 **a)** 8 mH, 31,62 Ω, 18,26 W
b) Sim
c) Sim

10.58 160 W

10.59 **a)** 8
b) 250 W

10.66 **a)** 28,8 Ω
b) 28,8 Ω
c) Sim

10.67 **a)** $P_L = \dfrac{V^2}{R_1 + R_2}$ $\qquad P_M = \dfrac{V^2}{R_2}$

$$P_H = \frac{V^2(R_1 + R_2)}{R_1 R_2} = \frac{\dfrac{V^2 V^2}{P_L}}{\left(\dfrac{V^2}{P_L} - \dfrac{V^2}{P_M}\right)\left(\dfrac{V^2}{P_M}\right)}$$

$$= \frac{P_M^2}{P_M - P_L}$$

b) 1.125 W

10.68 36 Ω, 24 Ω

Capítulo 11

11.1 **a)** abc
b) acb

11.2 **a)** Equilibrado, seqüência de fase positiva
b) Equilibrado, seqüência de fase negativa
c) Equilibrado, seqüência de fase positiva
d) Equilibrado, seqüência de fase negativa
e) Não equilibrado, amplitudes desiguais
f) Não equilibrado, separação de ângulo de fase desigual

11.8 $v_{AB} = 13.799{,}25 \cos(\omega t - 30°)$ V
$v_{BC} = 13.799{,}25 \cos(\omega t + 90°)$ V
$v_{CA} = 13.799{,}25 \cos(\omega t - 150°)$ V

11.9 **a)** 32,84 A(ef)
b) 12.845,94 V(ef)

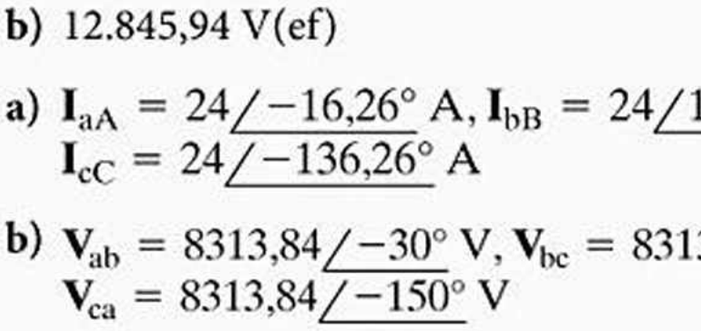
11.10 **a)** $\mathbf{I}_{aA} = 24\angle -16{,}26°$ A, $\mathbf{I}_{bB} = 24\angle 103{,}74°$ A, $\mathbf{I}_{cC} = 24\angle -136{,}26°$ A

b) $\mathbf{V}_{ab} = 8313{,}84\angle -30°$ V, $\mathbf{V}_{bc} = 8313{,}84\angle 90°$ V, $\mathbf{V}_{ca} = 8313{,}84\angle -150°$ V

c) $\mathbf{V}_{AN} = 4659{,}96\angle -4{,}37°$ V, $\mathbf{V}_{BN} = 4659{,}96\angle 115{,}63°$ V, $\mathbf{V}_{CN} = 4659{,}96\angle -124{,}37°$ V

d) $\mathbf{V}_{AB} = 8071{,}28\angle -34{,}37°$ V, $\mathbf{V}_{BC} = 8071{,}28\angle 85{,}63°$ V, $\mathbf{V}_{CA} = 8071{,}28\angle -154{,}37°$ V

11.14 **a)**



b) 0,23∠156,87° A(ef)
c) 35,3∠116,63° V(ef)

11.15 159,5∠29,34° V(ef)

11.16 10,82∠71,34° A(ef)

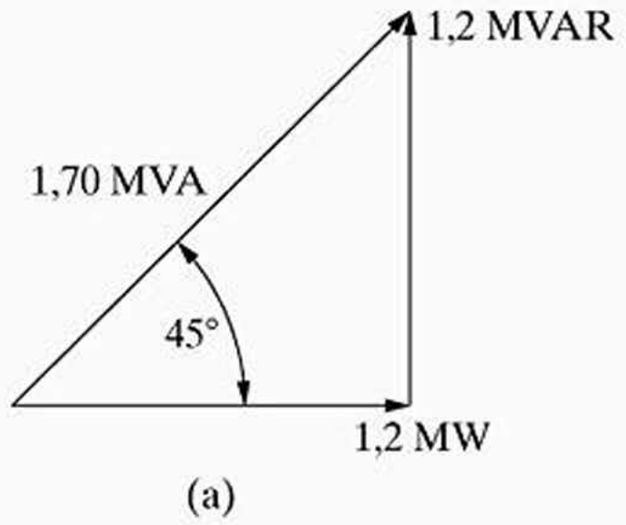
11.24 6120∠36,61° VA

11.25 **a)** 1833,46∠22° VA
b) 519,62 V(ef)

11.41 197,29 W, 476,63 W

11.42 **a)** $W_2 - W_1 = V_L I_L[\cos(\theta - 30°) - \cos(\theta + 30°)]$
$= 2V_L I_L \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} 30° = V_L I_L \operatorname{sen}\theta$
Assim, $\sqrt{3}\,(W_2 - W_1) = \sqrt{3}\,V_L I_L \operatorname{sen}\theta = Q^T$
b) −4.172,79 VAR

11.52 **a)**



(a)

b)



11.53 **a)** 16,71 μF
b) 50,14 μF

11.54 É $|\mathbf{V}_{ab}| = 12.548{,}8$ V, portanto a tensão está abaixo do nível aceitável de 13 kV. Assim, quando a carga na subestação cai a zero, o banco de capacitores deve ser desligado.

11.55 $P_{L(antes)} = 81{,}66$ kW, $P_{L(depois)} = 40{,}83$ kW

Capítulo 12

12.1 **a)** $(120 + 30t)[(u(t+4) - u(t)] + (120 - 30t)[u(t) - u(t-8)] + (-360 + 30t)[u(t-8) - u(t-12)]$

b) $\left(50 \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}t\right)u(t) - \left(50 \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}t\right)u(t-4)$

c) $(30 - 3t)t[u(t) - u(t-10)]$

12.2 **a)** $(2{,}5t + 50)u(t+20) - 2{,}5tu(t) + (5t - 50)u(t-10)$

b) $5(t+9)u(t+9) - 5(t+6)u(t+6) - 5(t+3)u(t+3) + 5(t-3)u(t-3) + 5(t-6)u(t-6) - 5(t-9)u(t-9)$

12.5 **a)** 1,0
b) 0
c) ∞

12.6 **a)** 52
b) 6,25

12.7 3/8

12.13 **a)** $\dfrac{1}{(s+a)^2}$

b) $\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$

c) $\dfrac{\omega\cos\theta + s\,\text{sen}\,\theta}{s^2+\omega^2}$

d) $\dfrac{1}{s^2}$

e) $\dfrac{\text{senh}\,\theta + s[\cosh\theta]}{(s^2-1)}$

12.17 **a)** $\dfrac{1}{s(s+a)}$

b) $\dfrac{1}{s^3}$

c) verificado

12.18 **a)** $\dfrac{s\omega}{s^2+\omega^2}$

b) $\dfrac{-\omega^2}{s^2+\omega^2}$

c) 2

d) verificado

12.24 **a)** $\dfrac{dF(s)}{ds} = \dfrac{d}{ds}\left[\int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt\right]$

$= -\int_{0^-}^{\infty} tf(t)e^{-st}\,dt$

Portanto $\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\dfrac{dF(s)}{ds}$

b) $\dfrac{d^2F(s)}{ds^2} = \int_{0^-}^{\infty} t^2 f(t)e^{-st}\,dt$

$\dfrac{d^3F(s)}{ds^3} = \int_{0^-}^{\infty} -t^3 f(t)e^{-st}\,dt$

Portanto $\dfrac{d^nF(s)}{ds^n} = (-1)^n\int_{0^-}^{\infty} t^n f(t)e^{-st}\,dt$

$= (-1)^n\mathcal{L}\{t^n f(t)\}$

c) $\mathcal{L}\{t^5\} = \dfrac{120}{s^6}$

$\mathcal{L}\{t\,\text{sen}\,\beta t\} = \dfrac{2\beta s}{(s^2+\beta^2)^2}$

$\mathcal{L}\{e^{-t}t\cosh t\} = \dfrac{s^2+2s+2}{s^2(s+2)^2}$

12.25 **a)** $\displaystyle\int_s^{\infty} F(u)\,du = \int_s^{\infty}\left[\int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-ut}\,dt\right]du$

$\displaystyle= \int_{0^-}^{\infty}\left[\int_s^{\infty} f(t)e^{-ut}\,du\right]dt$

$\displaystyle= \int_{0^-}^{\infty} f(t)\int_s^{\infty} e^{-ut}\,du\,dt$

$\displaystyle= \int_{0^-}^{\infty} f(t)\left[\frac{e^{-tu}}{-t}\bigg|_s^{\infty}\right]dt$

$\displaystyle= \int_{0^-}^{\infty} f(t)\left[\frac{-e^{-st}}{-t}\right]dt$

$\displaystyle= \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}$

b) $\mathcal{L}\{t\,\text{sen}\,\beta t\} = \dfrac{\beta}{s^2+\beta^2}$

12.26 $\dfrac{200s^2}{(s^2+40s+64)(s^2+100)}$

12.40 **a)** $[3e^{-t} + 6e^{-2t} + 9e^{-3t}]u(t)$

b) $[10 + 5e^{-2t} - 8e^{-3t} + e^{-5t}]u(t)$

c) $[5e^{-2t} + 10e^{-6t}\cos(8t - 53{,}13°)]u(t)$

d) $[8 + 50e^{-7t}\cos(24t + 16{,}26°)]u(t)$

12.41 **a)** $[40t - 8 + 16e^{-10t}]u(t)$

b) $[10 - 40te^{-2t} + 20e^{-2t}]u(t)$

c) $[10t - 5 + 10e^{-2t}\cos(t + 53{,}13°)]u(t)$

d) $[(2t - 1{,}5t^2 + 1)e^{-2t}]u(t)$

e) $[50te^{-t}\cos(2t - 16{,}26°) + 20e^{-t}\cos(2t + 36{,}87)]u(t)$

12.42 **c)** $\delta'(t) + 5\delta(t) + 50e^{-20t}u(t)$

12.47 **a)** $f(0^+) = 18, f(\infty) = 0$

b) $f(0^+) = 8, f(\infty) = 10$

c) $f(0^+) = 11, f(\infty) = 0$

d) $f(0^+) = 56, f(\infty) = 8$

Capítulo 13

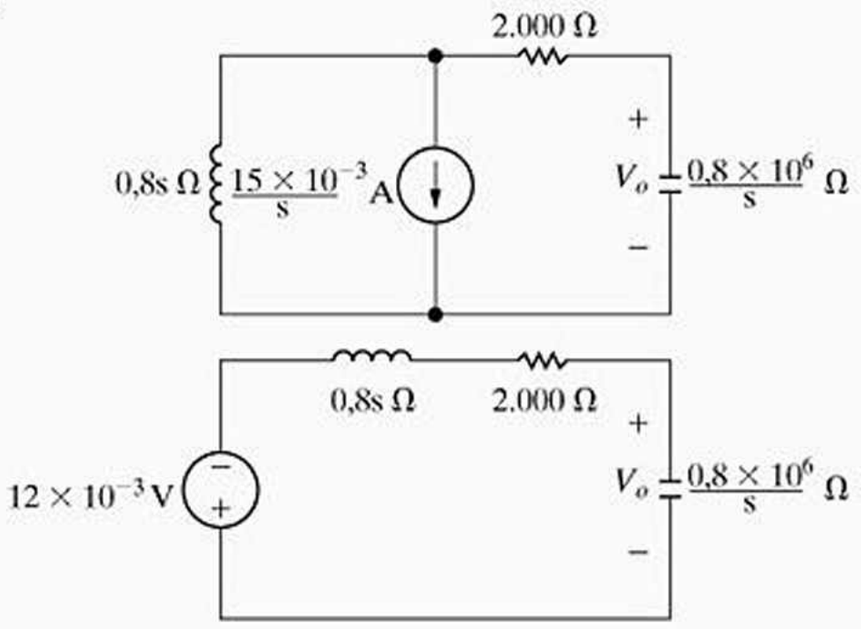
13.4 **a)** $\dfrac{5[s^2 + 2000s + 10^7]}{s}$

b) Zeros em $-1.000 + j3.000$ rad/s e $-1.000 - j3.000$ rad/s; pólo em 0

13.5 **a)** $\dfrac{25\times10^6 s}{s^2 + 5000s + 4\times10^6}$

b) Zero em 0; pólos em −1.000 rad/s e −4.000 rad/s.

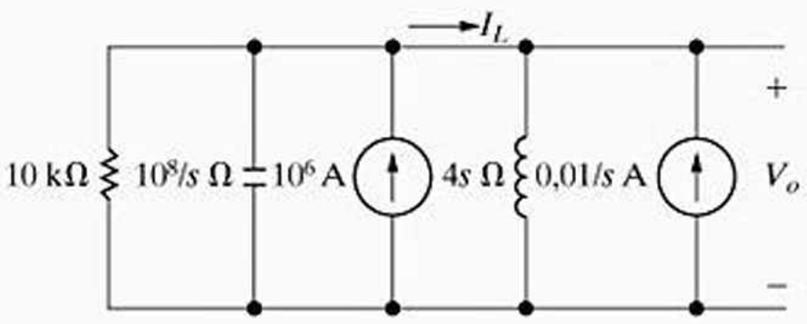
13.9 **a)**



b) $\dfrac{-12.000}{s^2 + 2500s + 10^6}$

c) $(-8e^{-500t} + 8e^{-2.000t})u(t)$ V

13.10 **a)**



b) $\dfrac{100(s + 10^4)}{s^2 + 10^4 s + 25 \times 10^6}$

c) $\dfrac{-0{,}01(s + 7.500)}{(s + 5.000)^2}$

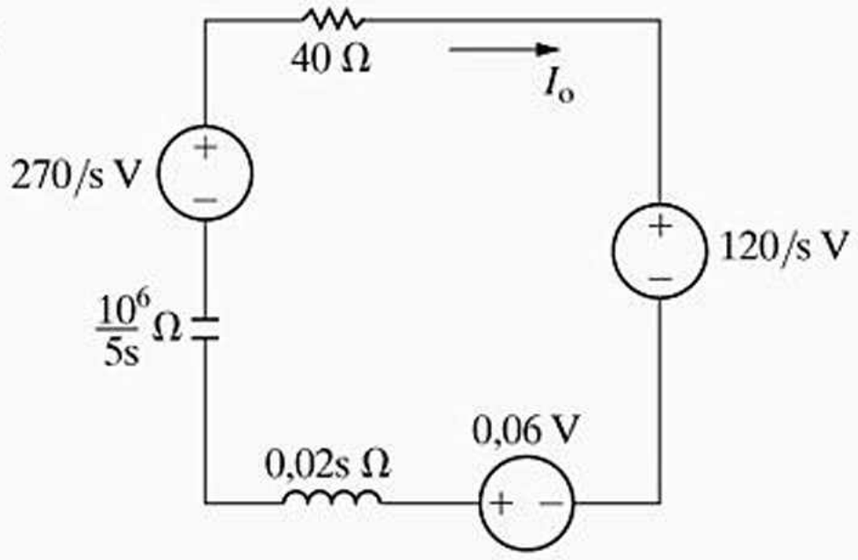
d) $[5 \times 10^5 te^{-5.000t} + 100e^{-5.000t}]u(t)$ V

e) $-[25.000t + 10]e^{-5.000t}u(t)$ mA

13.15 **a)** $[5 - 6e^{-5t} + 4e^{-20t}]u(t)$ V

b) Compare as soluções em $t = 0$ e $t = \infty$ para o circuito em $t = 0$ e $t = \infty$.

13.16 **a)**



b) $\dfrac{3(s + 2.500)}{s^2 + 2000s + 10^7}$

c) $3{,}35e^{-1.000t}\cos(3.000t - 26{,}57°)u(t)$ A

13.26 **a)** $256e^{-40.000t} - 4e^{-10.000t})u(t)$ V

b) $(75 + 5e^{-10.000t} - 80e^{-40.000t})u(t)$ mA

c) Compare soluções em $t = 0$ e $t = \infty$ para o circuito em $t = 0$ e $t = \infty$

13.27 **a)** $\dfrac{15s^2 + 15s + 24}{s(s + 2)(s + 3)}, \dfrac{12s^2 + 63s + 24}{s(s + 2)(s + 3)}$

b) Valores iniciais: 15 A, 12 A; valores finais: 4 A, 4 A

c) $(4 - 27e^{-2t} + 38e^{-3t})u(t)$ A,
$(4 + 27e^{-2t} - 19e^{-3t})u(t)$ A

13.35 $[5 - 5.000te^{-1.000t} - 5e^{-1.000t}]u(t)$ mA

13.36 **a)** $\dfrac{276{,}25(s + 400)}{s(s + 200)(s + 850)}$

b) Valor inicial é 0, valor final é 650 mA

c) $(650 - 425e^{-200t} - 225e^{-850t})u(t)$ mA

13.37 **a)** $(51e^{-200t} - 51e^{-850t})u(t)$ mA

b) $(-51e^{-200t} + 51e^{-850t})u(t)$ mA

13.42 **a)** $\dfrac{6 \times 10^4(s + 4.000) + 96 \times 10^6}{s(s + 2.000)(s + 3.000)}$

b) $(56 - 108e^{-2.000t} + 52e^{-3.000t})u(t)$ V

13.49 **a)** $\dfrac{50}{s + 50}$, nenhum zero, pólo em −50 rad/s

b) $\dfrac{s}{s + 50}$, zero em 0, pólo em −50 rad/s

c) $\dfrac{s}{s + 3 \times 10^6}$, zero em 0, pólo em -3×10^6 rad/s

d) $\dfrac{3 \times 10^6}{s + 3 \times 10^6}$, nenhum zero, pólo em -3×10^6 rad/s

e) $\dfrac{100}{s + 125}$, nenhum zero, pólo em −125 rad/s

13.57 $(e - 1)e^{-t}$ V

13.58 $(1 - e)e^{-t}$ V

13.74 $50\cos(8.000t + 36{,}87°)$ V

13.75 **a)** $\dfrac{-16 \times 10^4 s}{(s + 8.000)(s + 16.000)}$

b) $4\cos(8.000t - 161{,}57°)$ V

13.76 **a)** $\dfrac{s(s + 9.000)}{(s + 2.000)(s + 4.000)}$

b) $(35e^{-2.000t} - 25e^{-4.000t})u(t)$ V

c) $11{,}68\cos(2.000t + 30{,}96°)$ V

13.83 **a)** 80 V

b) 20 V

c) 0 V

d) $32\delta(t)$ μA

e) 16 V

f) 4 V

g) 20 V

13.84 **a)** 0,8 A

b) 0,6 A

c) 0,2 A

d) −0,6 A

e) $0{,}6e^{-2 \times 10^6 t}u(t)$ A

f) $-0{,}6e^{-2 \times 10^6 t}u(t)$ A

g) $[-1{,}6 \times 10^{-3}\delta(t)] - [7.200e^{-2 \times 10^6 t}u(t)]$ V

13.89 **a)** $i_2(0^-) = i_2(0^+) = 0$ A;
$i_L(0^-) = i_L(0^+) = 35{,}36$ A

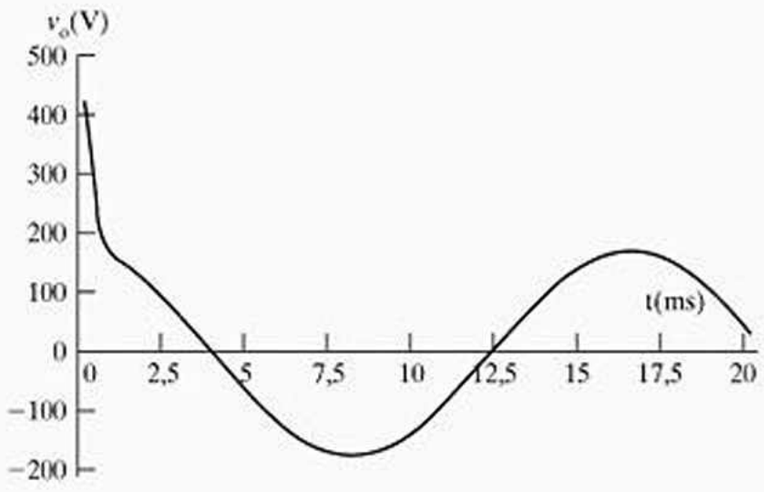
b) $V_0 = \dfrac{1.440\pi(122{,}92\sqrt{2}s - 3.000\pi\sqrt{2}}{(s + 1.475\pi)(s^2 + 14.400\pi^2)} + \dfrac{300\sqrt{2}}{s + 1.475\pi}$

$v_0 = 252{,}89e^{-1.475\pi t} + 172{,}62\cos(120\pi t + 6{,}85°)$ V

$v_0(0^+) = 424{,}26$ V

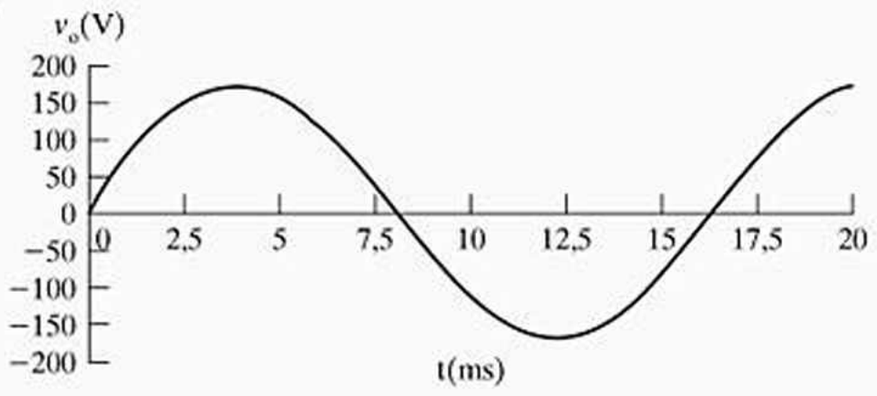
c) $\mathbf{V}_0 = 122{,}06\angle 6{,}85°$ V(ef)

d)



13.90 **a)** $-20{,}58e^{-1.475\pi t} + 172{,}62\cos(120\pi t - 83{,}15°)$ V

b)



c) Picos de tensão no Problema 13.89, mas não aqui.

Capítulo 14

14.1 **a)** 954,93 Hz

b) $H(j\omega_c) = 0{,}7071\angle -45°$, $H(j0{,}3\omega_c) = 0{,}9578\angle -16{,}70°$, $H(j3\omega_c) = 0{,}3162\angle -71{,}57°$

c) $v_o(\omega_c) = 35{,}36\cos(6.000t - 45°)$ V

$v_o(0{,}3\omega_c) = 47{,}89\cos(1.800t - 16{,}70°)$ V

$v_o(3\omega_c) = 15{,}81\cos(18.000t - 71{,}57°)$ V

14.2 **a)** 392,70 Ω

b) 1.640,85 Hz

14.12 **a)** 9,95 kΩ

b) 917,03 Hz

14.13 **a)** 4 kΩ

b) 60 kΩ

14.21 **a)** 1 Mrad/s

b) 159,15 kHz

c) 7,5

d) 935,55 krad/s

e) 148,90 kHz

f) 1.068,89 krad/s

g) 170,12 kHz

h) 21,22 kHz

14.22 **a)** 8 kΩ, 16 mH

b) 7,57 kHz, 8,37 kHz

c) 795,77 Hz

14.33 **a)** 8 Mrad/s

b) 1,27 MHz

c) 16

d) 7,75 Mrad/s

e) 1,234 MHz

f) 8,25 Mrad/s

g) 1,31 Mrad/s

h) 79,58 kHz

14.34 **a)** 254,65 Ω, 101,32 μH

b) 46,97 kHz, 53,22 kHz

c) 6,25 kHz

14.43 **a)** 0,39 H, 0,10 μF

b) $|V_{697\text{Hz}}| = |V_{941\text{Hz}}| = 0{,}707|V_{\text{pico}}|$

$|V_{770\text{Hz}}| = |V_{852\text{Hz}}| = 0{,}948|V_{\text{pico}}|$

c) $|V_{1.209\text{Hz}}| = 0{,}344|V_{\text{pico}}|$

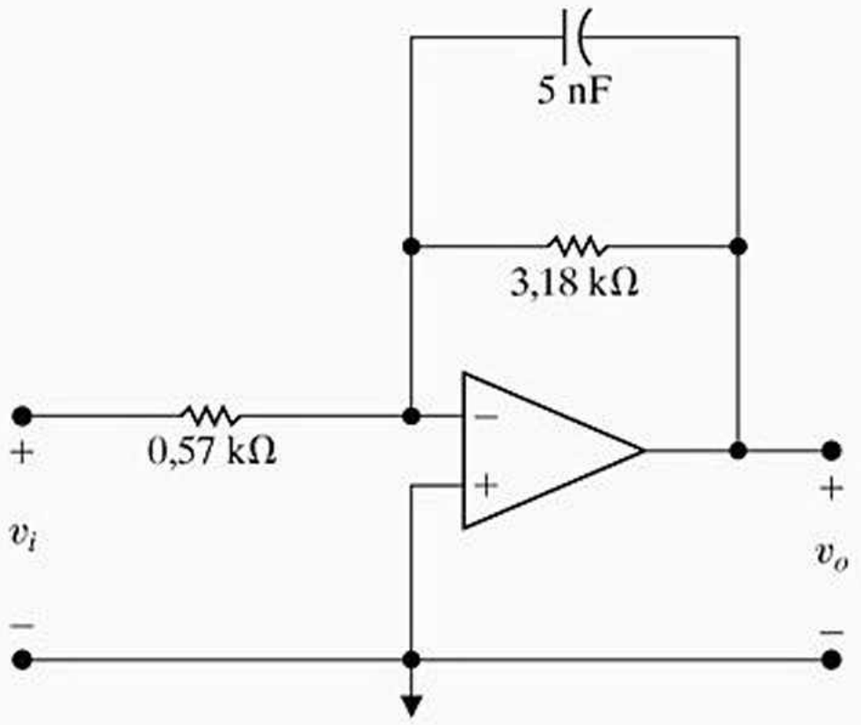
14.44 $L = 0{,}225$ H, $C = 0{,}057$ μF, $0{,}344|V_{\text{pico}}|$

14.45 63,7 vezes maior do que os tons DTMF

Capítulo 15

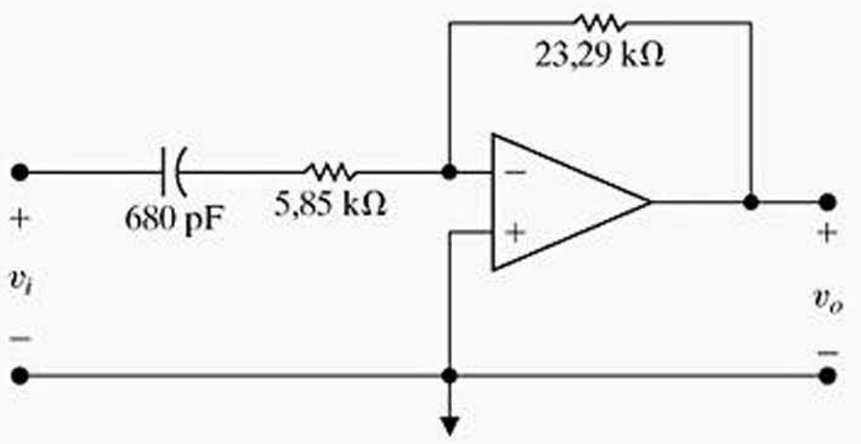
15.4 **a)** $R_1 = 0{,}57$ kΩ, $R_2 = 3{,}18$ kΩ

b)



15.7 **a)** $R_1 = 5{,}85$ kΩ, $R_2 = 23{,}29$ kΩ

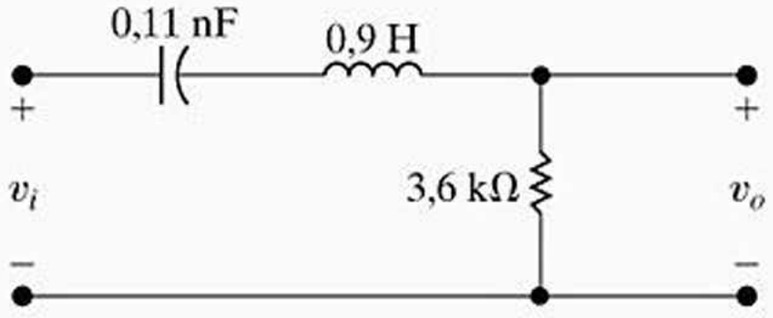
b)



15.13 **a)** 1 H, 1 F, 0,04 Ω

b) 0,9 H, 0,11 nF, 3,6 kΩ

c)

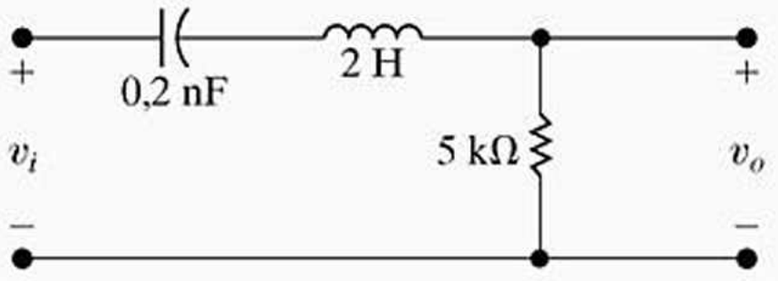


15.14 **a)** $1/L = 1/Q$ F

b) $\dfrac{(1/Q)s}{s^2 + (1/Q)s + 1}$

c) 5 kΩ, 2 H, 0,2 nF

d)



e) $\dfrac{2500s}{s^2 + 2500s + 25 \times 10^8}$

15.30 $f_{C1} = 1.291{,}4$ Hz, $f_{C2} = 49.037{,}85$ Hz,
$R_L = 21{,}64\ \Omega$, $R_H = 821{,}64\ \Omega$

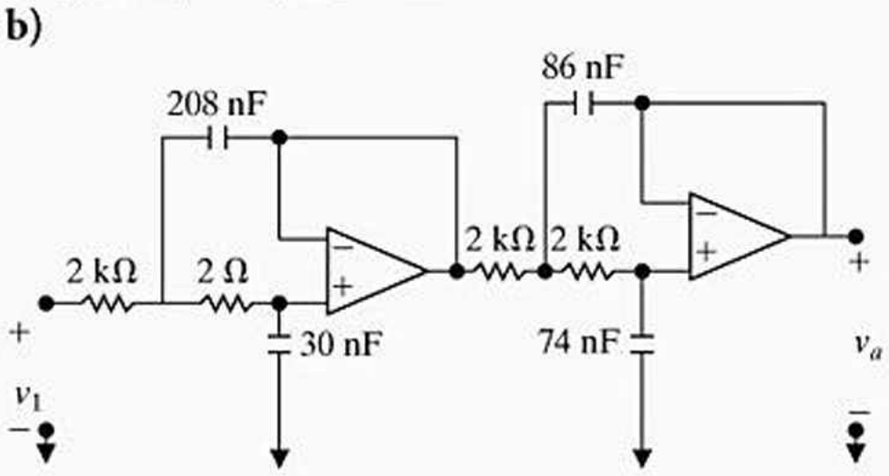
15.31 $R_L = 784{,}6\ \Omega$, $R_H = 20{,}7\ \Omega$; se $R_i = 1$ kΩ, então
$R_f = 4$ kΩ

15.33 **a)** 4

b) –48,16 dB

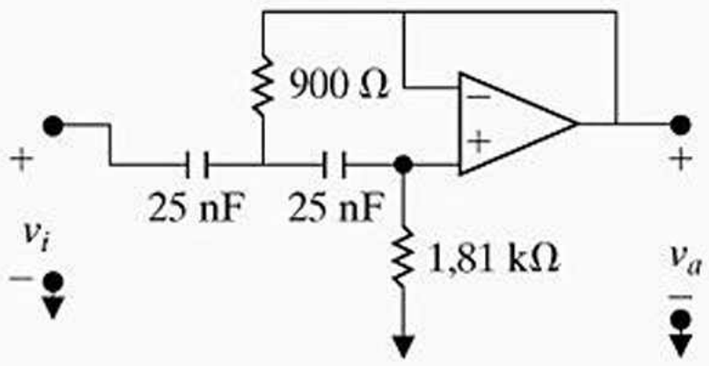
15.36 **a)** Primeiro estágio: 208,05 nF, 30,44 nF; segundo estágio: 86,12 nF, 73,53 nF

b)



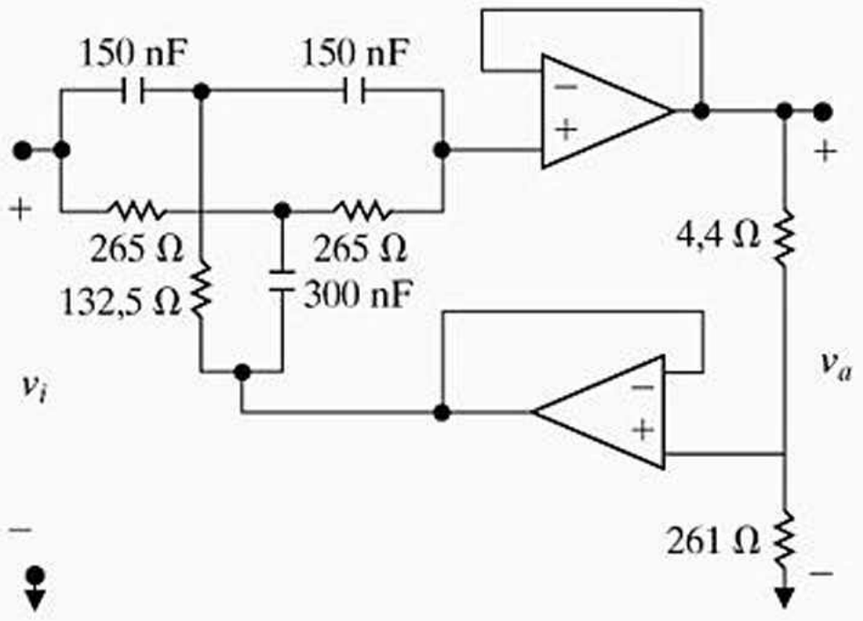
15.37 **a)** 900,32 Ω, 1.800,63 Ω

b)



15.58 **a)** $R = 265\ \Omega$, $\sigma R = 261\ \Omega$, $(1 - \sigma)R = 4{,}4\ \Omega$, $C = 150$ nF, $2C = 300$ nF

b)



c) $\dfrac{s^2 + 64 \times 10^6\pi^2}{s^2 + 533{,}33\pi s + 64 \times 10^6\pi^2}$

15.59 Escolha $R_1 = 11{,}1$ kΩ, $R_2 = 100$ kΩ. Então,
$C = 39$ nF, $|H(j\omega)|_{max} = 20{,}01$ dB,
$|H(j/R_2C_1)| = 17{,}04$ dB

15.60 Escolha $R_1 = 100$ kΩ, então $R_2 = 400\ \Omega$, $C_1 = 7{,}96$ nF

Capítulo 16

16.1 **a)** $\omega_{oa} = 69.813{,}17$ rad/s, $\omega_{ob} = 785.398{,}16$ rad/s

b) $f_{oa} = 11.111{,}11$ Hz, $f_{ob} = 125$ kHz

c) $a_{ra} = 0$, $a_{rb} = 18{,}75$ V

d) $a_{ka} = 0$ para todo k; $b_{ka} = 0$ para k par;

$$b_{ka} = \frac{200}{\pi k}\left[2 - \cos\frac{\pi k}{3}\right] \text{ V para } k \text{ ímpar}$$

$$a_{kb} = \frac{50}{k\pi}\left\{\operatorname{sen}\frac{k\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{k\pi}{2}\right\} \text{ V para todo } k;$$

$b_{kb} = 0$ para todo k

e) $v_a(t) =$

$$\frac{200}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n}\left(2 - \cos\frac{n\pi}{3}\right)\operatorname{sen} n\omega_o t \text{ V}$$

$$v_b(t) = 18{,}75 +$$

$$\frac{50}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}\right)\cos n\omega_o t \text{ V}$$

16.2 **a)** $\dfrac{4V_m}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n}\operatorname{sen} n\omega_o t$ V

b) $\dfrac{2V_m}{\pi}\left[1 + 2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1 - 4n^2}\cos n\omega_o t\right]$ V

c) $\dfrac{V_m}{\pi} + \dfrac{V_m}{2}\operatorname{sen}\omega_o t +$

$$\frac{2V_m}{\pi}\sum_{n=2,4,6,\cdots}^{\infty}\frac{1}{1 - n^2}\cos n\omega_o t \text{ V}$$

16.3 $\dfrac{300}{\pi} + 50\cos\omega_o t -$

$$\frac{600}{\pi}\sum_{n=2,4,6}^{\infty}\frac{\cos(n\pi/2)\cos(n\omega_o t)}{(n^2 - 1)} \text{ V}$$

16.10 **a)** 100 Hz

b) não

c) sim

d) sim

e) sim

f) $a_v = 0$, $a_k = 0$ para todo k, $b_k = 0$ para k par,

$$b_k = \frac{80}{\pi^2 k^2}\operatorname{sen}\frac{k\pi}{4} \text{ para } k \text{ ímpar}$$

16.11 **a)** $\dfrac{\pi}{6}$ rad/s

b) não

c) sim

d) não

16.18 **a)** $\sum_{n=1,3,5}^{\infty} A_n \cos(n\omega_o t - \theta_n)$ onde

$$A_k \angle -\theta_k = \frac{0{,}756}{k}\left(\frac{2}{\pi k} - j1\right) \text{ mV, para } k \text{ ímpar}$$

b) 888,92 mV

16.27 214,66 cos (2.000t – 26,57°) + 44,38 cos (6.000t + 123,69°) + 17,83 cos(10.000t – 68,20°) V

16.28 **a)** 839,82 cos(10.000t – 1,19°) + 278,78 cos(30.000t + 174,64°) + 118,74 cos(70.000t – 171,70°) V

b) A 5ª harmônica em 50 krad/s é eliminada pelo filtro rejeita-faixa cuja freqüência central é 50 krad/s.

16.32 **a)** 287,06 W

b) 300 W

c) –4,31%

16.33 41,52 mW

16.36 **a)** 74,5356 V(ef)

b) 74,5306 V(ef)

16.37 **a)** 77,9578 V(ef)

b) –2,55%

c) 46,1880 V(ef), –0,0156%

16.44 $C_0 = \frac{I_m}{4}$,

$$C_n = \frac{I_m}{n^2\pi^2}[2\cos(n\pi/2) + n\pi \operatorname{sen}(n\pi/2) - 2],$$

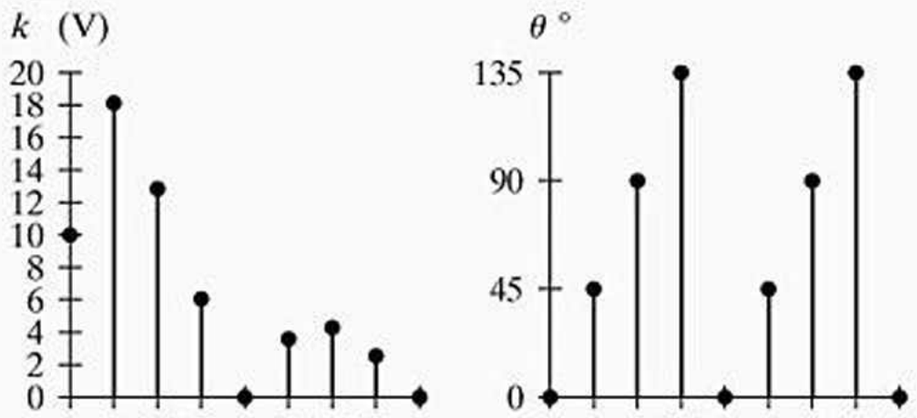
$n = \pm 1, \pm 2, \cdots$

16.45 **a)** 4.000 W

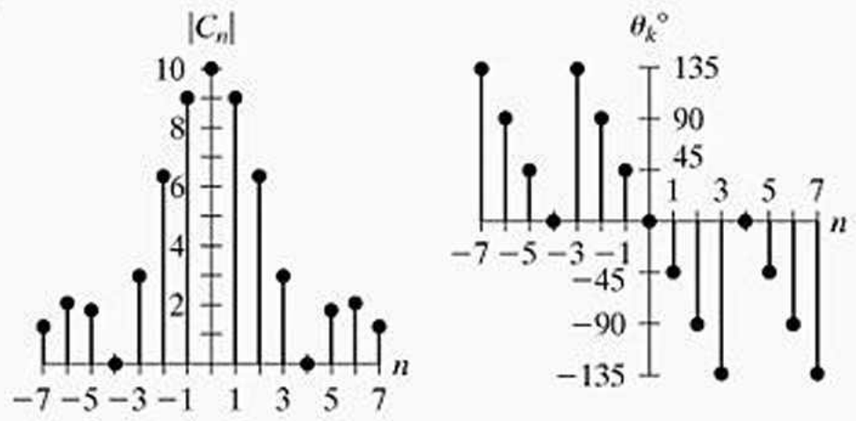
b) 7,72 A

c) –10,57%

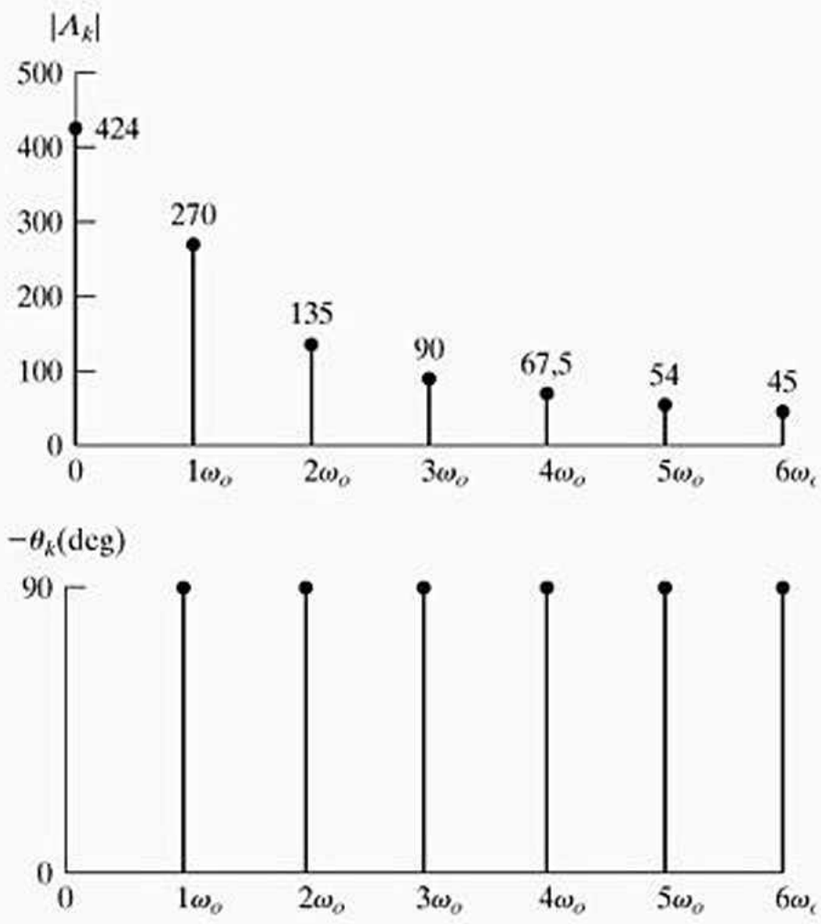
16.48 **a)**



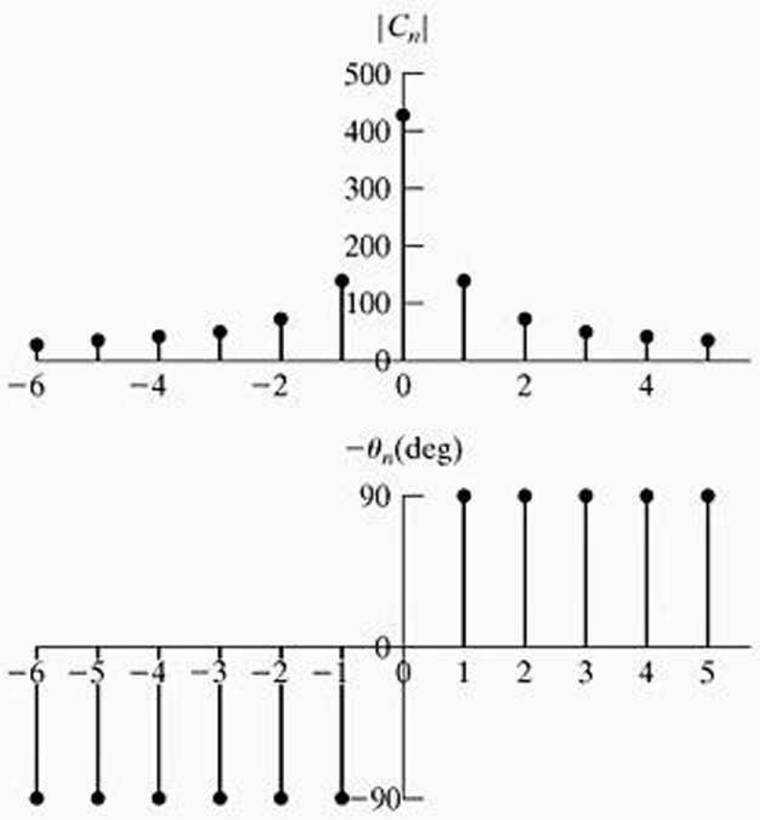
b)



16.49 **a)**



b)

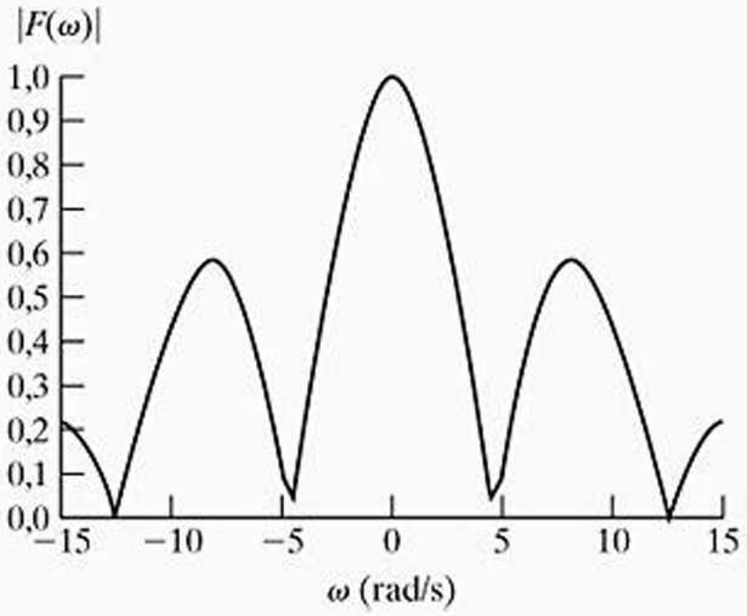


Capítulo 17

17.2 **a)** $\frac{2A}{\omega^2\tau}\left\{2\cos\frac{\omega\tau}{2} + \omega\tau \operatorname{sen}\frac{\omega\tau}{2} - 2\right\}$

b) $\frac{A\tau}{2}$

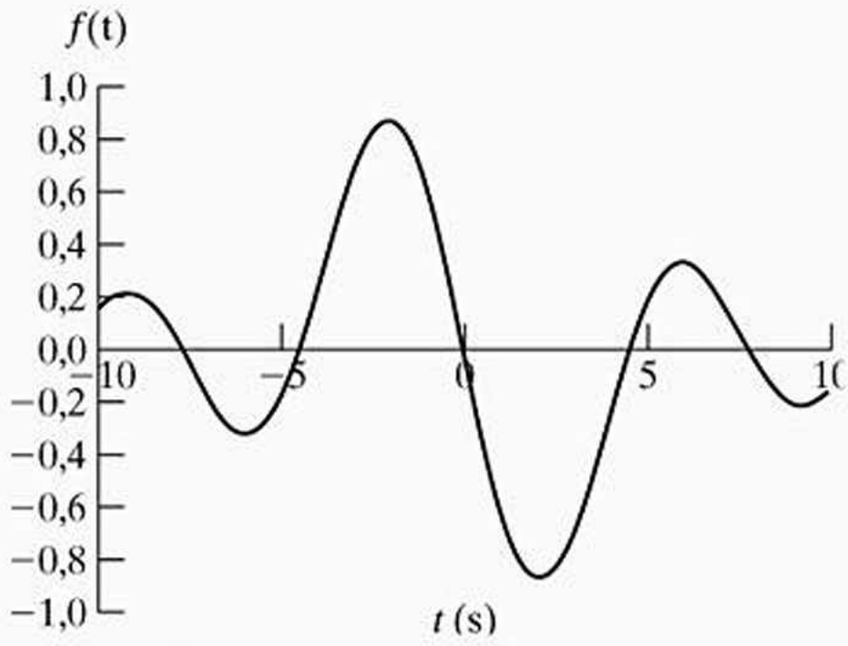
c)



17.3 **a)** $\frac{A}{\pi\omega_o t^2}[\omega_o t\cos(\omega_o t/2) - 2\,\text{sen}(\omega_o t/2)]$

b) 0

c)



17.4 **a)** $\frac{2(a^2-\omega^2)}{(a^2+\omega^2)^2}$

b) $j48a\omega\frac{(a^2-\omega^2)}{(a^2+\omega^2)^4}$

c) $\frac{a}{a^2+(\omega-\omega_o)^2}+\frac{a}{a^2+(\omega+\omega_o)^2}$

d) $\frac{\omega-\omega_o}{a^2+(\omega-\omega_o)^2}+\frac{\omega+\omega_o}{a^2+(\omega+\omega_o)^2}$

e) $e^{-j\omega t_o}$

17.19 **a)** $\frac{\tau}{2}\cdot\frac{\text{sen}[(\omega+\omega_o)\tau/2]}{(\omega+\omega_o)(\tau/2)}+\frac{\tau}{2}\cdot\frac{\text{sen}[(\omega-\omega_o)\tau/2]}{(\omega-\omega_o)(\tau/2)}$

b) $F(\omega)\rightarrow\pi[\delta(\omega-\omega_o)+\delta(\omega+\omega_o)]$

17.22 **a)** $20\text{sgn}(t) - 40e^{-50t}u(t)$ V

b) Sim, verifique as condições ideais e valores finais

17.28 **a)** $5e^{5t}u(-t) + (12{,}5e^{-t} - 7{,}5e^{-5t})u(t)$ V

b) 5 V

c) 5 V

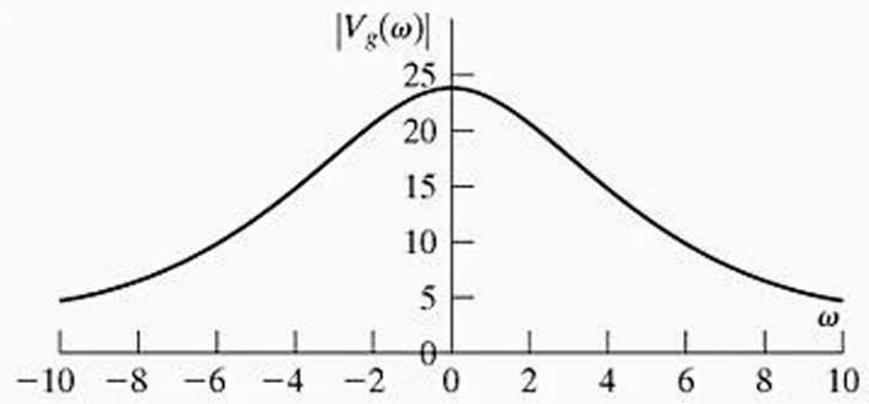
d) $(12{,}5e^{-t} - 7{,}5e^{-5t})u(t)$ V

e) Sim

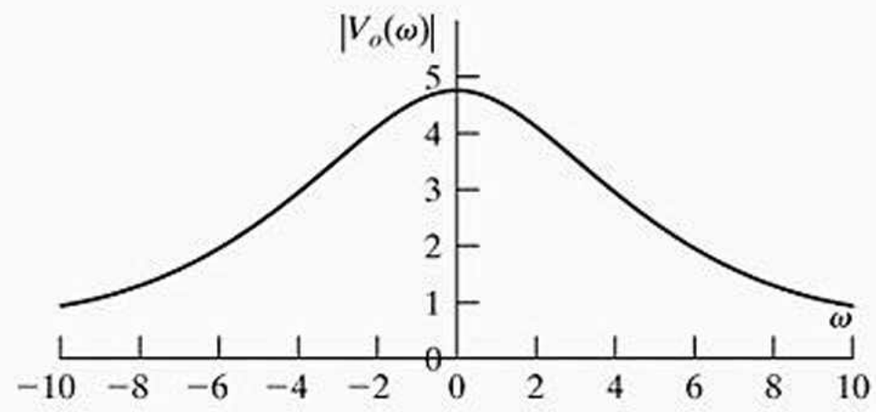
17.32 $166{,}67\cos(2.500t + 90°)$ mA

17.39 **a)** $15e^{-5t} - 5e^{-25t}]u(t) + 10e^{5t}u(-t)$ V

b)



c)



d) 720 J

e) 28 J

f) 95,95%

g) 96,93%

Capítulo 18

18.2 $z_{11} = 25\ \Omega;\ z_{12} = 20\ \Omega;\ z_{21} = 20\ \Omega;\ z_{22} = 80\ \Omega$

18.4 $z_{11} = 20\ \Omega;\ z_{12} = 18\ \Omega;\ z_{21} = 18\ \Omega;\ z_{22} = 22\ \Omega$

18.5 $b_{11} = 500;\ b_{12} = 2\ \text{M}\Omega;\ b_{21} = 20\ \text{mS};\ b_{22} = 50$

18.11 $h_{11} = 1.000\ \Omega;\ h_{12} = 1\times10^{-4};\ h_{21} = 40;$
$h_{22} = 20\times10^{-6}$ S

18.12 **a)** $a_{11} = -4\times10^{-4};\ a_{12} = -25\ \Omega;$
$a_{21} = -5\times10^{-7}$ S; $a_{22} = -0{,}025$

b) $a_{11} = -4\times10^{-4};\ a_{12} = -25\ \Omega;$
$a_{21} = -5\times10^{-7}$ S; $a_{22} = -0{,}025$

18.30 15,625

18.32 **a)** $28\angle 180°$ V(ef)

b) 11,20 mW

c) 2,88 μW

18.37 7,5 W

18.38 3,88 V

Índice remissivo

A

Admitância, susceptância e, 242
Amp op, *veja* Amplificador operacional (amp op)
Amperímetro de d'Arsonval, 47-48
Amperímetros, 46-48
Amplificador operacional (amp op), 109-130, 417-420, 420-422, 422-434
  circuito amplificador diferencial, 116-119
  circuito amplificador inversor, 114-115, 119
  circuito amplificador não-inversor, 116, 120
  circuito amplificador somador, 115
  correntes, 111-113
  encapsulamento dual em linha (DIP), 110
  extensômetros, 109-110, 121
  filtros, 417-434
  filtros Butterworth, 428-434
  filtros de ordem superior, 426-434
  filtros idênticos em cascata, 426-428
  filtros passa-altas, 419-420
  filtros passa-baixas, 417-419
  filtros passa-faixa, 422-424
  filtros rejeita-faixa, 424-426
  modelo realista para, 119-120
  mudança de escala, utilização no projeto de filtros, 420-421
  tensões, 111-113
  terminais, 110
Amplificadores, 109-130, 181-184, 218-220
  integradores, 181-184
  operacionais, 109-130
Amplificadores-integradores, 181-184, 218-220
  análise de, 182-183, 218-220
  chaveamento seqüencial, análise de, com, 183
  circuitos de primeira ordem e, 181-184
  circuitos de segunda ordem e, 218-220
  ligações em cascata, 218-219
  resistores de realimentação, com, 219-220
Análise, *veja* Análise de circuitos; Transformada de Laplace; Análise de regime permanente senoidal
Análise de circuitos, 6-7, 28-30, 64-108, 119-120, 347-387, 483-485
  análise de sensibilidade, 65, 93-94
  circuito amplificador, 29
  circuito amplificador inversor usando o modelo mais realista de amp op, 119
  circuito amplificador não-inversor usando o modelo mais realista de amp op, 120
  circuitos com resistores reais, 64, 93-94
  circuitos planares, 65
  componentes ideais de circuito, 6
  equações simultâneas, 66
  equivalente de Norton, 83-85
  equivalente de Thévenin, 83-89
  fontes dependentes, 28-30
  lei de Ohm aplicada a, 28-29
  leis de Kirchhoff aplicadas a, 28-29
  máxima transferência de potência, 89-90
  método das correntes de malha, 72-80
  método das tensões de nó, 67-72, 78-80
  modelo conceitual para, 6
  modelos matemáticos, utilização de, 6
  protótipo físico, 6
  série de Fourier e, 457-459
  superposição, 90-92
  técnicas de, 64-108
  tensão desconhecida, determinar, 28
  terminologia para, 65-67
  transformações de fonte, 81-83, 85
  transformada de Fourier, utilização, 483-485
  transformada de Laplace em, 347-387
  visão geral de, 6-7
Análise de regime permanente senoidal, 230-300
  cálculos de potência, 272-300
  circuito de distribuição residencial, 230-231, 259
  circuito equivalente de Norton, 245
  circuito equivalente de Thévenin, 245, 247-248
  diagramas fasoriais, 257-259
  domínio da freqüência, 235, 237-240, 243-245
  elementos de circuito passivo, 237-239
  fasor, 234-237
  fonte, 231-233
  impedância, 239-245
  leis de Kirchhoff, 239-240
  método das correntes de malha, 249-250
  método das tensões de nó, 248-249
  relações corrente-tensão (V-I), 237-238
  resposta, 233-234
  transformações de fonte, 245-248
  transformações Δ-Y, 243-245
  transformador, 250-257
  transformador ideal, 253-257
Análise de sensibilidade, 65, 93-94
Análise qualitativa, em série, 395-396
Análise quantitativa, em série, 396-398

Ângulo de fase, definição, 231
Atenuação, definição, 388
Auto-indutância, 145-148

C

Caixa preta, definição, 39
Cálculos de potência, 272-300, 309-313, 460-461
  carga equilibrada ligada em Δ, 310-311
  carga equilibrada ligada em Y, 309-311
  circuitos trifásicos, 309-313
  eletrodomésticos de aquecimento, 272, 289-290
  funções periódicas, cálculos de potência média de, 460-461
  máxima transferência de potência, 285-289
  potência complexa, 279-281, 310
  potência instantânea, 273, 311
  potência média, 274-277, 281, 309-310, 460-461
  potência reativa, 274-277, 281
  regime permanente senoidal, 272-300
  relações V-I, 280-281
  valor eficaz, 277-278
Caminho, definição, 65
Caminho fechado, definição, 24
Capacitância, definição, 131
Capacitor, 137-142, 151-152, 216, 349, 369-371
  combinações de indutância e capacitância em série e em paralelo, 140-142
  corrente de deslocamento, 137
  corrente do, 137
  energia para um, 138
  no domínio da freqüência, 349
  operação de chaveamento, 369-372
  potência e energia para um, 138
  tensão no, 137, 216
Carga equilibrada ligada em Δ, cálculos de potência em uma, 310-311
Cargas equilibradas ligadas em Y, 309-311
Centelhamento, 132
Chaveamento seqüencial, 177-180
Circuito aberto, 21-22
Circuito amplificador, 29, 71-72, 77-78, 88-89
  análise do, pelo método das correntes de malha, 77-78
  análise do, pelo método das tensões de nó, 71-72
  lei de Ohm em um, 29
  leis de Kirchhoff em um, 29
  utilização do equivalente de Thévenin no, 88-89
Circuito amplificador diferencial, 116-119
  fator de rejeição de modo comum (FRMC), 118-119
  medição de desempenho, 118-119
  tensões de entrada de modo diferencial, 117-118
  tensões de modo comum, 117-118
Circuito amplificador inversor, 114-115, 119
Circuito amplificador não-inversor, 116, 120
  análise de circuitos de, 83-86
  circuito equivalente de Norton, 83-86, 245
  definição, 85
  transformações de fonte, como usar, 85
  versão no domínio da freqüência, 245
Circuito amplificador somador, 115
Circuito da ponte de Wheatstone, 49-50
Circuito de
  distribuição residencial, 230, 259
  ignição, 202, 220-222
  luz intermitente, 161, 184-185
  múltiplas malhas, resposta ao degrau de um, 354-355
Circuito divisor de
  corrente, 43
  tensão, 42-44
Circuito Y-Y, 303-307
  análise de, 303-307
  circuito monofásico equivalente, 304
  condições para um circuito trifásico equilibrado, 304
Circuito Y-Δ, análise de, 307-309
Circuitos, 1-37, 38-108, 160-229, 274-275, 301-323, 388-447, 495-513. *Veja também* Análise de circuitos; Elementos básicos ideais de circuito; Modelos; Amplificador operacional
  abertos, 21-22
  amplificador, 29, 71-72, 77, 88-89
  caixa preta, 39
  corrente e, 7, 8, 16-18, 24, 25
  curto, 22
  de seleção de freqüência, 388-415
  desembaçador de vidro traseiro, 38, 52-53
  divisor de corrente, 43
  divisores de tensão, 42-44
  divisores de tensão e divisores de corrente, 42-46
  elementos básicos ideais, 7-8, 15-37
  elementos de, ligados em paralelo, 39-40
  elétricos, definição, 3
  energia e, 9-10
  engenharia elétrica e, 2-5
  equivalente Δ-Y, 50-52
  equivalente π-T, 50-51
  filtros ativos, 416-447
  fonte dependente em, 28-30
  fontes, 16-18
  lei de Ohm, 18-21, 28-30
  leis de Kirchhoff, 23-30
  medição de tensão e corrente, 46-48
  modelo, construção de um, 6, 21-23
  planares, 65
  ponte de Wheatstone, 49-50
  potência e, 9-10
  primeira ordem, 160-200
  puramente capacitivos, potência em, 275
  puramente indutivos, potência em, 274
  puramente resistivos, potência em, 274
  quadripolos, 495-513
  resistência elétrica, 18-21

resistores e, 19, 39
resistores em paralelo, 39-41
resistores em série, 39
resistores reais, 64, 93-94
resposta de, 160-229
segunda ordem, 201-229
segurança elétrica, 15, 30-31
Sistema Internacional de Unidades (SI), para, 5-6
tensão e, 7, 16-18
terminologia para, 65-67
trifásicos equilibrados, 301-323
variáveis de, 1-14
Circuitos capacitivos, 275
Circuitos de filtro ativo, *veja* Circuitos de seleção de freqüências
Circuitos de filtro passivo, *veja* Circuitos de seleção de freqüências
Circuitos de primeira ordem, 160-200
amplificadores-integradores, análise de, 181-184
chaveamento seqüencial, 177-180
circuitos resistor-capacitor (*RC*), 160, 166-168, 172-177, 179-181
circuitos resistor-indutor (*RL*), 160-166, 168-179
definição, 160, 161
resposta de, 160-200
resposta indefinidamente crescente de, 180-181
resposta natural de, 160-168, 173-177
solução geral para, 173-178
Circuitos de segunda ordem, 201-229
amplificadores-integradores, 181-184, 218-220
circuito de ignição, 202, 220-222
circuitos resistor-indutor-capacitor (*RLC*), 201-229
definição, 202
resposta a um degrau de, 211-217
resposta natural de, 202-211, 215-217
respostas de tensão de circuitos *RLC* em paralelo, 205-211
RLC em paralelo, 201, 202-215
RLC em série, 201, 215-217
solução geral para respostas de, 202-204
Circuitos de seleção de freqüências, 388-447
atenuação, 388
circuitos de filtros ativos, 416-447
circuitos de filtros passivos, 388-415
controle de volume de graves, 416, 437-438
definição, 388
de telefone de teclas, 388, 409
diagrama de blocos, 422
diagramas de Bode, 417-420
faixa de passagem, 389
faixa de rejeição, 389
filtros, 388, 389
filtros amp op, 417-434
filtros Butterworth, 428-434
filtros de banda estreita, 434-437
filtros de banda larga, 422-426, 434
filtros de primeira ordem, 417-420
filtros idênticos em cascata, 426-428
filtros passa-altas, 389-390, 395-398, 419-420, 433-434
filtros passa-baixas, 389, 390-395, 417-419, 428-433
filtros passa-faixa, 390, 399-406, 422-424, 434-435
filtros rejeita-faixa, 390, 406-409, 424-426, 433, 436-437
freqüência de corte, 389, 391-393, 401, 403
função de transferência, 394, 398, 405, 408, 429
gráfico de amplitude, 389
gráfico de fase, 389
gráficos de resposta de freqüência, 389, 417-420
mudança de escala, 420-422
ordem superior, 426-434
resposta de freqüência, 388
Circuitos de telefone de teclas, 388, 409
Circuitos elétricos, *veja* Circuitos
Circuitos em série como filtros, 392-398
cálculo da expressão da tensão, 166
constante de tempo, 166
resposta a um degrau, 172-173
resposta indefinidamente crescente, 180-181
Circuitos equivalentes de Thévenin, 83-89, 245-248, 355-356
análise de circuitos de, 83-86
análise de regime permanente senoidal de, 248
circuito amplificador, utilização em, 88-89
como achar, 84-85
definição, 84
fontes independentes, derivação com, 87-88
transformações de fonte, usadas para derivar, 85-86, 246
transformada de Laplace, utilização da, 355-356
utilização no domínio da freqüência, 355-356
versão no domínio da freqüência, 245, 247-248
Circuitos equivalentes π-T, 50-52
Circuitos planares, 65
Circuitos puramente indutivos, 274
resistivos, 274
Circuitos quadripolos, 502-506
Circuitos *RC*, *veja* Circuitos resistor-capacitor (*RC*)
Circuitos resistor-capacitor (*RC*), 160, 166-168, 172-177, 179-181, 350-351, 393-398
definição, 160
filtros passa-altas, análise de, 395-396
filtros passa-baixas, análise de, 392-393
freqüência de corte, 393
solução geral para respostas de, 173-177
transformada de Laplace, utilização para análise de, 350-351
Circuitos resistor-indutor (*RL*), 160-165, 168-171, 173-179, 390-392